

УДК: 519.214.4, 531.19

Является ли тик элементарным прыжком в схеме случайных блужданий на фондовом рынке?

М. Ю. Романовский^{1,a}, П. В. Видов¹, В. А. Пыркин²

¹ Учреждение Российской академии наук Институт общей физики им. А. М. Прохорова РАН,
119991, г. Москва, ул. Вавилова, 38

² Государственное учебно-научное учреждение
Физический факультет Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова
119991, ГСП-1, г. Москва, Ленинские горы, МГУ, д. 1., стр. 2

E-mail: ^a slon@kapella.gpi.ru

Получено 25 мая 2010 г.

В работе экспериментально исследовалось среднее время между элементарными прыжками доходности различных акций на российском фондовом рынке. Исходя из скейлинга плотности распределения доходностей на разных временных масштабах, удалось показать, что элементарным прыжком в модели случайных блужданий для доходностей финансовых инструментов является единичное изменение цены (тик), соответствующее совершению одной сделки с инструментом на фондовой бирже.

Ключевые слова: случайные блуждания, флуктуации доходности, распределение Леви

Is a tick an elementary jump in a random walks scheme on the stock market?

M. Yu. Romanovsky¹, P. V. Vidov¹, V. A. Pyrkin²

¹ A. M. Prokhorov General physics Institute, Vavilov str. 38, Moscow, Russia, 119991

² M. V. Lomonosov Moscow State University, Faculty of Physics, Leninskie Gory, Moscow, Russia, 119991

Abstract. – In this paper average times between elementary jumps of stock returns on the Russian market were experimentally studied. Considering the scaling of the probability density function of stock returns on different time intervals it is shown that an elementary jump in the random walks scheme for financial instrument returns is a unit price change (tick) that corresponds to a single deal on the stock market.

Keywords: random walks, return fluctuations, Levy distribution

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2010, vol. 2, no. 2, pp. 219–223 (Russian).

Введение

В последние годы большое распространение получило моделирование процессов, наблюдаемых в финансах при помощи стохастических процессов с независимыми приращениями – так называемых случайных блужданий, введенных Пирсоном [Pearson, 1905], и в частности блужданий Леви. Усеченные блуждания Леви очевидным образом наблюдаются для флуктуаций различных величин на фондовом рынке, в частности флуктуаций доходности акций, индексов и других инструментов.

Мантенья и Стенли, в частности, подробно исследовали поведение индекса S&P500 и показали [Gopikrishnan et al., 1998], что распределение плотности вероятности изменений индекса $Y(t)$:

$$Z_{\Delta t} \equiv Y(t + \Delta t) - Y(t) \quad (1)$$

на временном интервале Δt в центральной части (вплоть до 6 стандартных отклонений) совпадает с распределением Леви, а при больших флуктуациях проходит ниже графика этого распределения на 1–2 порядка величины и соответствует степенному закону с показателем степени $\alpha \approx 3$. Чаще в исследованиях встречается другая величина – доходность активов [Gopikrishnan et al., 1999], определяемая как:

$$S_{\Delta t} = \ln Y(t + \Delta t) - \ln Y(t) = \ln \frac{Y(t + \Delta t)}{Y(t)}. \quad (2)$$

Поведение данной величины сходно с поведением (1). Аналогичные исследования проводились и для индексов японской и гонконгской бирж – NIKKEI225 и Hang Seng, соответственно [Gopikrishnan et al., 1999].

Схема решения задачи о случайных блужданиях хорошо известна [Chandrasekhar, 1943]. В работе [Романовский, Романовский, 2007] предложен закон единичного прыжка для данной схемы вида:

$$\tau(r_i) = \frac{C_1}{(z^2 + r_i^2)^\beta}, \quad (3)$$

где C_1 – нормировочная константа, а z – величина, представляющая собой характерный масштаб прыжка. Такой вид закона единичного прыжка позволяет рассмотреть весь класс устойчивых распределений. Наилучшей моделью случайных блужданий для доходностей финансовых активов является схема с законом прыжков (3) при $\beta \approx 2$. Это связано с тем, что распределение доходностей на фондовом рынке должно иметь как минимум второй момент, что обусловлено конечностью денег в экономике, и, кроме того, распределение флуктуаций на рынке должно иметь ту же асимптотику, что и закон единичного прыжка. То есть возникновение больших флуктуаций должно быть возможно за один прыжок.

Как правило, экспериментально исследуются не пошаговые флуктуации, а флуктуации доходности во времени, то есть для формирования массива данных выделяется временной интервал фиксации цены. Такой подход может влиять на функцию распределения, так как за один и тот же промежуток времени «частица» может совершить как огромное число прыжков N , так и ни одного прыжка вовсе. Если ввести функцию плотности распределения прыжков за определенное время $p(N, t)$, то исследуемая плотность распределения $W(R, t)$ выражается [Ebeling, Sokolov, 2005]

$$W(R, t) = \int_0^{N \rightarrow \infty} W(N, R) p(N, t) dN. \quad (4)$$

Такая схема называется случайными блужданиями с непрерывным временем (CTRW) [Scher, Montroll, 1975]. Таким образом, в схеме случайных блужданий надо заменить число прыжков N на величину, пропорциональную временному интервалу, на котором эти блуждания наблюдаются, т. е. $N = ct$ где c – средняя частота прыжков. Встает вопрос о величине c . Для наиболее ликвидных финансовых активов количество транзакций в день превышает 1 000. Таким образом, в пятиминутном интервале в среднем происходит порядка 10 тиков. Возникает, однако, вопрос, является ли единичное изменение цены (тик) элементарным прыжком в схеме случайного блуждания на фондовом рынке?

Результаты

В данной работе мы попытались определить, является ли элементарное изменение цены на фондовом рынке (тик) элементарным прыжком в схеме случайных блужданий, исходя из скейлинга средних квадратичных доходностей акций на российском рынке на различных временных интервалах. Объектом наших исследований стали наиболее ликвидные акции, торгуемые на бирже ММВБ. К ним относятся: акции Газпрома, Сбербанка, ГМК Норильский никель и Сургутнефтегаза.

Исследования охватили промежуток с начала 2008 года по третий квартал 2009 года. В силу большого объема тиковых данных (количество тиков по наиболее ликвидным акциям за один день может достигать 10^5) нам пришлось отказаться от сплошного измерения средней тиковой доходности за весь период. Для расчета средней тиковой доходности были выбраны 15-е числа или последние рабочие дни перед ними нескольких месяцев. Безусловно, такая неполная выборка значений приводит к возникновению заметной ошибки, однако для целей данной работы такая точность представляется нам допустимой.

Для исследования скейлинга величины средней доходности акции в зависимости от интервала фиксации данной величины были рассчитаны средние квадратичные доходности наиболее ликвидных акций российского рынка на временных интервалах: 1 мин, 10 мин, 60 мин и 510 мин (приблизительно соответствует одному торговому дню). Зависимость средней квадратичной доходности от интервала времени имеет степенной вид и хорошо аппроксимируется ($R^2 = 0.99$) законом вида:

$$\langle Y_T \rangle \sim Ct^\gamma, \quad (5)$$

где $\gamma \approx \frac{1}{2}$, а C – константа, вычисляемая для каждого исследуемого актива.

Если предположить, что тик является элементарным прыжком в схеме случайных блужданий, то скейлинг должен сохраняться до масштаба тиков. Исходя из зависимости (5), мы можем сделать предположение о характерном минимальном масштабе стохастического процесса, иначе говоря, определить характерный размер одного прыжка. Очевидно, что если экстраполировать степенную зависимость до величины доходности, соответствующей средней доходности одного тика (пунктирная линия на рис. 1), соответствующая точка на оси абсцисс будет отражать теоретическое среднее время между двумя тиками при условии наличия скейлинга до этих масштабов. Мы провели исследование фактических значений временных интервалов между тиками для ряда акций на российском фондовом рынке и сравнили их с теоретическими значениями. Результаты приведены в таблицах 1–4. Несмотря на некоторые отличия теоретических и экспериментальных значений, которые, по всей видимости, связаны с использованием неполной базы фиксаций тиков, можно утверждать, что теоретические и экспериментальные значения совпадают с достаточной точностью.

Табл. 1. Значения средней квадратичной тиковой доходности, теоретического и экспериментального времени между элементарными прыжками

Тикер акции	Дата: 15.01.2008			Дата: 14.03.2008		
	Средняя доходность тиков	Теоретическое время, с	Фактическое время, с	Средняя доходность тиков	Теоретическое время, с	Фактическое время, с
GAZP	0.00013	0.94	0.62	0.00018	1.86	0.58
SBER	0.00022	1.37	1.49	0.00032	3.12	0.66
GMKN	0.00023	1.58	1.18	0.00028	2.51	1.66
SNGS	0.00035	2.55	4.56	0.00046	4.74	3.01

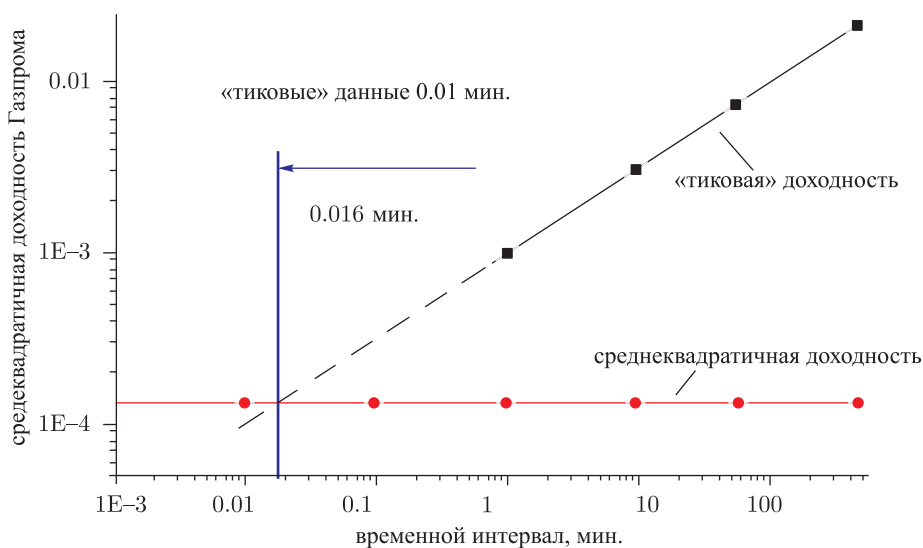


Рис. 1. Зависимость средней квадратичной доходности акций ОАО «Газпром» от интервала фиксации значений для 1-го квартала 2008 года (сплошная наклонная линия). Экстраполяция данной величины (пунктирная линия). Горизонтальная линия на графике соответствует уровню средней тиковой доходности. Вертикальная линия – теоретическое значение среднего времени между двумя тиками

Табл. 2. Значения средней тиковой доходности, теоретического и экспериментального времени между прыжками

Тикер акции	Дата: 11.06.2008			Дата: 15.09.2008		
	Средняя доходность тиков	Теоретическое время, с	Фактическое время, с	Средняя доходность тиков	Теоретическое время, с	Фактическое время, с
GAZP	0.00015	1.15	0.97	0.00048	1.04	0.46
SBER	0.00023	1.48	1.55	0.00068	1.16	0.72
GMKN	0.00026	2.13	1.65	0.00087	1.68	0.82
SNGS	0.00037	2.90	3.72	0.00093	3.64	1.62

Табл. 3. Значения средней тиковой доходности, теоретического и экспериментального времени между прыжками

Тикер акции	Дата: 15.12.2008			Дата: 13.03.2009		
	Средняя доходность тиков	Теоретическое время, с	Фактическое время, с	Средняя доходность тиков	Теоретическое время, с	Фактическое время, с
GAZP	0.00020	0.18	0.37	0.00022	1.26	0.29
SBER	0.00036	0.32	0.51	0.00037	1.62	0.44
GMKN	0.00059	0.72	1.51	0.00049	2.89	0.71
SNGS	0.00074	2.31	2.99	0.00068	5.07	1.33

Табл. 4. Значения средней тиковой доходности, теоретического и экспериментального времени между прыжками

Тикер акции	Дата: 15.09.2009		
	Средняя доходность тиков	Теоретическое время, с	Фактическое время, с
GAZP	0.00022	1.37	0.54
SBER	0.00027	0.88	0.34
GMKN	0.00051	3.10	1.11
SNGS	0.00058	3.67	3.18

Заключение

В работе исследовалось время между элементарными прыжками доходности активов на российском фондовом рынке. Исходя из скейлинга средней доходности активов на различных масштабах фиксации, удалось определить теоретическое значение времени между элементарными прыжками для наиболее ликвидных российских акций. Фактически измеренная величина времени между элементарными прыжками для выбранных активов с достаточной точностью совпала с теоретической величиной. Таким образом, можно утверждать, что элементарным прыжком в схеме случайных блужданий на фондовом рынке является именно единичное изменение цены (тик).

Список литературы

- Chandrasekhar S.* Stochastic problems in physics and astronomy. // *Rev. Mod. Phys.* 1943. V. 15. P. 1.
- Ebeling W., Sokolov I. M.* . Statistical Thermodynamics and Statistic Theory of Nonequilibrium Systems. Singapore: World Scientific Publishing. 2005.
- Gopikrishnan P., Meyer M., Amaral L. A. N., and Stanley H. E.* Inverse cubic law for the distribution of stock price variations // *Eur. Phys. J. B.* 1998. V. 3. P. 139–140.
- Gopikrishnan P., Plerou V., N. Amaral L. A., Meyer M., Stanley H. E.* *Phys. Rev. E.* 1999. V. 60. P. 5305.
- Pearson K.* *Nature.* 1905. V. 77. P. 294.
- Scher H., Montroll E. W.* *Phys. Rev. B.* 1975. V. 12 (6). P. 2455.
- Романовский М. Ю., Романовский Ю. М.* Введение в эконофизику. Статистические и динамические модели. М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2007. 280 с.