

УДК: 519.6

Условия применимости статистической модели Райса и расчет параметров райсовского сигнала методом максимума правдоподобия

Т. В. Яковлева

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Вычислительный центр им. А. А. Дородницына Российской академии наук,
Россия, 119333, г. Москва, ул. Вавилова, 40

E-mail: tan-ya@bk.ru

Получено 10 февраля 2014 г.

В работе развивается теория нового, так называемого двухпараметрического подхода к анализу и обработке случайных сигналов. Проведены математическое моделирование и сопоставление результатов решения задачи в условиях статистических моделей Гаусса и Райса. Дается обоснование применимости статистической модели Райса в условиях анализа огибающей измеряемого сигнала в задачах обработки данных и изображений. Развита и теоретически обоснован метод решения задачи шумоподавления и восстановления райсовского сигнала посредством одновременного вычисления двух статистических параметров — величины математического ожидания исходного сигнала и дисперсии шума — на основе принципа максимума правдоподобия. Проанализированы особенности функции правдоподобия для распределения Райса и вытекающие из них возможности оценки параметров сигнала и шума.

Ключевые слова: случайный сигнал, распределение Райса, распределение Гаусса, метод максимума правдоподобия, отношение сигнала к шуму

Conditions of Rice statistical model applicability and estimation of the Rician signal's parameters by maximum likelihood technique

T. V. Yakovleva

*Institution of Russian Academy of Sciences Dorodnicyn Computing Centre of RAS,
40 Vavilov st., Moscow, 119333, Russia*

Abstract. — The paper develops a theory of a new so-called two-parametric approach to the random signals' analysis and processing. A mathematical simulation and the task solutions' comparison have been implemented for the Gauss and Rice statistical models. The applicability of the Rice statistical model is substantiated for the tasks of data and images processing when the signal's envelope is being analyzed. A technique is developed and theoretically substantiated for solving the task of the noise suppression and initial image reconstruction by means of joint calculation of both statistical parameters — an initial signal's mean value and noise dispersion - based on the maximum likelihood method within the Rice distribution. The peculiarities of this distribution's likelihood function and the following from them possibilities of the signal and noise estimation have been analyzed.

Keywords: random signal, Rice distribution, Gauss distribution, maximum likelihood technique, signal-to-noise ratio

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2014, vol. 6, no. 1, pp. 13–25 (Russian).

© 2014 Татьяна Викторовна Яковлева

1. Введение

В последние годы среди методов анализа и обработки сигналов особую роль стали занимать методы, основанные на использовании статистических характеристик анализируемых данных. Очевидно, что при этом существенное значение имеет правильный выбор статистической модели, адекватно описывающей изучаемую величину. Статистическая модель Райса [Rice, 1945] описывает решение тех задач анализа случайного сигнала, которые связаны с измерением величины амплитуды, или огибающей сигнала, формируемого как сумма исходного сигнала и случайного шума, состоящего из большого числа независимых нормально распределенных компонент. Возрастающий интерес к распределению Райса связан, прежде всего, с широким диапазоном научных и технических задач, которые описываются именно данным распределением. К таким задачам относятся задачи магнитно-резонансной визуализации [Hendee, Morgan, 1984; Wang, Lei, 1994; Henkelman, 1985; Gudbjartsson, Patz, 1995]; задачи анализа сигналов радара [Marcum, Swelling, 1960]; прием и обработка радиосигналов [Перов, 2003; Carobbi, Cati, Millanta, 2004]; задачи, связанные с проблемой многолучевого затухания при передаче радиосигналов [Stuber, 2001]; задачи, связанные с анализом звукового эхо-сигнала [Talukdar, Lawing, 1991].

В настоящей работе райсовская статистическая модель используется для решения задачи одновременного вычисления параметров сигнала и шума на основе данных выборок измерений на примере анализа магнитно-резонансного изображения. Для решения этой задачи используется метод максимума правдоподобия, [Sijbers, den Dekker, Scheunders, Dyck, 1998; Sijbers, den Dekker, 2004; Carobbi, Cati, 2008]. В отличие от упомянутых работ, рассмотрение задачи проводится на основе строгого математического анализа условий применимости развитого двухпараметрического метода максимума правдоподобия и свойств полученных решений.

2. Постановка задачи и обоснование применимости райсовской статистической модели для ее решения

Очевидно, что решение задачи шумоподавления при восстановлении исходного изображения посредством обработки данных выборки измерений будет тем эффективнее, чем точнее будут определены параметры сигнала, формирующего изображение. Статистическая модель, адекватно описывающая процесс визуализации с учетом природы шумов, искажающих исходное изображение, определяется физическими особенностями процесса образования шумов и формирования изображения. Полученные в результате решения двухпараметрической задачи статистические параметры математического ожидания и дисперсии позволяют восстановить исходный сигнал изображения максимально точно.

Особенностью процесса магнитно-резонансной визуализации (например, в системах компьютерной томографии) является тот факт, что измеряемой и анализируемой величиной в этом процессе является амплитуда (или огибающая, или магнитуда) сигнала изображения. Поэтому при формировании магнитно-резонансных изображений величина сигнала подчиняется распределению Райса, так как именно это распределение адекватно описывает амплитуду случайного сигнала как корень квадратный суммы квадратов двух случайных величин, каждая из которых подчиняется гауссовой статистике. Шумы, искажающие магнитно-резонансное изображение, не являются аддитивными в отличие от шумов в процессах, описываемых гауссовской статистической моделью: величина шума при магнитно-резонансной визуализации зависит от величины сигнала, причем важной особенностью райсовского шума является то, что этот шум не только вносит случайные искажения в изображение, но и создает зависящий от величины сигнала фон, что приводит к существенному понижению контрастности изображения. Поэтому математические методы расчета процессов, подчиняющихся статистической модели Райса, а также соответствующие преобразования полученного сигнала с целью шумоподавления при

формировании и обработке изображения являются существенно нелинейными. Точное описание такого шума представляет собой достаточно сложную математическую задачу. Известны два приближенных предельных случая, которые используются для построения упрощенных схем анализа: при малых значениях отношения «сигнал/шум» райсовское распределение переходит в распределение Рэлея, а при больших — в нормальное гауссово распределение.

Однако применение гауссовской статистической модели и развитых для нее линейных методов обработки сигналов [Garnier, Bilbro, 1995; McGibney, Smith, 1993] при произвольном соотношении сигнала и шума в задачах, когда измеряемой величиной является амплитуда сигнала, ведет к ошибочным результатам, а именно — к появлению так называемого смещения в измеренной величине сигнала по отношению к ее реальному значению, что обусловлено вышеупомянутым фоном в изображении. Чтобы избежать появления такого смещения, при произвольных значениях отношения сигнала к шуму все чаще используются нелинейные методы фильтрации магнитно-резонансного изображения, основанные на использовании статистической модели Райса [Talukdar, Lawing, 1991; Sijbers, den Dekker, Scheunders, Dyck, 1998; Sijbers, den Dekker, 2004; Carobbi, Cati, 2008], так как в таком общем случае только эта статистическая модель адекватно описывает процессы, связанные с анализом и обработкой огибающей сигнала, к которым, в частности, относится и задача обработки магнитно-резонансного изображения. Это следует из математических формул, соответствующих райсовскому и гауссовскому статистическим распределениям, и иллюстрируется приведенными ниже графиками, полученными в ходе численного моделирования задачи.

Как известно, распределение Гаусса задается функцией плотности вероятности $P_G(x|\nu, \sigma^2)$ случайной величины x , которая выражается через статистические параметры ν и σ данного распределения следующим образом [Вентцель, 2005]:

$$P_G(x|\nu, \sigma^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\nu)^2}{2\sigma^2}\right). \quad (1)$$

В данной формуле параметры ν и σ представляют собой соответственно математическое ожидание (ν) и стандартное отклонение (σ) случайного сигнала x .

Для случайной величины $x = \sqrt{x_{\text{Re}}^2 + x_{\text{Im}}^2}$, подчиняющейся статистическому распределению Райса и представляющей собой амплитуду сигнала, реальная x_{Re} и мнимая x_{Im} части которого подчиняются гауссовскому распределению с параметрами ν и σ , плотность вероятности дается формулой

$$P(x|\nu, \sigma^2) = \frac{x}{\sigma^2} \cdot \exp\left(-\frac{x^2 + \nu^2}{2\sigma^2}\right) \cdot I_0\left(\frac{x\nu}{\sigma^2}\right). \quad (2)$$

В формуле (2) функция I_0 представляет собой модифицированную функцию Бесселя первого рода нулевого порядка [Абрамовиц, Стиган, 1979].

Сопоставляя выражения (1) и (2) для плотностей вероятности гауссовского и райсовского распределений, нетрудно убедиться в том, что распределение Райса переходит в распределение Гаусса лишь при очень больших значениях отношения сигнала к шуму, т. е. при $\nu/\sigma \gg 1$. Действительно, принимая во внимание асимптотические представления для модифицированных функций Бесселя первого рода нулевого порядка [Абрамовиц, Стиган, 1979], функцию I_0 при $\nu/\sigma \gg 1$ можно представить в следующем виде:

$$I_0(z) \sim \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}} \left\{1 + O\left(\frac{1}{z}\right)\right\}. \quad (3)$$

С учетом (2) и (3) при $\nu/\sigma \gg 1$ и для таких значений сигнала x , которые обеспечивают выполнение условия $\frac{x\nu}{\sigma^2} \gg 1$, получаем

$$P(x|\nu, \sigma^2) \sim \frac{x}{\sigma^2} \cdot \exp\left(-\frac{x^2 + \nu^2}{2\sigma^2}\right) \cdot \exp\left(\frac{x\nu}{\sigma^2}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sqrt{\frac{\sigma^2}{x\nu}} = \sqrt{\frac{x}{\nu}} \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\nu)^2}{2\sigma^2}\right).$$

На рисунке 1 представлены графики, иллюстрирующие зависимость плотности вероятности для гауссовского (пунктирная линия) и райсовского (сплошная линия) распределений от величины сигнала при различных соотношениях статистических параметров математического ожидания ν и дисперсии σ^2 , а именно, рисунок 1 отображает динамику изменения функций плотности вероятности для гауссовского и райсовского распределений с увеличением величины сигнала ν при постоянной единичной величине дисперсии $\sigma = 1$: слева направо — $\nu = 0.3$; $\nu = 1$; $\nu = 3$; $\nu = 7$. Приведенные на рисунке 1 графики иллюстрируют сближение функций плотности вероятности распределений Райса и Гаусса с ростом отношения сигнала к шуму ν/σ .

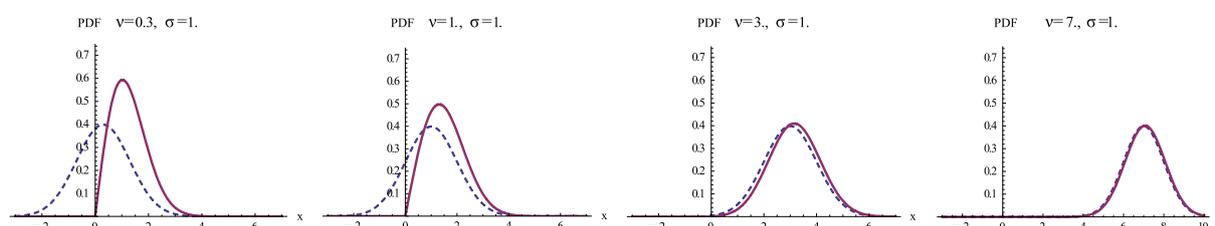


Рис. 1. Зависимости плотности вероятности для гауссовского (пунктирная линия) и райсовского (сплошная линия) распределений от величины сигнала x при различных соотношениях статистических параметров математического ожидания ν и дисперсии σ^2

Из графиков, приведенных на рисунке 1, вытекает следующий важный вывод: несмотря на то, что с увеличением величины отношения сигнала к шуму распределение Райса переходит в распределение Гаусса, графики этих распределений становятся неразличимы между собой только при $\nu/\sigma \geq 10$. Однако начиная уже с величины отношения сигнала к шуму $\nu/\sigma \geq 7$, графики этих двух распределений практически полностью совпадают, и в данном интервале значений ν/σ замена распределения Райса на распределение Гаусса при проведении теоретических расчетов не повлечет за собой появление существенных ошибок. Однако очевидно, что при меньших значениях отношения сигнала к шуму такая замена в функциях плотности вероятности может привести к заметным ошибкам и поэтому является неприемлемой. Другими словами, статистическая модель Гаусса, вообще говоря, неприменима для описания процессов, связанных с анализом и обработкой райсовской случайной величины, каковой является огибающая сигнала с гауссовскими реальной и мнимой частями.

Значительное расхождение функций плотности вероятности, соответствующих сопоставляемым статистическим распределениям Гаусса и Райса, в области не очень высоких значений отношения сигнала к шуму ($\nu/\sigma < 7$) приводит к появлению отмечаемого многими авторами смещения, или сдвига (в англоязычной литературе — the bias), в измеряемом уровне сигнала при использовании гауссовского приближения для описания магнитно-резонансной визуализации вместо адекватного райсовского. Неизбежность появления данного сдвига иллюстрируется приведенными ниже графическими результатами численного моделирования процесса обработки данных выборочных измерений сигнала. На рисунке 2 представлены диаграммы распределения случайной райсовской величины, а также функции плотности вероятности распределений Райса и Гаусса при различных значениях отношения сигнала и шума (при этом величина дисперсии шума принята равной единице ($\sigma = 1$) и изменяется только величина параметра ν). В силу физической природы измеряемого сигнала, представляющего собой огибающую,

т. е. амплитуду исходного сигнала, мы рассматриваем только область положительных значений величины сигнала. Представленные на рисунке 2 графики соответствуют следующим значениям параметра математического ожидания исходного сигнала: $\nu = 0.25$ (а); $\nu = 1$ (б); $\nu = 2$ (в). Функция плотности вероятности распределения Райса показана сплошной линией, в то время как пунктирная линия соответствует функции плотности вероятности распределения Гаусса.

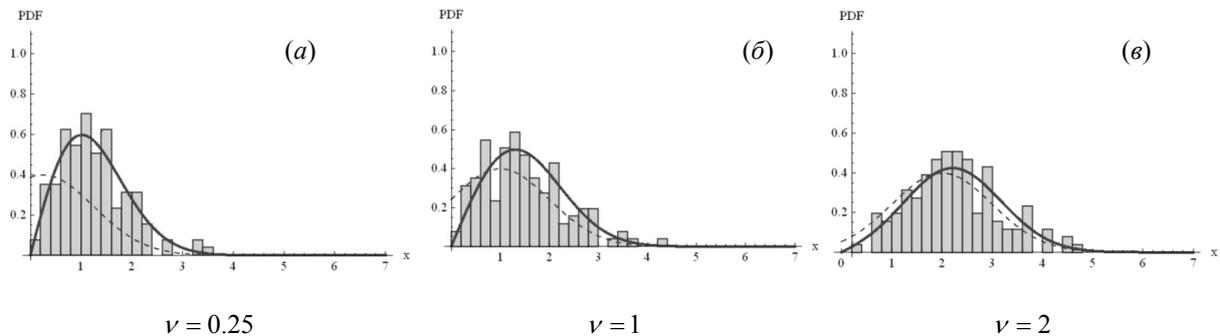


Рис. 2. Диаграммы распределения случайной райсовской величины, функции плотности вероятности распределений Райса (сплошная линия) и Гаусса (пунктирная линия) как функции величины сигнала x при $\sigma = 1$ и различных значениях параметра ν

Из диаграмм и графиков, представленных на рисунке 2, следует, что результаты расчета величины математического ожидания райсовского случайного сигнала по измеренным значениям выборки будут существенно отличаться в зависимости от того, производить ли данные расчеты в рамках статистической модели Райса или Гаусса. Как следует из представленных на рисунке 1 графиков, максимум функции плотности вероятности гауссовского статистического распределения смещен в сторону меньших значений сигнала по сравнению с максимумом функции плотности вероятности райсовского распределения. Поэтому если производить расчеты райсовского сигнала, выборочные значения которого представлены диаграммами на графиках рисунка 2, то при применении гауссовской статистической модели к данному сигналу, т. е. при расчетах математического ожидания с применением гауссовской функции плотности вероятности, более слабая коррелированность значений выборки с функцией плотности вероятности приведет к занижению расчетной величины сигнала по сравнению с истинной, которая получается при проведении расчетов в рамках адекватной данной задаче райсовской статистической модели. А именно, как нетрудно видеть из представленных диаграмм, гауссовская функция плотности вероятности «усиливает» более низкие значения выборочных измерений сигнала, смещая тем самым среднее значение в сторону уменьшения по сравнению с реальной величиной. Этот вывод графически иллюстрируется рисунком 3, на котором представлены графики расчетного значения величины сигнала (его математического ожидания) при использовании для расчетов функции плотности вероятности распределения Райса (верхняя линия) и Гаусса (средняя линия). Увеличение значений координаты по оси абсцисс соответствует увеличению величины сигнала ν (по оси абсцисс отложены номера отсчетов сигнала с шагом $\delta\nu = 0.25$) при постоянном значении дисперсии сигнала: $\sigma^2 = 1$. Представлен также график разности значений, полученных в результате расчетов с использованием обеих статистических моделей (нижняя линия). Эта разность и дает то смещение (the bias) в величине сигнала, которое неизбежно получается при решении задачи в рамках гауссовской статистической модели. Очевидно, что данный сдвиг уменьшается по мере увеличения отношения сигнала к шуму (т. е. по мере продвижения вправо по оси абсцисс), когда обе функции распределения — гауссовская и райсовская — сближаются.

Таким образом, представленные выше графические материалы, основанные на расчетах с использованием двух сопоставляемых статистических моделей Гаусса и Райса, иллюстрируют необходимость применения именно статистической модели Райса и неприменимость в общем случае гауссовской статистики в задачах магнитно-резонансной визуализации и других задачах,

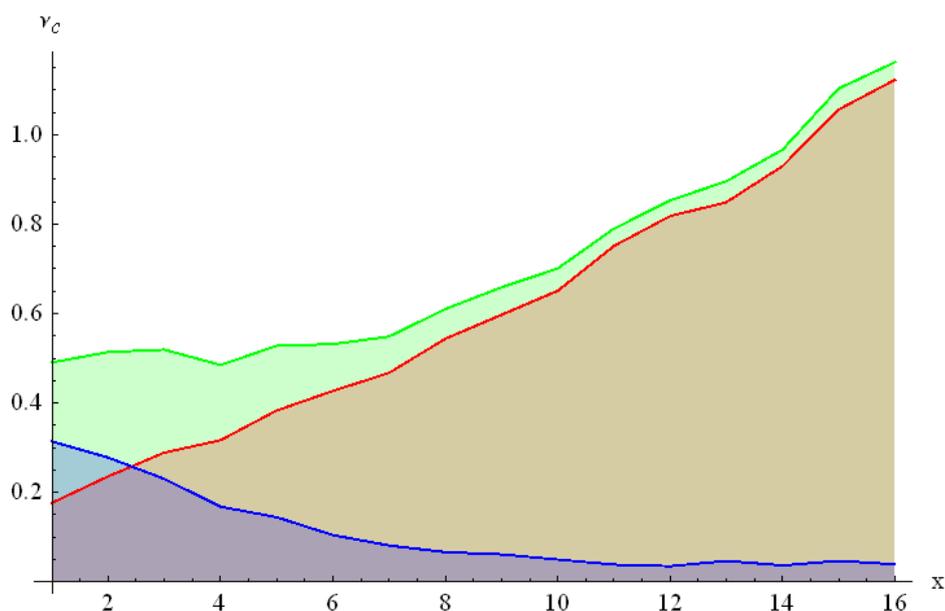


Рис. 3. Графики расчетного значения величины математического ожидания сигнала ν_c в зависимости от величины сигнала x при использовании для расчетов функции плотности вероятности распределения Райса (верхняя линия) и Гаусса (средняя линия). Нижняя линия представляет собой график разности значений, полученных в результате расчетов с использованием обеих статистических моделей

связанных с измерением, анализом и обработкой огибающей (амплитуды) случайного сигнала, реальная и мнимая составляющие которого искажаются гауссовским шумом. Гауссовская статистическая модель в этих задачах может применяться только в предельном случае большой величины отношения сигнала к шуму: $\nu/\sigma \geq 7$.

В противоположном предельном случае пренебрежимо малой величины отношения сигнала к шуму ($\nu/\sigma \ll 1$), когда речь идет о наличии шума практически в отсутствие сигнала, распределение Райса переходит в распределение Рэлея с функцией плотности вероятности:

$$P_R(x|\sigma^2) = \frac{x}{\sigma^2} \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right), \quad x \geq 0, \quad \sigma > 0. \quad (4)$$

Таким образом, из изложенного выше следует обоснованность теоретического решения задачи анализа и обработки магнитно-резонансных изображений именно в рамках статистической модели Райса при произвольных значениях отношения сигнала к шуму, при этом в предельных случаях величины данного отношения можно использовать статистические распределения Рэлея (при очень малом отношении сигнала к шуму: $\nu/\sigma \ll 1$) и Гаусса (при большой величине отношения сигнала к шуму: $\nu/\sigma \geq 7$) как предельные частные случаи распределения Райса.

3. Решение двухпараметрической задачи анализа райсовских сигналов методом максимума правдоподобия

В работах, направленных на развитие методов обработки изображений, полученных в системах магнитно-резонансной визуализации, как уже отмечалось выше, все чаще обоснованно используется именно распределение Райса [Sijbers, den Dekker, Scheunders, Dyck, 1998; Sijbers, den Dekker, 2004]. Однако в этих работах метод максимального правдоподобия используется, как правило, для определения только одного из двух статистических параметров задачи — параметра математического ожидания сигнала изображения, который является хотя и важным, но

не единственным и не достаточным для восстановления изображения. Вторым значимым статистическим параметром задачи является дисперсия данных, формирующая изображение. В традиционно используемом однопараметрическом приближении величина дисперсии считается известной априори, хотя практически все авторы подтверждают невыполнимость такого предположения на практике.

В настоящей работе в ходе проведенного теоретического анализа получен алгоритм вычисления обоих неизвестных параметров задачи — средней величины сигнала и дисперсии шума — методом максимума правдоподобия путем оригинальной замены переменных, которая позволяет перейти от системы двух нелинейных уравнений с двумя неизвестными к решению одного уравнения с одной неизвестной.

В изложенном ниже математическом анализе задачи будем использовать следующие обозначения: x_i — величина сигнала i -той выборки при измерении данных для последующей обработки магнитно-резонансного изображения; n — количество элементов в выборке (длина выборки). Для обозначения усреднения по выборке будем использовать угловые скобки:

$$\langle x \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i; \quad \langle x^2 \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2; \quad \dots; \quad \langle x^k \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^k.$$

Рассмотрим выборку из n измерений величины амплитуды случайного сигнала x . Тогда функция совместной плотности вероятности событий, состоящих в том, что результатом i -того измерения является величина x_i ($i=1, \dots, n$), выражается как произведение функций плотности вероятности для каждого измерения из выборки:

$$L(\nu, \sigma^2) = \prod_{i=1}^n P(x_i | \nu, \sigma^2), \quad (5)$$

где функция $P(x_i | \nu, \sigma^2)$ определяется выражением (2). Функцию $L(\nu, \sigma^2)$ называют также функцией правдоподобия. При известных данных выборок, полученных в результате измерений, эта функция является функцией неизвестных статистических параметров ν и σ^2 . Метод максимума правдоподобия состоит в определении тех значений ν и σ^2 , которые максимизируют функцию правдоподобия (5), или, что эквивалентно, ее логарифм, называемый логарифмической функцией правдоподобия:

$$\ln L(\nu, \sigma^2) = \sum_{i=1}^n \ln P(x_i | \nu, \sigma^2) = \sum_{i=1}^n \left\{ \ln x_i - \ln \sigma^2 - \frac{x_i^2 + \nu^2}{2 \cdot \sigma^2} + \ln I_0 \left(\frac{x_i \nu}{\sigma^2} \right) \right\}. \quad (6)$$

Формула (6) получена на основе формул (2) и (5). Система уравнений максимума правдоподобия для определения неизвестных ν и σ^2 получается приравниванием нулю частных производных логарифмической функции правдоподобия по обоим искомым параметрам сигнала и имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \nu} \ln L(\nu, \sigma^2) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial \sigma^2} \ln L(\nu, \sigma^2) = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Подставляя (6) в систему уравнений (7), получаем следующую систему уравнений максимума правдоподобия для определения искомым параметров задачи ν и σ^2 :

$$\begin{cases} \nu - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \cdot \tilde{I} \left(\frac{x_i \nu}{\sigma^2} \right) = 0, \\ \sigma^2 - \frac{1}{2 \cdot n} \sum_{i=1}^n (x_i^2 + \nu^2) + \frac{\nu}{n} \sum_{i=1}^n x_i \cdot \tilde{I} \left(\frac{x_i \nu}{\sigma^2} \right) = 0. \end{cases} \quad (8)$$

В (8) введено обозначение \tilde{I} для функции, являющейся отношением модифицированных функций Бесселя первого рода первого и нулевого порядков:

$$\tilde{I}(z) = \frac{I_1(z)}{I_0(z)}. \quad (9)$$

Функция $\tilde{I}(z)$ определяет свойства системы уравнений (8): существование решений, их количество и свойства. Как показывают результаты математического изучения функции $\tilde{I}(z)$, она является гладкой, монотонно возрастающей, выпуклой вверх в области положительных значений аргумента, принимая нулевое значение при нулевом значении аргумента и асимптотически приближаясь к единице [Yakovleva, Kulberg, 2013].

Для анализа и решения системы уравнений (8) введем новую переменную γ :

$$\gamma = \frac{\nu}{\sigma^2}. \quad (10)$$

Введение параметра γ является чисто техническим приемом перехода от одной пары независимых переменных (ν и σ^2) к другой паре (ν и γ). Получим систему уравнений максимума правдоподобия для введенных параметров ν и γ путем дифференцирования логарифмической функции правдоподобия (6) по этим параметрам. С учетом (2) получим следующее выражение для плотности вероятности $\hat{P}(x|\nu, \gamma)$ как функции параметров ν и γ , в случае, когда амплитуда сигнала x подчиняется распределению Райса:

$$\hat{P}(x|\nu, \gamma) = \frac{x\gamma}{\nu} \cdot \exp\left[-\frac{\gamma\nu}{2} \cdot \left(\frac{x^2}{\nu^2} + 1\right)\right] \cdot I_0(x\gamma). \quad (11)$$

Рассмотрим выборку из n измерений величины x амплитуды сигнала. Тогда функция правдоподобия $\hat{L}(\nu, \gamma)$ представляет собой функцию плотности вероятности выборки:

$$\hat{L}(\nu, \gamma) = \prod_{i=1}^n \hat{P}(x_i|\nu, \gamma). \quad (12)$$

С учетом формул (11) и (12) получаем для логарифмической функции правдоподобия как функции переменных ν и γ следующее выражение:

$$\ln \hat{L}(\nu, \gamma) = \sum_{i=1}^n \ln \hat{P}(x_i|\nu, \gamma) = \sum_{i=1}^n \left\{ \ln x_i + \ln \gamma - \ln \nu - \frac{\gamma \cdot \nu}{2} \left(1 + \frac{x_i^2}{\nu^2}\right) + \ln I_0(x_i \cdot \gamma) \right\}. \quad (13)$$

Система уравнений правдоподобия для параметров ν и γ выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \nu} \ln \hat{L}(\nu, \gamma) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial \gamma} \ln \hat{L}(\nu, \gamma) = 0. \end{cases} \quad (14)$$

Принимая во внимание (9), (13), в результате ряда преобразований получаем из (14) следующую систему уравнений максимума правдоподобия в условиях райсовского распределения во введенных переменных ν и γ :

$$\begin{cases} \nu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \cdot \tilde{I}(x_i \cdot \gamma), \\ \gamma = \frac{2 \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \cdot \tilde{I}(x_i \cdot \gamma)}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 + \nu^2 - 2 \cdot \frac{\nu}{n} \sum_{i=1}^n x_i \cdot \tilde{I}(x_i \cdot \gamma)}. \end{cases} \quad (15)$$

Нетрудно видеть, что первое уравнение системы (15) представляет собой уравнение для решения однопараметрической задачи [Sijbers, den Dekker, Scheunders, Dyck, 1998; Carobbi, Cati, 2008, Yakovleva, Kulberg, 2013], определяющее параметр математического ожидания ν в зависимости от значения второго параметра γ , или, принимая во внимание (10), в зависимости от параметра дисперсии σ^2 .

Заметим, что интересующая нас область изменения параметра γ определяется неотрицательными значениями $\gamma: \gamma \geq 0$, так как физически значимые значения параметра ν ограничиваются неотрицательной областью $\nu \geq 0$, а в силу стохастичности рассматриваемых случайных процессов величина дисперсии отлична от нуля: $\sigma^2 > 0$.

Подставим первое уравнение системы (15) во второе и введем следующее обозначение:

$$S(\gamma) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \tilde{I}(x_i \gamma). \quad (16)$$

Тогда получаем систему уравнений для ν и γ в следующем виде:

$$\begin{cases} \nu = S(\gamma), \\ \gamma = \frac{2\nu}{\langle x^2 \rangle + \nu^2 - 2\nu S(\gamma)}. \end{cases} \quad (17)$$

Подставляя первое уравнение этой системы во второе, получаем уравнение для γ :

$$\gamma = \frac{2S(\gamma)}{\langle x^2 \rangle - S^2(\gamma)}. \quad (18)$$

Очевидно, что существование и единственность решения уравнения (18) означают существование и единственность решения системы уравнений (17) и, следовательно, исходной системы уравнений (15).

Очевидно также, что из существования и единственности решения системы уравнений (15) для ν и γ , следуют существование и единственность решения системы уравнений (8) для исходных параметров задачи ν и σ^2 , в силу того, что каждое значение пары параметров ν и γ однозначно определяет пару статистических параметров задачи ν и σ^2 .

Свойства решения уравнения (18) были изучены посредством проведенного математического анализа. В результате доказано следующее утверждение.

Теорема. *Решение уравнения (18) для неотрицательного параметра γ существует, является единственным и соответствует максимуму логарифмической функции правдоподобия (13).*

Доказательство. Рассмотрим последовательно утверждения теоремы. Как следует из (16), функция $S(\gamma)$ представляет собой линейную комбинацию функций $\tilde{I}(x_i \gamma)$, определяемых выражением (9). Принимая во внимание перечисленные выше свойства функции \tilde{I} , из (16) можно сделать вывод о свойствах функции $S(\gamma)$ как функции гладкой, монотонной, выпуклой вверх. Очевидно, что значение $\gamma = 0$ соответствует нулевому значению параметра ν , т. е. определяет решение задачи в предельном случае, когда распределение Райса переходит в распределение Релея. Этот предельный случай соответствует отсутствию полезного сигнала в присутствии шума. В этом случае уравнение максимума правдоподобия имеет единственное тривиальное решение $\nu = 0$, в то время как во всех других случаях это тривиальное решение соответствует не максимуму, а минимуму функции правдоподобия [Yakovleva, Kulberg, 2013]. Поэтому ниже будем рассматривать только ненулевые положительные решения для параметра γ .

Докажем что решение уравнения (18) для положительного значения параметра γ существует и единственно. Для доказательства этого утверждения будем использовать графические отображения функций, образующих правую и левую части уравнения (18). Левая часть $\varphi_l(\gamma) = \gamma$ данного уравнения графически отображается отрезком прямой линии, выходящим из

начала координат. Рассмотрим поведение правой части $\varphi_r(\gamma) = \frac{2S(\gamma)}{\langle x^2 \rangle - S^2(\gamma)}$ уравнения (18)

при стремлении значения аргумента γ к нулю. Несложный анализ с учетом разложения в ряд вблизи нулевого значения аргумента модифицированных функций Бесселя первого рода, определяющих функции $\tilde{I}(z) = \frac{I_0(z)}{I_1(z)}$, приводит к следующему соотношению для $S(\gamma)$:

$$S(\gamma) \underset{\gamma \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{2} \gamma \cdot \langle x^2 \rangle + O(\gamma^3). \quad (19)$$

С учетом (19) получаем функции правой части $\varphi_r(\gamma)$ уравнения (18):

$$\varphi_r(\gamma) = \frac{2 \cdot S(\gamma)}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - S^2(\gamma)} \xrightarrow{\gamma \rightarrow 0} \gamma \cdot \left(1 + \gamma^2 \cdot \frac{\langle x^2 \rangle}{4} \right) > \gamma = \varphi_l(\gamma). \quad (20)$$

Таким образом, при $\gamma \rightarrow 0$ имеем $\varphi_r(\gamma) > \varphi_l(\gamma)$. Это означает, что кривая $\varphi_r(\gamma)$, отображающая правую часть уравнения (19), идет выше прямой $\varphi_l(\gamma) = \gamma$, соответствующей левой части этого уравнения.

При больших значениях аргумента γ , т. е. при $\gamma x \gg 1$, в силу асимптотического поведения модифицированных функций Бесселя и функции $\tilde{I}(z) = \frac{I_0(z)}{I_1(z)}$ нетрудно получить следующее асимптотическое выражение для функции $S(\gamma)$:

$$S(\gamma) \xrightarrow{\gamma \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \langle x \rangle. \quad (21)$$

С учетом (21) правая часть $\varphi_r(\gamma)$ уравнения (18) при $\gamma x \gg 1$, приобретает вид

$$\varphi_r(\gamma) \xrightarrow{\gamma \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot \langle x \rangle}{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} > 0. \quad (22)$$

Как нетрудно видеть, знаменатель выражения (22) всегда является неотрицательной величиной и равен величине среднеквадратичного отклонения в выборке измерений случайного сигнала x . Таким образом, с ростом значения аргумента γ правая часть уравнения (18) асимптотически приближается к положительной постоянной величине, определяемой выражением (22). Это означает, что кривая, отображающая правую часть $\varphi_r(\gamma)$ уравнения (18), неизбежно пересечет прямую $\varphi_l(\gamma) = \gamma$, отображающую левую часть этого уравнения, так как вблизи нуля эта кривая $\varphi_r(\gamma)$ идет выше упомянутой прямой $\varphi_l(\gamma)$.

В силу гладкости и монотонности функции $\varphi_r(\gamma)$, стоящей в правой части (18), а также в силу выявленного выше поведения данной функции вблизи нуля и в асимптотике делаем вывод о существовании и единственности решения уравнения (18).

Докажем теперь, что это решение, определяющее экстремум логарифмической функции правдоподобия, соответствует именно максимуму данной функции. Для этого проанализируем вторую производную логарифмической функции правдоподобия по переменной γ :

$$\frac{\partial^2}{\partial \gamma^2} \ln L(v, \gamma) = \left(\frac{1}{\gamma} + \frac{S(\gamma)}{2} - \frac{\langle x^2 \rangle}{2S(\gamma)} \right)' = -\frac{1}{\gamma^2} + \frac{S'}{2} + \frac{S'}{2S^2} \langle x^2 \rangle. \quad (23)$$

Пользуясь выражением (19), получаем следующую оценку (23) при $\gamma \rightarrow 0$:

$$\frac{\partial^2}{\partial \gamma^2} \ln L(v, \gamma) \underset{\gamma \rightarrow 0}{\sim} \frac{\langle x^2 \rangle}{4} + O(\gamma). \quad (24)$$

Из выражения (24) следует, что вторая производная логарифмической функции правдоподобия всегда положительна при $\gamma \rightarrow 0$ и, следовательно, тривиальное решение соответствует ее минимуму. А поскольку логарифмическая функция правдоподобия является гладкой, то второй экстремум, соответствующий нетривиальному решению уравнения (18), может быть только максимумом.

Таким образом, рассмотрение задачи в переменных v и γ позволяет получить доказательство существования и единственности решения двухпараметрической задачи максимума правдоподобия для случая $\gamma \neq 0$, т. е. при $v \neq 0$, что соответствует общему случаю распределения Райса, не сводящемуся к распределению Релея. Следует отметить, что, вводя переменную γ , мы предполагаем, что точка $\gamma = 0$ исключается из рассмотрения, так как представленный выше вывод системы уравнений и расчет производных справедливы только при этом условии. Очевидно, что тривиальное решение $\gamma = 0$ всегда удовлетворяет уравнению (18). Однако при существовании нетривиального решения тривиальное решение соответствует минимуму, а не максимуму функции правдоподобия и поэтому не является искомым решением. Если же рассматривается случай отсутствия полезного сигнала ($v = 0$), т. е. распределение Релея, то, как нетрудно видеть, тривиальное решение является единственным и соответствует максимуму функции правдоподобия. Теорема доказана.

Уравнение (18) является нелинейным уравнением, которое, вообще говоря, при произвольном соотношении параметров не может быть решено аналитически. Численное решение уравнения (18) позволяет определить значение параметра $\gamma = \frac{v}{\sigma^2}$, а затем, с помощью первого из уравнений системы (17), и значение второй переменной — параметра v . Полученные таким образом решения, согласно методу максимального правдоподобия, с наибольшей вероятностью соответствуют действительным статистическим параметрам сигнала магнитно-резонансного изображения, подчиняющегося распределению Райса. Разработанная процедура решения двухпараметрической задачи позволяет, основываясь на данных реальных измерений, а не на априорных предположениях, определить статистические параметры анализируемого случайного сигнала, в частности сигнала, формирующего магнитно-резонансное изображение.

Очевидно, что этот вывод в полной мере справедлив и для решения системы (8) в переменных v и σ^2 , соответствующих основным статистическим параметрам задачи — математическому ожиданию исходного сигнала и дисперсии шума.

Уравнение (18) в асимптотическом пределе $x \cdot \gamma \gg 1$ позволяет легко определить приближенное аналитическое решение для параметра γ . Это решение определяется посредством использования асимптотических свойств функции (9), которая, в свою очередь, определяет поведение переменной $S(\gamma)$. С учетом асимптотической формулы (21) для функции $S(\gamma)$, из (18)

нетрудно получить следующее выражение для решения γ в приближении $x \cdot \gamma \gg 1$:

$$\gamma \approx \frac{2\langle x \rangle}{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}. \quad (25)$$

Приближение $x \cdot \gamma \gg 1$ означает выполнение условия очень большого значения отношения сигнала к шуму. Таким образом, выражение (25) представляет собой простое аналитическое решение для переменной γ , полученное в предельном случае, когда отношение сигнала к шуму очень велико. Этот предельный случай соответствует ситуации, когда мы имеем дело с сигналом, величина которого близка к детерминированной, хотя и в условиях стохастичности. В этом пределе распределение Райса переходит в распределение Гаусса. Величина $\langle x \rangle$ в числителе выражения (25) представляет собой среднюю величину, т. е. математическое ожидание анализируемого случайного сигнала x , а знаменатель выражения (25) представляет собой, по определению, величину дисперсии этого сигнала, и, в силу стохастического характера рассматриваемого процесса, эта величина всегда отлична от нуля. Принимая во внимание, что сигналом x является амплитуда случайной величины $x = \sqrt{x_{\text{Re}}^2 + x_{\text{Im}}^2}$, реальная и мнимая части которой являются гауссовскими величинами с математическим ожиданием ν и одинаковой величиной дисперсии σ^2 , нетрудно убедиться, что величина дисперсии сигнала x , стоящая в знаменателе выражения (25), равна удвоенной дисперсии реальной и мнимой составляющих сигнала: $\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = 2 \cdot \sigma^2$. Этот вывод следует из сопоставления формулы (10), определяющей γ , с выражениями (21) и (25) для асимптотического приближения $x \cdot \gamma \gg 1$.

4. Заключение

В работе дается обоснование применимости статистической модели Райса в условиях анализа огибающей измеряемого сигнала. Проведено численное моделирование с целью сопоставления результатов применения статистических моделей Гаусса и Райса. Получен вывод о том, что различием распределений Гаусса и Райса между собой можно пренебречь только в интервале достаточно больших значений данного отношения ($\nu/\sigma \geq 7$).

Рассматривается двухпараметрическая задача одновременного расчета сигнала и шума в условиях райсовского распределения. Развит и математически обоснован метод решения этой задачи на основе принципа максимума правдоподобия путем оригинальной замены переменных. При этом решение задачи основывается исключительно на данных измерений и не связано с априорными предположениями относительно величины шума, которые характерны для традиционно используемого однопараметрического подхода к анализу и обработке случайных сигналов. Доказаны существование и единственность решения уравнений максимума правдоподобия для расчета параметров сигнала и шума, причем решение системы двух нелинейных уравнений с двумя неизвестными удается свести к решению одного уравнения для одной неизвестной, что значимо с точки зрения практической реализации предлагаемого метода. Доказанная единственность решения задачи позволяет сократить необходимые вычислительные ресурсы: получение первого решения уравнения означает возможность прерывания процедуры численного расчета, так как полученное решение является единственным.

Список литературы

- Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. — М.: Наука, 1979.
- Вентцель Е. С. Теория вероятностей // 10-ое изд., стер. — М.: «Академия», 2005. — 576 с.
- Перов А. И. Статистическая теория радиотехнических систем. — М.: Радиотехника, 2003. — 400 с.
- Carobbi C. F. M., Cati M. The absolute maximum of the likelihood function of the Rice distribution: existence and uniqueness // IEEE Trans. on Instrumentation and Measurement. — Vol. 57, No. 4. — April, 2008. — P. 682–689.
- Carobbi C. F. M., Cati M., Millanta L. M. A New Procedure for Evaluating the Performance of the Site for Radiation Test or Antenna Calibration // EMC Europe 2004 International Symposium on Electromagnetic Compatibility, Symposium Record. — Vol. 2. — P. 702–706, Eindhoven, The Netherlands, Sep. 6–10, 2004.
- Garnier S. J., Bilbro G. L. Magnetic resonance image restoration // J. Math. Imag. — 1995. — Vision. — Vol. 5. — P. 7–19.
- Gudbjartsson H., Patz S. The Rician distribution of noisy MRI data // Magn. Reson. Med. — 1995. — Vol. 34 — P. 910–914.
- Hendee, W. R.; Morgan, C. J. Magnetic Resonance Imaging Part I—Physical Principles // West J Med. — 1984. — 141 (4). — P. 491–500.
- Henkelman R. M. Measurement of signal intensities in the presence of noise in MR images // Med. Phys. — 1985. — Vol. 12, No. 2. — P. 232–233.
- Marcum J. I., Swelling P. Studies of target detection by pulsed radar // IRE Trans. Information. — April, 1960. — Vol. IT-6.
- Rice S. O. Mathematical Analysis of Random Noise // Bell System Technical Journal. — 1945. — Vol. 24. — P. 46–156.
- Sijbers J., den Dekker A. J. Maximum Likelihood estimation of signal amplitude and noise variance from MR data // Magn. Reson. Med. — 2004. — 51(3). — P. 586–594.
- Sijbers J., den Dekker A. J., Scheunders P., Dyck D. V. Maximum-Likelihood Estimation of Rician Distribution Parameters // IEEE Transactions on Medical Imaging. — June 1998. — Vol. 17, No. 3. — P. 357–361.
- Stuber G. L. Principles of Mobile Communication // Norwell, MA: Kluwer, 2001.
- Talukdar K. K., Lawing W. D. Estimation of the parameters of Rice distribution // J. Acoust. Soc. Amer. — Mar. 1991. — Vol. 89, No. 3. — P. 1193–1197.
- Wang T., Lei T. Statistical analysis of MR imaging and its application in image modeling // Proc. IEEE Int. Conf. Image Processing and Neural Networks. — 1994. — Vol. I. — P. 866–870.
- Yakovleva T. V., Kulberg N. S. Noise and Signal Estimation in MRI: Two-Parametric Analysis of Rice-Distributed Data by Means of the Maximum Likelihood Approach // American Journal of Theoretical and Applied Statistics. — 2013. — Vol. 2, No. 3. — P. 67–79. doi: 10.11648/j.ajtas.20130203.15.