

УДК: 519.8

Влияние конвекции на двумерную динамику в нелокальной реакционно-диффузионной модели

А. В. Борисов^{1,a}, А. Ю. Трифонов^{2,b}, А. В. Шаповалов^{3,c}

¹Томский государственный университет
Россия, 634050, г. Томск, пр. Ленина, 36

²Томский государственный политехнический университет
Россия, 634050, г. Томск, пр. Ленина, 30

³Томский государственный университет
Россия, 634050, г. Томск, пр. Ленина, 36

E-mail: ^a borisov@phys.tsu.ru, ^b trifonov@mph.phtd.tpu.edu.ru, ^c shpv@phys.tsu.ru

Получено 10 февраля 2011 г.

Численными методами исследовано формирование пространственных структур, описываемых скалярным уравнением Фишера–Колмогорова–Петровского–Пискунова с нелокальными конкурентными потерями и конвекцией, линейно зависящей от пространственных переменных. Показано, что при соответствующем выборе значений параметров уравнения, начальная функция, локализованная в окрестности точки, трансформируется в функцию, локализованную в окрестности кольца с симметрично расположенными на нем локальными максимумами. Радиус кольца и число максимумов зависят от конвекции.

Ключевые слова: реакция-диффузия, конвекция, нелокальные конкурентные потери, уравнение Фишера–Колмогорова–Петровского–Пискунова

Convection effect on two-dimensional dynamics in the nonlocal reaction-diffusion model

A. V. Borisov¹, A. Yu. Trifonov², A. V. Shapovalov³

¹Tomsk State University, 36 Lenin Prospekt, Tomsk, 634050, Russia

²Tomsk State Polytechnic University, 30 Lenin Prospekt, Tomsk, 634050, Russia

³Tomsk State University, 36 Lenin Prospekt, Tomsk, 634050, Russia

Abstract. — Pattern formation described by the scalar Fisher–Kolmogorov–Petrovsky–Piscounov equation with nonlocal competition losses and convection linear on coordinates is considered numerically. Initial function localized around a point is shown to transform in a function localized around a ring with symmetrically sited local maxima. The ring radius and number of maxima depend on convection.

Keywords: reaction-diffusion, convection, nonlocal competition losses, Fisher–Kolmogorov–Petrovsky–Piscounov equation

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2011, vol. 3, no. 1, pp. 55–61 (Russian).

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке АВИЦП Министерства образования и науки РФ № 2.1.1/12999; ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России», контракты № 02.740.11.0238; П691; П789.

Введение

Математическое моделирование формирования пространственно-временных структур применяется в исследованиях явлений самоорганизации в нелинейных физических, химических и биологических системах [Эбелинг, 1979; Murray, 2001]. Пример такой математической модели дает нелокальное обобщение скалярного реакционно-диффузионного уравнения Фишера–Колмогорова–Петровского–Пискунова (ФКПП) [Fisher, 1937; Колмогоров и др., 1937], в котором конкурентные потери описываются квадратичным по кинетической переменной нелокальным выражением [Fuentes etc., 2003; Борисов и др., 2010].

Уравнение ФКПП описывает динамику популяционной плотности микроорганизмов, определяемую механизмами воспроизводства и конкурентных потерь, процессы переноса предполагаются диффузионными. Кинетической переменной в уравнении ФКПП является популяционная плотность. Нелокальные конкурентные потери моделируют влияние пространственного распределения метаболитов и продуктов лизиса в популяции и др. Как показано в [Fuentes etc., 2003; Борисов и др., 2010; Борисов и др., 2011], формирование структур обусловлено нелокальной нелинейностью в обобщенном уравнении ФКПП. Вид образующихся структур зависит от внутренних взаимодействий в системе и от внешних факторов. В частности, формирование структур может существенно зависеть от наличия конвекции в реакционно-диффузионной системе. Конвекция в популяции бактерий может возникать под влиянием внешних физических или химических воздействий, в результате которых возникает направленное движение особей в области, занимаемой популяцией. Таким воздействием может быть, например, внесение в популяцию аттрактантов/репеллентов. В [Neicu etc., 2000] экспериментально изучалась динамика роста колонии бактерий, в которой конвекция возникала вследствие воздействия ультрафиолетового излучения. В [da Cunha etc., 2009] рассматривалась одномерная динамика колонии бактерий в рамках обобщенного нелокального уравнения ФКПП с учетом конвекции.

В данной работе численными методами рассмотрено влияние конвекции на формирование двумерных пространственно неоднородных структур, описываемых нелокальным уравнением ФКПП.

Двумерное нелокальное уравнение ФКПП с конвекцией

Уравнение ФКПП с нелокальными конкурентными потерями и конвекцией запишем в виде

$$-u_t(\vec{x}, t) + D\Delta u(\vec{x}, t) + au - \vec{V}(\vec{x}, t)\nabla u(\vec{x}, t) - \kappa u(\vec{x}, t)I(u(\vec{x}, t), \vec{x}, t) = 0. \quad (1)$$

Здесь $u(\vec{x}, t)$ – кинетическая переменная (массовая плотность или концентрация, отнесенная на единицу площади), зависящая от времени t и пространственных переменных $\vec{x} = (x_1, x_2)$ плоскости \mathbb{R}^2 , $u_t(\vec{x}, t) = \frac{\partial u(\vec{x}, t)}{\partial t}$, D – коэффициент диффузии, Δ – двумерный оператор Лапласа, параметр a характеризует автокатализ, а выражения $-\vec{V}(\vec{x}, t)\nabla u(\vec{x}, t)$ и $-\kappa u(\vec{x}, t)I(u(\vec{x}, t), \vec{x}, t)$ моделируют конвекцию и нелокальные конкурентные потери соответственно. Здесь ∇ – оператор градиента, $\vec{V}(\vec{x}, t)$ – скорость конвекции, κ – параметр нелинейности, $I(u(\vec{x}, t), \vec{x}, t) = \int_{\mathbb{R}^2} b(\vec{x}, \vec{y})u(\vec{y}, t)d\vec{y}$, $\vec{y} = (y_1, y_2)$, $b(\vec{x}, \vec{y})$ – заданная гладкая функция (функция влияния), характеризующая нелокальное взаимодействие.

В работах [Борисов и др., 2010; Борисов и др., 2011] с помощью численных решений нелокального уравнения ФКПП показано, что для

$$b(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (2)$$

и

$$b(\vec{x}, \vec{y}) = \begin{cases} \frac{1}{12\sigma^2}, & \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} \leq \sqrt{3}\sigma, \\ 0, & \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} > \sqrt{3}\sigma \end{cases} \quad (3)$$

эволюция функции плотности $u(\vec{x}, t)$ может проходить по различным сценариям в зависимости от значений параметров уравнения и начальных условий.

При определенном выборе значений параметров из начального распределения $u(\vec{x}, 0)$, локализованного в окрестности некоторого центра (точки) на плоскости x_1, x_2 , в процессе эволюции образуются расширяющиеся кольцеобразные структуры, которые могут взаимодействовать между собой и приводить к образованию структур, имеющих вид совокупности пиков плотности $u(\vec{x}, t)$, локализованных в окрестностях соответствующих точек на плоскости.

В выражениях (2) и (3) параметр σ^2 характеризует эффективный размер области нелокального взаимодействия, точка (y_1, y_2) отвечает максимуму функции b при изменении x_1 и x_2 для (2) и положению центра круга, в котором функция $b(\vec{x}, \vec{y})$ вида (3) отлична от нуля.

Зададим начальное распределение с центром локализации в точке \vec{x}_0 следующим образом:

$$u(\vec{x}, 0) = u_0(\vec{x}) = \frac{f_0}{2\pi\sigma_0^2} \exp\left(-\frac{(\vec{x} - \vec{x}_0)^2}{2\sigma_0^2}\right), \quad (4)$$

где параметр σ_0^2 характеризует степень локализации функции $u(\vec{x}, 0)$, f_0 – амплитуда. Функцию влияния $b(\vec{x}, \vec{y})$ выберем в виде (3), скорость $\vec{V}(\vec{x}, t)$ положим равной

$$\vec{V}(\vec{x}, t) = C\vec{x}, \quad \text{где} \quad C = \begin{pmatrix} -c_1 & 0 \\ 0 & -c_2 \end{pmatrix}, \quad (5)$$

где c_1 и c_2 – постоянные.

Численные решения

Численные решения уравнения (1) с функцией влияния вида (3) строились в круговой области радиуса R , $x_1^2 + x_2^2 < R$, с центром в начале координат на временном отрезке $[0, T_0]$ при следующих значениях параметров уравнения, функции влияния и начального условия:

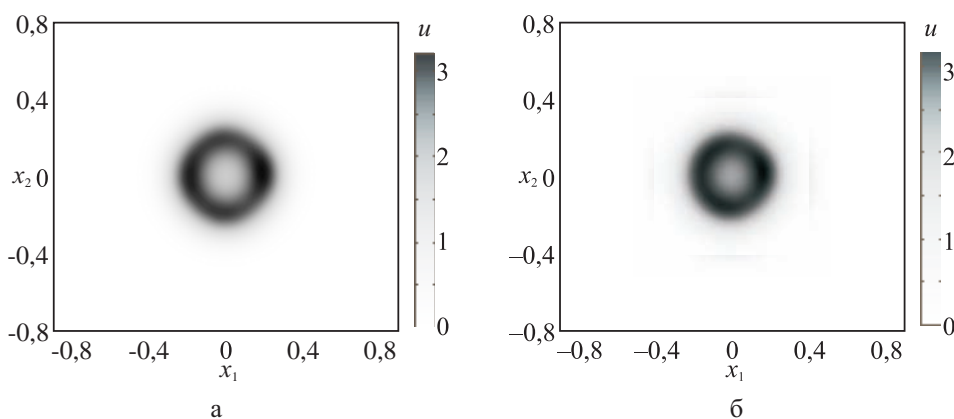
$$D = 0,002, \quad \sigma = 0,259, \quad \kappa = 48\sigma^2, \quad \sigma_0 = 0,106, \quad f_0 = 10\pi\sigma_0^2, \quad \vec{x}_0 = 0. \quad (6)$$

Начальное распределение $u(\vec{x}, 0)$ вида (4) локализовано в окрестности начала координат, где скорость (5) мала. В процессе эволюции, описываемой уравнением (1), начальное распределение трансформируется в распределение $u(\vec{x}, t)$, локализованное в окрестности расширяющегося кольца. С увеличением радиуса кольца скорость (5) возрастает, что усиливает вклад конвекции в изменение плотности $u(\vec{x}, t)$. Действие конвекции (5) препятствует расширению кольца. Отметим, что в случае функции влияния (2) влияние конвекции на эволюцию функции $u(\vec{x}, t)$ аналогично.

На рис. 1а показана промежуточная стадия формирования кольцевой структуры при $c_1 = c_2 = 0,25$, $a = 3,5$, которая с ростом t переходит в стационарную структуру, изображенную на рис. 1б.

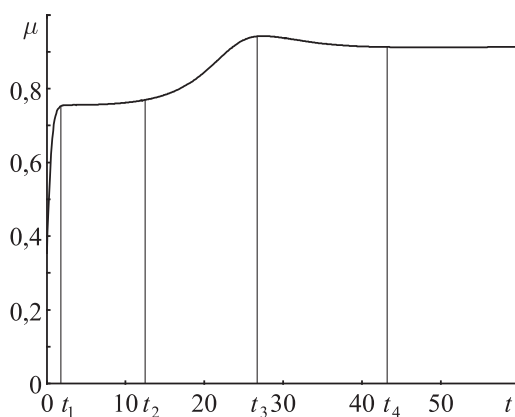
Для характеристики процесса эволюции плотности $u(\vec{x}, t)$ введем величину

$$\mu(t) = \int_{\mathbb{R}^2} u(\vec{x}, t) d\vec{x}, \quad (7)$$

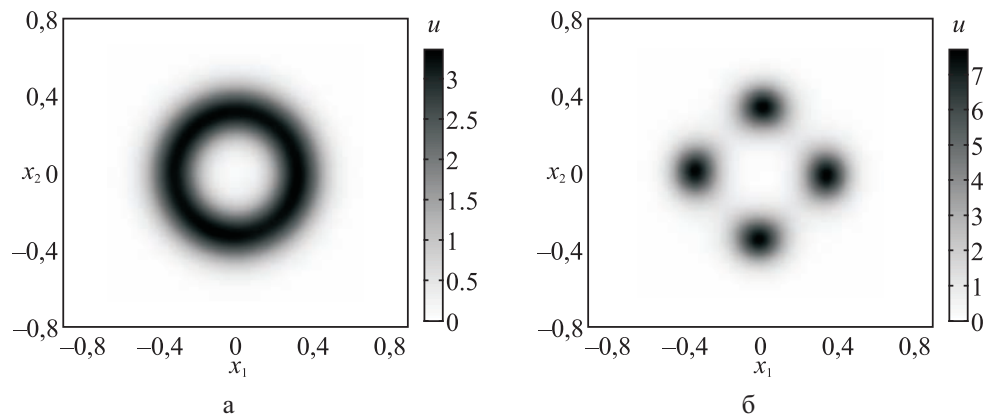
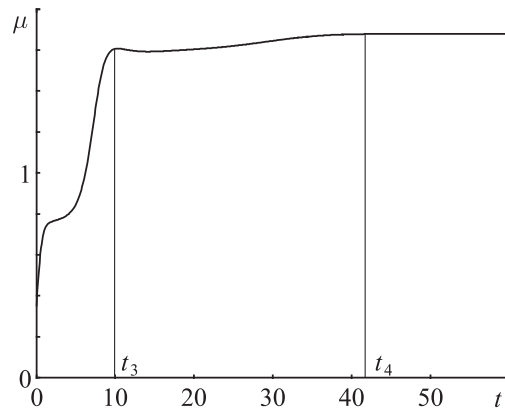
Рис. 1. Кольцевая структура в момент времени: а) $t = 28$, б) $t = 60$

имеющую смысл массы, соответствующей плотности $u(\vec{x}, t)$ [Борисов и др., 2010]. Особенности поведения величины $\mu(t)$ отвечают различные стадии формирования пространственной структуры $u(\vec{x}, t)$.

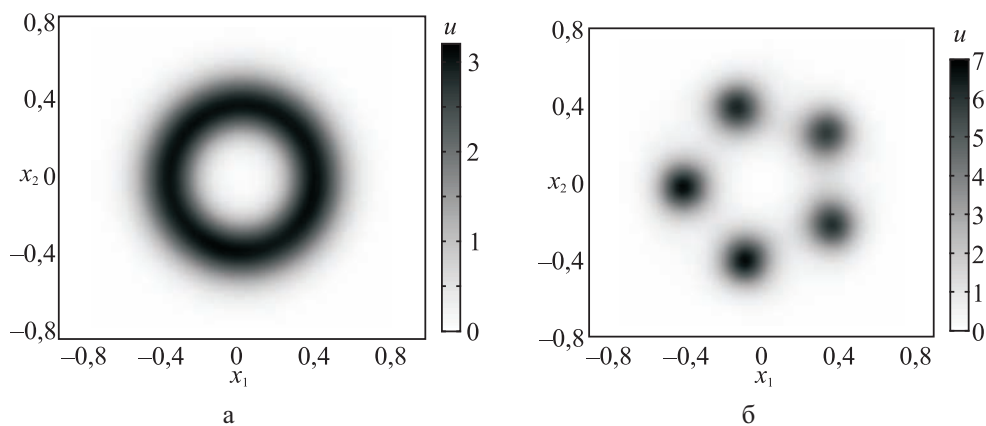
На рис. 2 приведена зависимость $\mu(t)$, соответствующая процессу формирования кольцевой структуры, показанной на рис. 1б. На интервале $0 < t < t_2$ формирование кольца, в окрестности которого локализована функция $u(\vec{x}, t)$, происходит вблизи начала координат, где вклад конвекции в процесс эволюции мал. Поэтому на данном интервале в изменении функции $u(\vec{x}, t)$ наблюдаются стадии, описанные в работах [Борисов и др., 2010; Борисов и др., 2011], где конвекция не учитывалась. На интервале $t_2 < t < t_3$ конвекция становится существенной. Ее действие приводит к замедлению расширения кольца и при $t = t_3$ радиус кольца (рис. 1а) достигает некоторого максимального значения. При $t > t_3$ радиус кольца незначительно уменьшается и при $t > t_4$ остается практически неизменным, а распределение плотности на кольце становится стационарным.

Рис. 2. Зависимость $\mu(t)$ при формировании кольцевой структуры

От значений параметров c_1 и c_2 в (5) зависит вид стационарной кольцевой структуры, формирующейся в ходе описанной выше эволюции. Рассмотрим два примера, иллюстрирующих эту зависимость. На рис. 3 показаны стадии эволюции плотности $u(\vec{x}, t)$ при $c_1 = c_2 = 0,18$, $a = 3,36$. Из сравнения рисунков 1 и 3 видно, что при уменьшении скорости конвекции (значений параметров c_1 и c_2) кольцевая структура (рис. 3а) имеет больший радиус и образуется за меньший промежуток времени $0 < t < t_3$ (рис. 4).

Рис. 3. Кольцевая структура в момент времени: а) $t = 10$, б) в момент времени $t = 60$ Рис. 4. Зависимость $\mu(t)$ при формировании диссипативной структуры, состоящей из четырех локализованных максимумов, расположенных на кольце

На интервале $t_3 < t < t_4$ функция $u(\vec{x}, t)$ переходит в стационарное распределение, которое сохраняет свою форму при $t > t_4$ и имеет вид четырех локализованных максимумов, симметрично расположенных на кольце. На рис. 5 показаны стадии формирования кольцевой структуры при $c_1 = c_2 = 0,15$, $a = 3,3$.

Рис. 5. Кольцевая структура в момент времени: а) $t = 10$, б) $t = 600$

Стационарное распределение при этих значениях параметров c_1, c_2 (рис. 5б) подобно случаю, показанному на рис. 3б, но имеет пять максимумов, симметрично расположенных на кольце. При этом временной интервал $t_3 < t < t_4$, на котором формируется кольцевая структура с пятью максимумами (рис. 6б), значительно больше аналогичного интервала в случае с четырьмя максимумами.

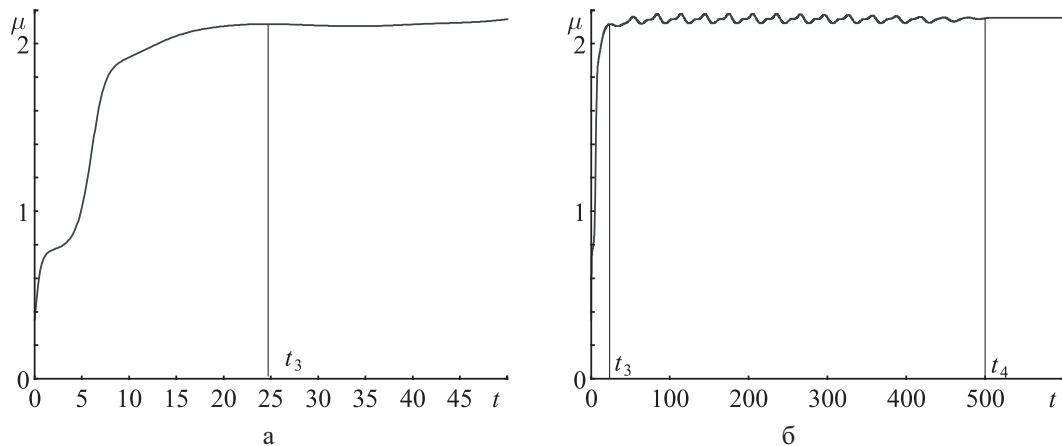


Рис. 6. Зависимость $\mu(t)$ при формировании диссипативной стационарной структуры, состоящей из пяти локализованных максимумов, расположенных на кольце

Заключение

Из рассмотренных примеров численных решений уравнения (1) можно видеть, что конвекция (5) препятствует расширению области, в которой формируется стационарная кольцевая структура.

Зависимости $\mu(t)$ на временном интервале $(0, t_3)$ во всех трех примерах качественно совпадают (рис. 2а, 4а, 6а), соответственно, процессы формирования стационарных структур проходят аналогичные стадии. Количество локализованных максимумов, образующихся в стационарном состоянии на кольце зависит от баланса между конвекцией, конфигурацией функции влияния и параметров уравнения (1).

Затухающие колебания функции $\mu(t)$ (рис. 6б) отражают особенность процесса формирования стационарной структуры, изображенной на рис. 5б, состоящей из пяти максимумов. Эта особенность состоит в колебательном перераспределении массы между формирующимися соседними максимумами на кольце, в результате которого со временем происходит формирование пяти локализованных стационарных максимумов. Такой процесс может занимать значительное время и зависит от c_1 и c_2 при фиксированных остальных параметрах уравнения (1).

Список литературы

- da Cunha J. A. R., Rezende G. R., Penna A. L. A., Morgado R., Oliveira F. A.* Pattern formation in a nonlocal convective Fisher equation // *Acta Physica Polonica*. — 2009. — V. 40, № 5. — P. 1473–1483.
- Fisher R. A.* The wave of advance of advantageous genes // *Annual Eugenics*. — 1937. — V. 7. — P. 255–369.
- Fuentes M. A., Kuperman M. N., Kenkre V. M.* Nonlocal interaction effects on pattern formation in population dynamics // *Phys. Rev. Lett.* — 2003. — V. 91. — P. 158104-1-158104-4.
- Murray J. D.* *Mathematical Biology. I. An Introduction (Third Edition)* — Berlin, 2001. — 551 p.

Neicu T., Pradhan A., Larochelle D. A., Kudrollil A. Extinction transition in bacterial colonies under forced convection // *Phys.Rev. E.* — 2000. — V. 62, № 1. — P. 1059–1062.

Эбелинг В. Образование структур при необратимых процессах — М.: Мир, 1979. — 279 с.

Борисов А. В., Трифонов А. Ю., Шаповалов А. В. Численное моделирование популяционной 2D-динамики с нелокальным взаимодействием // *Компьютерные исследования и моделирование.* — 2010. — Т. 2, № 1. — С. 33–40.

Борисов А. В., Трифонов А. Ю., Шаповалов А. В. Эволюция начальных распределений с одним и двумя центрами в двумерной модели реакционно-диффузионного типа с нелокальным взаимодействием конечного радиуса // *Известия вузов, Физика.* — 2011. — Т. 54, № 1. — С. 30–35.

Колмогоров А. Н., Петровский Н. Г., Пискунов Н. С. Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастанием вещества, и его применение к одной биологической проблеме // *Бюл. МГУ. Сер. А. Математика и Механика.* — 1937. — Т. 1, № 6. — С. 1–16.