

УДК: 532.5.013: 537.84: 519.64

**Численное исследование устойчивости
пространственно-периодических вихревых структур
изотермической электроконвекции
жидких диэлектриков
в плоскопараллельной системе электродов**

И. А. Ермолаев^а, А. С. Шаповалов^б

Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского,
Россия, 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, 83

E-mail: ^а iermolaev@rambler.ru, ^б apd@sgu.ru

Получено 10 января 2012 г.

Исследуется устойчивость пространственно-периодических диссипативных структур изотермической электроконвекции в плоском слое вязкой несжимаемой слабопроводящей жидкости с униполярной инжекционной проводимостью.

Ключевые слова: численное моделирование, электроконвекция, жидкие диэлектрики

Numerical investigation of spatially periodic rolls structures of liquid dielectrics isothermal electro-convection in a plane-parallel electrode system

I. A. Ermolaev, A. S. Shapovalov

Saratov State University, 83 Astrachanskaya street, Saratov, 410012, Russia

Abstract. – Isothermal electroconvection in a dielectric liquid arising in a plane-parallel electrode system due to unipolar injection of charges from the cathode is considered. Spatially periodic rolls structures stability is investigated.

Keywords: numerical modeling, electroconvection, liquid dielectric

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2012, vol. 4, no. 1, pp. 91–98 (Russian).

Введение

Временные эволюции нелинейных систем различной природы имеет много общего. Внутренняя аналогия между сложными режимами в радиофизике, гидродинамике, химической кинетике и биологии является экспериментально установленным фактом. Несмотря на чрезвычайное разнообразие нелинейных систем, их переход к нерегулярному поведению осуществляется лишь несколькими способами, часто общими не только для систем разной природы, но и для систем как сосредоточенных, так и распределенных.

При исследовании стохастических режимов в многомерных и распределенных системах речь может идти не только о временном, но и о пространственном порядке и хаосе, о пространственной периодичности и аperiodичности, регулярности и нерегулярности. В таких нелинейных системах возникает комплекс проблем, связанных с формированием, устойчивостью и взаимодействием пространственных структур, названных Пригожиным [Гленсдорф, Пригожин, 1973] диссипативными. В процессах стохастизации (турбулизации) нелинейных распределенных систем формирование и взаимодействие различных типов сложных стационарных и нестационарных пространственных диссипативных образований (равновесных, периодических, хаотических) играет основополагающую роль.

Ярким примером таких структур являются стационарные пространственно-периодические вихри, возникающие в жидкостях и газах при определенных условиях. Наиболее известны пространственно-периодические вихревые структуры термогравитационной конвекции Рэлея–Бенара в плоских слоях, подогреваемых снизу. Однако подобные течения, возникающие кризисным образом вследствие потери устойчивости равновесия плоского слоя, могут быть вызваны также постоянным электрическим полем в диэлектрической (слабопроводящей) жидкости при изотермических условиях [Стишков, 1972].

Области устойчивости стационарных двухмерных пространственно-периодических вихревых структур в полной мере исследованы лишь для рэлеевских термоконвективных течений («области Буссе») [Буссе, 1984]. Исследования аналогичных структур электроконвективных течений ограничиваются пока методами линейной теории. Так в [Жакин, Тарапов 1979; Жакин, 1979] исследовалась устойчивость равновесия диэлектрической жидкости между двумя цилиндрическими и сферическими электродами при униполярной инжекции с одного из них. В [Жакин, Тарапов, 1981] рассматривалась устойчивость равновесия жидкости в плоскопараллельной системе электродов, в [Веларде, Смородин, 2000] изучалась устойчивость плоского слоя в модулированном электрическом поле, в [Воробьев, Малышенко, Петрин, 2006] исследовалась электроконвекция в квадратной области.

Изучение устойчивости надкритических возмущений конечной амплитуды, таких как стационарные пространственно-периодические диссипативные структуры электроконвективного (ЭК) течения, возможно методом вычислительного эксперимента. Для этого в настоящей работе на основе полных нелинейных уравнений численно решалась задача электроконвекции с варьируемыми горизонтальными размерами элементарной конвективной ячейки, моделирующей бесконечный плоский слой. Фиксировалось волновое число, соответствующее возникновению неустойчивости и разрушению двухвихревого течения, и структура, формирующаяся вследствие разрушения.

Математическая модель и метод решения

Используемая для решения математическая модель (1)–(4) выделяется из общей системы уравнений электрогидродинамики гомогенной сплошной среды [Остроумов, 1979] при следующих условиях: плотность заряженной компоненты много меньше общей плотности, процессы считаются квазиэлектростатическими, джоулев нагрев пренебрежимо мал, внешние условия изотермические. Тем самым исключается электрокондуктивный механизм образования

объемного заряда, электрострикционные силы и силы, связанные с градиентом диэлектрической проницаемости.

$$\rho \left(\frac{\partial V}{\partial t} + (V \nabla) V \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 V + qE, \quad (1)$$

$$\nabla V = 0, \quad (2)$$

$$\varepsilon \nabla E = q, \quad E = -\nabla \varphi, \quad (3)$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \nabla(\sigma_0 E + qV) = 0. \quad (4)$$

Здесь ρ – плотность, V – вектор скорости, p – давление, E – вектор напряженности электрического поля, t – время, μ – динамическая вязкость, q – объемная плотность зарядов, ε – абсолютная диэлектрическая проницаемость, φ – электрический потенциал, σ_0 – начальная удельная проводимость (измеренная по линейному участку вольт–амперной характеристики).

Жидкость считается несжимаемой, вязкой, ее свойства постоянны, электропроводность и диффузия ионов малы. В дальнейшем течение будет полагаться двумерным, приложенное электрическое поле – однородным, фоновая проводимость среды – постоянной. В уравнении (4) пренебрежем нелинейностью зависимости $j \sim qbE$, где j – плотность тока, b – подвижность инжектированных ионов.

Отметим, что для рассматриваемых диэлектрических жидкостей, при проводимостях $10^{-13} \div 10^{-8} \text{ (Ом}\cdot\text{см)}^{-1}$ и объемных плотностях зарядов 10^{-9} Кл/см^3 в плоскопараллельных системах электродов электрические поля действительно можно считать однородными до средних напряженностей 10–12 кВ/см [Жакин, Тарапов, Федоненко, 1983]. Кроме того, подвижность зарядов, диэлектрическая проницаемость и вязкость слабо зависят от напряженности поля [Адамчевский, 1972], что для изотермических ЭК-течений позволяет считать эти величины постоянными, вплоть до пробивных напряжений.

В изотермических условиях основной причиной, вызывающей конвективные токи, является униполярная инжекция зарядов с катода [Федоненко, Жакин, 1982], т. е., электризация вследствие локального нарушения равновесия реакции диссоциации-рекомбинации молекул жидкости в примыкающих к электродам областях. В этом случае около электрода образуется одноименный электрический заряд, который или успевает релаксировать за счет омического тока и взаимодействия с противоположными ионами жидкости, либо провоцирует электроконвективное движение в виде пространственно-периодических вихревых структур. Структуры возникают кризисным образом в результате потери устойчивости равновесия плоского слоя. Порог их возникновения зависит от проводимости, вязкости, химического состава жидкости и в большинстве технических слабопроводящих диэлектриков составляет от 0.5 до 5 кВ/см [Стишков, 1977].

Плоскопараллельный бесконечный слой диэлектрической жидкости моделировался двумерной прямоугольной ячейкой шириной L , высотой H , с условиями симметрии на боковых границах. Для описания течения и поля объемной плотности зарядов использовалась декартова система координат, начало которой совпадало с левым нижним углом расчетной области. Ось x была направлена горизонтально, ось y – вертикально. В начальный момент времени жидкость находилась в гидростатическом равновесии.

В качестве масштабов расстояния, времени, скорости, заряда и напряженности поля были выбраны: H , H^2/ν , ν/H , $\varepsilon E_0/(4\pi H)$, E_0 , тогда безразмерные переменные $X=x/H$, $Y=y/H$, $\tau=\nu t/H^2$, $U=uH/\nu$, $V=vH/\nu$, $Q=q(4\pi H)/\varepsilon E_0$, $e_x=E_x/E_0$, $e_y=E_y/E_0$. Таким образом, $x=XH$, $y=YH$, $t=H^2 \tau/\nu$, $u=\nu U/H$, $v=\nu V/H$, $q=Q\varepsilon E_0/(4\pi H)$, $E_x=e_x E_0$, $E_y=e_y E_0$. Здесь x , y – координаты; t – время; ν – коэффициент кинематической вязкости; u , v – составляющие скорости в проекции на оси x , y соот-

ветственно. Безразмерные уравнения изотермической электроконвекции были записаны в переменных «вихрь скорости–функция тока–объемная плотность зарядов» как

$$\frac{\partial \omega}{\partial \tau} + \frac{\partial \psi}{\partial Y} \frac{\partial \omega}{\partial X} - \frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial \omega}{\partial Y} = \Delta \omega + Gr_e \cdot e_x \cdot \frac{\partial Q}{\partial Y} - Gr_e \cdot e_y \cdot \frac{\partial Q}{\partial X},$$

$$\Delta \psi = \omega,$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \tau} + \frac{\partial \psi}{\partial Y} \frac{\partial Q}{\partial X} - \frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial Q}{\partial Y} = -\frac{1}{Pr_e} Q,$$

где $Gr_e = \varepsilon E_0^2 H^2 / 4\pi\rho\nu^2$ – электрический аналог числа Грасгофа, показывающий отношение кулоновских и вязких сил; $Pr_e = \varepsilon\nu/\sigma_0 H^2$ – электрический аналог числа Прандтля, являющий собой соотношение токов смещения и проводимости (отношение времени релаксации электрического заряда к характерному времени развития гидродинамических возмущений).

Условия симметрии на боковых границах соответствовали бесконечному слою:

$$X = 0: \quad \psi(0, Y, \tau) = \omega(0, Y, \tau) = \frac{\partial Q(0, Y, \tau)}{\partial X} = 0,$$

$$X = L: \quad \psi(L, Y, \tau) = \omega(L, Y, \tau) = \frac{\partial Q(L, Y, \tau)}{\partial X} = 0.$$

На твердых непроницаемых границах (электродах) обеспечивались условия «прилипания»:

$$Y = 0: \quad \psi(X, 0, \tau) = \frac{\partial \psi(X, 0, \tau)}{\partial Y} = 0,$$

$$Y = H: \quad \psi(X, H, \tau) = \frac{\partial \psi(X, H, \tau)}{\partial Y} = 0.$$

Значения вихря скорости на электродах определялись по формуле Вудса [Тарунин, 1990], разрядка ионов на аноде считалась мгновенной $Q(X, H, \tau) = 0$, на катоде была задана линейная инжекция зарядов $Q(X, 0, \tau) = \frac{4\pi H \eta}{\varepsilon} \cdot e_n$, где η – коэффициент инжекции [Ермолаев, Жбанов, 2003].

Начальные условия имели вид

$$\psi(X, Y, 0) = \omega(X, Y, 0) = Q(X, Y, 0) = 0.$$

Задача решалась методом конечных элементов Галеркина (слабая формулировка), при этом объемная плотность зарядов, вихрь скорости и функция тока аппроксимировались линейной комбинацией не зависящих от времени функций формы на линейных треугольных конечных элементах. Для временной аппроксимации использовалась полностью неявная двухслойная схема.

Уравнения решались последовательно. Каждый временной шаг начинался с вычисления объемной плотности зарядов, затем определялись граничные условия и решалось уравнение для вихря скорости, далее поле вихря скорости корректировалось и определялось поле функции тока. Все результаты получены на равномерных конечноэлементных сетках с шагом по времени 0.001.

Стационарные решения были получены методом установления, критерием установления являлось неравенство

$$\left| \theta_m^{k+1} - \theta_m^k \right| + \left| \omega_m^{k+1} - \omega_m^k \right| + \left| \psi_m^{k+1} - \psi_m^k \right| < \text{eps},$$

где θ_m , ω_m , ψ_m – экстремальные значения объемной плотности зарядов, вихря скорости и функции тока. Индекс k – номер шага по времени, величина ϵ ps изменялась в интервале 10^{-5} – 10^{-6} .

Обсуждение результатов

Расчеты проводились для слабопроводящей жидкости, характеризуемой величиной критерия $Pr_e=0.14$ и безразмерным коэффициентом инжекции зарядов с катода [Ермолаев, Жбанов, 2003] 7.85. Эти значения соответствуют раствору молекулярного йода в трансформаторном масле. Данная жидкость образует униполярную инжекционную проводимость в широком диапазоне напряженности однородного поля [Федоненко, Жакин, 1982] и используется во многих экспериментальных работах, что позволяет сравнить результаты численного моделирования со значениями, полученными экспериментально.

Обычно в численных и некоторых натуральных экспериментах волновое число формирующихся пространственно-периодических структур течения фиксируется в начальный момент времени тем или иным способом, например [Буссе, 1984]. Однако представляет интерес устойчивость структур, формирующихся из равновесного слоя при «мгновенном» включении поля.

В настоящей работе надкритические структуры ЭК-течения в плоском слое диэлектрической жидкости, ограниченном электродами – катодом (снизу) и анодом (сверху), моделировались как результат «естественной» временной эволюции равновесного слоя. При различных значениях числа Gr_e с шагом 0.2 варьировалось аспектное отношение конвективной ячейки $l=L/H$ (пространственный период, длина волны возмущения). Фиксировалось волновое число $k=2\pi/l$ соответствующее разрушению стационарной двухвихревой структуры, а также структура, образующаяся вследствие разрушения.

В качестве примера на рис. 1а,б,в показан временной процесс потери устойчивости структуры с волновым числом $k=2.4$ и формирование структуры с удвоенным волновым числом $k=4.8$. Следует отметить, что течение возникает вблизи боковых границ и только затем в центре слоя. Формирующиеся пространственно-периодические двумерные вихри далеки от идеальной цилиндрической формы, что соответствует ЭК-течениям, наблюдаемым экспериментально [Стишков, 1972].

Для определения области устойчивости численные расчеты проводились при следующих значениях критерия Грасгофа $Gr_e=0.144\cdot 10^2$; $0.567\cdot 10^2$; $1.296\cdot 10^2$; $2.304\cdot 10^2$; $3.6\cdot 10^2$. Для выбранной слабопроводящей жидкости эти значения соответствуют напряженности однородного электрического поля 2, 4, 6, 8, 10 кВ/см. При большей напряженности течение перестает быть стационарным и возникают сомнения в его двумерности [Стишков, Остапенко, 1979].

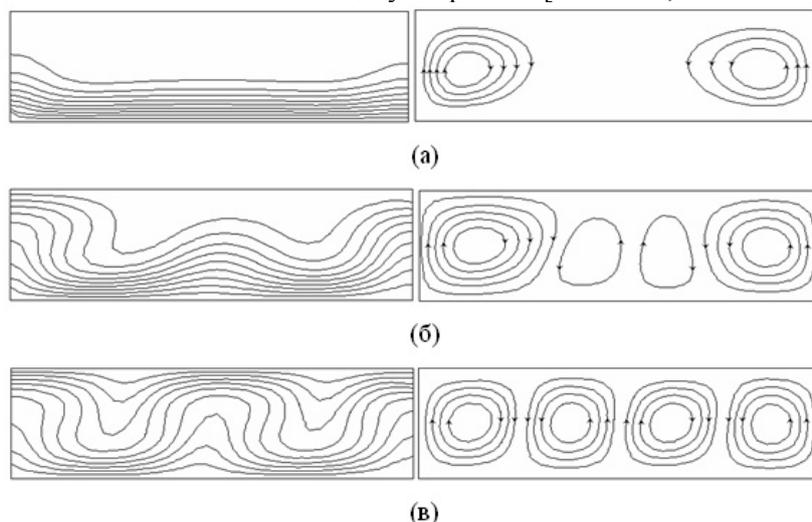


Рис. 1 Изолинии объёмной плотности зарядов (слева) и линии тока (справа)

На рис. 2 показана область устойчивости (кривая 1) двумерных стационарных пространственно-периодических вихрей ЭК-течения. Линия 2 соответствует экспериментальным пороговым значениям [Федоненко, Жакин, 1982] ($E^* \approx 2.2$ кВ/см, $Gr_e^* = 0.17 \cdot 10^2$) и близким значениям, полученным численно $E^* \approx 2.1$ кВ/см [Ermolaev, Zhanov, 2002]. Форма области устойчивости подобна форме «областей Буссе» для структур рэлеевской термоконвекции. Наиболее «опасным» является возмущение с волновым числом $k=4.8$, что совпадает с [Жакин, Тарапов, 1981] и близко значениям, наблюдаемым в [Стишков, 1972].

Следует отметить различный характер потери устойчивости и формирования новых устойчивых структур течения для разных значений электрического аналога числа Грасгофа. При величинах Gr_e менее $2.3 \cdot 10^2$ для малых волновых чисел (левая ветвь кривой 1 на рис. 2) в результате разрушения пространственно-периодических вихрей формируется устойчивое несимметричное течение, по-видимому, аналогичное неустойчивости Экхауза рэлеевской термоконвекции. Течение имеет вид двух взаимодействующих вихрей, волновое число одного из которых немного меньше, а другого немного больше, чем исходных.

Для больших волновых чисел (правая ветвь кривой 1 на рис. 2) формируется стационарная пространственно-периодическая структура с вдвое меньшим волновым числом. То есть двухвихревое течение в элементарной конвективной ячейке сменяется одновихревым, при этом его интенсивность заметно ослабевает.

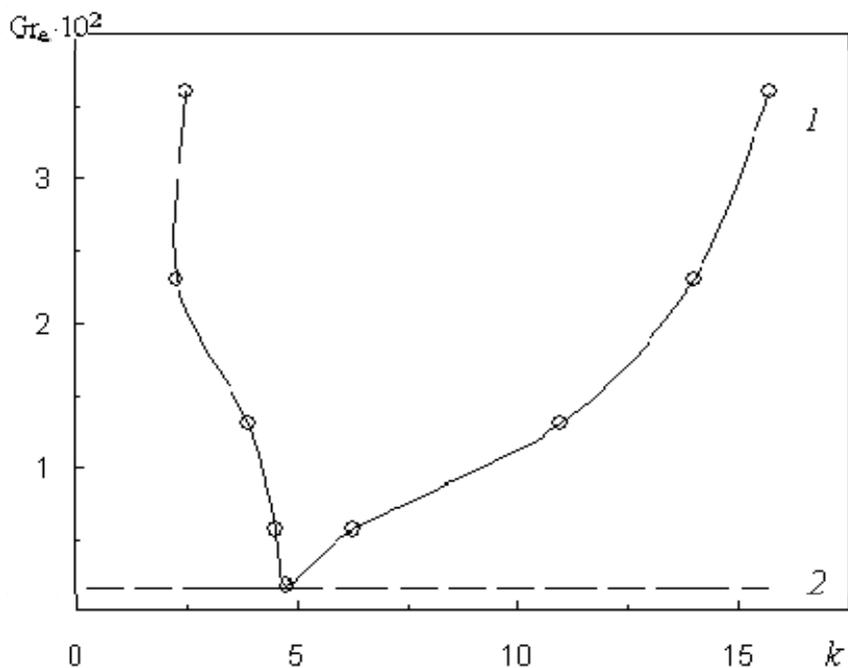


Рис. 2 Область устойчивости двумерных стационарных пространственно-периодических вихревых структур ЭК-течения слабопроводящей жидкости с униполярной инжекционной проводимостью в плоскопараллельной системе электродов

При величинах критерия Грасгофа больших $2.3 \cdot 10^2$ для малых волновых чисел вследствие потери устойчивости и разрушения одной стационарной пространственно-периодической вихревой структуры формируется другая с удвоенным волновым числом (рис. 1). Структуры не являются стационарными, интенсивность вихрей немонотонно меняется во времени, амплитуда колебаний незначительна. Для больших волновых чисел после разрушения стационарных пространственно-периодических вихрей формируется течение с вертикальным расположением вихревых структур. Течение также не является стационарным, интенсивность вихрей немонотонно меняется со временем.

За пределами области устойчивости двухмерных стационарных пространственно-периодических вихрей не исключено существование других метастабильных структур течения. В частности, при $Gr_e = 2.6 \cdot 10^2$ и $L/H = 0.3$ было получено метастабильное течение с вертикальным несимметричным расположением вихрей разной интенсивности. Через интервал времени, много больший времени установления, двухвихревая структура течения сменялась одновихревой. Течение обладало сложной периодичностью, в результате которой формировалось два ядра вихря, которые затем сливались в один.

Заключение

Таким образом, на основе результатов численных экспериментов, получена область устойчивости стационарных двухмерных пространственно-периодических вихревых структур ЭК-течения жидкого диэлектрика ($Pr_e = 0.14$) в плоскопараллельной системе электродов. Выявлены структуры течения, образующиеся в результате потери устойчивости пространственно-периодических стационарных вихрей.

Список литературы

- Адамчевский И.* Электрическая проводимость жидких диэлектриков. – Л.: Энергия, 1972. – 295с.
- Буссе Ф. Г.* Переход к турбулентности в конвекции Рэлея–Бенара // Гидродинамические неустойчивости и переход к турбулентности. Пер. с англ. / Под ред. Х. Суинни, Дж. Голлаб. М.: Мир, 1984. С. 124–168.
- Веларде М. Г., Смородин Б. Л.* Конвективная неустойчивость плоского горизонтального слоя слабопроводящей жидкости в переменных и модулированных электрических полях // Изв. РАН Механика жидкости и газа. – 2000. – № 3. – С. 31–38
- Воробьев В. С., Малышенко С. П., Петрин А.Б.* Влияние электрически индуцированной конвекции в диэлектрических жидкостях на конвективный теплоперенос // Теплофизика высоких температур. – 2006. Т.44, № 6. – С. 892–902.
- Гленсдорф Л., Пригожин И.* Термодинамическая теория структур, устойчивости и флуктуаций. М.: Мир, 1973. – 312 с.
- Ермолаев И. А., Жбанов А. И.* Численное исследование униполярной инжекции при электроконвективном движении в плоском слое трансформаторного масла // Изв. РАН Механика жидкости и газа. – 2003. – № 6. – С. 3–7.
- Ermolaev I. A., Zhbanov A. I.* Investigation of the electroconvective flow of a weakly conducting liquid with unipolar injection conductivity by the finite element method // Journal of Engineering Physics and Thermophysics. – 2002. – Vol.75, № 5. – P. 1125–1129.
- Жакин А. И., Тарапов И. Е.* Электрогидродинамическая неустойчивость слабопроводящей жидкости между двумя цилиндрическими электродами при униполярной инжекции // Магнитная гидродинамика. – 1979. – № 4. – С. 53–57.
- Жакин А. И.* К вопросу об электроконвективной устойчивости слабопроводящей жидкости // Изв. АН СССР Механика жидкости и газа. – 1979. – № 4. – С. 137–142.
- Жакин А. И., Тарапов И. Е.* Неустойчивость и течение слабопроводящей жидкости при окислительно-восстановительных реакциях на электродах и рекомбинации // Изв. АН СССР Механика жидкости и газа. – 1981. – № 4. – С. 20–26.
- Жакин А. И., Тарапов И. Е., Федоненко А. И.* Экспериментальное изучение механизма проводимости полярных жидких диэлектриков // Электронная обработка материалов. – 1983. – № 5. – С. 37–41.

- Остроумов Г. А.* Взаимодействие электрических и гидродинамических полей. Физические основы электрогидродинамики. М., 1979. – 320 с.
- Стишков Ю. К., Остапенко А. А.* Электрогидродинамические течения в жидких диэлектриках. – Л.: Изд-во Ленинградского ун-та, 1989. – 176 с.
- Стишков Ю. К.* Электрогидродинамические течения и механизмы электризации «технических» жидких диэлектриков // Электронная обработка материалов. – 1977. – № 6. – С. 29–32.
- Стишков Ю. К.* Наблюдение изотермической конвекции в электрическом поле плоского конденсатора // Электронная обработка материалов. – 1972. – № 1. – С. 61–62.
- Стишков Ю. К., Остапенко А. А.* Два режима ЭГД-течений и конвективная проводимость // Магнитная гидродинамика. – 1979. – № 4. – С. 46–52.
- Тарунин Е. Л.* Вычислительный эксперимент в задачах свободной конвекции. – Иркутск: Изд-во Иркутск. ун-та, 1990. – 225 с.
- Федоненко А. И., Жакин А. И.* Экспериментальные исследования электроконвективного движения в трансформаторном масле // Магнитная гидродинамика. – 1982. – № 3. – С. 74–82.