

УДК: 514.88+535.31

Траектории лучей, биномиальные коэффициенты нового вида и двоичная система счисления

А. В. Юркин

Институт математических проблем биологии РАН
Россия, 142290, Московская область, Пушкино, ул. Институтская, д. 4

E-mail: alvl1yurkin@rambler.ru

Получено 27 июня 2010 г.

Предложен новый алгоритм построения нелинейного арифметического треугольника на основе численного моделирования и двоичной системы счисления. Показано, что числа, заполняющие нелинейный арифметический треугольник, могут являться биномиальными коэффициентами нового вида. Проведена аналогия с биномиальными коэффициентами, вычисляемыми с помощью треугольника Паскаля. Дана геометрическая интерпретация биномов различных видов при рассмотрении ветвящихся систем лучей.

Ключевые слова: нелинейный арифметический треугольник, двоичная система счисления, биномиальные коэффициенты, ветвящаяся система лучей, лазеры

Ray trajectories, binomial coefficients of a new type, and the binary system

A. V. Yurkin

*The Institute of Mathematical Problems of Biology RAS
IMPB RAS, 4, Institutskaja str., 142290, Pushchino, Moscow Region, Russia*

Abstract. — The paper describes a new algorithm of construction of the nonlinear arithmetic triangle on the basis of numerical simulation and the binary system. It demonstrates that the numbers that fill the nonlinear arithmetic triangle may be binomial coefficients of a new type. An analogy has been drawn with the binomial coefficients calculated with the use of the Pascal triangle. The paper provides a geometrical interpretation of binomials of different types in considering the branching systems of rays.

Keywords: nonlinear arithmetic triangle, binary system, binomial coefficients, branching systems of rays, lasers

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2010, vol. 2, no. 4, pp. 359–367 (Russian).

Введение

Обычно лазерные генераторы состоят из активной среды, усиливающей свет, и резонатора, состоящего из двух плоскопараллельных зеркал: одного зеркала со 100 % отражением, другого – полупрозрачного [Ананьев, 1990].

В работах [Юркин, 1990; 1991] было предложено зеркало нового типа – многолепестковое. Такие зеркала состоят из многих полупрозрачных плоских пластин, наклоненных к оси лазера на малый угол γ и развернутых симметрично вокруг оси. Луч света отражается конически от многолепесткового зеркала в виде полого конуса, точнее, в виде множества линий, расположенных на боковой поверхности конуса. Для наших расчетов принимается, что сами зеркала являются тонкими, а все лучи наклонены под малыми углами к оси – т. е. мы используем для расчетов гауссово, или параксиальное приближение [Бюллер, 1989; Ландсберг, 1976]. Такой подход широко используется в расчетах оптических приборов, например, телескопов. В плоском (двумерном) случае луч, отражаясь от нашего зеркала, расщепляется надвое.

Для описания процессов в лазерах, оснащенных резонаторами, обычно используются волновые или геометрооптические (лучевые) модели и эквивалентные световодные схемы [Ананьев, 1990]. Отметим, что световая энергия, выходящая из лазера, пропорциональна числу лучей.

В лазере, оснащенный многолепестковым зеркалом, генерируются все частоты, возбуждаемые в активной среде, в отличие от лазера, оснащенного плоскопараллельными зеркалами, в котором генерация происходит только на резонансных частотах. Поэтому в работе [Юркин, 1974] мы назвали лазерный резонатор, оснащенный многолепестковым зеркалом – квазирезонатором.

В работе [Yurkin, 1995] была предложена наглядная геометрооптическая модель на основе рассмотрения биномиального распределения для описания распространения света в лазере, снабженном многолепестковым зеркалом.

В работе [Юркин, 2008] были описаны нелинейная арифметическая пирамида и нелинейные арифметические треугольники и были предложены рекуррентные формулы для построения нелинейной арифметической пирамиды и нелинейных арифметических треугольников. В этой же работе показана физическая их интерпретация – описание процесса распространения света в лазерах, оснащенных многолепестковым зеркалом, приведены примеры из комбинаторики.

В настоящей работе мы исследуем нелинейный арифметический треугольник более подробно. Нами предложен новый алгоритм построения такого нелинейного арифметического треугольника, показана связь предложенного алгоритма, двоичной системы счисления и биномиальных коэффициентов различных видов. Дана геометрическая интерпретация биномов различных видов при рассмотрении траекторий лучей для двумерного случая.

1. Треугольник Паскаля и табличный алгоритм вычисления биномиальных коэффициентов

1.1 Треугольник Паскаля

Известно [Кузьмин, 2000], что биномиальные коэффициенты $\binom{n}{p}$ можно вычислять с помощью двумерной числовой таблицы – арифметического треугольника Паскаля, в котором числа расположены построчно рядами (рис. 1):

Треугольник Паскаля строится в соответствии с рекуррентной формулой:

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}, \quad (1)$$

где n – степень бинома, а p – порядковый номер числа в горизонтальном ряду и $0 \leq p \leq n$.

		m	\rightarrow									
		0	1	2	3	4	5	6	7			
	3	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	k
\uparrow	2	0	0	1	1	0	0	1	1	2		\downarrow
l	1	0	1	0	1	0	1	0	1	3		
	Σ	0	1	1	2	1	2	2	3			
	$\binom{n}{p}$	1	2		3					1		

Рис. 3. Табличная запись чисел в двоичном виде (счисления), числа расположены в вертикальных столбцах в рамке, состоят из 0 и 1

Просуммируем числа (т. е. просуммируем последовательности нулей и единиц) в вертикальных столбцах (рис. 3) – их суммы Σ показаны в виде жирных цифр в первой строке под рамкой. Во второй строке под рамкой показано, насколько часто величины этих сумм встречаются: так, ноль встречается один раз, единица – три раза, двойка – три раза, тройка – один раз.

Эти числа (во второй строке под рамкой на рис. 3), 1, 3, 3, 1, равны биномиальным коэффициентам $\binom{n}{p}$, которые, как было показано выше, также можно вычислить с помощью выражения (1) для треугольника Паскаля, приведенного на рис. 1.

Если умножение коммутативно, то некоторые (подобные) члены многочлена (2) можно складывать в соответствии со значениями биномиальных коэффициентов $\binom{n}{p}$. В данном примере ($n=3$) – это члены $m=1,2,4$ и $m=3,5,6$, составляющие вертикальные столбцы 1, 2, 4 и 3, 5, 6 таблицы на рис. 2 (и в соответствии с таблицей на рис. 3); следовательно, в выражении (2) подобные члены это:

$$\begin{aligned}aab_{(1)} &= aba_{(2)} = baa_{(4)} = a^2b = A, \\abb_{(3)} &= bab_{(5)} = bba_{(6)} = b^2a = B.\end{aligned}\tag{3}$$

При возведении бинома (2) в куб, с учетом (3), имеем:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3A + 3B + b^3.\tag{4}$$

Числа, расположенные в горизонтальных рядах треугольника Паскаля (рис. 1), назовем биномиальными коэффициентами p -вида.

Таким образом, используя табличную запись (рис. 2, 3) в п. 1.2, мы получили наглядное изображение членов многочлена (рис. 2) и рассчитали биномиальные коэффициенты (рис. 3) без использования изображения треугольника Паскаля (рис. 1) или рекуррентной формулы (1). Используя описанный табличный алгоритм, мы также получили выражение для бинома (4) из выражения (2).

Пример 1.1. Числа в ряду (рис. 1) для $n=3$: 1, 3, 3, 1 являются биномиальными коэффициентами.

2. Нелинейный арифметический треугольник и алгоритм вычисления биномиальных коэффициентов нового вида

2.1. Нелинейный арифметический треугольник

В работе [Юркин, 2008] была описана другая двумерная числовая таблица – нелинейный арифметический треугольник, в котором числа $\begin{bmatrix} n \\ q \end{bmatrix}$ расположены послойно рядами (рис. 4).

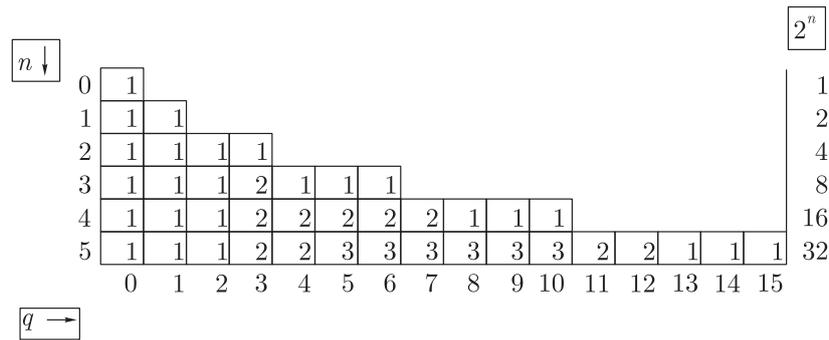


Рис. 4. Нелинейный арифметический треугольник, n – порядковый номер ряда, q – порядковый номер числа в ряду, в колонке справа – суммы чисел в ряду

Нелинейный арифметический треугольник строится в соответствии с формулой [Юркин, 2008]:

$$\begin{bmatrix} n \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 \\ q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n-1 \\ q-n \end{bmatrix}, \quad (5)$$

где n – порядковый номер ряда, q – порядковый номер числа в горизонтальном ряду (рис. 4) и $0 \leq q \leq n(n+1)/2$. Сумма коэффициентов для n -ряда, равная 2^n , приведена в колонке справа на рис. 4.

Выражение (5) соответствует известной формуле [Виленкин, 1969, гл. 4, формула (24)] разбиения чисел на слагаемые. Число $\begin{bmatrix} n \\ q \end{bmatrix}$ показывает, сколькими способами можно разбить число q на слагаемые, каждое из которых равно одному из чисел $1, 2, 3, \dots, n$, при этом порядок слагаемых не учитывается, а все слагаемые различны.

Пример 2.1. Число 3 можно разбить на слагаемые 1, 2, 3 двумя способами: $3 = 1 + 2$, $3 = 3$, т. е. для нашего случая, $n = 3$, $q = 3$, будет: $\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} = 2$ (рис. 4).

2.2. Табличный алгоритм вычисления биномиальных коэффициентов нового вида

Заменим в рис. 2 буквы a и b на числа 0 и l соответственно: т. е. в первой строке ($k=1$) вместо b у нас будут тройки ($l=3$), во второй ($k=2$) вместо b – двойки ($l=2$), в третьей – ($k=3$) вместо b – единицы ($l=1$) (рис. 5):

		$m \rightarrow$									
		0	1	2	3	4	5	6	7		
	3	0	0	0	0	3	3	3	3	1	k
\uparrow	2	0	0	2	2	0	0	2	2	2	\downarrow
	l	1	0	1	0	1	0	1	0	1	3
	Σ	0	1	2	3	3	4	5	6		
	$\begin{bmatrix} n \\ q \end{bmatrix}$	1	1	1	2		1	1	1		

Рис. 5. Табличная запись чисел в квазидвоичном виде, числа расположены в вертикальных столбцах в рамке, состоят из 0 и чисел l

Числа над таблицей (над рамкой) на рис. 5 соответствуют номеру m -столбца таблицы, а числа справа от рамки соответствуют номеру k -строки таблицы. Последовательность нулей и чисел l назовем записью чисел в квазидвоичном виде. Числа l показаны слева от рамки (рис. 5).

Просуммируем числа (рис. 5) в вертикальных столбцах – их суммы Σ показаны в виде жирных цифр в первой строке под рамкой (таблицей). Во второй строке под рамкой показано, насколько часто величины этих сумм встречаются: ноль встречается один раз, единица – один раз, двойка – один раз, тройка – два раза, четверка – один раз, пятерка – один раз, шестерка – один раз.

Числа во второй строке под рамкой – 1,1,1,2,1,1,1 – равны числам $\begin{bmatrix} n \\ q \end{bmatrix}$, расположенным в горизонтальном ряду для $n = 3$ нелинейного арифметического треугольника, приведенного на рис. 4.

Пример 2.2. Сумма чисел, расположенных в вертикальном столбце $m = 3$ (рис. 5), равна: $1 + 2 + 0 = 3$. Сумма чисел, расположенных в вертикальном столбце $m = 4$ (рис. 5), равна: $0 + 0 + 3 = 3$. Таким образом, суммы чисел (вторая строка под рамкой на рис. 5), равные трем, встречаются два раза, или $\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} = 2$, $n = 3$, $q = 3$ (ср. с примером 2.1).

Выше, в начале п. 1.2, мы приняли, что в общем случае при возведении бинома (2) в степень n умножение некоммутативно. В рассматриваемом частном случае умножение также некоммутативно.

Однако некоторые члены многочлена (2) в рассматриваемом случае являются подобными и их можно складывать (несмотря на некоммутативность умножения) в соответствии со значением чисел $\begin{bmatrix} n \\ q \end{bmatrix}$ по аналогии с числами $\binom{n}{p}$. В данном примере это члены $m = 3, 4$ многочлена (2), составляющие вертикальные столбцы 3, 4 таблицы на рис. 2 (и в соответствии с таблицей на рис. 5), т. е. в выражении (2) в данном случае (в отличие от случая, описанного в п. 1.2, выражение (3)) подобные члены это:

$$abb_{(3)} = baa_{(4)}, \text{ или более компактно: } ab^2 = ba^2 = C. \quad (6)$$

Ниже, п. 3.2 будет показана геометрическая интерпретация подобных членов вида (6). При возведении бинома (2) в куб, с учетом (6), имеем:

$$(a + b)^3 = a^3 + a^2b + aba + 2C + bab + b^2a + b^3. \quad (7)$$

Здесь для компактности записи мы приняли

$$aaa_{(0)} = a^3, \quad aab_{(1)} = a^2b, \quad bba_{(6)} = b^2a, \quad bbb_{(7)} = b^3.$$

Выражение (7), описывающее бином, отличается от выражения (4). Числа, расположенные в горизонтальных строках нелинейного арифметического треугольника на рис. 4, назовем биномиальными коэффициентами q -вида в отличие от биномиальных коэффициентов p -вида на рис. 1.

Назовем также биномы, описываемые выражениями (4) и (7), биномами p - и q -видов, соответственно.

Аналогичным образом, можно вычислить биномиальные коэффициенты q -вида для различных значений n и записать формулу, аналогичную (7) для различных степеней бинома q -вида.

3. Ветвящиеся системы лучей и геометрическая интерпретация биномов

3.1. Геометрическая интерпретация бинома p -вида

Рассмотрим симметричное изображение треугольника Паскаля и ветвящуюся систему лучей на рис. 6.

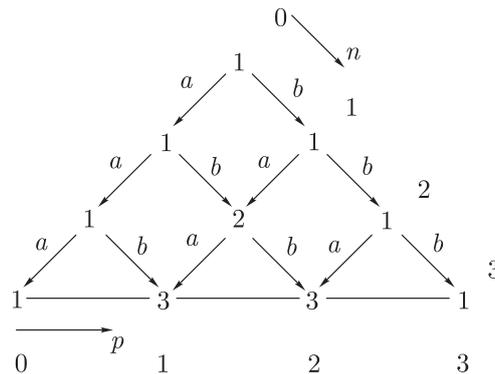


Рис. 6. Симметричное изображение треугольника Паскаля и ветвящаяся система лучей, n – номер прохода лучей, p – номер точек ветвления (ср. с рис. 1). Направления прохода лучей обозначены стрелками, расположенными между числами треугольника Паскаля: a – направление стрелок влево–вниз, b – направление вправо–вниз

Представим, что световая энергия (или частица на доске Гальтона [Колмогоров и др., 1995], распространяется (движется) сверху вниз вдоль звеньев ломаных траекторий. Звенья (лучи) расположены между числами треугольника Паскаля (между точками ветвления лучей) в виде стрелок [Колмогоров и др., 1995] на рис. 6.

Звенья (стрелки), направленные влево–вниз обозначим как a , вправо–вниз – как b (рис. 6).

Так, например, для случая $n=3$ в точку $p=0$ ведет только одна траектория, состоящая из трех звеньев a : aaa или a^3 ; в точку $p=1$ ведут три траектории, состоящие из трех звеньев: aab , aba , baa ; в точку $p=2$ – три траектории, состоящие из звеньев: baa , bab , abb и т. д.

Как мы видим, часть световой энергии, распространяющаяся вдоль лучей, приходит в одни и те же точки ветвления, поэтому траектории, по которым распространяется эта энергия лучей, являются подобными, и из рис. 6 мы получаем выражение, аналогичное (3):

$$aab = aba = baa = a^2b = A \text{ и } baa = bab = abb = ab^2 = B.$$

Таким образом, световую энергию, распространяющуюся вдоль подобных траекторий, можно складывать. Следовательно, исходя из рассмотрения траекторий на рис. 6, можно формулу бинома (2) свести к выражению (4).

3.2. Геометрическая интерпретация бинома q -вида

Рассмотрим другую ветвящуюся систему лучей, возникшую при описании процессов, происходящих в лазерах, предложенную в [Yurkin, 1995] и описанную в [Юркин, 2008] (рис. 7).

Представим, что световая энергия распространяется сверху вниз последовательно вдоль звеньев ломаных и ветвящихся траекторий, изображенных на рис. 7. (Некоторые звенья для наглядности изображены в виде стрелок.) Лучи, меняющие свое направление влево от направления предыдущего звена, обозначим как a , вправо – как b (рис. 7).

Так, например, для $n=3$ в точку $q=0$ ведет только одна траектория, состоящая из трех звеньев a : aaa или a^3 ; в точку $q=1$ ведет одна траектория, состоящая из трех звеньев: aab ; в точку $q=2$ – одна траектория, состоящая из трех звеньев: aba ; в точку $q=3$ – две траектории: abb и baa и т. д.

Как видно на рис. 7, часть световой энергии, распространяющейся вдоль лучей, приходит в одни и те же точки ветвления, поэтому траектории, по которым распространяется эта энергия, являются подобными, и мы получаем выражение, аналогичное (6):

$$abb = baa = ab^2 = ba^2 = C.$$

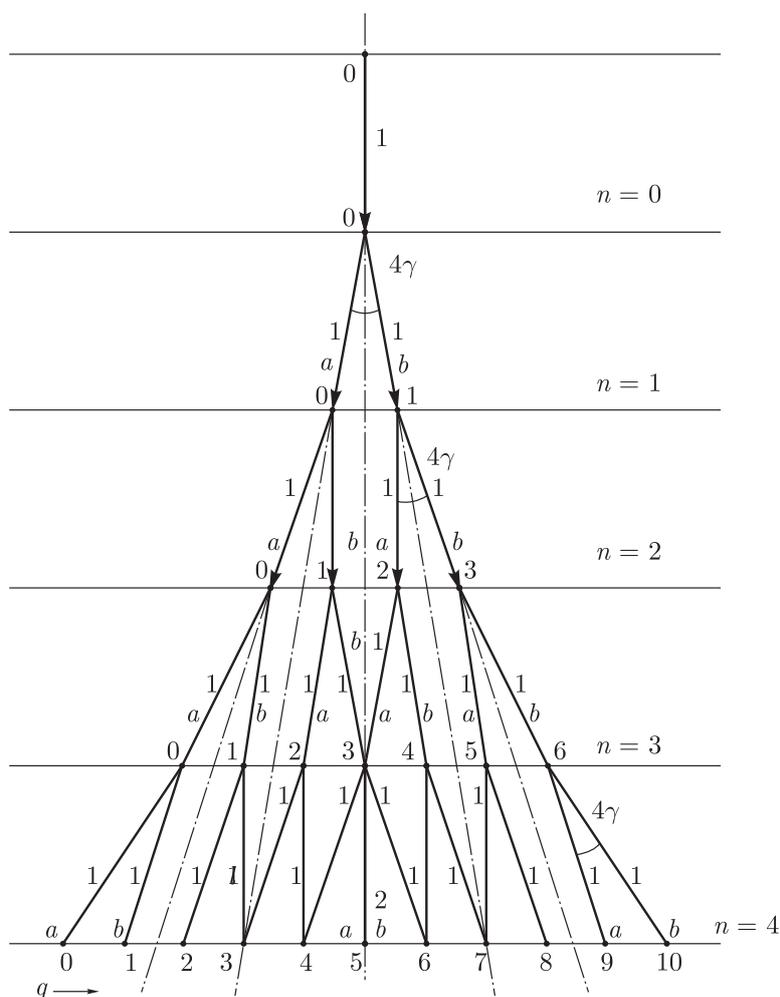


Рис. 7. Ветвящаяся система лучей, наклоненных под малыми углами, кратными 2γ к направлению вертикали. Лучи и звенья показаны сплошными линиями, оси симметрии – штрихпунктирными линиями. Свет распространяется сверху вниз, n – номер прохода лучей, q – номер точек ветвления лучей. Лучи, отклоненные влево, обозначены a , вправо – b

Таким образом, энергию, приходящую в одни и те же точки ветвления, можно складывать, следовательно, исходя из рассмотрения траекторий на рис. 7 формулу бинома (2) можно записать как выражение (7).

3.3. Особенности ветвящихся систем

Мы рассмотрели две различные ветвящиеся системы лучей в п. 3.1 и п. 3.2. Необходимо отметить, что система лучей на рис. 7 имеет свои особенности по сравнению с системой лучей на рис. 6.

Звенья (лучи), составляющие траектории на рис. 6, имеют одно из однозначных направлений – a или b .

Звенья (лучи), составляющие траектории на рис. 7, могут также иметь одно из однозначных направлений – a или b . Это, например, относится к лучам, составляющим траектории

$$aaa = a^3 \text{ или } bbb = b^3.$$

Звенья (лучи) на рис. 7 могут иметь и неоднозначное направление (в некоторых случаях одно и то же звено (луч) имеет направление a , а в других – b), которое зависит от того, какое

направление имело предыдущее звено (луч) траектории. Это относится, например, к звеньям, параллельным вертикали, а также к звеньям, наложенным друг на друга (рис. 7). Например, при четвертом проходе ($n = 4$) луч (звено), приходящий в точку $q = 5$, имеет направления a и b одновременно, т. к. последнее звено является частью двух траекторий: $abba$ и $baab$ (рис. 7).

Заключение

В п. 3 была продемонстрирована геометрическая интерпретация бинома q -вида на основе рассмотрения траекторий и их звеньев непосредственно из модели, изображенной на рис. 7. Однако подсчет звеньев траекторий непосредственно на рисунке не всегда удобен, хотя позволяет однозначно определить все звенья, из которых траектории состоят.

С помощью выражения (5) возможно построить нелинейный арифметический треугольник (рис. 4), а значит, подсчитать, сколько траекторий на рис. 7 являются подобными (приходят в одну и ту же точку). Однако выражение (5) не показывает, из каких именно звеньев состоят траектории.

Мы показали, что с помощью алгоритма, предложенного в п. 2.2, можно вычислить не только элементы (числа), составляющие нелинейный арифметический треугольник (т. е. число траекторий), но и определить сами эти траектории и из каких звеньев они состоят.

Таким образом, было показано соответствие предложенного алгоритма геометрической модели. Такую возможность дало рассмотрение биномиальных коэффициентов и бинома q -вида. Выражение (7) для бинома q -вида мы получили при рассмотрении дополнительных условий, взятых из исследования процессов, происходящих в лазерах.

Автор выражает благодарность д. ф.-м. н. Э. Э. Шнолю за ряд полезных замечаний, высказанных при подготовке рукописи этой работы.

Список литературы

- Yurkin. A. V.* System of rays in lasers and a new feasibility of light coherence control // Optics Communications. – 1995. – Vol. 114. – P. 393.
- Ананьев Ю. А.* Оптические резонаторы и лазерные пучки. М.: Наука, 1990.
- Бюллер В. Гаусс.* М.: Наука, 1989. – С. 149.
- Виленкин Н. Я.* Комбинаторика. М.: Наука, 1969.
- Колмогоров А. Н., Журбенко И. Г., Прохоров А. В.* Введение в теорию вероятностей. М.: Наука. – 1995. – С. 20.
- Кузьмин О. В.* Треугольник Паскаля: свойства и обобщения // СОЖ. – 2000.
- Ландсберг Г. С.* Оптика. М.: Наука, 1976. – С. 272.
- Юркин А. В.* Квазирезонатор – новая интерпретация рассеяния в лазере // Квантовая электроника. – 1994. – Т. 21. – С. 385.
- Юркин А. В.* Новое зеркало лазерного резонатора // Квантовая электроника. – 1991. – Т. 18. – С. 393.
- Юркин А. В.* Патент № 1777656, СССР, приоритет от 26.06.90 // БИ № 43. – 1990.
- Юркин А. В.* Система лучей в лазерах, нелинейная арифметическая пирамида и нелинейные арифметические треугольники // Тр. Института системного анализа РАН. – 2008. – Т. 32(2). – С. 99 – 112.