

УДК: 519.622.2, 57.087

## Идентификация математической модели и исследование различных режимов метаногенеза в мезофильной среде

С. А. Королев, Д. В. Майков<sup>а</sup>

Ижевский государственный технический университет им. М. Т. Калашникова,  
факультет «Математика и естественные науки»,  
Россия, 426069, г. Ижевск, ИжГТУ, ул. Студенческая, д. 7

E-mail: <sup>а</sup>MaykovD@yandex.ru

Получено 27 февраля 2012 г.,  
после доработки 11 марта 2012 г.

Предложена математическая модель процесса получения биогаза из отходов животноводства. Разработан алгоритм идентификации параметров модели. Проведена оценка точности идентификации модели. Приведены результаты моделирования для периодического и непрерывного режимов подачи субстрата. Найдена оптимальная скорость подачи субстрата для непрерывного режима.

Ключевые слова: метаногенез, биогаз, математическая модель, система обыкновенных дифференциальных уравнений, идентификация математической модели, генетический алгоритм

### Identification of a mathematical model and research of the various modes of methanogenesis in mesophilic environments

S. A. Korolev, D. V. Maykov

*Izhevsk State Technical University, Faculty of Mathematics and Natural Sciences, ISTU,  
7 Studencheskaya street, Izhevsk, 426069, Russia*

**Abstract.** – A mathematical model for the production of biogas from animal waste was developed. An algorithm for identification of model parameters was developed. The accuracy of model identification was performed. The result of simulation for batch and continuous modes of supply of substrate was shown. The optimum flow rate of the substrate for continuous operation was found.

Keywords: methanogenesis, biogas, mathematical model, set of ordinary differential equations, identification of mathematical model, genetic algorithm

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2012, vol. 4, no. 1, pp. 131–141 (Russian).

## Описание предметной области

В связи с истощением запасов ископаемого топлива и ухудшением экологической ситуации, вызванной их использованием, в мире наблюдается повышенный интерес к альтернативным источникам энергии. Одним из таких источников является биогаз – топливный газ, получаемый в результате анаэробной ферментации органического сырья. Биогаз в основном состоит из метана и углекислого газа. Данный процесс осуществляется в специальных резервуарах – метантенках – при постоянном перемешивании, которое способствует созданию однородной среды. В качестве сырья может использоваться биомасса. Эта технология применяется для переработки отходов животноводства.

Процесс получения биогаза состоит из нескольких этапов [Гюнтер, Гольдфарб, 1991]. Упрощенно его можно рассматривать как одностадийный (см. рис. 1).

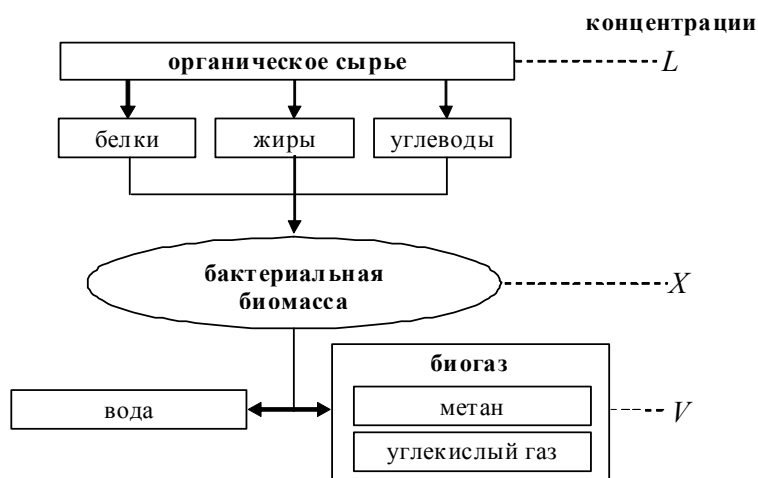


Рис. 1

Существует три типа метаногенеза: метаногенез в психрофильной, мезофильной и термофильной средах. Каждой среде соответствует определенный температурный диапазон и типы бактерий. На практике широкое распространение получил метаногенез в мезофильной среде, поскольку для данной среды интенсивность выделения биогаза не так чувствительна к колебаниям температуры субстрата, как для термофильной среды. Кроме того, скорость выхода биогаза при мезофильной среде существенно выше, чем при психрофильной. В дальнейшем рассматривается метаногенез в мезофильной среде. Оптимальная температура для мезофильной среды составляет 37°C, а период полной ферментации – 25 суток [Эдер, Шульц, 2008].

Для поддержания высокой производительности биогазовой установки необходимо контролировать и регулировать значения управляющих параметров. Для этого требуется предварительно разработать математическую модель процесса получения биогаза, оценить ее параметры по экспериментальным данным, а также найти оптимальные значения управляющих параметров.

## Математическая модель процесса получения биогаза

В условиях идеального перемешивания субстрата и постоянной температуры ключевыми факторами, влияющими на протекание метаногенеза, являются время процесса, концентрации бактерий и питательных веществ субстрата [Свалова, 2008]. В настоящей работе проанализирована достаточно простая модель, учитывающая данные факторы. Прирост концентраций бактерий моделировался с помощью уравнения Кобозева [Дворецкий и др., 2005; Gerber, 2008]. Дан-

ная модель имеет вид системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ):

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = bLX - pX, \\ \frac{dL}{dt} = p(L_0 - L) - \alpha bLX, \\ \frac{dV}{dt} = \gamma bLX, \end{cases} \quad (1)$$

с начальными условиями

$$X(0) = X_0, L(0) = L_0, V(0) = V_0 = 0, \quad (2)$$

где  $X$  – концентрация бактерий, кг/м<sup>3</sup>;  $L$  – концентрация питательных веществ, усваиваемых бактериями, кг/м<sup>3</sup>;  $V$  – выход биогаза, м<sup>3</sup>;  $p$  – относительная скорость поступления субстрата, сут.<sup>-1</sup>;  $b$  – коэффициент скорости роста бактерий, м<sup>3</sup>/(кг·сут.);  $\alpha$  – безразмерный коэффициент усвоения субстрата;  $\gamma$  – коэффициент скорости преобразования питательных веществ субстрата в биогаз, м<sup>6</sup>/кг.

При этом предполагается, что интенсивность перемешивания позволяет пренебречь пространственной неоднородностью концентраций. Также предполагается, что концентрация соответствующих бактерий в поступающем субстрате пренебрежимо мала.

Особенностью системы (1) является отсутствие переменной  $V$  в правой части. Поэтому третье уравнение можно рассматривать независимо от остальных. Удобно ввести величину скорости выхода биогаза:

$$w = \frac{dV}{dt} = \gamma bLX. \quad (3)$$

Биогазовая установка может работать в различных режимах. При периодическом режиме происходит однократное наполнение метантенка и его полное опорожнение по завершении периода ферментации. При непрерывном режиме осуществляется непрерывная подача новой порции субстрата и одновременно удаление переработанной порции субстрата.

В модели (1) случаю периодического режима подачи субстрата соответствует  $p = 0$ , случаю непрерывного режима –  $p > 0$ .

Относительная скорость поступления субстрата определяется выражением:

$$p = \frac{1}{Q} \frac{dQ}{dt}, \quad (4)$$

где  $Q$  – объем субстрата в метантенке (при полной загрузке метантенка объем субстрата равен объему метантенка и постоянен);  $\frac{dQ}{dt}$  – абсолютная скорость поступления субстрата.

В случае периодического режима время процесса равно периоду полной ферментации:  $T = T_f = 25$  сут. По аналогии с периодическим режимом в случае непрерывного режима можно определить период ферментации как промежуток времени, в течение которого происходит полное обновление содержимого метантенка. Данная величина зависит от скорости поступления субстрата:

$$T_f = \frac{1}{p}. \quad (5)$$

## Оптимизация скорости подачи субстрата

При оптимальных значениях температуры и влажности субстрата, начальной концентрации микроорганизмов, имеется только один оптимизируемый параметр – относительная скорость подачи субстрата  $p$ . Пусть в качестве критерия оптимизации выступает максимизация среднесуточного выхода биогаза за период  $[0, T]$ :

$$\bar{w} = \frac{V(T, p)}{T} \rightarrow \max_p. \quad (6)$$

В случае непрерывного режима начальным промежутком установления можно пренебречь, и в качестве среднесуточного выхода рассматривать установившееся значение скорости выхода биогаза  $w^*$ :  $\bar{w} \rightarrow w^*$  при  $T \rightarrow \infty$ .

Для определения неподвижных точек системы (1) ее правые части приравняются нулю. При этом получают следующие решения:

$$X^* = 0, L^* = L_0; \quad (7)$$

$$X^* = \frac{L_0}{\alpha} - \frac{p}{\alpha b}, L^* = \frac{p}{b}. \quad (8)$$

Нетрудно убедиться, что неподвижные точки (7) получаются из (8) при  $p = 0$  или  $p = bL_0$ . Эти значения определяют допустимый диапазон изменения параметра  $p$ :  $p \in [0, bL_0]$  (т.к. при  $p > bL_0$   $X^* < 0$ ).

Систему ОДУ (1) можно исследовать на устойчивость по первому приближению [Бибиков, 2011]. Заменяя  $X = \tilde{X} + \frac{L_0}{\alpha} - \frac{p}{\alpha b}$ ,  $L = \tilde{L} + \frac{p}{b}$  и отбрасывая одночлены второй степени, можно получить систему первого приближения:

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{X}}{dt} = \left( \frac{bL_0}{\alpha} - \frac{p}{\alpha} \right) \tilde{L}, \\ \frac{d\tilde{L}}{dt} = -\alpha p \tilde{X} - bL_0 \tilde{L}, \end{cases} \quad (9)$$

с характеристическим уравнением

$$\begin{vmatrix} 0 - \lambda & \frac{bL_0}{\alpha} - \frac{p}{\alpha} \\ -\alpha p & -bL_0 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + bL_0\lambda + bL_0p - p^2 = 0. \quad (10)$$

Используя теорему Виета, легко получить корни:  $\lambda_1 = -p$ ,  $\lambda_2 = -(bL_0 - p)$ .

Таким образом, если  $p < bL_0$ , то система асимптотически устойчива; если  $p = 0$  или  $p = bL_0$ , то систему нельзя исследовать по первому приближению; если  $p > bL_0$ , то система неустойчива, однако в этом случае, как говорилось ранее, система не будет иметь физического смысла.

Асимптотическая устойчивость системы ОДУ (1) позволяет представить задачу оптимального управления (6) в виде

$$p_{opt} = \arg \max_{p \in (0, bL_0)} w^*(p). \quad (11)$$

Иными словами, требуется найти точку максимума для выражения

$$w^*(p) = \gamma bL^* X^* = \frac{\gamma}{\alpha} \left( L_0 p - \frac{p^2}{b} \right). \quad (12)$$

Первая производная выражения (12) равна нулю при  $p = \frac{bL_0}{2}$ . Вторая производная в этом случае отрицательна. Это означает, что

$$p_{opt} = \frac{bL_0}{2} \quad (13)$$

является точкой максимума функции (12).

Можно построить другой оптимизационный критерий, связанный с максимизацией эффективности использования субстрата. Для этого необходимо минимизировать функцию  $L^*(p)$  (8):

$$p_{opt} = \arg \min_{p \in (0, BL_0)} L^*(p). \quad (14)$$

Минимум выражения (14) достигается при  $p_{opt} \rightarrow 0$ , что соответствует случаю периодического режима.

## Идентификация математической модели получения биогаза

Для практического использования модели (1) необходимо решить задачу идентификации параметров системы ОДУ по временному ряду экспериментальных данных.

Пусть имеется система ОДУ

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(\mathbf{a}, \mathbf{x}, t), \quad i = 1, \dots, d \quad (15)$$

с начальными условиями

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0), \quad (16)$$

где  $\mathbf{x} = \{x_i(t)\}$ ,  $i = 1, \dots, d$  – неизвестная вектор-функция;  $\mathbf{a} = \{a_l\}$ ,  $l = 1, \dots, m$  – вектор неизвестных коэффициентов; время  $t \in [t_0, T]$ . Требуется найти оценку  $\tilde{\mathbf{a}}$  вектора параметров  $\mathbf{a}$  по экспериментальным данным  $\mathbf{x}_n^e = \mathbf{x}^e(t_n)$ ,  $n = 1, \dots, N$ ,  $t_n \in [t_0, T]$ . Экспериментальные данные удобно представить в виде матрицы  $X^e = \{x_{i,n}^e\}_{d \times N}$ , столбцами которой являются векторы  $\mathbf{x}_n^e$ .

Для поиска оценок  $\tilde{\mathbf{a}}$  в соответствии с методом наименьших квадратов минимизируется величина относительных отклонений теоретических и экспериментальных значений [Безручко, 2000]. Соответствующая целевая функция имеет вид:

$$F(\mathbf{a}) = \sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^d \left( \frac{x_i(t_n) - x_{i,n}^e}{x_{i,n}^e} \right)^2. \quad (17)$$

В этом случае искомые оценки параметров определяются как

$$\tilde{\mathbf{a}} = \arg \min_{\mathbf{a} \in \Psi^m} F(\mathbf{a}), \quad (18)$$

где  $\Psi^m$  – область изменения параметров ( $\mathbf{a} \in \Psi^m$ ).

Для получения теоретических значений  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$  для системы (15) решается задача Коши с начальным условием (16). Численное решение системы (15) осуществлялось методом Рунге-Кутты 4-го порядка, обладающим хорошими показателями скорости сходимости при сравнительно низких вычислительных затратах [Вержбицкий, 2001].

В качестве алгоритма минимизации целевой функции (17) выбран гибридный генетический алгоритм с вещественным кодированием [Гладков, Курейчик, 2010; Тененев, Якимович, 2010]. Генети-

ческий алгоритм эффективно решает многоэкстремальные задачи и задачи высокой размерности. В отличие от алгоритмов локальной оптимизации (Ньютона, сопряженных градиентов и т. д.), для успешной работы которых требуется удачный выбор начального приближения, генетический алгоритм обрабатывает не единственное решение, а множество решений. Как показано в работе [Дмитриев, 2007], для повышения эффективности работы генетического алгоритма используется метод Хука-Дживса для дополнительного поиска в окрестности лучшего решения.

Оценкой качества математической модели является корень из среднеквадратического отклонения теоретических и экспериментальных значений (в данном случае  $r = 2$  – число переменных, для которых имеются экспериментальные данные):

$$K = \sqrt{\frac{1}{Nr} \sum_{i=1}^r \frac{1}{M_i^2} \sum_{n=1}^N (x_i(t_n) - x_{i,n}^e)^2}, \quad (19)$$

где

$$M_i = \max_{n=1, \dots, N} x_{i,n}^e. \quad (20)$$

## Результаты идентификации математической модели

Идентификация математической модели осуществлялась на примере периодического режима метаногенеза в мезофильной среде. В качестве субстрата рассматривались отходы птицефабрик, свинокомплексов и ферм крупного рогатого скота (КРС). Влажность отходов птицефабрик составляет 85%, а отходов свинокомплексов и ферм КРС – 90%. Значения параметров, используемые для идентификации модели, задавались на основе анализа экспериментальных данных для рассматриваемых видов сырья, представленных для отходов птицефабрик и свинокомплексов в работе [Ntengwe, Njovu, Kasali, 2010], а для отходов ферм КРС – в работах [Budiyono, Widiassa, 2010; Abdullahi, Isma'il, Galadima, 2011].

Результаты идентификации и качества оценивания параметров модели представлены в таблице 1 и на рис. 2–4.

Таблица 1

Параметр	Оценка для отходов		
	птицефабрик	свинокомплексов	ферм КРС
$b$	0.004	0.006	0.009
$\alpha$	1.685	1.343	1.066
$\gamma$	1.409	1.224	0.846
$K$	0.043	0.045	0.068

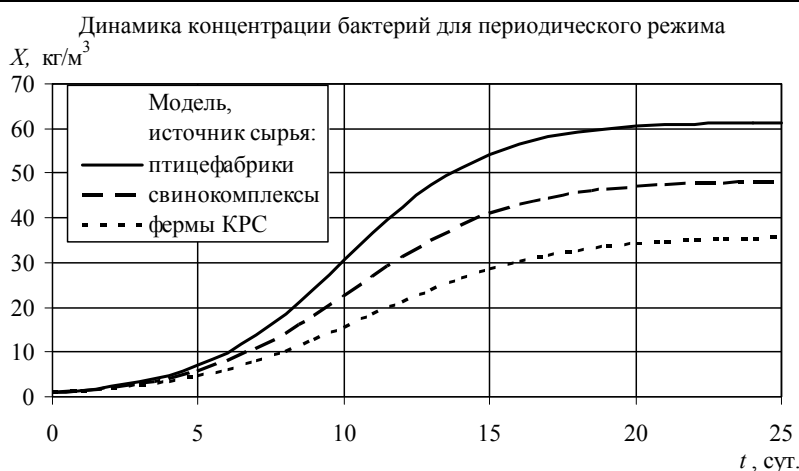


Рис. 2

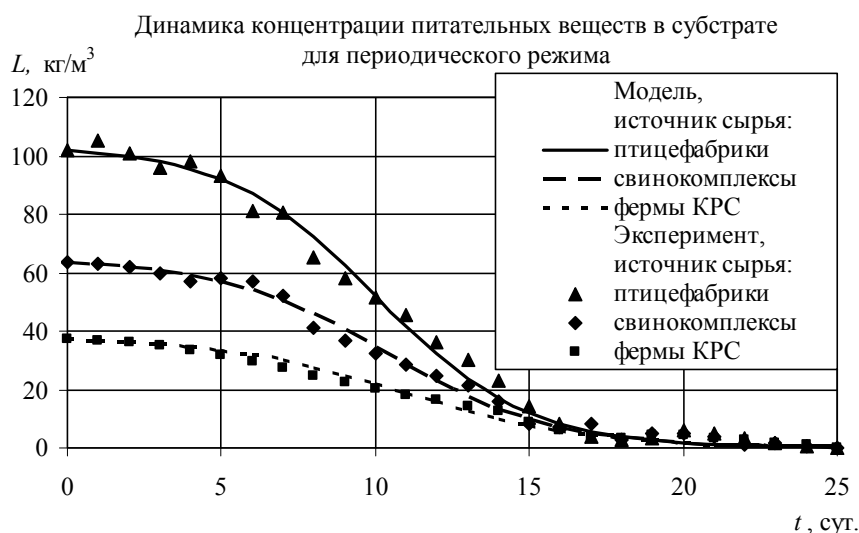


Рис. 3



Рис. 4

Анализ представленных результатов показывает, что исследуемая математическая модель достаточно хорошо описывает эмпирические зависимости для периодического режима. Предполагая, что вид модели не меняется, мы использовали ее для описания непрерывного режима.

## Результаты оптимизации математической модели

Оптимальные значения скорости подачи субстрата  $p_{opt}$ , вычисленные по формуле (13), составляют 0,201 – для отходов птицефабрик, 0,182 – для отходов свиноккомплексов, 0,159 – для отходов ферм КРС.

Графики характеристик процесса получения биогаза при непрерывном режиме для оптимальной скорости подачи субстрата приведены на рис. 5–7.

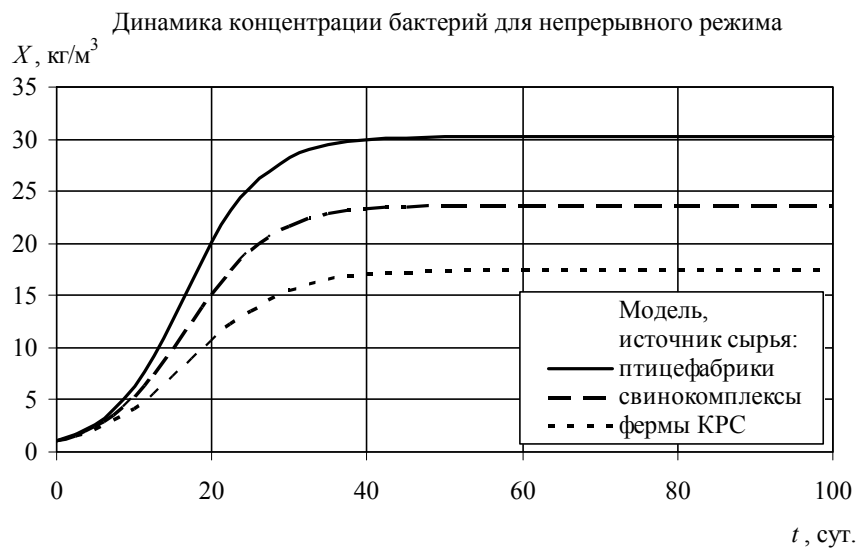


Рис. 5

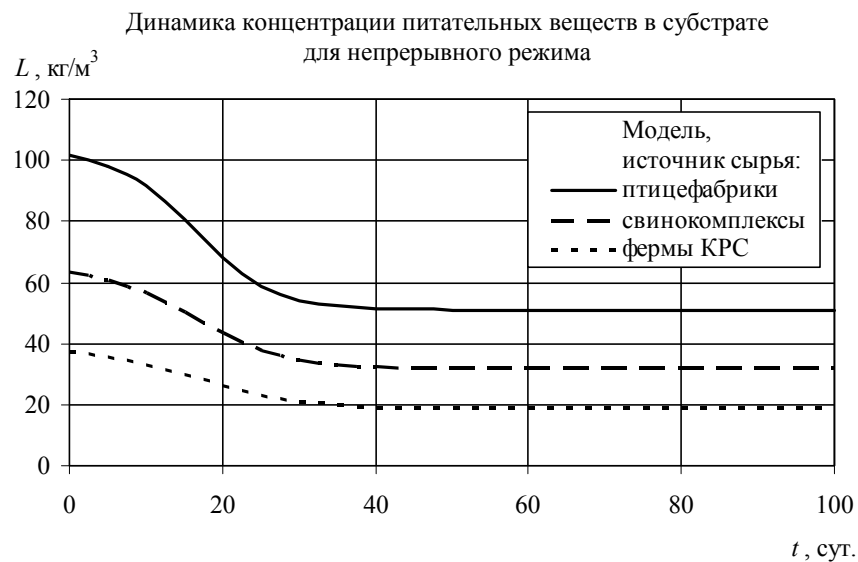


Рис. 6



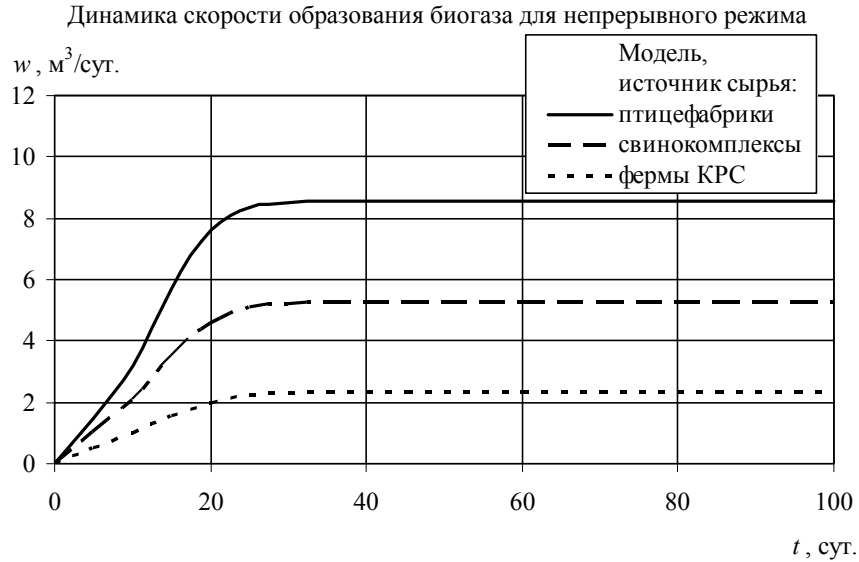


Рис. 7

Зависимость среднесуточного выхода биогаза от скорости подачи субстрата приведена на рис. 8.

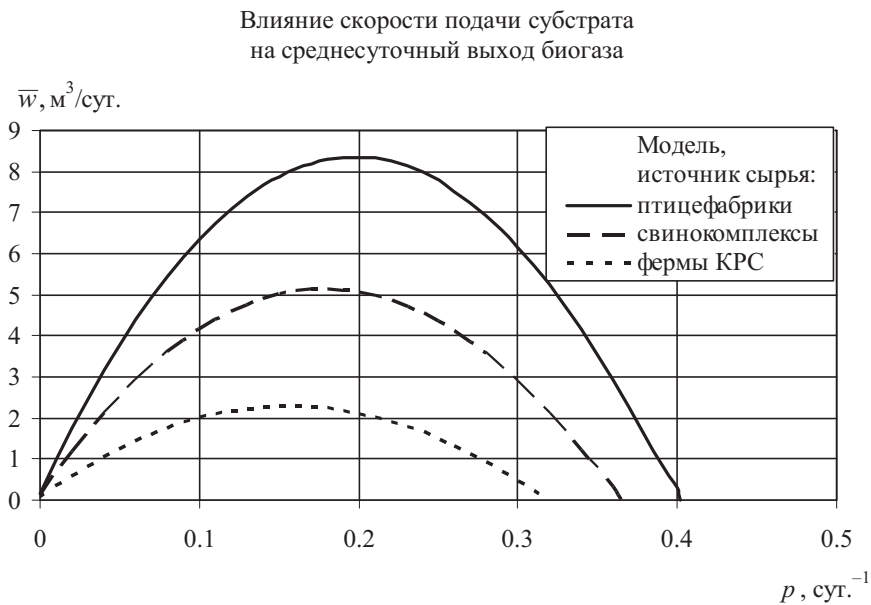


Рис. 8

Сравнительные характеристики метаногенеза при различных режимах подачи субстрата представлены в таблице 2.

Таблица 2

Характеристики	Источник сырья		
	птицефабрики	свинокомплексы	фермы КРС
Периодический режим (период ферментации – 25 сут.)			
Среднесуточный выход биогаза, м <sup>3</sup> /сут.	3.72	2.32	1.36
Средний выход биогаза с единицы массы сырья, м <sup>3</sup> /т	93	58	34
Непрерывный режим			
Период ферментации, сут.	5.0	5.5	6.3
Среднесуточный выход биогаза, м <sup>3</sup> /сут.	8.46	5.24	2.34
Средний выход биогаза с единицы массы сырья, м <sup>3</sup> /т	42	29	15

## Выводы по работе

Предложена математическая модель, описывающая процесс получения биогаза из органического сырья. Проведена идентификация параметров данной модели на примере отходов птицефабрик, свинокомплексов и ферм КРС. Проведены расчеты для периодического и непрерывного режимов работы биогазовой установки.

В случае периодического режима происходит полная ферментация субстрата, поэтому выход биогаза с единицы объема субстрата максимален, однако средний выход биогаза в единицу времени достаточно низок.

В случае непрерывного режима при оптимальной скорости подачи субстрата достигается максимальный выход биогаза в единицу времени. Так, среднесуточный выход в данном случае превышает среднесуточный выход при периодическом режиме для отходов птицефабрик и свинокомплексов в 2,3 раза, для отходов ферм КРС – в 1,7 раза. Однако, продолжительность ферментации при этом составляет 5–6 суток, что приводит к неполной переработке субстрата. Так, средний выход биогаза с единицы массы сырья при непрерывном режиме и оптимальной скорости подачи сырья в 2 раза ниже, чем при периодическом. Таким образом, выбор режима производства биогаза зависит от приоритета целей предприятия: максимизация объема или скорости выхода биогаза.

## Список литературы

- Безручко Б. П., Смирнов Д. А. Реконструкция обыкновенных дифференциальных уравнений по временным рядам: учеб. для вузов. – Саратов: Изд-во ГосУНЦ «Колледж», 2000. – 46 с.
- Бибиков Ю. Н. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений: учеб. для вузов. – М.: Лань, 2011. – 304 с.
- Вержбицкий В. М. Численные методы (математический анализ и обыкновенные дифференциальные уравнения): учеб. для вузов. – М.: Высшая школа, 2001. – 382 с.
- Гладков Л. А., Курейчик В. В., Курейчик В. М. Генетические алгоритмы: учеб. для вузов. – М.: Физматлит, 2010. – 368 с.
- Гюнтер Л. И., Гольдфарб Л. Л. Метантенки. – М.: Стройиздат, 1991. – 128 с.
- Дворецкий Д. С., Дворецкий С. И., Муратова Е. И., Ермаков А. А. Компьютерное моделирование биотехнологических процессов и систем. – Тамбов: Изд-во ТГТУ, 2005. – 80 с.
- Дмитриев С. В. Разработка гибридных генетических алгоритмов для решения задач оптимального управления динамическими системами: дис... канд. техн. наук. – Ижевск, 2007. – 125 с.

- Свалова М. В.* Математическая модель процесса получения биогаза из отходов продукции птицеводства // Вестник Ижевского государственного технического университета. – 2008. – № 3. – С. 145–146.
- Тененев В. А., Якимович Б. А.* Генетические алгоритмы в моделировании систем: монография. – Ижевск: Изд-во ИжГТУ, 2010. – 308 с.
- Эдер Б., Шульц Х.* Биогазовые установки. Практическое пособие [Электронный ресурс] // Сайт компании «Зорг». – 2008. URL: [http://zorgbiogas.ru/upload/pdf/Biogas\\_plants\\_Practics.pdf](http://zorgbiogas.ru/upload/pdf/Biogas_plants_Practics.pdf) (дата обращения 10.03.2012).
- Abdullahi I., Isma'il A., Galadima A.* Effect of Kinetic Parameters on Biogas Production from Local Substrate using a Batch Feeding Digester [Электронный ресурс] // European Journal of Scientific Research. – 2011. – Vol. 57, № 4. – P. 626–634. URL: [http://www.eurojournals.com/EJSR\\_57\\_4\\_13.pdf](http://www.eurojournals.com/EJSR_57_4_13.pdf) (дата обращения 21.02.2012).
- Budiyono I. N., Widiyasa S. J.* Increasing Biogas Production Rate from Cattle Manure Using Rumen Fluid as Inoculums [Электронный ресурс] // International Journal of Basic & Applied Sciences IJBAS-IJENS. – 2010. – Vol. 10, № 1. – P. 68–74. URL: <http://www.ijens.org/101501-8282%20IJBAS-IJENS.pdf> (дата обращения 21.02.2012).
- Gerber M.* An Analysis of Available Mathematical Models for Anaerobic Digestion of Organic Substances for Production of Biogas [Электронный ресурс] // Ruhr-Universitat Bochum. – 2008. – URL: [http://www.ruhr-uni-bochum.de/thermo/Forschung/pdf/IGRC\\_Full\\_Paper\\_Paris.pdf](http://www.ruhr-uni-bochum.de/thermo/Forschung/pdf/IGRC_Full_Paper_Paris.pdf) (дата обращения 9.03.2012).
- Ntengwe F. W., Njovu L., Kasali G.* Biogas production in cone-closed floatingdome batch digester under tropical conditions [Электронный ресурс] // International Journal of ChemTech Research. – 2010. – Vol. 2, № 1. – P. 483–492. URL: [http://sphinxsai.com/sphinxsaiVol\\_2No.1/ChemTech\\_Vol\\_2No.1/ChemTech\\_Vol\\_2No.1PDF/CT=78%20\(483-492\).pdf](http://sphinxsai.com/sphinxsaiVol_2No.1/ChemTech_Vol_2No.1/ChemTech_Vol_2No.1PDF/CT=78%20(483-492).pdf) (дата обращения 21.02.2012).