**КОМПЬЮТЕРНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ
И МОДЕЛИРОВАНИЕ 2013 Т. 5 № 5 С. 769–783**

Ки&М

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

УДК: 517.9

Линейные нетеровы краевые задачи для дифференциально-алгебраических систем

С. М. Чуйко

Донбасский государственный педагогический университет,
Украина, 84116, Донецкая обл., г. Славянск, ул. Г. Батюка, д. 19

E-mail: chujko-slav@inbox.ru

Получено 1 сентября 2013 г.

Найдены необходимые и достаточные условия разрешимости, а также конструкция обобщенного оператора Грина линейной нетеровой краевой задачи для линейной дифференциально-алгебраической системы.

Ключевые слова: линейная нетерова краевая задача, дифференциально-алгебраическая система, обобщенный оператор Грина

Linear Noether boundary value problem for linear differential-algebraic system

S. M. Chuiko

Donbass State Pedagogical University, 19 G. Batuka street, Donetsk region, Slavyansk, 84116, Ukraine

Abstract. — We find sufficient conditions for the solvability and construction of the generalized Green's operator for linear Noether boundary value problem for linear differential-algebraic system.

Keywords: linear Noether boundary value problem, differential-algebraic system, generalized Green's operator

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2013, vol. 5, no. 5, pp. 769–783 (Russian).

Работа выполнена при финансовой поддержке Государственного фонда фундаментальных исследований. Номер государственной регистрации 0112U0000372.

Постановка задачи

Исследуем задачу о построении решений $z(t) \in \mathbb{C}^1[a,b]$ дифференциально-алгебраической системы

$$A(t)\,\frac{dz}{dt} = B(t)z + f(t), \quad A(t), B(t) \in \mathbb{R}^{k\times n}, \quad A(t), B(t), f(t) \in \mathbb{C}[a,b], \tag{1}$$

подчиненной краевому условию [Boichuk, Samoilenko, 2004; Бойчук, Шегда, 2007]

$$\ell z(\cdot) = \alpha, \quad \ell z(\cdot) : \mathbb{C}[a,b] \to \mathbb{R}^m, \quad \alpha \in \mathbb{R}^m. \tag{2}$$

Достаточные условия однозначной разрешимости и структура решения двухточечной краевой задачи для системы (1) были получены в монографии [Campbell, 1980]. Условия существования и структура решений аналогичной нетеровой краевой задачи (1), (2) в общем случае ($k \neq n$) были получены в монографии [Бояринцев, Чистяков, 1998] с использованием понятия совершенных троек матриц. Конструктивные условия разрешимости и структура решения дифференциально-алгебраических систем (1) в случае $k = n$ получены в монографиях [Чистяков, 1996; Чистяков, Щеглова, 2003] с использованием центральной канонической формы. Эффективные численные методы решения дифференциально-алгебраических систем (1) в случае $k = n$ получены в монографи [Хайрер, Ваннер, 1999]. Целью данной статьи является нахождение достаточных условий разрешимости задачи Коши и линейной нетеровой краевой задачи (1), (2) в общем случае $k \neq n$, в частности, для переопределенных $k > n$ и недоопределенных $k \leq n$ дифференциально-алгебраических систем.

Достаточные условия в случае разрешимости относительно производной

Предположим, что матрица $A^+(t)$ непрерывна; обозначим $X(t)$ нормальную фундаментальную матрицу [Boichuk, Samoilenko, 2004] $X'(t) = A^+(t)B(t)X(t)$, $X(a) = I_n$ полученной традиционной $\Big(A^+(t)B(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}\Big)$ системы дифференциальных уравнений. При условии

$$P_{A^*(t)}B(t) = 0, \quad P_{A^*(t)}f(t) = 0 \tag{3}$$

однородная часть $A(t)z' = B(t)z$ системы (1) по меньшей мере одним способом разрешима относительно производной, при этом система (1) имеет решение вида

$$z(t,c) = X(t)c + K\Big[f(s)\Big](t), \; K\Big[f(s)\Big](t) := X(t)\int_a^t X^{-1}(s)A^+(s)f(s)ds, \; c \in \mathbb{R}^n.$$

В критическом случае ($P_{Q^*} \neq 0$) при условии (3) и

$$P_{Q_d^*}\Big\{\alpha - \ell K\Big[f(s)\Big](\cdot)\Big\} = 0 \tag{4}$$

краевая задача (1), (2) имеет семейство решений [Boichuk, Samoilenko, 2004]

$$z(t,c_r) = X_r(t)c_r + G\Big[f(s);\alpha\Big](t), \quad c_r \in \mathbb{R}^r,$$

где

$$G\Big[f(s);\alpha\Big](t) := X(t)Q^+\Big\{\alpha - \ell K\Big[f(s)\Big](\cdot)\Big\} + K\Big[f(s)\Big](t).$$

Здесь $Q := \ell X(\cdot)-$ $(m \times n)-$ матрица, rank $Q = n_1$, $r := n - n_1$, $d := m - n_1$, P_{Q^*}- $(m \times m)$-матрица-ортопроектор $P_{Q^*} : \mathbb{R}^m \to N(Q^*)$, $X_r(t) := X(t)P_{Q_r}$, P_{Q_r}- $(n \times r)$-матрица, составленная из r-линейно независимых столбцов $(n \times n)$-матрицы-ортопроектора $P_Q : \mathbb{R}^n \to N(Q)$; $P_{Q_d^*}$- $(d \times m)$-мерная матрица $P_{Q_d^*}$ составлена из d линейно независимых строк матрицы-ортопроектора P_{Q^*}, Q^+-псевдообратная матрица по Муру–Пенроузу [Boichuk, Samoilenko, 2004], I_n-единичная $(n\times n)$-матрица. Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 1. *При условии* (3) *для непрерывной матрицы* $A^+(t)$ *однородная часть дифференциально-алгебраической системы* (1) *имеет решение вида* $z(t,c) = X(t)c$, $c \in \mathbb{R}^n$, *где* $X(t)$ *— нормальная фундаментальная матрица* $X'(t) = A^+(t)B(t)X(t)$, $X(a) = I_n$. *При условии* (3) *задача Коши* $z(a) = c$ *для неоднородной части дифференциально-алгебраической системы* (1) *при любом* $c \in \mathbb{R}^n$ *имеет решение вида* $z(t,c) = X(t)c + K[f(s)](t)$, $c \in \mathbb{R}^n$, *где*

$$K\Big[f(s)\Big](t) := X(t)\int_a^t X^{-1}(s)A^+(s)f(s)ds$$

— оператор Грина задачи Коши $z(a) = 0$ *для системы* (1). *В критическом случае* ($P_{Q^*} \neq 0$) *при условиях* (3) *и* (4) *для любого вектора* $f(t) \in \mathbb{C}[a,b]$ *краевая задача* (1), (2) *имеет семейство решений* $z(t,c_r) = X_r(t)c_r + G\Big[f(s);\alpha\Big](t)$, $c_r \in \mathbb{R}^r$, *где*

$$G\Big[f(s);\alpha\Big](t) := X(t)Q^+\Big\{\alpha - \ell K\Big[f(s)\Big](\cdot)\Big\} + K\Big[f(s)\Big](t)$$

— обобщенный оператор Грина краевой задачи (1), (2).

В частности, условие (3) выполняется для недоопределенной дифференциально-алгебраической системы (1) с матрицей $A(t)$ полного ранга. Действительно, при условии $A(t)\in\mathbb{R}^{k\times n}$, rank $A(t) := k < n$ имеет место равенство rank $P_{A^*(t)} = k -$ rank $A(t) = 0$, гарантирующее выполнение требования (3). Таким образом, для недоопределенной системы (1) с матрицей $A(t)$ полного ранга утверждение теоремы 1 эквивалентно теоремам 3.1.1 и 3.2.1, доказанным в монографии [Campbell, 1980].

Пример 1. Требованиям теоремы 1 удовлетворяет задача о построении 2π-периодических решений переопределенной дифференциально-алгебраической системы

$$A(t)\,\frac{dz}{dt} = B(t)z + f(t), \tag{5}$$

где

$$A(t) := \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \\ \cos t & \sin t \end{pmatrix}, \quad B(t) := \begin{pmatrix} -\sin t & \cos t \\ -\cos t & -\sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}, \quad f(t) := \begin{pmatrix} \cos 2t \\ \sin 2t \\ \cos 2t \end{pmatrix}.$$

Матрица $A(t)$ определяет непрерывную псевдообратную матрицу $A^+(t)$ и ортопроектор

$$A^+(t) = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} \cos t & -2\sin t & \cos t \\ \sin t & 2\cos t & \sin t \end{pmatrix}, \quad P_{A^*(t)} = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Условие (3) при этом выполнено. Поскольку $Q = 0$, постольку в задаче о построении 2π-периодических решений системы (5) имеет место критический случай, причем условие (4) выполнено, следовательно периодическая задача для системы (5) имеет решение вида

$$z(t,c) = X(t)c + G\Big[f(s)\Big](t), \quad X(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}, \quad G\Big[f(s)\Big](t) = \tfrac{1}{4}\begin{pmatrix} \sin t + \sin 3t \\ \cos t - \cos 3t \end{pmatrix}.$$

Следствие 1. *В некритическом случае* ($P_{Q^*} = 0$) *при условии* (3) *задача* (1), (2) *имеет семейство решений* $z(t, c_r) = X_r(t)c_r + G\Big[A^+(s) f(s); \alpha\Big](t),\ c_r \in \mathbb{R}^r$.

Достаточные условия в случае неразрешимости дифференциально-алгебраической системы относительно производной

Предположим, что псевдообратная матрица $B^+(t)$ непрерывна и условие $P_{A^*(t)}B(t) = 0$ не выполнено. При условии

$$P_{A^*(t)}B(t) \neq 0, \quad P_{B^*(t)}A(t) = 0, \quad P_{B^*(t)} f(t) = 0 \tag{6}$$

однородная часть $A(t)z' = B(t)z$ системы (1) по меньшей мере одним способом разрешима относительно неизвестной $z = B^+(t)A(t) \cdot z'$. Предположим, что матрица $B^+(t)A(t)$ постоянного ранга $\operatorname{rank} B^+(t)A(t) = \delta,\ n - \delta := \omega$, и не имеет среди собственных чисел нулей геометрической кратности, отличной от алгебраической; при этом неособенным преобразованием подобия $B^+(t)A(t) = S(t)J(t)S^{-1}(t)$, ($\det S(t) \neq 0$), она приводится к жордановой форме

$$J(t) = \begin{pmatrix} J_\delta(t) & O \\ O & O_\omega \end{pmatrix}, \quad J_\delta(t) \in \mathbb{R}^{\delta\times\delta}, \quad \det J_\delta(t) \neq 0, \quad O_\omega \in \mathbb{R}^{\omega\times\omega}.$$

Обозначим вектор $y(t) = S^{-1}(t)z(t) := \operatorname{col}\Big(u(t), v(t)\Big),\ u(t) \in \mathbb{R}^\delta,\ v(t) \in \mathbb{R}^\omega$. При условии (6) однородная часть системы (1) $J(t) \cdot y' = \Big(I_n - J(t)S^{-1}(t)S'(t)\Big) \cdot y$ приводится к виду

$$\begin{pmatrix} J_\delta(t) & O \\ O & O_\omega \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \Big(I_n - J(t)S^{-1}(t)S'(t)\Big) \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Отметим, что уравнение (7), вообще говоря, не разрешимо относительно производных. Действительно, условие разрешимости уравнения (7) при произвольных функциях $u(t)$ и $v(t)$ не выполнено $P_{J^*(t)}\Big(I_n - J(t)S^{-1}(t)S'(t)\Big) = P_{J^*(t)} \neq 0$; здесь ортопроектор

$$P_{J^*(t)} = \begin{pmatrix} O_\delta(t) & O \\ O & I_\omega \end{pmatrix}, \quad P_{J^*(t)}:\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{N}(J^*(t)),$$

и матрица

$$S^{-1}(t)S'(t) = \begin{pmatrix} \mathfrak{S}_{\delta\delta}(t) & \mathfrak{S}_{\delta\omega}(t) \\ \mathfrak{S}_{\omega\delta}(t) & \mathfrak{S}_{\omega\omega}(t) \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{S}_{\delta\delta}(t) \in \mathbb{R}^{\delta\times\delta}, \quad \mathfrak{S}_{\omega\omega}(t) \in \mathbb{R}^{\omega\times\omega}.$$

С другой стороны, уравнение (7) разрешимо при условии $v(t) \equiv 0$. Для нахождения первой из компонент $u(t) \in \mathbb{R}^\delta$ вектора $y(t)$ используем систему обыкновенных дифференциальных уравнений $u' = \Big(J_\delta^{-1}(t) - \mathfrak{S}_{\delta\delta}(t)\Big) \cdot u$. Предположим, что матрица $J_\delta^{-1}(t) - \mathfrak{S}_{\delta\delta}(t)$ непрерывна; обозначим $Y_\delta(t)$ нормальную фундаментальную матрицу $Y_\delta(t) = \Big(J_\delta^{-1}(t) - \mathfrak{S}_{\delta\delta}(t)\Big) \cdot Y_\delta(t),\ Y_\delta(a) = I_\delta$. Однородная часть системы (1) имеет решение $y(t, c_\delta) = Y(t)c_\delta,\ c_\delta \in \mathbb{R}^\delta$. Таким образом, при условии (6), в случае непрерывности матрицы $J_\delta^{-1}(t) - \mathfrak{S}_{\delta\delta}(t)$ однородная часть системы (1) имеет решение вида

$$z(t, c_\delta) = X(t)c_\delta, \quad X(t) = S(t) \cdot Y(t),\ Y(t) = \begin{pmatrix} Y_\delta(t) \\ O \end{pmatrix},\ c_\delta \in \mathbb{R}^\delta.$$

При условии (6) система (1) приводится к виду

$$J(t)\cdot\frac{dy}{dt}=\Big(I_n-J(t)S^{-1}(t)S'(t)\Big)\cdot y+S^{-1}(t)B^{+}(t)f(t). \tag{8}$$

Неоднородность $S^{-1}(t)B^{+}(t)f(t)$ системы (8) представима двумя компонентами $S^{-1}(t)B^{+}(t)f(t) = = \mathrm{col}\Big(\varphi(t),\psi(t)\Big)$, где $\varphi(t)=\Big(I_\delta \quad O\Big)S^{-1}(t)B^{+}(t)f(t)\in\mathbb{R}^{\delta}$, $\psi(t)=\Big(O \quad I_{n-\delta}\Big)S^{-1}(t)B^{+}(t)f(t)\in\mathbb{R}^{\omega}$. Система (8) расщепляется на обыкновенное дифференциальное и функциональное уравнения

$$\frac{du}{dt}=\Big(J_\delta^{-1}(t)-\mathfrak{S}_{\delta\delta}(t)\Big)\cdot u+J_\delta^{-1}(t)\varphi(t)+\psi(t),\quad v+\psi(t)=0.$$

При условии $\varphi(t)\in C[a,b]$, $\ \mathfrak{S}_{\delta\omega}(t)\psi(t)\in C^1[a,b]$ система (8) имеет решение вида

$$y(t,c)=Y(t)c_\delta+K\Big[\varphi(s),\psi(s)\Big](t),\ c_\delta\in\mathbb{R}^{\delta},$$

где

$$K\Big[\varphi(s),\psi(s)\Big](t):=\begin{pmatrix} Y_\delta(t)\int_a^t Y_\delta^{-1}(s)\Big(J_\delta^{-1}(s)\varphi(s)+\mathfrak{S}_{\delta\omega}(s)\psi(s)\Big)ds\\ -\psi(t)\end{pmatrix}.$$

Таким образом, при условии (6) для непрерывной матрицы $J_\delta^{-1}(t)-\mathfrak{S}_{\delta\delta}(t)$ система (1) имеет решение вида

$$z(t,c)=X(t)c+\mathcal{K}\Big[f(s)\Big](t),\ \ \mathcal{K}\Big[f(s)\Big](t):=S(t)\cdot K\Big[\varphi(s),\psi(s)\Big](t),\quad c_\delta\in\mathbb{R}^{\delta}.$$

Таким образом, доказано следующее утверждение [Чуйко, 2011].

Теорема 2. *Предположим, что матрица* $B^{+}(t)$ *непрерывна, а матрица* $B^{+}(t)A(t)$ *— постоянного ранга* $\mathrm{rank}\ B^{+}(t)A(t)=\delta$ *и не имеет среди собственных чисел нулей геометрической кратности, отличной от алгебраической; при условии* (6) *для* $J_\delta^{-1}(t)-\mathfrak{S}_{\delta\delta}(t)$, $Y_\delta^{-1}(t)$, $\varphi(t)\in C[a,b]$, $\mathfrak{S}_{\delta\omega}(t)\psi(t)\in C^1[a,b]$ *задача Коши* $z(a)=c$ *для однородной части системы* (1) *разрешима для любого вектора* $c\in\mathbb{R}(X(t))$ *и при этом имеет решение вида* $z(t,c_\delta)=X(t)\cdot c_\delta$, $\ c_\delta\in\mathbb{R}^{\delta}$. *При этом задача Коши* $z(a)=c$ *для дифференциально-алгебраической системы* (1) *имеет решение вида*

$$z(t,c)=X(t)\cdot c_\delta+\mathcal{K}\Big[f(s)\Big](t),\ \ \mathcal{K}\Big[f(s)\Big](t)=S(t)\cdot K\Big[\varphi(s),\psi(s)\Big](t),\quad c_\delta\in\mathbb{R}^{\delta},$$

где $\mathcal{K}\Big[\varphi(s),\psi(s)\Big](t)$ *— обобщенный оператор Грина задачи Коши* $z(a)=0$ *для вырожденной дифференциально-алгебраической системы* (1). *В критическом случае* ($P_{Q^*}\neq 0$) *при условии* (6) *краевая задача* (1), (2) *имеет семейство решений*

$$z(t,c_r)=X_r(t)c_r+G\Big[f(s);\alpha\Big](t),\ c_r\in\mathbb{R}^{r},$$

где

$$G\Big[f(s);\alpha\Big](t):=X(t)Q^{+}\Big\{\alpha-\ell\mathcal{K}\Big[f(s)\Big](\cdot)\Big\}+\mathcal{K}\Big[f(s)\Big](t)$$

— обобщенный оператор Грина краевой задачи (1), (2).

Пример 2. Требованиям теоремы 2 удовлетворяет задача о построении 2π-периодических решений дифференциально-алгебраической системы

$$A(t)\,\frac{dz}{dt} = B(t)z + f(t), \tag{9}$$

где

$$A(t) := \begin{pmatrix} \sin 2t - 1 & \cos 2t \\ -\cos 2t & \sin 2t + 1 \end{pmatrix}, \quad B(t) := \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad f(t) := 4\sqrt{2}\begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}.$$

Действительно, матрица $B(t)$ невырождена, следовательно $P_{B^*(t)} = 0$, при этом условие (6) выполнено. Используя матрицы

$$S = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\cos 2t}{\sin 2t-1} \\ \frac{\cos 2t}{\sin 2t-1} & 1 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

приводим систему (9) к виду (8). Решение $z(t, c_\delta) = X(t)c_\delta,\ c_\delta \in \mathbb{R}^2$ однородной части системы (9) определяет матрица

$$X(t) = \begin{pmatrix} e^{-t}(\sin t - \cos t) \\ e^{-t}(\sin t + \cos t) \end{pmatrix}, \quad J_\delta^{-1}(t) - \mathfrak{S}_{\delta\delta}(t) = -\frac{2\cos t}{\cos t - \sin t}.$$

Обобщенный оператор Грина задачи Коши для системы (9) имеет вид

$$\mathcal{K}\Big[f(s)\Big](t) = \frac{\sqrt{2}}{5}\begin{pmatrix} \cos t + 2\cos 3t - 8\sin t - \sin 3t + 2e^{-t}(-\sin t + \cos t) \\ 8\cos t - \cos 3t + \sin t - 2\sin 3t - 2e^{-t}(\sin t + \cos t) \end{pmatrix}.$$

Поскольку $P_{Q^*} \neq 0$, постольку в задаче о построении 2π-периодических решений системы (9) имеет место критический случай, причем условие (4) выполнено, следовательно 2π-периодическая задача для системы (9) имеет решение вида

$$z(t, c_r) = X_r(t)c_r + G\Big[f(s)\Big](t), \quad X_r(t) = \begin{pmatrix} e^{-t}(\sin t - \cos t) \\ e^{-t}(\sin t + \cos t) \end{pmatrix}, \quad c_r \in \mathbb{R}^1,$$

где

$$G\Big[f(s)\Big](t) = \frac{\sqrt{2}}{5}\begin{pmatrix} \cos t + 2\cos 3t - 8\sin t - \sin 3t \\ 8\cos t - \cos 3t + \sin t - 2\sin 3t \end{pmatrix}.$$

Предположим далее, что матрица $S(t) \equiv S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ — постоянная. При условии (6) однородная часть системы (1) приводится к виду

$$y = J(t)\cdot\frac{dy}{dt}. \tag{10}$$

Для нахождения первой из компонент $u(t) \in \mathbb{R}^\delta$ вектора $y(t)$ используем систему обыкновенных дифференциальных уравнений $u' = J_\delta^{-1}(t)u$. Заметим, что вторая компонента $v(t) \in \mathbb{R}^{n-\delta}$ вектора $y(t)$ нулевая. Предположим, что матрица $J_\delta^{-1}(t)$ непрерывна; обозначим $Y_\delta(t)$ нормальную фундаментальную матрицу

$$\frac{dY_\delta(t)}{dt} = J_\delta^{-1}(t)Y_\delta(t), \quad Y_\delta(a) = I_\delta.$$

Общее решение системы (10) $y(t,c_\delta) = Y(t)c_\delta,\ c_\delta \in \mathbb{R}^\delta$ определяет матрица

$$Y(t) = \begin{pmatrix} Y_\delta(t) \\ O \end{pmatrix}.$$

Таким образом, при условии (6) в случае непрерывности матрицы $J_\delta^{-1}(t)$ однородная часть системы (1) имеет решение вида $z(t,c_\delta) = X(t)c_\delta,\ X(t) = S \cdot Y(t),\ c_\delta \in \mathbb{R}^\delta$. При условии (6) в случае $S' = 0$ неоднородная система (1) приводится к виду

$$J(t) \cdot \frac{dy}{dt} = y + S^{-1}B^+(t)f(t). \tag{11}$$

Система (11) имеет решение вида $y(t,c_\delta) = Y(t)c_\delta + K\Big[\varphi(s),\psi(s)\Big](t),\ c_\delta \in \mathbb{R}^\delta$, где

$$K\Big[\varphi(s),\psi(s)\Big](t) = \begin{pmatrix} Y_\delta(t)\int_a^t Y_\delta^{-1}(s)J_\delta^{-1}(s)\varphi(s)ds \\ -\psi(t) \end{pmatrix}.$$

При условии (6) и $S' = 0$ для непрерывной матрицы $J_\delta^{-1}(t)$ система (1) имеет решение вида

$$z(t,c_\delta) = X(t)c_\delta + \mathcal{K}\Big[f(s)\Big](t),\quad \mathcal{K}\Big[f(s)\Big](t) := S \cdot K\Big[\varphi(s),\psi(s)\Big](t),\quad c_\delta \in \mathbb{R}^\delta.$$

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Следствие 2. *Предположим, что матрица* $B^+(t)A(t)$ *постоянного ранга* $\operatorname{rank} B^+(t)A(t) = \delta$ *и не имеет среди собственных чисел нулей геометрической кратности, отличной от алгебраической; при условии* (6) *для непрерывной матрицы* $J_\delta^{-1}(t)$ *и постоянной матрицы* S *дифференциально-алгебраическая система* (1) *имеет решение вида*

$$z(t,c_\delta) = X(t)c_\delta + \mathcal{K}\Big[f(s)\Big](t),\quad \mathcal{K}\Big[f(s)\Big](s) = S \cdot K\Big[\varphi(s),\psi(s)\Big](t),\quad c_\delta \in \mathbb{R}^\delta.$$

В критическом случае ($P_{Q^*} \neq 0$) *при условиях* (6) *и* $S' = 0$ *краевая задача* (1), (2) *имеет семейство решений* $z(t,c_r) = X_r(t)c_r + G\Big[f(s);\alpha\Big](t),\ c_r \in \mathbb{R}^r$, *где*

$$G\Big[f(s);\alpha\Big](t) := X(t)Q^+\Big\{\alpha - \ell\mathcal{K}\Big[f(s)\Big](\cdot)\Big\} + \mathcal{K}\Big[f(s)\Big](t)$$

— обобщенный оператор Грина краевой задачи (1), (2).

Пример 3. Требованиям следствия 2 удовлетворяет задача о построении 2π-периодических решений дифференциально-алгебраической системы

$$A(t)\frac{dz}{dt} = B(t)z + f(t), \tag{12}$$

где

$$A(t) := \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\quad B(t) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\quad f(t) := \begin{pmatrix} \cos 2t \\ \sin 2t \\ \cos 2t \end{pmatrix}.$$

Действительно, матрица $A(t)$ — неполного ранга, при этом $k < n$, следовательно $P_{A^*(t)} \neq 0$, с другой стороны, матрица $B(t)$ — полного ранга, при этом $k < n$, следовательно $P_{B^*(t)} = 0$, таким образом, достаточное условие разрешимости дифференциально-алгебраической системы (12) выполнено. Используя матрицы

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

приводим систему (12) к виду (10). Поскольку $S' = 0$, условие (6) выполнено и матрица

$$J_\delta^{-1}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

непрерывна, постольку для системы (10) выполнены требованиям следствия 2. Таким образом, решение однородной части дифференциально-алгебраической системы (12) определяет матрица

$$X(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ 0 & 0 \\ -\sin t & \cos t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Поскольку $Q = 0$, постольку в задаче о построении 2π-периодических решений системы (12) имеет место критический случай, причем условие (4) выполнено, следовательно 2π-периодическая задача для системы (12) имеет решение вида

$$z(t, c_r) = X(t)c_r + G\Big[f(s), \alpha\Big](t), \quad c_r \in \mathbb{R}^2,$$

где

$$G\Big[f(s), \alpha\Big](t) \equiv K\Big[f(s)\Big](t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}\Big(\cos t - \cos 2t\Big) \\ -\cos 2t \\ -\frac{1}{3}\Big(\sin t + \sin 2t\Big) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Предположим далее, что матрица $B^+(t)A(t)$ постоянного ранга и имеет среди собственных чисел нули геометрической кратности, отличной от алгебраической. Для упрощения выкладок предположим, что матрица $B^+(t)A(t)$ имеет среди собственных чисел один нуль геометрической кратности γ, отличной от алгебраической, δ ненулевых собственных чисел и $\omega := n - \delta - \gamma$ нулей, для которых геометрическая кратность совпадает с алгебраической; при этом неособенным ($\det S(t) \neq 0$) преобразованием подобия $B^+(t)A(t) = S(t)J(t)S^{-1}(t)$ она приводится к жордановой форме

$$J(t) = \begin{pmatrix} J_\delta(t) & O & O \\ O & J_\gamma & O \\ O & O & O_\omega \end{pmatrix}, \quad J_\gamma := \begin{pmatrix} O & I_{\gamma-1} \\ O & O \end{pmatrix}, \quad O_\omega \in \mathbb{R}^{\omega\times\omega}.$$

Блок $J_\delta(t) \in \mathbb{R}^{\delta\times\delta}$, $\det J_\delta(t) \neq 0$ соответствует ненулевым собственным числам матрицы $B^+(t)A(t)$; блок $J_\gamma \in \mathbb{R}^{\gamma\times\gamma}$ соответствует нулевому собственному числу матрицы $B^+(t)A(t)$, для которого геометрическая кратность отличается от алгебраической, при этом

$$J_1 := 0 \in \mathbb{R}^1, \quad J_2 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}, \ \dots, \ J_\gamma := \begin{pmatrix} O & I_{\gamma-1} \\ O & O \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{\gamma\times\gamma}.$$

Обозначим вектор

$$y(t) = S^{-1}(t)z(t) := \operatorname{col}\Big(u(t), v(t), w(t)\Big), \quad u(t) \in \mathbb{R}^\delta, \quad v(t) \in \mathbb{R}^\gamma, \quad w(t) \in \mathbb{R}^{n-\delta-\gamma}.$$

При условии (6) однородная часть системы (1) $J(t)\cdot \frac{dy}{dt} = \Big(I_n - J(t)S^{-1}(t)S'(t)\Big)\cdot y$ приводится к виду

$$\begin{pmatrix} J_\delta(t) & O & O \\ O & J_\gamma & O \\ O & O & O_{n-\delta-\gamma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \\ w' \end{pmatrix} = \Big(I_n - J(t)S^{-1}(t)S'(t)\Big) \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Отметим, что уравнение (13), вообще говоря, не разрешимо относительно производных. Действительно, условие разрешимости уравнения (13) относительно производных при произвольных функциях $u(t)$, $v(t)$ и $w(t)$ не выполнено:

$$P_{J^*(t)}\Big(I_n - J(t)S^{-1}(t)S'(t)\Big) = P_{J^*(t)} \neq 0;$$

здесь ортопроектор

$$P_{J^*(t)} = \begin{pmatrix} O_\delta(t) & O & O \\ O & P_{J_\gamma^*} & O \\ O & O & I_{n-\delta-\gamma} \end{pmatrix}, \quad P_{J^*(t)} : \ \mathbb{R}^n \to \mathbb{N}(J^*(t)), \quad P_{J_\gamma^*} : \ \mathbb{R}^n \to \mathbb{N}(J_\gamma^*)$$

и матрица

$$S^{-1}(t)S'(t) = \begin{pmatrix} \mathfrak{S}_{\delta\delta}(t) & \mathfrak{S}_{\delta\gamma}(t) & \mathfrak{S}_{\delta\omega}(t) \\ \mathfrak{S}_{\gamma\delta}(t) & \mathfrak{S}_{\gamma\gamma}(t) & \mathfrak{S}_{\gamma\omega}(t) \\ \mathfrak{S}_{\omega\delta}(t) & \mathfrak{S}_{\omega\gamma}(t) & \mathfrak{S}_{\omega\omega}(t) \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{S}_{\delta\delta}(t) \in \mathbb{R}^{\delta\times\delta}, \quad \mathfrak{S}_{\gamma\gamma}(t) \in \mathbb{R}^{\gamma\times\gamma}.$$

При этом уравнение (13) разрешимо относительно производных для $w(t) \equiv 0$ и любого вектора $v(t)$, имеющего представление

$$v(t) = \begin{pmatrix} \mu(t) \\ \nu(t) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mu(t) \in \mathbb{R}^1, \quad \nu(t) \in \mathbb{R}^{\gamma-2}.$$

Для нахождения неизвестных $u(t)$ и $v(t)$ используем систему

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = \Big(J_\delta^{-1}(t) - \mathfrak{S}_{\delta\delta}(t)\Big)\cdot u - \mathfrak{S}_{\delta\gamma}(t)\cdot v, \\ \frac{dv}{dt} = -J_\gamma^+ J_\gamma \mathfrak{S}_{\gamma\delta}(t)\cdot u + J_\gamma^+\Big(I_\gamma - J_\gamma \mathfrak{S}_{\gamma\gamma}(t)\Big)\cdot v\ . \end{cases} \tag{14}$$

При помощи обозначений $\chi_1 := 1 \in \mathbb{R}^1$, $\chi_k := \Big[1\ 0\ \dots\ 0\Big] \in \mathbb{R}^{1\times k}$;

$$\mathfrak{S}_{\gamma\gamma}(t) = \begin{pmatrix} \mathfrak{s}_{11}(t) & \mathfrak{s}_{12}(t) & \mathfrak{s}_{13}(t) \\ \mathfrak{s}_{21}(t) & \mathfrak{s}_{22}(t) & \mathfrak{s}_{23}(t) \\ \mathfrak{s}_{31}(t) & \mathfrak{s}_{32}(t) & \mathfrak{s}_{33}(t) \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{s}_{11}(t) \in \mathbb{R}^{1\times 1}, \quad \mathfrak{s}_{22}(t) \in \mathbb{R}^{(\gamma-2)^2},$$

$$\theta_1 := 1 \in \mathbb{R}^1, \quad \theta_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 1}, \ \dots, \ \theta_k := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{k\times 1},$$

приведем второе уравнение системы (14) к виду

$$\frac{d}{dt}\,\mu = 0, \quad \begin{pmatrix} \nu' \\ 0 \end{pmatrix} = -\begin{bmatrix} O & I_{\gamma-1} \end{bmatrix} \mathfrak{S}_{\gamma\delta}(t) \cdot u + \Theta \cdot \begin{pmatrix} \mu \\ \nu \end{pmatrix}. \tag{15}$$

Здесь

$$\Theta(t) := \begin{pmatrix} 1 - \chi_{\gamma-2}\mathfrak{s}_{21}(t) - o_{\gamma-2}\mathfrak{s}_{31}(t) & \chi_{\gamma-2}\mathfrak{s}_{22}(t) - o_{\gamma-2}\mathfrak{s}_{32}(t) \\ -J_{\gamma-2}\mathfrak{s}_{21}(t) - \theta_{\gamma-2}\mathfrak{s}_{31}(t) & I_{\gamma-2} - J_{\gamma-2}\mathfrak{s}_{22}(t) - \theta_{\gamma-2}\mathfrak{s}_{32}(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(\gamma-1)^2}.$$

Решение первого уравнения системы (15) представляет собой произвольную действительную константу; решение второго уравнения также ищем в виде константы; при условии $\begin{bmatrix} O & I_{\gamma-1} \end{bmatrix} \cdot \mathfrak{S}_{\gamma\delta}(t) \equiv 0$ второе уравнение системы (15) имеет решение

$$\begin{pmatrix} \mu \\ \nu \end{pmatrix} = P_{\Theta} \cdot c_{\gamma-1}, \quad c_{\gamma-1} \in \mathbb{R}^{\gamma-1},$$

где P_{Θ} — ортопроектор $P_{\Theta} : \mathbb{R}^{\gamma-1} \to N(\Theta)$. В свою очередь решение второго уравнения системы (14) $\nu(t, c_\rho) = Y_\rho(t) \cdot c_\rho$, $c_\rho \in \mathbb{R}^\rho$ определяет матрица $Y_\rho(t) \in \mathbb{R}^{\gamma\times\rho}$, составленная из ρ–линейно-независимых столбцов матрицы

$$Y_\gamma(t) := \begin{pmatrix} P_{\Theta} & O \\ O & O \end{pmatrix}.$$

Предположим, что матрица $\left(J_\delta^{-1}(t) - \mathfrak{S}_{\delta\delta}(t)\right)$ непрерывна. Решение первого уравнения системы (14) имеет вид

$$u(t, c_\delta, c_\rho) = Y_\delta(t) \cdot c_\delta + Y_\delta(t) \int_a^t Y_\delta^{-1}(s)\mathfrak{S}_{\delta\gamma}(s)Y_\rho(s)\, ds \cdot c_\rho;$$

здесь $Y_\delta(t)$ нормальная фундаментальная матрица

$$\frac{dY_\delta(t)}{dt} = \left(J_\delta^{-1}(t) - \mathfrak{S}_{\delta\delta}(t)\right) \cdot Y_\delta(t), \quad Y_\delta(a) = I_\delta.$$

Таким образом, при условии (6) и $\begin{bmatrix} O & I_{\gamma-1} \end{bmatrix} \cdot \mathfrak{S}_{\gamma\delta}(t) = 0$ для непрерывных матриц $J_\delta^{-1}(t)$, $\mathfrak{S}_{\delta\delta}(t)$ и $\mathfrak{S}_{\delta\gamma}(t)$ однородная часть системы (1) имеет решение вида

$$z(t, c_{\delta+\rho}) = X(t)c_{\delta+\rho}, \quad X(t) = S(t) \cdot Y(t), \quad c_{\delta+\rho} \in \mathbb{R}^{\delta+\rho},$$

где матрица

$$Y(t) = \begin{pmatrix} Y_\delta(t) & Y_\delta(t) \int_a^t Y_\delta^{-1}(s)\mathfrak{S}_{\delta\gamma}(s)Y_\rho\, ds \\ O & Y_\rho \\ O & O \end{pmatrix}$$

определяет решение уравнения (13). При условии (6) неоднородная система (1) приводится к виду (8):

$$J(t)\cdot\frac{dy}{dt}=\Big(I_n-J(t)S^{-1}(t)S'(t)\Big)\cdot y+S^{-1}(t)B^{+}(t)f(t).$$

Пусть $(O\ O\ I_\gamma)S^{-1}(t)B^{+}(t)f(t)\equiv 0\in\mathbb{R}^{n-\delta-\gamma}$. Неоднородность $S^{-1}(t)B^{+}(t)f(t)$ системы (8) при этом представима компонентами

$$S^{-1}(t)B^{+}(t)f(t)=\mathrm{col}\,\Big(\varphi(t),\psi(t),0\Big),$$

где

$$\varphi(t)=\Big(I_\delta\ O\ O\Big)S^{-1}(t)B^{+}(t)f(t)\in\mathbb{R}^{\delta},\ \ \psi(t)=\Big(O\ I_\gamma\ O\Big)S^{-1}(t)B^{+}(t)f(t)\in\mathbb{R}^{\gamma}.$$

Согласно принятым обозначениям система (8) равносильна следующей:

$$\begin{cases}\frac{d}{dt}\,u=\Big(J_\delta^{-1}(t)-\mathfrak{S}_{\delta\delta}(t)\Big)\cdot u-\mathfrak{S}_{\delta\gamma}(t)\cdot v+J_\delta^{-1}(t)\cdot\varphi(t),\\ J_\gamma\cdot\frac{d}{dt}\,v=-J_\gamma\mathfrak{S}_{\gamma\delta}(t)\cdot u+\Big(I_\gamma-J_\gamma\mathfrak{S}_{\gamma\gamma}(t)\Big)\cdot v+\psi(t).\end{cases}\tag{16}$$

В случае $\Big[O\quad I_{\gamma-1}\Big]\cdot\mathfrak{S}_{\gamma\delta}(t)\equiv 0$ решение второго уравнения (16) определяет система

$$\frac{d}{dt}\,\mu=0,\quad \begin{pmatrix}\frac{d}{dt}\,\nu\\ 0\end{pmatrix}=\Theta\cdot\begin{pmatrix}\mu\\ \nu\end{pmatrix}+J_\gamma^{+}\psi(t).\tag{17}$$

При условии $P_{\Theta^*}J_\gamma^{+}\psi(t)\equiv 0,\ \Big[O\quad I_{\gamma-1}\Big]\cdot\mathfrak{S}_{\gamma\delta}(t)\equiv 0$ уравнение $\Theta\cdot\begin{pmatrix}\mu\\ \nu\end{pmatrix}+J_\gamma^{+}\psi(t)=0$ имеет решение вида $\begin{pmatrix}\mu\\ \nu\end{pmatrix}=P_\Theta c_{\gamma-1}(t)-\Theta^{+}J_\gamma^{+}\psi(t)$; здесь $P_{\Theta^*(t)}:\ \mathbb{R}^{\gamma-1}\to\mathbb{N}(\Theta^*(t))$ — ортопроектор матрицы $\Theta^*(t)$. Таким образом, при условии

$$\begin{cases}\Big(O\ O\ I_\gamma\Big)S^{-1}(t)B^{+}(t)f(t)\equiv 0, & P_{\Theta^*}J_\gamma^{+}\psi(t)\equiv 0,\\ \Big(O\quad I_{\gamma-1}\Big)\cdot\mathfrak{S}_{\gamma\delta}(t)\equiv 0, & \frac{d}{dt}\,\Theta^{+}J_\gamma^{+}\psi(t)\equiv 0\end{cases}\tag{18}$$

система (17) имеет решение вида $\begin{pmatrix}\mu\\ \nu\end{pmatrix}=P_\Theta c_{\gamma-1}(t)-\Theta^{+}(t)J_\gamma^{+}\psi(t),\quad c_{\gamma-1}(t)\in\mathbb{R}^{\gamma-1}$. Зафиксируем произвольную функцию $c_{\gamma-1}(t)\in C^1[a,b]$; при этом вектор-столбец

$$\begin{pmatrix}\nu\\ 0\end{pmatrix}=K\Big[\psi(s),g(s)\Big](t):=\begin{pmatrix}g(t)-\Theta^{+}(t)J_\gamma^{+}(t)\psi(t)\\ 0\end{pmatrix},\quad g(t):=P_\Theta c_{\gamma-1}(t)$$

является решением второго уравнения системы (16). При условии (18) для непрерывных функций $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $J_\delta^{-1}(t)$, $\mathfrak{S}_{\delta\delta}(t)$ и $\mathfrak{S}_{\delta\gamma}(t)$ система (8) имеет решение вида $y(t,c_{\delta+\rho})=Y(t)c_{\delta+\rho}+\mathcal{K}\Big[\varphi(s),\psi(s),g(s)\Big](t),\ c_{\delta+\rho}\in\mathbb{R}^{\delta+\rho}$, где

$$K\Big[\varphi(s),\psi(s),g(s)\Big](t):=\begin{pmatrix}Y_\delta(t)\int_a^t Y_\delta^{-1}(s)\Big[J_\delta^{-1}(s)\varphi(s)-\mathfrak{S}_{\delta\gamma}(t)K\Big[\psi,g\Big](s)\Big]ds\\ -\psi(t)\end{pmatrix}.$$

Таким образом, при условиях (6) и (18) для гладких функций

$$\varphi(t),\ \psi(t),\ J_\delta^{-1}(t),\ \Im_{\delta\delta}(t),\ \Im_{\delta\gamma}(t),\ \in C[a,b],\quad g(t) \in C^1[a,b] \tag{19}$$

система (1) имеет решение $z(t, c_{\delta+\rho}) = X(t)c_{\delta+\rho} + \mathcal{K}\Big[f(s), g(s)\Big](t)$, где

$$\mathcal{K}\Big[f(s), g(s)\Big](t) := S(t)\cdot K\Big[\varphi(s), \psi(s), g(s)\Big](t),\quad c_{\delta+\rho} \in \mathbb{R}^{\delta+\rho}.$$

В критическом случае ($P_{Q^*} \neq 0$) при условии (6), (18), (19) и

$$P_{Q_d^*}\Big\{\alpha - \ell K\Big[f(s); g(s)\Big](\cdot)\Big\} = 0$$

краевая задача (1), (2) имеет семейство решений

$$z(t, c_r) = X_r(t)c_r + G\Big[f(s); g(s); \alpha\Big](t),\ c_r \in \mathbb{R}^r,$$

где

$$G\Big[f(s); g(s); \alpha\Big](t) := X(t)Q^+\Big\{\alpha - \ell\mathcal{K}\Big[f(s); g(s)\Big](\cdot)\Big\} + \mathcal{K}\Big[f(s); g(s)\Big](t).$$

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 3. *Предположим, что матрица $B^+(t)A(t)$ постоянного ранга и имеет δ собственных чисел, отличных от нуля, одно нулевое собственное число геометрической кратности γ, отличной от алгебраической и $n - \delta - \gamma := \omega$ нулевых собственных чисел, для которых геометрическая кратность совпадает с алгебраической; при условиях* (6), (18) *и* (19) *задача Коши $z(a) = c$ для однородной части дифференциально-алгебраической системы* (1) *разрешима для любого вектора $c \in \mathbb{R}(X(t))$ и при этом имеет решение вида*

$$z(t, c_{\delta+\rho}) = X(t)c_{\delta+\rho},\quad X(t) = S(t)\cdot Y(t),\quad c_{\delta+\rho} \in \mathbb{R}^{\delta+\rho},$$

где

$$Y(t) = \begin{pmatrix} Y_\delta(t) & Y_\delta(t)\int_a^t Y_\delta^{-1}(s)\Im_{\delta\gamma}(s)Y_\rho\, ds \\ O & Y_\rho \\ O & O \end{pmatrix}.$$

При этом задача Коши $z(a) = c$ для неоднородной вырожденной дифференциально-алгебраической системы (1) *имеет решение вида*

$$z(t, c_{\delta+\rho}) = X(t)c_{\delta+\rho} + \mathcal{K}\Big[f(s), g(s)\Big](t),\quad g(t) \in \mathbb{N}\Big(\Theta(t)\Big) \subset \mathbb{R}^{\gamma-1},$$

где

$$\mathcal{K}\Big[f(s), g(s)\Big](t) := S(t)\cdot K\Big[\varphi(s), \psi(s), g(s)\Big](t),\quad c_{\delta+\rho} \in \mathbb{R}^{\delta+\rho}$$

— обобщенный оператор Грина задачи Коши $z(a) = 0$ для вырожденной дифференциально-алгебраической системы (1)*. В критическом случае* ($P_{Q^*} \neq 0$) *при условиях* (6), (18), (19) *и*

$$P_{Q_d^*}\Big\{\alpha - \ell\mathcal{K}\Big[f(s); g(s)\Big](\cdot)\Big\} = 0 \tag{20}$$

краевая задача (1), (2) *имеет семейство решений*

$$z(t, c_r) = X_r(t)c_r + G\Big[f(s); g(s); \alpha\Big](t), \ c_r \in \mathbb{R}^r,$$

где

$$G\Big[f(s); g(s); \alpha\Big](t) := X(t)Q^+\Big\{\alpha - \ell\mathcal{K}\Big[f(s); g(s)\Big](\cdot)\Big\} + \mathcal{K}\Big[f(s); g(s)\Big](t)$$

— *обобщенный оператор Грина краевой задачи* (1), (2).

Существенным отличием условия разрешимости (20), конструкций обобщенного оператора Грина задачи Коши $\mathcal{K}[f(s), g(s)](t)$ и обобщенного оператора Грина $G[f(s); g(s); \alpha](t)$ линейной нетеровой краевой задачи для линейной дифференциально-алгебраической системы (1), (2) от аналогичных условий разрешимости, а также конструкций обобщенного оператора Грина задачи Коши и обобщенного оператора Грина линейной нетеровой краевой задачи для линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений является зависимость от произвольной функции $g(t) \in C^1[a, b]$, $\mathbb{N}(\Theta(t)) \subset \mathbb{R}^{\gamma-1}$.

Пример 4. Требованиям теоремы 3 удовлетворяет задача о построении 2π-периодических решений дифференциально-алгебраической системы

$$A(t)\,\frac{dz}{dt} = B(t)z + f(t), \tag{21}$$

где

$$A(t) := \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cos^2 t & -\sin t\cos t & -\sin^2 t & \sin t\cos t \\ 0 & 0 & -\sin t\cos t & \sin^2 t & -\sin t\cos t & \cos^2 t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B(t) := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad f(t) := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Действительно, матрица $A(t)$ вырождена, следовательно $P_{A^*(t)} \neq 0$, с другой стороны, матрица $B(t)$ невырождена, следовательно $P_{B^*(t)} = 0$, таким образом, условие (6) разрешимости системы (21) относительно неизвестной выполнено. Матрица

$$B^+(t)A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sin t\cos t & \sin^2 t & -\sin t\cos t & \cos^2 t \\ 0 & 0 & \cos^2 t & -\sin t\cos t & -\sin^2 t & \sin t\cos t \end{pmatrix}$$

постоянного ранга ($\operatorname{rank} B^{+}(t)A(t) = 4$) и имеет два ($\delta = 2$) ненулевых собственных числа $\lambda_{1,2} = \pm i \in \sigma(B^{+}(t)A(t))$, один трехкратный нуль $\lambda_{3,4,5} = 0 \in \sigma(B^{+}(t)A(t))$, для которого геометрическая кратность отличается от алгебраической ($\gamma = 3$), и один нуль $\lambda_6 = 0 \in \sigma(B^{+}(t)A(t))$, для которого геометрическая кратность совпадает с алгебраической ($n - \delta - \gamma = 1$). Используя матрицы

$$S = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin t & \cos t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos t & \sin t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin t & \cos t \\ 0 & 0 & \cos t & -\sin t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin t & \cos t & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_\gamma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

приводим систему (21) к виду (13). Для нахождения компонент вектора

$$y(t) = S^{-1}(t)z(t) = \operatorname{col}\Big(u(t), v(t), 0\Big) \in \mathbb{R}^6, \quad u(t) \in \mathbb{R}^2, \quad v(t) \in \mathbb{R}^3$$

используем систему (14); для этого выделяем блоки

$$\mathfrak{S}_{\delta\delta}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{S}_{\delta\gamma}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{S}_{\gamma\delta}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

матрицы

$$S^{-1}(t) \cdot S'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{S}_{\gamma\gamma}(t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение первого уравнения системы (14) имеет вид

$$u(t, c_\delta) = Y_\delta(t) \cdot c_\delta, \quad Y_\delta(t) = \begin{pmatrix} \cos 2t & -\sin 2t \\ \sin 2t & \cos 2t \end{pmatrix}, \quad c_\delta \in \mathbb{R}^2;$$

здесь $Y_\delta(t)$ — нормальная ($Y_\delta(0) = I_2$) фундаментальная матрица системы обыкновенных дифференциальных уравнений $u' = \Big(J_\delta^{-1}(t) - \mathfrak{S}_{\delta\delta}(t)\Big) \cdot u$. Решение второго уравнения системы (14) $v(t, c_\rho) = Y_\rho(t) \cdot c_\rho$, $c_\rho \in \mathbb{R}^1$ определяет матрица $Y_\rho(t) \in \mathbb{R}^{3\times 1}$, составленная из единственного ($\rho = 1$) линейно независимого столбца матрицы

$$Y_\gamma(t) := \begin{pmatrix} P_\Theta & O \\ O & O \end{pmatrix}, \quad P_\Theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где P_Θ — ортопроектор $P_\Theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{N}(\Theta)$. В силу непрерывности матриц $J_\delta^{-1}(t)$, $\mathfrak{S}_{\delta\delta}(t)$ и $\mathfrak{S}_{\delta\gamma}(t)$ однородная часть системы (21) имеет решение вида

$$z(t, c_{\delta+\rho}) = X(t)c_{\delta+\rho}, \quad X(t) = S(t) \cdot Y(t), \quad c_{\delta+\rho} \in \mathbb{R}^3,$$

где

$$X(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos t \\ 0 & 0 & \sin t \end{pmatrix}, \quad Y(t) = \begin{pmatrix} \cos 2t & -\sin 2t & 0 \\ \sin 2t & \cos 2t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

При этом условия (18) выполнены. В силу непрерывности функций $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $J_\delta^{-1}(t)$, $\Im_{\delta\delta}(t)$ и $\Im_{\delta\gamma}(t)$ для фиксированного вектора $g(t)$ частное решение системы (21) определяет оператор

$$\mathcal{K}\Big[\varphi(s), \psi(s), g(s)\Big](t) = \begin{pmatrix} -2(1+2\cos t)\sin^2\frac{t}{2} \\ (-1+2\cos t)\sin t \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad g(t) := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{N}\Big(\Theta(t)\Big).$$

Поскольку $Q = 0$, постольку в задаче о построении 2π-периодических решений системы (21) имеет место критический случай, причем условие (20) выполнено, следовательно 2π-периодическая задача для системы (21) имеет решение вида

$$z(t, c_r) = X(t)c_r + G\Big[f(s), g(s)\Big](t), \quad G\Big[f(s)\Big](t) \equiv K\Big[f(s)\Big](t), \quad c_r \in \mathbb{R}^3.$$

Заметим, что для произвольного вектора $\tilde{g}(t) \in \mathbb{N}\Big(\Theta(t)\Big)$ задача о построении 2π-периодических решений системы (21) не разрешима.

Список литературы

Бойчук А. А., Шегда Л. М. Вироджені нетерові крайові задачі // Нелінійні коливання. — 2007. — Т. 10, № 3. — С. 303–312.

Бояринцев Ю. Е., Чистяков В. Ф. Алгебро-дифференциальные системы. Методы решения и исследования. — Новосибирск: Наука, 1998. — 224 с.

Хайрер Э., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи. — М.: Мир, 1999. — 685 с.

Чистяков В. Ф. Алгебро-дифференциальные операторы с конечномерным ядром. — Новосибирск: Наука, 1996. — 280 с.

Чистяков В. Ф., Щеглова А. А. Избранные главы теории алгебро-дифференциальных систем. — Новосибирск: Наука, 2003. — 317 с.

Чуйко С. М. Нетеровы краевые задачи для вырожденных дифференциально алгебраических систем // Intern. Conf. Dynamical Systems Modelling and Stability Investigation: Тез. докл. конф. (Киев, 25–27 мая 2011 г.). — Киев, 2011. — С. 137.

Boichuk A. A. Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems. — Utrecht; Boston: VSP, 2004. — XIV + 317 p.

Campbell S. L. Singular Systems of differential equations. — San Francisco–London–Melbourne: Pitman Advanced Publishing Program. — 1980. — 178 p.