КОМПЬЮТЕРНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ И МОДЕЛИРОВАНИЕ 2012 Т. 4 № 2 С. 369−389

Ки&М

МОДЕЛИ В ФИЗИКЕ И ТЕХНОЛОГИИ

УДК: 532.5

Эффект возбуждения подкритических колебаний в стохастических системах с запаздыванием. Часть II. Управление равновесием жидкости

Д. А. Брацун [1,a], А. В. Зюзгин [2,b]

[1] Пермский государственный педагогический университет,
Россия, 614600, г. Пермь, ул. Сибирская, д. 24
[2] Пермский государственный национальный исследовательский университет,
Россия, 614990, г. Пермь, ул. Букирева, д. 15

E-mail: [a] dmitribratsun@rambler.ru, [b] alexey.zyuzgin@gmail.com

Получено 19 апреля 2012 г.

В работе теоретически и экспериментально рассматривается задача об автоматическом поддержании механического равновесия неоднородно нагретой жидкости в термосифоне с помощью подсистемы, которая подавляет конвекцию посредством малых изменений ориентации системы в пространстве. Обнаружено, что чрезмерное усиление обратной связи возбуждает в системе колебания, причина которых кроется в запаздывании работы контроллера. При наличии шума колебания возникают даже тогда, когда детерминистское описание предсказывает стационарное поведение. Получено хорошее согласие между экспериментом и теорией.

Ключевые слова: запаздывание, стохастические системы, колебания, управление, конвекция

Effect of subcritical excitation of oscillations in stochastic systems with time delay. Part II. Control of fluid equilibrium

D. A. Bratsun [1], A. V. Zyuzgin [2]

[1] *Perm State Pedagogical University, Faculty of Physics, 24, Sibirskaya str., Perm, 614600, Russia*
[2] *Perm State National Research University, Faculty of Physics, 15, Bukireva str., Perm, 614990, Russia*

Abstract. – The problem of active control of the mechanical equilibrium of an inhomogeneously heated fluid in a thermosyphon is studied theoretically and experimentally. The control is performed by using a feedback subsystem which inhibits convection by changing the orientation of thermosyphon in space. It is shown that excess feedback leads to the excitation of oscillations which are related to a delay in the controller work. In the presense of noise, the oscillations arise even when deterministic description predicts stationary behaviour. The experimental data and theory are in good agreement.

Keywords: time delay, stochastic systems, oscillations, control, convection

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2012, vol. 4, no. 2, pp. 369–389 (Russian).

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования Пермского края (грант С-26/244), Министерства науки и образования РФ (ГК № 1.3103.2011).

© 2012 Дмитрий Анатольевич Брацун, Алексей Викторович Зюзгин

Введение

В последнее время все больший интерес вызывают динамические системы с запаздывающим аргументом. Диапазон приложений включает в себя такие разные разделы естествознания, как популяционная динамика [Мюррей, 2009], нелинейные химические реакции и вопросы генной регуляции [Bratsun, Volfson, Hasty, Tsimring, 2005a], механические системы [Lakshmanan, Senthilkumar, 2010] и т. д. Запаздывание может быть обусловлено самыми различными причинами, например ограниченностью скорости распространения взаимодействия (электрического или светового сигнала), наличием инерционности некоторых элементов (при управлении с обратной связью) или существованием цепочек многоэтапных последовательных реакций с известным результатом в конце (при транскрипции генов).

Так как большинство реальных динамических процессов демонстрирует стохастическое поведение, то понятен интерес исследователей к изучению влияния шума на свойства систем с запаздыванием. В работах автора [Bratsun, Volfson, Hasty, Tsimring, 2005a; Bratsun, Volfson, Hasty, Tsimring, 2005b; Брацун, 2011] вопросы взаимодействия запаздывания и стохастических флуктуаций были рассмотрены для процессов транскрипции/трансляции генов. Обнаружен эффект возбуждения в подкритической области колебаний за счет взаимодействия шума и запаздывания обратной связи. Похожее по своей природе явление обсуждается в классической монографии [Стратонович, 1961], посвященной роли флуктуаций в работе радиотехники. При обсуждении влияния собственных флуктуаций на работу лампового генератора Стратонович отмечает, что даже если на генератор не действуют никакие внешние флуктуационные воздействия, а сам он работает в идеально стабильных стационарных условиях, то генерируемые автоколебания все же не будут вполне стабильны. Он вводит понятие собственных флуктуаций (*дробовой шум* в лампе), которые возникают внутри элементов схемы генератора, и показывает средствами стохастического анализа, что спектр генерируемого в подкритической области параметров сигнала имеет полосовую структуру. Полученные в работах [Bratsun, Volfson, Hasty, Tsimring, 2005a; Брацун, 2011] спектры в точности похожи на спектр, приведенный в монографии [Стратонович, 1961]. Тем не менее ламповый генератор Стратоновича и биологические системы, рассмотренные в работах автора, существенно различаются: автоколебания в последних генерируются запаздыванием, а происходящие процессы носят немарковский характер.

Данная работа продолжает серию из двух статей, посвященных теме приложений эффекта возбуждения подкритических осцилляций за счет взаимодействия шума и запаздывани. Если в первой статье [Брацун, 2011] были рассмотрены проявления эффекта в биохимических процессах, происходящих при транскрипции/трансляции генов, то настоящая работа посвящена системе совершенно другой природы. Рассматривается вопрос об активном автоматическом управлении механическим равновесием жидкости в конвективной петле (*термосифоне*) посредством отрицательной обратной связи. На первый взгляд шум вдали от точки бифуркации не может оказывать существенного влияния на поведение гидродинамической системы, так как она обладает гигантским количеством степеней свободы. Однако, как показано ниже, благодаря специальной конструкции рассматриваемой системы, а также наличию в ней управляющей цифровой подсистемы изучаемый эффект проявляет себя в полной мере.

Автоматическое управление гидродинамическими системами

Вопросы управления процессами тепломассопереноса вызывают значительный интерес как с фундаментальной точки зрения, так и в связи с многочисленными технологическими приложениями. Вероятно, впервые проблема использования управления с обратной связью в сплошных средах рассматривалась в монографии [Ладиков, 1978], посвященной стабилизации неустойчивостей высокотемпературной плазмы, возникающих в токамаках. Автор развивает идею о пространственно-распределенном регуляторе, который активно взаимодействует с объектом регулирования (тоже пространственно-распределенной средой) и может значитель-

но улучшить ее динамические характеристики с точки зрения производственных процессов. Главный вопрос, поднимаемый в монографии, касается возможности реализации работы регулирующего устройства в принципе. Ведь в отличие от классической постановки задачи в теории автоматического управления, где объект и регулятор являются системами с сосредоточенными параметрами, здесь объект и управляющее устройство представляют собой континуальные среды, описываемые дифференциальными уравнениями в частных производных. Автор приводит ряд примеров, в каждом из которых предлагает структуру такого устройства.

Развитие технологий требует создания систем автоматического управления при помощи обратной связи, которые не требуют постоянного слежения человека за состоянием систем. При активном управлении конвекцией целью является изменение состояния конвективной системы через подавление или, наоборот, усиление естественно возникающих малых возмущений течения в реальном времени. Управляющий параметр при этом сам становится функцией времени и состояния управляемой системы. Введение обратной связи является преимуществом, поскольку приводит к более эффективному управлению. Значительный вклад в исследование вопросов активного управления конвекцией посредством обратной связи внесла исследовательская группа во главе с Бау. В работах [Singer, Bau, 1991; Wang, Singer, Bau, 1992] управление с обратной связью, организованное с помощью специального подогрева системы, поддерживало стационарное течение в конвективной петле тороидальной формы при значених параметров, когда в отсутствие управления реализуется хаотический режим. В более свежих работах интересы этой исследовательской группы переместились к использованию нейросети для управления хаотической конвекцией [Yuen, Bau, 1998], управлению конвекцией Марангони [Bau, 1999], управлению течениями в микро-жидкостных системах [Wang, Chen, Qian, Bau, 2005]. Наконец, в работе [Remillieux, Zhao, Bau, 2007] рассмотрена возможность управления конвекцией Рэлея–Бенара в плоском слое жидкости, подогреваемом снизу.

В цитированных выше работах в качестве управляющего воздействия использовалась изменение температуры на границе системы. Однако такая методика оправдывает себя только при небольших отклонениях параметра Рэлея от критического значения. Более того, колебания температуры на границах могут привести к возбуждению вторичной конвекции. Кроме того, к недостаткам такого метода управления стоит отнести и тот факт, что при лабораторной реализации не удается достичь равномерного изменения температуры из-за влияния конечной теплопроводности реальных жидкостей. Изменение температуры границы приводит к образованию вблизи нее теплового скин-слоя, что существенно осложняет задачу [Гетлинг, 1975]. Исходя из этого, для управляющего воздействия лучше использовать модуляцию силового поля.

Остановимся на исследованиях, в которых в качестве управляющего воздействия применялась модуляция по направлению поля массовых сил. Известно, что отклонение градиента температуры от вертикали влияет на скорость и вид течения, а значит, дает возможность управлять последним. В качестве примера возьмем модельную задачу о двумерной надкритической конвекции в горизонтальном цилиндре, подогреваемом снизу. Как показано в работах [Чернатынский, Шлиомис, 1973; Келлер, Тарунин, 1990], после потери устойчивости механического равновесия возникает одновихревое движение. Это движение может возникнуть с направлением вращения жидкости как по часовой, так и против часовой стрелки, причем оба решения из-за симметрии задачи совершенно равноправны. Показано, что такой наклон разрушает симметрию задачи и вызывает закрутку течения в предпочтительном направлении. В случае, если существовавшее до наклона одновихревое течение имеет противоположное направление вращения, после отклонения полости от горизонтального положения такое движение затухает и уступает место вихрю с предпочтительной закруткой. При этом значение скорости конвективного движения проходит через нуль. Таким образом, отклонение контейнера, содержащего жидкость, от горизонтального положения оказывает существенное влияние на интенсивность и направление конвективной циркуляции. Поэтому в качестве управляющего воздействия на конвективную систему очень удобно выбирать изменение взаимной ориентации продольного градиента температуры и вектора ускорения свободного падения.

При экспериментальном и теоретическом изучении активного управления конвективной устойчивостью достаточно часто используется термосифон – замкнутая трубка, заполненная жидкостью, находящейся в неизотремических условиях. Такой выбор обусловлен, с одной стороны, относительно простыми для описания режимами течений, возникающими в связанных каналах, а с другой стороны – тем, что эти режимы достаточно легко поддаются управлению. Кроме того, задача об управлении в конвективной петле интересна как модельная, описывающая в некоторых случаях управление вихревым конвективным движением в замкнутом объеме. Эта проблема широко исследовалась как теоретическими, так и экспериментальными методами. В упоминавшейся уже работе [Singer, Bau, 1991] теоретически и экспериментально решалась задача по управлению с обратной связью режимами конвекции в тороидальной, подогреваемой снизу конвективной петле. Однако полученный в численных расчетах эффект стабилизации механического равновесия жидкости не получил экспериментального подтверждения. Поэтому в работе [Tang, Bau, 1993] авторы исследовали возможность стабилизации механического равновесия жидкости в пористой среде, чтобы в дальнейшем реализовать соответствующий эксперимент для более инертной и медленной с точки зрения характерных времен движения системы. По их мнению, это позволило бы в широком диапазоне изменять разность температур между теплообменниками для осуществления перехода конвективной системы из состояния механического равновесия к стационарному движению и от стационарного режима течения – к колебательному. По нашему мнению, такой подход не является оправданным. Для того что бы экспериментально реализовать динамическую стабилизацию механического равновесия, можно использовать и однородную жидкость. Однако эти соображения не понижают ценности работы [Tang, Bau, 1993] как самостоятельного исследования, посвященного управлению конвекцией в пористой среде.

Важные экспериментальные исследования были проведены в работах [Зюзгин, Путин, 1998; Брацун, Зюзгин, Половинкин, Путин, 2008]. В отличие от множества работ зарубежных и российских авторов [см., например, Ott, Grebogi, Yorke, 1990; Erhard, Muller, 1990; Wang, Singer, Bau, 1992; Дроздов, 1995], в качестве объекта управления был рассмотрен термосифон прямоугольной формы. Оказывается, несмотря на кажущуюся привлекательность тороидального термосифона, столь популярного среди исследователей, практическая реализация механического равновесия в нем даже без управления представляет собой нетривиальную задачу. И действительно, чтобы в круглом термосифоне установилось равновесное состояние, необходимо добиться идеально вертикального градиента температуры. А это значит, что подогревать термосифон нужно весьма специальным образом, причем величина нагрева должна меняться от точки к точке конвективной петли. Видимо, именно по этой причине ни в одной из публикаций, посвященных управлению тороидальным термосифоном, экспериментально получить механическое равновесие (не говоря уж об управлении его устойчивостью) так и не удалось. Как показано в [Зюзгин, Путин, 1998], получение состояния механического равновесия жидкости в прямоугольной конвективной петле – дело технически несложное. В этой работе впервые была продемонстрирована экспериментальная возможность управления механическим равновесием жидкости в конвективной системе. Были обнаружены новые явления, которые не нашли своего объяснения в теоретических работах. В частности, была обнаружено, что чрезмерное усиление обратной связи возбуждает в системе колебания. Теоретическое объяснение было дано в работе [Брацун, Зюзгин, Половинкин, Путин, 2008]. Оказалось, что эти колебания вызываются запаздыванием управляющей подсистемы вносить коррекцию в состояние управляемой системы. Таким образом, как оказалось, мы сталкиваемся здесь с типичной системой, имеющей отрицательную обратную связь с запаздыванием.

Математическая модель

Для получения модельных уравнений рассмотрим систему двух связанных параллельных каналов, окруженных массивом высокой теплопроводности. В массиве задается линейный гра-

диент температуры A, направленный вдоль каналов, при этом его ориентация по отношению к силе тяжести может динамически меняться во времени. Это изменение задается единичным вектором $\mathbf{g} = -g\boldsymbol{\gamma}$, который составляет угол ϕ с направлением каналов (рис. 1). Обозначим высоту и ширину термосифона как H и L соответственно, а поперечные размеры канала определим неравенствами $-d_1 \le x \le d_1$ и $-d_2 \le y \le d_2$. Исходными уравнениями для вывода модели является система уравнений в приближении Буссинеска:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\,\Delta\mathbf{v} + g\beta T\boldsymbol{\gamma}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla T = \chi\,\Delta T, \tag{2}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{v} = 0, \tag{3}$$

где $\mathbf{v}$ – скорость, T – температура, p – давление. Остальные обозначения стандартны. На границах для скорости ставится стандартное условие прилипания:

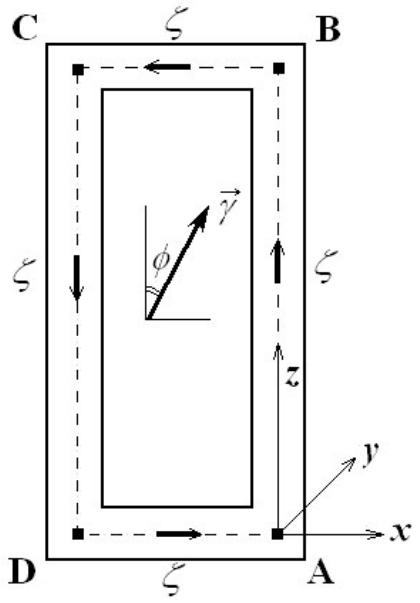


Рис. 1. Схематическое изображение прямоугольного термосифона

$$\mathbf{v} = 0. \tag{4}$$

Что касается температуры, то три стенки канала будем считать высокотеплопроводными, а четвертую, лицевую к наблюдателю, – теплоизолированной:

$$T\big|_{1-3} = -A\,z, \qquad \left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_4 = 0, \tag{5}$$

Граничное условие (5) не носит принципиального характера. Дело в том, что в эксперименте конвективный канал был выточен в едином массиве алюминия, который затем для визуализации течения был сверху накрыт листом оргстекла. Поэтому для лучшего согласия с экспериментом мы ставим граничные условия для температуры, наиболее близко моделирующие устройство экспериментальной установки. Неоднородные условия на границе (5) лишь слегка корректируют выбор аппроксимирующих функций, что проявляет себя в значениях коэффициентов в конечных уравнениях, но качественно ничего не меняет.

Вектор $\boldsymbol{\gamma}$ имеет компоненты $\boldsymbol{\gamma} : (\sin\varphi(t), 0, \cos\varphi(t))$ и, таким образом, может вращаться в плоскости (x, z) (рис. 1). Угол поворота $\varphi(t)$ задается обратной связью, посредством которой и осуществлется внешнее управление конвективной системой. Вид функции $\varphi(t)$ будет задан ниже. Как видно из уравнений (1)–(5), состояние равновесия в системе реализуется только в случае, когда сила тяжести и градиент температуры направлены в одну сторону $\phi = 0$. При малейшем наклоне термосифона в ту или иную сторону $(\phi \ne 0)$ механическое равновесие жидкости без внешнего управления в системе становится невозможным.

Так как ширина каналов мала по сравнению с H и температура жидкости в пределах поперечного сечения меняется мало, то исходные уравнения конвекции (1)–(5) могут быть усреднены по сечению канала. Представим поля скорости и температуры в виде следующих аппроксимаций, удовлетворяющих граничным условиям (4), (5):

$$[\mathrm{AB}]\ \text{и}\ [\mathrm{CD}]: \quad v_z = X(t)\cos\frac{\pi x}{2d_1}\cos\frac{\pi y}{2d_2}, \quad v_x = 0, \quad v_y = 0; \tag{6}$$

$$[\text{BC}] \text{ и } [\text{DA}]: \quad v_x = X(t)\cos\frac{\pi x}{2d_1}\cos\frac{\pi y}{2d_2}, \quad v_y = 0, \quad v_z = 0; \tag{7}$$

$$[\text{AB}] \text{ и } [\text{CD}]: \quad T = \Theta(\varsigma,t)\cos\frac{\pi x}{2d_1}\sin\left(\frac{\pi y}{2d_2}+\frac{\pi}{4}\right) - Az; \tag{8}$$

$$[\text{BC}]: \quad T = \Theta(\varsigma,t)\cos\frac{\pi x}{2d_1}\sin\left(\frac{\pi y}{2d_2}+\frac{\pi}{4}\right) - AH; \tag{9}$$

$$[\text{DA}]: \quad T = \Theta(\varsigma,t)\cos\frac{\pi x}{2d_1}\sin\left(\frac{\pi y}{2d_2}+\frac{\pi}{4}\right). \tag{10}$$

Поперечное сечение конвективной петли определяется как $-d_1 \le x \le d_1$, $-d_2 \le y \le d_2$ на отрезках [AB], [CD] и $-d_1 \le z \le d_1$, $-d_2 \le y \le d_2$ – на отрезках [BC], [DA]. Уравнения (1)–(3) будем усреднять в смысле следующего скалярного произведения:

$$\langle ... \rangle = \int_{AB}\int_{-d_1}^{d_1}\int_{-d_2}^{d_2} ... \, dx\, dy\, d\zeta + \int_{BC}\int_{-d_1}^{d_1}\int_{-d_2}^{d_2} ... \, dz\, dy\, d\zeta + \int_{CD}\int_{-d_1}^{d_1}\int_{-d_2}^{d_2} ... \, dx\, dy\, d\zeta + \int_{DA}\int_{-d_1}^{d_1}\int_{-d_2}^{d_2} ... \, dz\, dy\, d\zeta, \tag{11}$$

где переменная ζ пробегает по контуру петли (рис. 1).

Подставляя представления (6)–(10) в уравнения (1)–(3) и интегрируя согласно (11), в результате получим

$$\frac{dX}{dt} = -\frac{\nu\pi^2}{4d^2}X + \frac{4g\beta}{3\pi(H+L)}\oint \Theta(\varsigma,t)\gamma\, d\zeta + \frac{8g\beta AHL}{\pi^2(H+L)}\sin\phi, \tag{12}$$

$$\frac{\partial\Theta}{\partial t} = -\frac{\chi\pi^2}{4\bar{d}^2}\Theta + X\left(\frac{16}{3\pi^2}\frac{\partial\Theta}{\partial\varsigma} + \frac{8}{3\pi}\Phi(\varsigma)\right), \tag{13}$$

где $\Phi = -A$ для $0 \le \varsigma \le H$ и $\Phi = A$ для $H + L \le \varsigma \le 2H + L$. Здесь равновесное состояние уже явно присутствует в системе – его описывают последние слагаемые в уравнениях (12) и (13). После усреднения система (12)–(13) тем не менее остается системой уравнений в частных производных, так как амплитуда температуры в (9), (10) продолжает оставаться функцией координат. Следующий этап упрощения – нахождение приближенного решения методом Галеркина. Для этого амплитудная функция $\Theta(\varsigma,t)$ аппроксимируется двумя первыми модами

$$\Theta(\varsigma,t) = Y(t)\frac{\sin\dfrac{\pi(\varsigma+L/2)}{H+L}}{\sin\dfrac{\pi H}{2(H+L)}} + Z(t)\frac{\cos\dfrac{\pi(\varsigma+L/2)}{H+L}}{\cos\dfrac{\pi L}{2(H+L)}}, \tag{14}$$

которые удовлетворяют граничным условиям (4), (5).

Будем предполагать, что обратная связь в системе имеет линейный характер:

$$\phi(t) = -kY(t-\tau), \tag{15}$$

допуская возможность возникновения в управляющей подсистеме запаздывания τ. Здесь k обозначает размерный коэффициент усиления обратной связи.

Стандартная процедура метода Галеркина приводит к системе из трех обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dX(t)}{dt} = P(-X(t) + Y(t)\cos(KY(t-\tau)) - (\alpha R + \xi Z(t))\sin(KY(t-\tau))), \tag{16}$$

$$\frac{dY(t)}{dt} = -Y(t) - X(t)Z(t) + rX(t), \tag{17}$$

$$\frac{dZ(t)}{dt} = -Z(t) + X(t)Y(t), \tag{18}$$

где уравнения приведены уже в безразмерной форме. В качестве единиц измерения были выбраны: d – для длины, $4\overline{d}^2 / \chi\pi^2$ – для времени, $9\pi^7(H+L)\chi\nu / 4096\overline{d}^2 d^2 g\beta$ – для температуры. Здесь введены обозначения: $d \equiv (1/d_1^2 + 1/d_2^2)^{-1/2}$, $\overline{d} \equiv (1/d_1^2 + 1/4d_2^2)^{-1/2}$. В системе появились соответственно число Прандтля, число Рэлея и безразмерный параметр управления:

$$P = \frac{\nu\overline{d}^2}{\chi d^2}, \quad R = \frac{8192}{9\pi^8}\frac{Ag\beta d^2\overline{d}^2}{\nu\chi}\sin^2\frac{\pi H}{2(H+L)}, \quad K = \frac{9\pi^7}{4096}\frac{K\nu\chi(H+L)}{g\beta d^2\overline{d}^2}\frac{1}{\sin\dfrac{\pi H}{2(H+L)}}. \tag{19}$$

Кроме того, имеется два параметра, связанных с конкретным видом геометрии термосифона:

$$\alpha = \frac{3\pi HL}{4(H+L)^2}\frac{1}{\sin^2\dfrac{\pi H}{2(H+L)}}, \qquad \xi = \mathrm{tg}\frac{\pi L}{2(H+L)}, \tag{20}$$

которые для конкретных параметров экспериментальной установки имели значения: $\alpha \approx 0{,}159$, $\xi \approx 0{,}113$. Заметим, что в отсутствие управления, $K = 0$, система (16)–(18) сводится к классическим уравнениям триплета Лоренца.

Линейный анализ устойчивости квазиравновесия жидкости

Рассмотрим сначала случай обратной связи без запаздывания. Линейный анализ устойчивости равновесия механического равновесия жидкости $X^* = 0$, $Y^* = 0$, $Z^* = 0$ по отношению к бесконечно малым возмущениям приводит к следующему характеристическому уравнению для инкремента λ:

$$(-1-\lambda)(\lambda^2 + (1+P)\lambda + P - RP(1-\alpha KR)) = 0. \tag{21}$$

Как видно из (21), система (16)–(18) при отсутствии запаздывани допускает неустойчивость только монотонного типа, которая определяется простой формулой для нейтральной кривой, которая не зависит от числа Прандтля:

$$K = \frac{R-1}{\alpha R^2}. \tag{22}$$

Из соотношения (22) хорошо видно, что в отсутствие внешнего управления $K = 0$ механическое равновесие жидкости становится неустойчивым при $R = 1$. Таким образом, критерий подобия R, введенный в (19), по своему смыслу является относительным числом Рэлея, которое выражается в единицах надкритичности. Предположим теперь, что запаздывание в управляющей системе имеется $\tau \neq 0$. Линеаризуя систему уравнений (16)–(18) около положения равновесия $X^* = 0$, $Y^* = 0$, $Z^* = 0$, получим

$$\frac{dX(t)}{dt} = P(-X(t) + Y(t) - \alpha KRY(t-\tau)), \tag{23}$$

$$\frac{dY(t)}{dt} = -Y(t) + rX(t), \tag{24}$$

$$\frac{dZ(t)}{dt} = -Z(t). \tag{25}$$

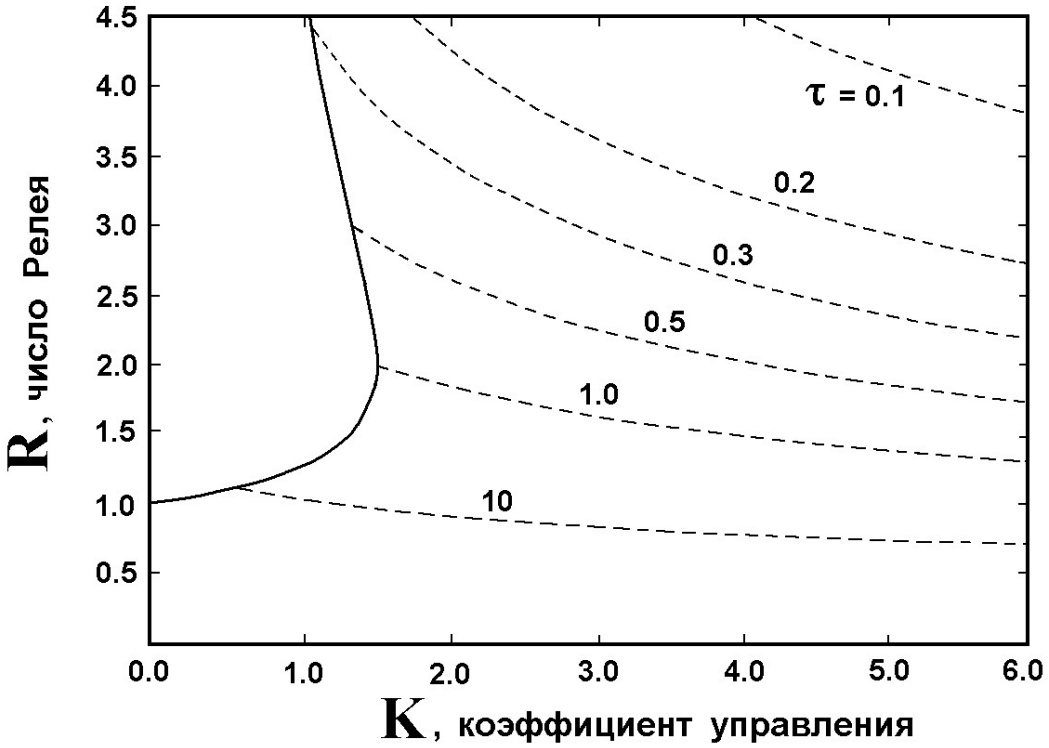


Рис. 2. Нейтральные кривые устойчивости механического равновесия жидкости на плоскости числа Рэлея R и коэффициента усиления обратной связи K. Сплошная линия соответствует возникновению монотонной неустойчивости (внутри мешка). Штриховыми линиями отмечены границы возникновения колебательной неустойчивости в зависимости от разных значений времени запаздывания (область неустойчивости выше кривых)

Мода, амплитуда которой описывается уравнением (25), всегда устойчива и может быть исключена из рассмотрения. Уравнения (23), (24) описывают динамические процессы, которые являются существенно разными по временным масштабам. Так как большинство экспериментов проводилось с трансформаторным маслом $(P = 3 \cdot 10^2)$, уравнение (23) описывает медленную эволюцию амплитуды X на фоне быстрых изменений Y. Поэтому можно положить

$$X(t) \approx Y(t) - \alpha K R Y(t-\tau). \tag{26}$$

Тогда вместо (24) получим одно замкнутое уравнение:

$$\frac{dY(t)}{dt} = (R-1)Y(t) - \alpha K R^2 Y(t-\tau). \tag{27}$$

Последнее уравнение при определенных условиях допускает осциллирующее решение. Найдем условие возникновения колебаний. Подставляя выражение для нормальных возмущений, приходим к следующему аналитическому выражению для инкремента неустойчивости $\lambda = \mu + I\omega$:

$$\mu = \frac{1}{\tau}\mathrm{Re}(\Lambda(-\tau\alpha K R^2 e^{\tau(1-R)})) + R - 1, \tag{28}$$

$$\omega = \frac{1}{\tau}\mathrm{Im}(\Lambda(-\tau\alpha K R^2 e^{\tau(1-R)})), \tag{29}$$

где $\Lambda(x)$ – функция Ламберта, которая по определению удовлетворяет выражению $\Lambda(x)\exp(\Lambda(x)) = x$. В частном случае $R = 1$ уравнение (27) может быть решено точно – бифурка-

ционное значение параметра управления в этом случае равно $K^* = \pi / 2\tau\alpha$. Период колебаний равен 4τ. В общем случае выражения (28) и (29) определяют целое семейство нейтральных кривых для бифуркации Хопфа $(\mu = 0,\ \omega \neq 0)$, параметрически зависящих от значения запаздывания τ (рис. 2). Как видно из рисунка, с ростом времени запаздывания управляющей подсистемы неустойчивость спускается ниже, существенно ограничивая возможности управления механическим равновесием жидкости. Попытки управления конвективной системой при $\tau > 10$ приводят к ее дестабилизации даже при тех значених параметров, когда система была устойчива без всякого управления. Таким образом, качество управления сильно зависит от способности управляющей подсистемы быстро реагировать на происходящие в термосифоне изменения.

Таким образом, рассмотрение математической модели в линейном приближении показало, что причиной возникновения колебательной неустойчивости, которая с точки зрения целей управления может считаться паразитной, является неспособность управляющей подсистемы вовремя вносить корректирующие изменения. Обнаружено, что попытка повышения эффективности управления путем простого усиления линейной обратной связи приводит к ситуации, когда само управление генерирует неустойчивость механического квазиравновесия.

Нелинейная динамика в области неустойчивости

Рассмотрим динамические свойства системы уравнений (16)–(18) с запаздывающей обратной связью (15). Как показал анализ линейной устойчивости основного состояния, $X^* = 0$, $Y^* = 0$, $Z^* = 0$, отвечающего механическому равновесию жидкости в термосифоне, в системе присутствуют критические возмущения двух типов: монотонные и колебательные (рис. 2). Необходимо отметить, что с ростом числа Рэлея R нейтральные кривые для этих возмущений сливаются. Это достаточно необычное поведение для нейтральных кривых, так как в автономных динамических системах, как правило, колебания возникают при размерности системы не ниже двух. Соответственно, нейтральная кривая для колебательной неустойчивости двукратно вырождена и может перезамыкаться только с двумя монотонными кривыми. Однако здесь мы имеем дело с динамической системой с запаздыванием. В таких системах колебания могут возникать даже в одномерном случае. Таким образом, между областями монотонной и колебательной неустойчивости выше точки слиния нейтральных кривых жесткой границы нет.

Рассмотрим два характерных среза $K = 0{,}5$ и $K = 3$ параметрического пространства (K, R). Вертикальная линия $K = 3$ пересекает нейтральную кривую в области колебательных возмущений примерно при $R \approx 3$. На рис. 3 в проекции на плоскость (X, Y) приведена эволюция динамических режимов, возникающих внутри области неустойчивости при $R > 3$.

Как видно из рисунка, выше бифуркации Хопфа в системе возникает один предельный цикл (рис. 3, $R = 3{,}5$). В точке бифуркации период колебаний равняется $T \approx 1{,}66$. С увеличением числа Рэлея амплитуда колебаний растет, сами колебания приобретают все более сложную форму (рис. 3, $R = 4{,}8$). Примерно при $r \approx 4{,}9$ происходит вилочная бифуркация цикла, нарушающая отражательную симметрию уравнений $X \to -X$, $Y \to -Y$, $Z \to Z$. В результате рождается сразу два несимметричных цикла (на рис. 3 показан лишь один), а старый цикл становится неустойчивым. После этого в системе реализуется сценарий перехода к хаотическому поведению через удвоение периода. На рис. 3 приводятся циклы удвоенного $(R = 4{,}96)$ и учетверенного периода $(R = 5{,}0)$. Результат такой эволюции – рождение странного аттрактора, имеющего фрактальную структуру (рис. 3, $R = 5{,}3$).

Из-за дискретной симметрии странных аттракторов в фазовом пространстве два и при дальнейшем увеличении числа Рэлея они объединяются в одно хаотическое множество. Как показало изучение различных срезов области колебательной неустойчивости, описанный сценарий воспроизводится и для других значений коэффициента усиления K.

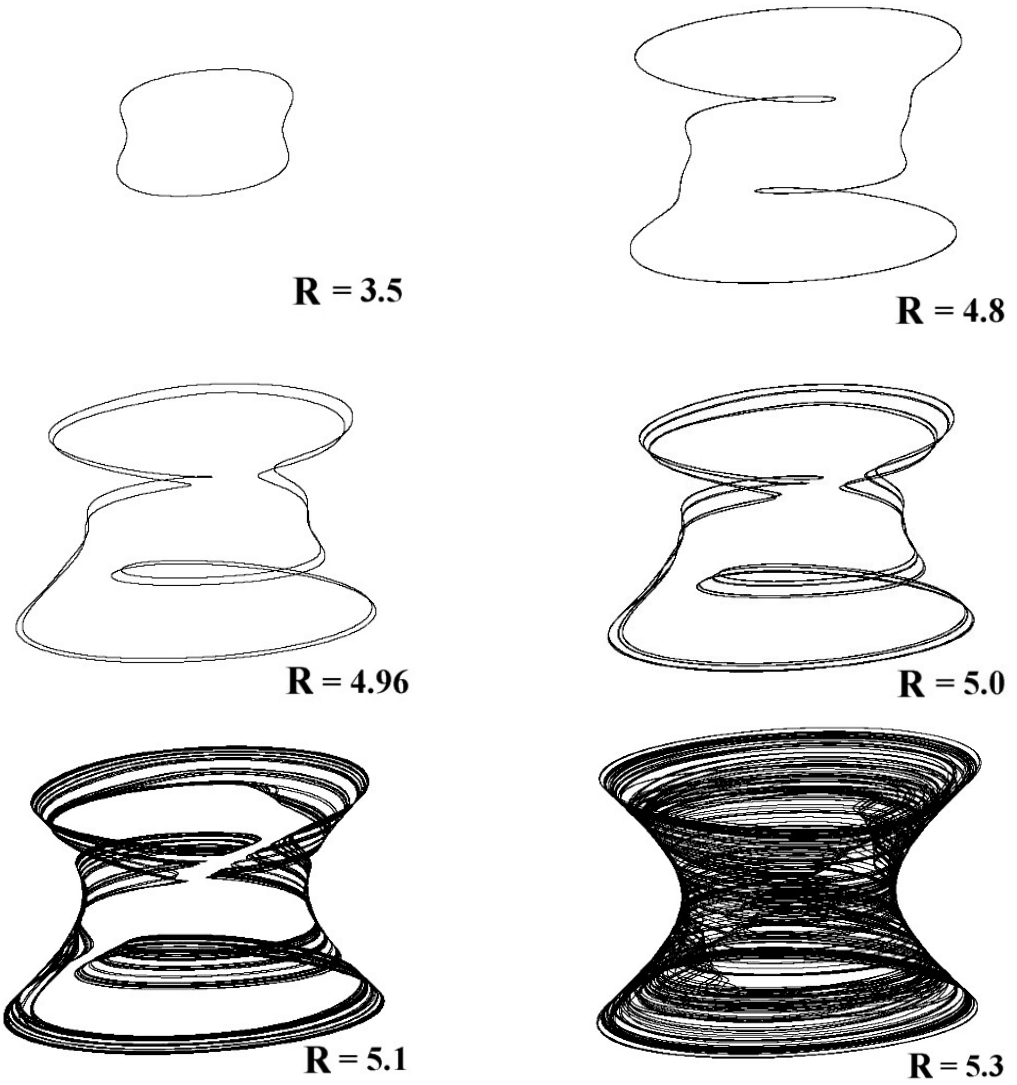


Рис. 3. Эволюция динамических режимов системы (16)–(18) с ростом числа Рэлея R в области колебательной неустойчивости при $\tau = 0,3$, $K = 3$. Фазовые портреты приведены в проекции на плоскость (X, Y)

Рассмотрим теперь, что происходит внутри области монотонной неустойчивости. Зафиксируем $K = 0,5$ и проследим эволюцию системы с ростом числа Рэлея R. Вертикальная линия $K = 0,5$ пересекает нейтральную кривую для монотонных возмущений примерно в точке $R \approx 1,1$. На рис. 4 приведена серия фазовых портретов системы в проекции на плоскость (X, Y). Крестиками обозначены начальные условия для интегрирования соответствующей фазовой траектории. Как видно из рисунка, ниже нейтральной кривой в системе существует единственное стационарное решение O, которое притягивает к себе все траектории (рис. 4, $R = 0,5$). Это решение соответствует механическому равновесию жидкости $X^* = 0$, $Y^* = 0$, $Z^* = 0$. При пересечении нейтральной кривой в системе в силу указанной выше дискретной симметрии происходит вилочная бифуркация, в результате которой ответвляются еще два решения – O^1 и O^2. Каждое из них описывает конвективную циркуляцию жидкости в термосифоне определенного направления (по часовой стрелке или против нее). Основное состояние O при этом становится неустойчивым (рис. 4, $R = 2,5$). С ростом числа Рэлея фазовое пространство вокруг состояний

равновесия O^1 и O^2 становится все более закрученным. Это говорит об осциллирующем характере затухания возмущений (рис. 4, $r = 4{,}0$ и $r = 5{,}0$). В конце концов это приводит к вторичной бифуркации при $R \approx 5{,}2$. которая является бифуркацией Хопфа. От состояний равновесия O^1 и O^2 ответвляются устойчивые предельные циклы $\tilde{A}^1$ и $\tilde{A}^2$ соответственно (рис. 4, $R = 5{,}4$). Период колебаний $T \approx 1{,}66$ совпадает с периодом колебаний предельного цикла на рис. 3, что говорит о единой природе появления этих осцилляций, связанных с запаздыванием в системе. При дальнейшем увеличении числа Рэлея циклы $\tilde{A}^1$ и $\tilde{A}^2$ сливаются в один предельный цикл $\tilde{A}$ (рис. 4, $R = 5{,}8$). После этого с циклом $\tilde{A}$ повторяется сценарий, описанный для колебательной области неустойчивости (рис. 3).

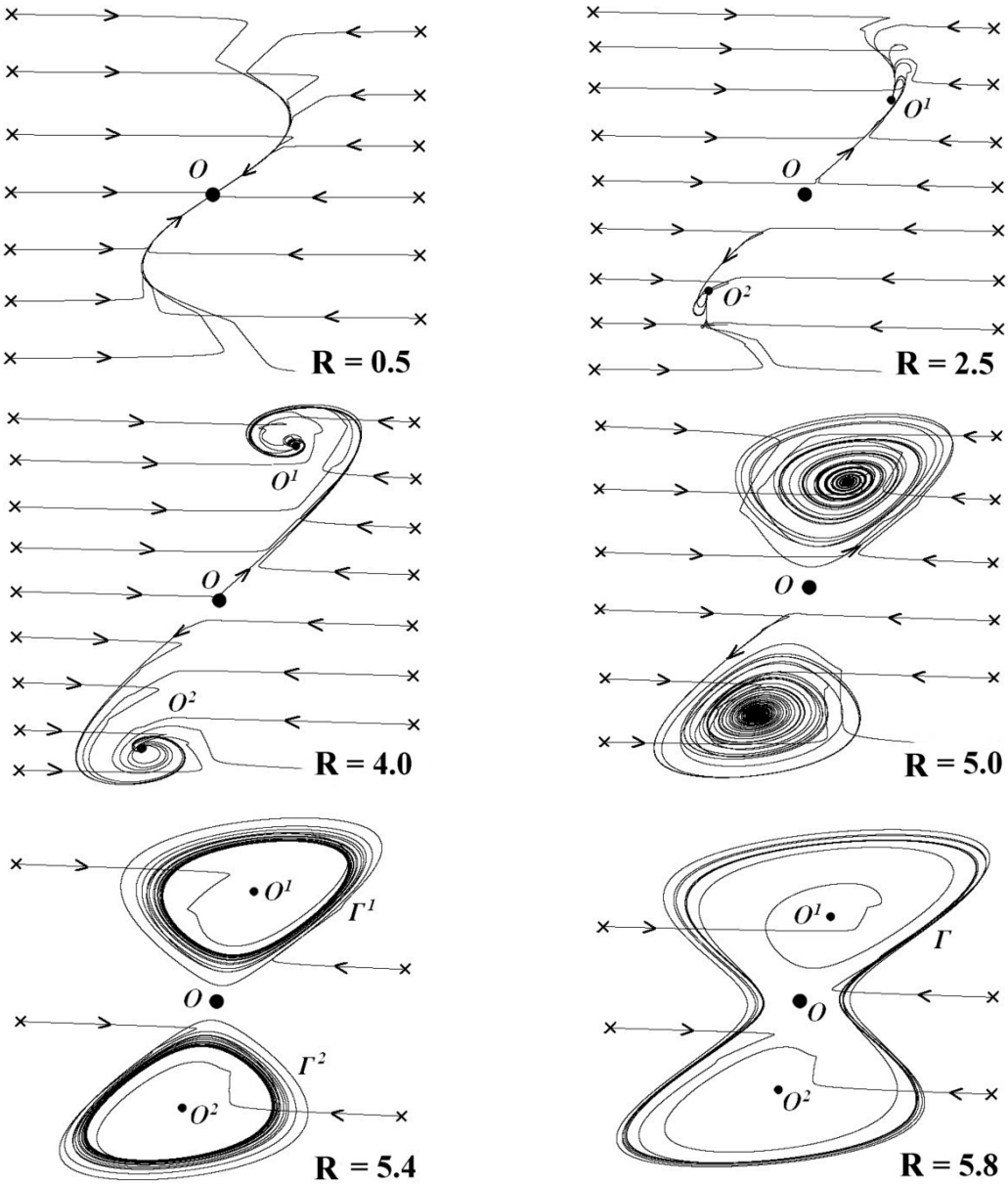


Рис. 4. Эволюция фазового портрета динамической системы (16)–(18) с ростом числа Рэлея R в области монотонной неустойчивости при $\tau = 0{,}3$, $K = 0{,}5$. Фазовые портреты приведены в проекции на плоскость (X, Y). Крестиками отмечены начальные условия расчета траекторий

Таким образом, мы видим, что управляющая подсистема, с запаздыванием реагирующая на изменение ситуации, вступает в достаточно сложное нелинейное взаимодействие с управляемой конвективной системой. Это взаимодействие в зависимости от значений параметров может привести к стационарному, периодическому или хаотическому поведению.

Влияние шума на качество управления равновесием жидкости

Как известно, шум неизбежно присутствует в любом технологическом устройстве. Рассмотрим вопрос о взаимодействии шума с запаздывающей обратной связью управляющей подсистемы и влиянии его на эффективность активного управления механическим равновесием жидкости в термосифоне.

Стандартным методом учета влияния шума на динамическую систему является метод Ланжевена, в рамках которого к правым частям дифференциальных уравнений добавлются линейные стохастические слагаемые (аддитивный шум). В дальнейшем полученная таким образом стохастическая система исследуется стандартными методами математического анализа или численно. При этом подходе необходимо сделать предположение о характере шума, задать его спектральное распределение. Как правило, такая операция привносит в систему гармоники, которых там может на самом деле и не быть, или, наоборот, не учитывает стохастические осцилляции определенного типа, свойственные системе [Гардинер, 1986]. В этом смысле нам кажется, что концепция разделения шума на внутренне присущий системе (*intrinsic noise*) и внешний шум (*extrinsic noise*), развитая при изучении стохастических генетических систем, является плодотворной. Более подробно этот вопрос обсуждался в нашей предыдущей работе [Брацун, 2011]. Разделение шума на два вида происходит уже при выборе метода исследования: при стохастических вычислениях методом Гиллеспи [Gillespie, 1977] в системе автоматически остается только внутренний системный шум. Для термосифона к провлению внутреннего шума можно отнести тепловые флуктуации в управляемой системе; ошибки округления и прочий численный шум, возникающий в регулирующем устройстве; флуктуации, возникающие при передаче информации на компьютер, а также при отдаче обратных команд управляющей подсистемы.

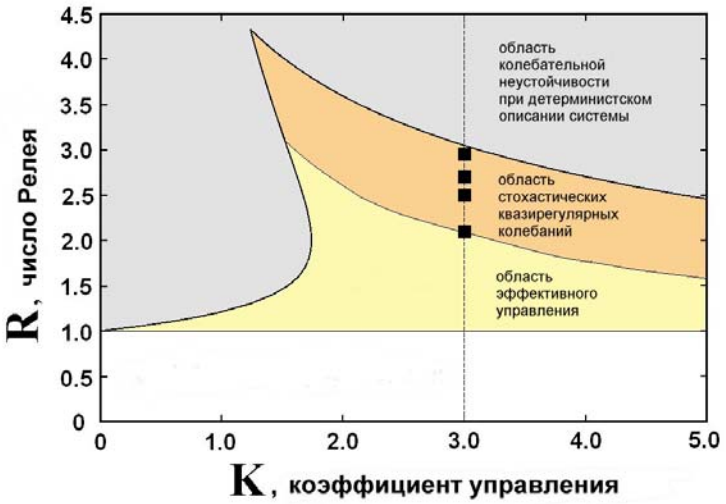


Рис. 5. Карта устойчивости на плоскости параметров (K, R). Область генерирования стохастических колебаний располагается ниже нейтральной кривой для колебательных возмущений. Вертикальная штриховая линия $K = 3$ соответствует срезу, для которого представлены численные результаты на рис. 3 и рис. 6. $\tau = 0,3$

Как известно, метод Гиллеспи развит для дискретных стохастических процессов, например для химических реакций [Gillespie, 1977]. На первый взгляд конвективные процессы

в термосифоне не относятся к такого рода явлениям. Однако на самом деле изменения в этой системе также происходят скачкообразно. Дело в том, что аналоговый сигнал, который поступает на компьютер, неизбежно преобразуется в цифровой вид. Обратные команды компьютера подаются на шаговый двигатель, который поворачивает термосифон на дискретный угол. Причем существует минимальный угол поворота, на который двигатель может развернуть термосифон. Таким образом, все изменения в термосифоне происходят посредством небольших скачков, генерируемых управляющей подсистемой. По этой же причине описываемая система, как будет показано ниже, так восприимчива к флуктуациям. Мы отмечали в первой статье [Брацун, 2011], что стохастическое поведение наиболее ярко проявляет себя в системах со сравнительно небольшим числом степеней свободы. Откуда возникает эта малоразмерность системы в случае процесса транскрипции, понятно – в реакцию вступает сравнительно небольшое число молекул. В случае управляемого термосифона мы имеем с гидродинамической системой, которая, казалось бы, имеет огромное число степеней свободы. На самом же деле течение жидкости в термосифоне благодаря его специальной конструкции при умеренных значениях числа Рэлея является квази-одномерным. Кроме того, любые минимальные флуктуации течения из-за свойств шагового двигателя, который может осуществлять только дискретные повороты, возвращаются в систему посредством обратной связи в гипертрофированном виде. Таким образом, метод численного анализа стохастических систем, предложенный Гиллеспи, по нашему мнению, может быть применен и к данной системе.

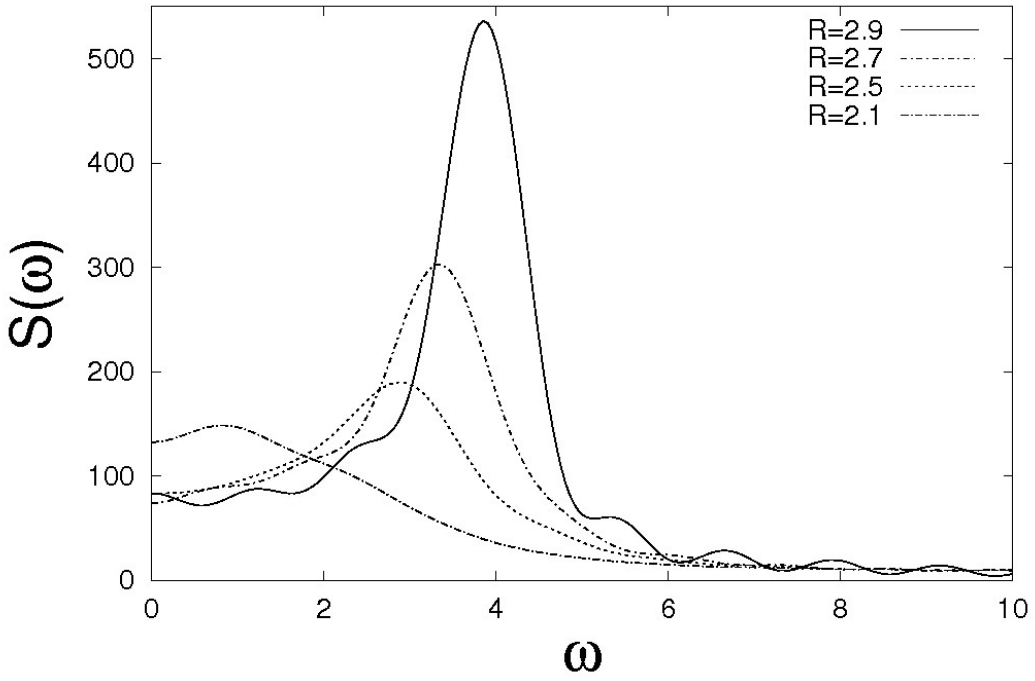


Рис. 6. Фурье-спектры стохастических колебательных режимов для четырех последовательных значений числа Рэлея, отмеченных на рис. 5. $K = 3$, $\tau = 0,3$

Для того чтобы свести задачу к виду, удобному для применения метода Гиллеспи, поступим следующим образом. Так как нас интересует влияние шума на устойчивость механического равновесия в подкритической области, т. е. там, где и осуществляется управление, мы можем воспользоваться уравнением (27). Для того чтобы в системе реализовывались только положительные значения $Y(t)$, сдвинем начало отсчета этой функции: $Y \to Y + A$ (здесь A – некая константа). Тогда получим

$$\frac{dY(t)}{dt} = A(\alpha K R^2 + 1 - R) + (R-1)Y(t) - \alpha K R^2 Y(t-\tau). \tag{30}$$

Уравнение (30) можно рассматривать как детерминистское описание цепочки некоторых химических реакций. Обычно в нелинейной химии дифференциальное уравнение для концентрации реагентов записывают по определенным правилам исходя из кинетических уравнений реакции. Однако возможна и обратная процедура, когда каждому члену дифференциального уравнения можно приписать кинетическое уравнение реакции.

Учитывая эти замечания, для уравнения (30) получим его кинетический аналог в следующем виде:

$$\varnothing^t \xrightarrow{A(\alpha K R^2+1-R)} Y^t, \tag{31}$$

$$\varnothing^t \xrightarrow{R\,Y(t)} Y^t, \tag{32}$$

$$Y^t \xrightarrow{1} \varnothing^t, \tag{33}$$

$$Y^t \xrightarrow{\alpha K R^2} \varnothing^{t+\tau}, \tag{34}$$

где скорости реакций для процессов синтеза и деградации написаны над стрелками. Уравнения (31)–(34) являются кинетическим аналогом уравнения (30). Применяя к (31)–(34) метод Гиллеспи, обобщенный нами на случай запаздывающих систем [Bratsun, Volfson, Hasty, Tsimring, 2005b] и подробно рассмотренный в приложении к изучению циркадианных колебаний в [Брацун, Захаров, 2011], получим стохастическую систему, в которой генерируется внутренний шум и исследуется его влияние на свойства детерминистского уравнения (30). На рис. 5 для случая запаздывания $\tau = 0,3$ отмечена подкритическая область, в которой взаимодействие шума и запаздывающего управления приводит к генерированию сложных квази-регулярных колебаний. Эти колебания значительно сужают область эффективного управления, которая находится выше линии $R = 1$. Более того, начиная с некоторого значения времени запаздывания τ, управление механическим равновесием в данной системе указанным методом становится бессмысленным, так как система становится неустойчивой даже там, где она устойчива в ситуации без всякого управления.

Рассмотрим подробнее свойства подкритических колебаний, возникающих за счет взаимодействия системного шума и запаздывания управляющей подсистемы. На рис. 6 представлены спектры Фурье для четырех последовательных значений числа Рэлея из диапазона значений между $R = 2$ и $R = 2,95$, отмеченного на рис. 5. Несмотря на стохастичность колебаний, в спектре каждого режима четко выделяется ведущая частота, значение которой близко к частоте детерминистского цикла, ответвляющегося в точке бифуркации Хопфа $R = 2,95$. Хотя в стохастическом случае никакой четкой бифуркационной границы не существует, при приближении системы к значению $R = 2,95$ высота ведущего пика в спектре увеличивается, а сам пик утончается (рис. 6). При этом корреляционная функция так же четко сигнализирует о нарастании внутренних корреляций в стохастических биениях, рис. 6 иллюстрирует, как была проведена нижняя граница области стохастической неустойчивости, показанная на рис. 5. Точка перехода фиксировалась по появлению выделенного пика в сплошном спектре (рис. 6, $R = 2$).

Методика проведения эксперимента

Опишем экспериментальную установку и методику проведения эксперимента. При исследовании конвекции достаточно часто используется полость в виде горизонтального цилиндра, круглого или прямоугольного в вертикальном поперечном сечении. Поэтому в предварительных опытах нами применялась подогреваемая снизу кубическая полость. Однако в такой конвективной камере одновихревой, двухвихревой и более сложные режимы течения возбуждаются в довольно узком интервале чисел Рэлея, примыкающем к нижнему уровню неустойчивости. Такие вторичные режимы плохо поддаются управлению из-за сложной структуры течения. Поэтому целесообразно ограничиться замкнутым контуром в виде двух параллельных вер-

тикальных каналов, соединенных на концах и образующих конвективную петлю или термосифон (рис. 7–1). Такая полость позволяет в широком диапазоне надкритических значений управляющего параметра задачи реализовывать одновихревой режим движения, который сравнительно легко поддается управлению в отличие от конвективных течений более сложного вида. При достаточно высоком вертикальном градиенте температуры, приложенном к термосифону, в перемычках между каналами возникает конвективная неустойчивость Рэлея в виде вала, ориентированного вдоль перемычки. Рэлеевская мода вносит неконтролируемые возмущения в одновихревое течение. Этот недостаток присущ и тороидальным термосифонам, которые часто используются в исследованиях, однако в нашем случае мы можем выбрать горизонтальные перемычки между вертикальными каналами минимального размера. С другой стороны, чтобы снизить влияние входного участка, возникающего при повороте жидкости в углах термосифона, высота каналов должна быть значительно больше длины перемычек между ними.

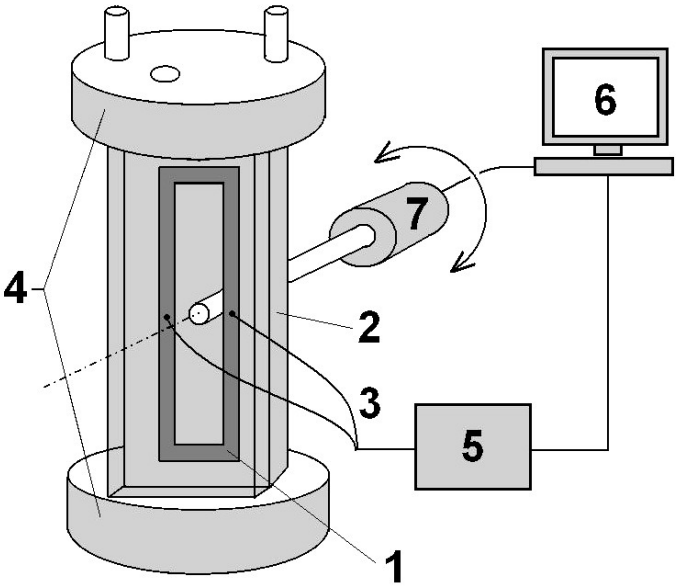


Рис. 7. Схема гидродинамической системы с отрицательной обратной связью. 1 – замкнутый канал с жидкостью (термосифон), 2 – дюралюминиевый блок, 3 – измерительная термопара, 4 – теплообменники, соединенные трубками со струйными термостатами, 5 – аналого-цифровой преобразователь, 6 – персональный компьютер, 7 – шаговый двигатель

Таким образом, экспериментальная установка (рис. 7) представляла собой алюминиевый блок 2, оканчивающийся двумя массивными теплообменниками 4, по которым прокачивалась вода от струйных ультра-термостатов, что позволяло создавать линейное по длине распределение температуры. В блоке вырезаны две канавки глубиной $8.2\cdot10^{-3}$ м, шириной $6.4\cdot10^{-3}$ м и длиной 0,155 м с расстоянием между их осями $1{,}2\cdot10^{-2}$ м. Концы канавок соединялись перемычками такого же сечения. Для визуальных наблюдений образовавшийся замкнутый канал закрывался прозрачной пластиной из органического стекла толщиной $2.0\cdot10^{-2}$ м. Глубина канала выбрана несколько большей, чем ширина, чтобы уменьшить относительную поверхность соприкосновения жидкости со стеклом и тем самым ослабить влияние различия тепловых условий на этой поверхности по сравнению с условиями на металлических стенках. В качестве рабочих жидкостей использовались додекан $(P=17)$ и трансформаторное масло $(P=3\cdot10^2)$. Для измерения интенсивности конвективного течения кювета была оборудована дифференциальной константан-манганиновой термопарой 3, спаи которой выставлялись в центры каналов в их среднем поперечном сечении. Когда жидкость приходит в движение, между спаями возникала разность температур V, обусловленная тем, что по одному каналу поднимается нагретая жидкость, а по другому опускается холодная.

Известно [Гершуни, Жуховицкий, 1972], что в такой конвективной петле, подогреваемой снизу, устойчивость механического равновесия нарушается при достижении управляющим параметром задачи, числом Рэлея, критического значения, в результате чего возникает циркуляционное течение, при котором жидкость поднимается в одном из каналов и опускается в другом. Скорость конвективной циркуляции и обусловленные ею отклонения температуры жидкости от равновесного (теплопроводного) распределения имеют максимумы на осях каналов. Согласно линейной теории [Гершуни, Жуховицкий, 1972], следующая конвективная мода возбуждается при значении относительного числа Рэлея, равном шести. Таким образом, имеется значительный зазор значений параметров, позволяющий эффективно работать только с первой одновихревой модой неустойчивости.

Внешнее управление термосифоном осуществлялось следующим образом. Сигнал термопары 3 проходил через аналогово-цифровой преобразователь 5 и регистрировался компьютером 6, который вычислял угол коррекции по формуле:

$$\phi(t) = kV(t), \tag{35}$$

где k – размерный коэффициент усиления обратной связи. После этого компьютер в автоматическом режиме отдавал команду на шаговый двигатель 7, который осуществлял поворот термосифона на заданный угол φ по отношению к силе тяжести. Как показано в работе [Брацун, Зюзгин, Половинкин, Путин, 2008], последовательность регулировочных циклов при достаточно большом коэффициенте k приводит к уменьшению скорости конвективного течения и установлению в системе динамически стабилизированного механического квазиравновесия. Под квазиравновесием в данном случае подразумевается такое состояние, при котором конвективное искажение V равновесного распределения температуры не превышает 5 % от интенсивности движения жидкости при выключенном управлении $(k = 0)$ и вертикальной ориентации термосифона. Важной особенностью описанной установки является контролируемое запаздывание τ команд управляющей термосифоном системы, которое вводилось программным способом. Таким образом, соотношение между углом поворота и показанием термопары необходимо записать следующим образом: $\phi(t) = kV(t-\tau)$.

Угол поворота оси двигателя при выполнении им одного шага составлял 22°30′, однако понижающий редуктор позволял поворачивать конвективную камеру с минимальным шагом 20′. При этом центробежные ускорения в самых удаленных от оси вращения точках каналов не превышали 10^{-2} от ускорения силы тяжести *g,* а кориолисовы ускорения при наибольшей интенсивности циркуляции были менее $10^{-3}g$. Образующиеся в моменты разгона и торможения полости вязкие волны затухали в трансформаторном масле за доли секунды, а в додекане – за 2 с. Все указанные здесь времена много меньше собственного времени развития конвективных возмущений. Программное обеспечение установки позволяло примешивать к сигналу, подаваемому на вход управляющей подсистемы, белый шум заданной амплитуды.

Опишем методику определения критического значения $k*$ в эксперименте. Оно определялось как среднее арифметическое трех значений, найденных различными способами:

а) первое значение определялось по проекции на ось k излома графика зависимости производной dV/dk от k. Такая зависимость имеет два участка. На одном из них изменение k приводит к существенному изменению V, а на другом, лежащем в области больших значений k, величина V изменяется незначительно. Второй участок соответствует установлению квазиравновесия в конвективной системе;

б) второе значение определялось по пересечению экстраполяции наклонного участка графика зависимости $V(k)$ с осью k;

в) третье значение определялось по уменьшению значения конвективного отклонения разности температур V ниже 5 % от его значения при вертикальном расположении термосифона и отключенном управлении $(k = 0)$. Эти величины различались не более чем на 4 %. Поэтому в большинстве опытов значение $k*$ определялось третьим способом.

Экспериментальная реализация управления равновесием жидкости

Результаты экспериментов по динамической стабилизации механического равновесия жидкости приведены на рис. 8 в виде карты устойчивости в координатах безразмерого коэффициента управления K и относительного числа Рэлея R. Данные приведены для трансформаторного масла и додекана. Точки на оси R карты отвечают случаю выключенной обратной связи $K = 0$. При $R < 1$ жидкость находится в состоянии покоя. При $R > 1$ устойчивость механического равновесия нарушается, и возбуждается стационарное конвективное течение. При включении управления $(K > 0)$ скорость этого течения уменьшается и при критическом значении не превосходит уровня, обусловленного шумами экспериментальной установки.

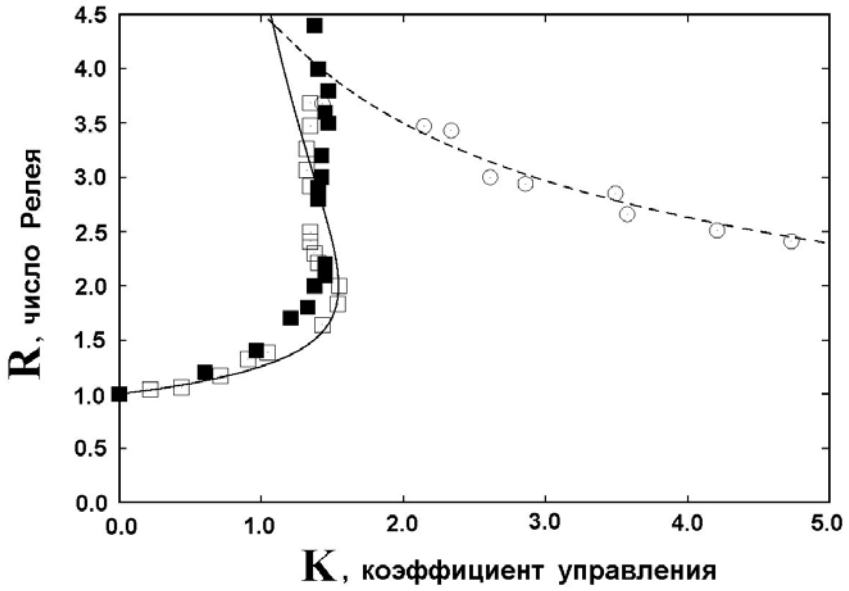


Рис. 8. Карта режимов конвекции на плоскости числа Рэлея R и коэффициента усиления обратной связи K. Линии соответствуют теоретическим кривым (см. рис. 2), точки – экспериментальные данные. Белые и черные точки отвечают опытам с трансформаторным маслом и додеканом соответственно

Граничная кривая (отмечена на рис. 8 сплошной линией) соответствует стабилизации механического квазиравновесия жидкости. Слева от нее находится область параметров, в которой конвективное течение не может быть подавлено и существует, хотя и с меньшей интенсивностью. Справа расположена область, где динамически стабилизированное квазиравновесие может поддерживаться сколь угодно долго (в опытах квазиравновесие существовало несколько часов). Граничная линия, отмеченная штриховой линией, соответствует срыву устойчивости динамически стабилизированного квазиравновесия и возникновению нестационарного режима. В области параметров, расположенной выше этой кривой, при больших значениях K стабилизированное квазиравновесие снова теряет устойчивость, и реализуется колебательный режим движения жидкости. Его появление обусловлено запаздыванием управляющего воздействия, так как при большой величине K углы отклонения конвективной камеры φ, создающиеся в процессе регулирования, также велики (35). Значительные углы отклонения φ вызывают не только подавление течения одного направления, но и возбуждение движения противоположной закрутки. В силу постоянно действующего управления конвективная камера отклоняется в другую сторону от вертикали для подавления развивающегося течения. В результате последовательности таких циклов, когда управление генерирует конвективное течение, устанавливается колебательный режим движения. При этом конвективная циркуляция с одним направлением вращения периодически сменяется противоположно направленным течением. Теоретическая

кривая для начала колебательной конвекции на рис. 8 соответствует безразмерному времени запаздывания $\tau_0 = 0,3$ (порядка 13 секунд в размерных единицах). Это значение является естественным запаздыванием в установке, связанным с запаздыванием в работе датчиков и характерными временами считывания и обработки данных компьютером.

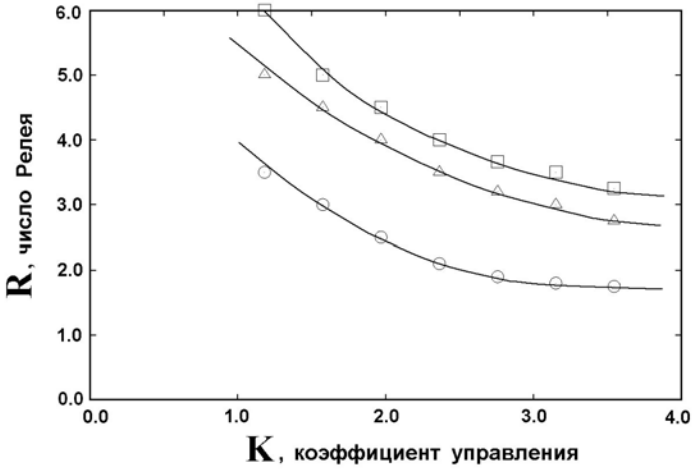


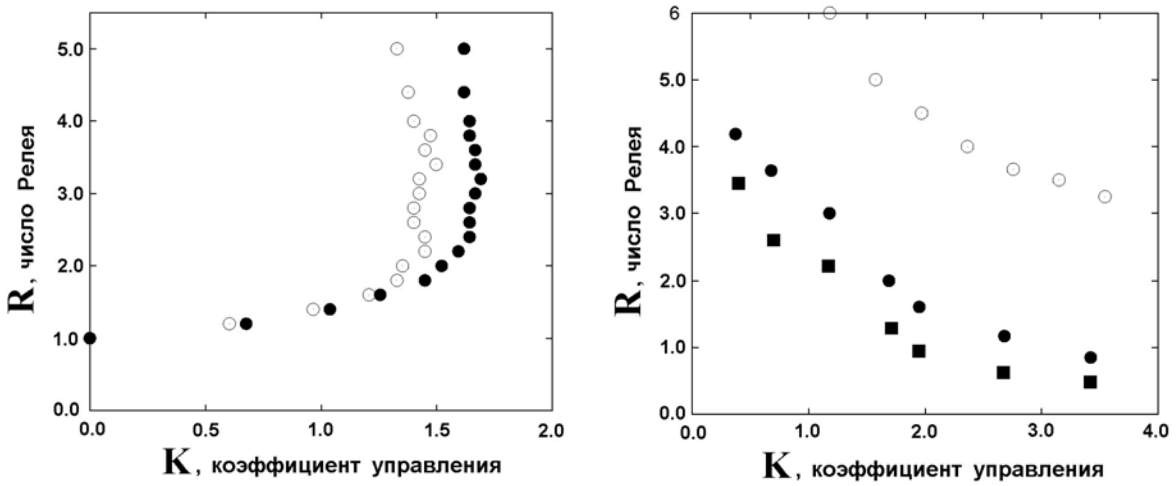
Рис. 9. Карта устойчивости для колебательной конвекции в зависимости от дополнительного времени запаздывания $\Delta\tau$, искусственно вносимого управляющей подсистемой. Экспериментальные точки получены на додекане. □ – 0; Δ – 0,1; ○ – 0,6

Когда эксперименты по управлению конвекцией на описываемой установке только планировались, наличие запаздывания в управляющей подсистеме не предполагалось. Поэтому возникновение колебаний в области уверенного управления оказалось неожиданностью. После обнаружения эффекта система управления была перепрограммирована таким образом, чтобы любая ее ответная реакция на состояние управляемой системы искусственно запаздывала на время $\tau_0 + \Delta\tau$, где $\Delta\tau$ – запаздывание вносимое компьютером. Таким образом, появилась возможность исследовать влияние запаздывания более детально.

Рассмотрим влияние задержки динамического воздействия на подавление стационарной конвективной циркуляции и стабилизацию квазиравновесия. Опыты показали, что увеличение общего времени запаздывания, $\tau = \tau_0 + \Delta\tau$, приводит к возбуждению колебаний при меньших числах Рэлея (рис. 9), и область эффективного управления, отмеченная на рис. 5, постепенно уменьшается. Так, при внесенном в систему времени запаздывания $\Delta\tau = 0,1$ (порядка 5 секунд) нейтральная кривая бифуркации Хопфа проходит ниже, чем при естественном запаздывании установки. Дальнейшее увеличение времени запаздывания усиливает этот эффект (см. линию для $\Delta\tau = 0,6$ на рис. 9). Таким образом, эксперимент полностью подтверждает вывод теории (см. рис. 2) о том, что превышение временем запаздывания собственных времен конвективной системы приводит к недостижимости цели управления.

Рассмотрим теперь влияние шума на динамическую стабилизацию равновесия конвективной системы. Конструкция управляющей подсистемы позволяла искусственно добавлять белый шум к сигналу, идущему от конвективной системы. Такая добавка осуществлялась до того, как компьютер принимал решение об управляющем воздействии. На рис. 10а приведена карта устойчивости механического равновесия по отношению к монотонным возмущениям. Линия, отмеченная белыми кружками, соответствует границе устойчивости динамически стабилизированного равновесия в отсутствие шумов. Другая линия, сдвинувшаяся вправо, иллюстрирует дестабилизирующее влияние шума с амплитудой 10 % от исходного сигнала термопары. Из рисунка видно, что при наличии шума цель управления остается достижимой. Однако для уменьшения конвективного искажения температуры при большем уровне шумов необходимо увеличивать динамическое воздействие, наращивая значения коэффициента усиления об-

ратной связи. Рассмотрим теперь влияние шумов на возбуждение колебательного режима движения (рис. 10б). Здесь также линия, отмеченная белыми кружками, соответствует границе колебательной области в случае отсутствия программного добавления белого шума в сигнал измерительной термопары. Две другие линии являются нейтральными кривыми для колебательной неустойчивости в присутствии белого шума с амплитудами в 10 % и 20 % от исходного сигнала, соответственно. Из рисунка видно, что присутствие шума вызывает понижение устойчивости стационарного течения и делает невозможной динамическую стабилизацию равновесия. Управление становится неэффективным. Таким образом, экспериментально установлено, что запаздывание управляющего воздействия и шумы, неизбежные в технологических установках, снижают эффективность внешнего управления конвективной системой, или делают управление вообще недостижимым.



(а) (б)

Рис. 10. Влиние шума, вносимого управлющей подсистемой, на качество управления.
(а) Карта устойчивости механического равновесия по отношению к монотонным возмущениям. Приведены результаты экспериментов в отсутствии осложняющих факторов (○) и при наличии в сигнале шума с амплитудой 10% (●).
(б) Карта устойчивости для колебательных возмущений. Приведены экспериментальные данные в случае отсутствия шума (○) и наличия шума с амплитудой 10 % (●) и 20 % (■) от исходного сигнала. Все результаты приведены для додекана

Учитывая методику определения порога устойчивости квазиравновесия, описанную выше, понижение порога возникновения колебательного режима конвекции при наличии шума в управляющей подсистеме (см. рис. 10б), можно трактовать как совместное генерирование шумом и запаздыванием подкритических колебаний. При устранении любого из этих двух факторов эффект немедленно исчезает. Это подтверждает выводы теории (см. рис. 5 и 6).

Обсуждение и заключение

В заключение отметим, что описанный эффект, очевидно, имеет фундаментальный характер, так как может проявлять себя в системах совершенно разной природы. Хочется отметить, что поведение физической системы, представляющей собой термосифон, управляемый с помощью активной обратной связи, совершенно аналогично поведению гена в процессах транскрипции – трансляции (эта система была рассмотрена в работе [Брацун, 2011]), где подстраивание динамики осуществляется посредством обратной связи, действующей через оператор-сайт в самом начале гена. В обоих случаях в управляющих подсистемах в силу естественных причин возникает запаздывание. Именно запаздывание приводит к осцилляциям движения

жидкости в первом случае и осцилляциям в концентрации протеина – во втором. Так как шум в таких системах присутствует всегда, то он неизбежно начинает влиять на качество управления. Одинаковые механизмы приводят к одинаковому поведению, а именно к генерации сложных квази-регулярных колебаний в подкритической области.

Любопытно, что в случае биологической динамической системы такое поведение, скорее всего, не случайно, иначе этот механизм просто не был бы реализован. Стабильность генетических процессов, которые включают в себя транскрипцию и трансляцию, – один из важнейших факторов для существования живой материи, так как именно посредством этого механизма осуществляется передача генетической информации от клетки к клетке. Описанный в статье механизм возбуждения автоколебаний является очень устойчивым по отношению к внешним воздействиям. Он позволяет поддерживать биоритмы клетки и при активной экспрессии генов, и в «спящем» режиме, когда экспрессии нет.

В случае термосифона, управляемого с помощью пропорциональной обратной связи, такие колебания с точки зрения технологии являются вредными, так как препятствуют цели эффективного управления конвективными движениями внутри термосифона. Возможными решениями повышения эффективности управления могут быть введение адаптивного или «интеллектуального» управления, которое меняло бы схему обратной связи в зависимости от ситуации. Разработка системы с такими свойствами – важнейшая задача в области управления вообще и управления распределенными конвективными системами в частности.

Список литературы

Брацун Д. А. Эффект возбуждения подкритических колебаний в стохастических системах с запаздыванием. Часть I. Регуляция экспрессии генов // Компьютерные исследования и моделирование. – 2011. – Т. 3, № 4. – С. 421–438.

Брацун Д. А., Захаров А. П. Моделирование пространственно-временной динамики циркадианных ритмов Neurospora crassa // Компьютерные исследования и моделирование. – 2011. – Т. 3, № 2. – С. 191–213.

Брацун Д. А., Зюзгин А. В., Половинкин К. В., Путин Г. Ф. Об активном управлении равновесием жидкости в термосифоне // ПЖТФ. – 2008. – Т. 34, Вып. 15. – С. 36–42.

Гардинер К. В. Стохастические методы в естественных науках. – М.: Мир, 1986. – 512 с.

Гершуни Г. З., Жуховицкий Е.М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. – М: Наука, 1972. – 392 с.

Гетлинг А. В. Концентрация конвективных движений у границы горизонтального слоя жидкости с неоднородным по высоте неустойчивым градиентом температуры // Изв. АН СССР, МЖГ. – 1975. – № 5. – С. 45–52.

Дроздов С. М. Экспериментальное исследование конвекции жидкости в замкнутом тороидальном канале // Известия РАН, МЖГ. – 1995. – № 4. – С. 20–28.

Зюзгин А. В., Путин Г. Ф. Динамическое управление устойчивостью механического равновесия конвективной системы // Гидродинамика. – Пермь: ПермГУ, 1998. – С. 123–139.

Келлер И. О., Тарунин Е. Л. Управление устойчивостью конвективного равновесия жидкости, подогреваемой снизу // Изв. АН СССР. МЖГ. – 1990. – № 4. – С. 6–11.

Ладиков Ю. П. Стабилизация процессов в сплошных средах. – М.: Наука, 1978. – 432 с.

Мюррей Дж. Математическая биология Том 1. Введение. – ИКИ–РХД, 2009. – 774 с.

Стратонович Р. Л. Избранные вопросы теории флюктуаций в радиотехнике. – М.: Советское Радио, 1961. – 558 с.

Чернатынский В. И., Шлиомис М. И. Конвекция вблизи критических чисел Рэлея при почти вертикальном градиенте температуры // Изв. АН СССР, МЖГ. – 1973. – № 1. – С. 64–70.

Bau H. Control of Marangoni-Benard Convection // Int. J. Heat Mass Transfer. – 1999. – Vol. 42. – P. 1327–1341.

Bratsun D., Volfson D., Hasty J., Tsimring L. Delay-induced stochastic oscillations in gene regulation // PNAS, 2005a. – Vol. 102, N. 41. – P. 14593–14598.

Bratsun D., Volfson D., Hasty J., Tsimring L. Non-Marcovian processes in Gene Regulation // Noise in Complex Systems and Stochastic Dynamics III / edited by Laszlo B. Kish, Katja Lindenberg, Zoltan Gingl, Proceeding of SPIE, 2005b. – Vol. 5845. – P. 210–219.

Erhard P., Muller U. Dynamical behavior of natural convection in a single-phase loop // J. Fluid Mech. – 1990. – Vol. 217. – P. 487–518.

Gillespie D. T. Exact stochastic simulation of coupled chemical reactions // J. Phys. Chem. – 1977. – Vol. 81. – P. 2340–2361.

Lakshmanan M., Senthilkumar D. V. Dynamics of nonlinear time-delay systems. – Berlin: Springer, 2010. – 313 p.

Ott E., Grebogi C., Yorke J. A. Controlling chaos // Phys. Rev. Lett. – 1990. – Vol. 64. – P. 1196–1199.

Remillieux M., Zhao H., Bau H. Suppression of Rayleigh-Benard convection with proportional-derivative controller // Phys. Fluids. – 2007. – Vol. 19. – P. 017102–017111.

Singer J., Bau H. Active control of convection // Phys. Fluids A. – 1991. – Vol. 3. – P. 2859–2865.

Tang J., Bau H. Feedback control stabilization of the no-motion state of a fluid confined in a horizontal porous layer heated from below // J. Fluid Mech. – 1993. – Vol. 257. – P. 485–505.

Yuen, P. K., Bau H. Controlling Chaotic Convection Using Neural Nets – Theory and Experiments // Neural Networks. – 1998. – Vol. 11. – P. 557–569.

Wang J., Chen Z., Qian S., Bau H. Thermally-Actuated, Phase-Change Flow Control for Microfluidic Systems // Lab on Chip. – 2005. – Vol. 5. – P. 1277–1285.

Wang Y., Singer J., Bau H. Controlling chaos in a thermal convection loop // J. Fluid Mech. – 1992. – Vol. 237. – P. 479–498.