

УДК: 523.51

Задача аппроксимации радиационных коэффициентов материалов на заданном диапазоне энергии

В. Г. Назаров

Институт прикладной математики ДВО РАН,
Россия, 690041, г. Владивосток, ул. Радио, д. 7
Дальневосточный государственный университет,
Россия, 690950, г. Владивосток, ул. Суханова, д. 8

E-mail: naz@iam.dvo.ru

Получено 22 января 2014 г.,
после доработки 14 апреля 2014 г.

В работе рассматривается вопрос о возможности создания материала, который имеет коэффициенты ослабления и рассеяния рентгеновского излучения близкие или совпадающие с этими же коэффициентами для другого, заранее заданного материала. Проведена компьютерная обработка данных о значении этих коэффициентов для большого набора различных веществ, изучена их зависимость от энергии излучения. Сделан вывод о возможности успешного решения поставленной задачи во многих случаях, а так же указаны основные трудности, которые могут при этом возникнуть. Приведены результаты расчетов, выполненных для ряда конкретных веществ.

Ключевые слова: уравнение переноса излучения, рентгеновская томография, задача создания материалов

Problem of material radiation coefficients approximation at a given energy band

V. G. Nazarov

*Institute of Applied Mathematics FEBRAS, 7 Radio st., Vladivostok, 690041, Russia
Far Eastern Federal University, 8 Suhanova st., Vladivostok, 690950, Russia*

Abstract. — The problem of formation of a material, which has the coefficients of attenuations and scattering close or coinciding with the same coefficients for some other predetermined material was considered. A computer processing of values of these coefficients for a big set of various materials has been carried out and their dependence on radiation energy value was studied. The conclusion was drawn about probability of successful solution of the problem in many cases and difficulties, which may occur were pointed out. A set of computer calculations carried out for some specific materials is provided.

Keywords: radiation transfer equation, X-ray tomography, materials formation problem

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2014, vol. 6, no. 2, pp. 217–230 (Russian).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 11-01-98521) и Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России», (госконтракты 16.740.11.0456, 14.740.11.1000)

Введение

Данная работа является продолжением исследований автора [Назаров, 1999; Назаров, 2004; Назаров, 2013] по вопросу создания материалов с заданными радиационными характеристиками. В целом эта проблема представляет как теоретический, так и практический интерес, так как исследуется возможность разработки маскирующего материала, затрудняющего радиографическое обнаружение заданного вещества на определенных диапазонах энергий. В этом случае любые алгоритмы компьютерной томографии, основанные на уравнении переноса излучения, как классические [Natterer, 1986], так и основанные на использовании внешних источников излучения специального типа [Аниконов, Прохоров, 1992; Anikonov, Prokhorov, Kovtanyuk, 1993; Kovtanyuk, Prokhorov, 2006], или мультиэнергетические [Ковтанюк и др., 2011], оказываются неэффективными при обнаружении контактной границы маскирующего материала с заданным веществом на определенных диапазонах энергий. Ранее, по результатам исследования [Назаров, 2004] автором вместе с рядом других исследователей был получен патент РФ на способ маскировки изделий [Аниконов и др., 2005], основанный на возможности искусственного создания материала, для которого коэффициент поглощения зависит от энергии рентгеновского излучения заранее заданным образом. Полученные ранее в [Назаров, 2004] результаты для коэффициента поглощения энергии опирались на работы [Аниконов, Прохоров, 1992; Аниконов, Прохоров, Ковтанюк, 2000], в которых обоснование невидимости (или плохой видимости) границы контакта различных материалов предполагало, в частности, что энергия рентгеновского излучения сравнительно невелика (не более 20–30 кэВ) и столкновения фотонов с электронами вещества носят в основном упругий характер. В случае когда можно добиться одновременно хорошей аппроксимации коэффициентов ослабления и рассеяния, такое ограничение на энергию излучения становится не нужным. Это обстоятельство будет ясно из дальнейшего изложения. Теоретически вопрос о возможности такой аппроксимации был изучен в [Назаров, 2013].

В данной работе приводятся результаты расчетов для ряда конкретных веществ и диапазонов энергии излучения. Кроме того, на основе результатов компьютерной обработки данных для нескольких сот веществ (включая все химические элементы от водорода до урана) дается обзор ситуации «в целом». Таким образом, дается анализ большинства случаев, с которыми исследователь может столкнуться на практике.

Предварительные замечания и постановка задачи

В качестве математической модели процесса переноса излучения в веществе, заполняющем область $G \subset \mathbb{R}^3$, взято следующее интегродифференциальное уравнение [Аниконов, Прохоров, Ковтанюк, 2000]:

$$\begin{aligned} & \omega \cdot \nabla_r f(r, \omega, E) + \mu_a(r, E)f(r, \omega, E) = \\ & = \int_{E_b}^{E_t} \int_{\Omega} \mu_s(r, E')g(r, \omega \cdot \omega', E, E')f(r, \omega', E')d\omega' dE' + J(r, \omega, E). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $f(r, \omega, E)$ — плотность излучения в точке $r \in G$, распространяющегося в направлении $\omega \in \Omega$, $\Omega = \{\omega \in \mathbb{R}^3 : |\omega| = 1\}$ и имеющего энергию $E \in [E_b, E_t]$, $\mu_a(r, E)$ — коэффициент ослабления (полного взаимодействия) излучения в точке r при энергии E , $\mu_s(r, E)$ — коэффициент рассеяния, $g(r, \omega \cdot \omega', E, E')$ — фазовая функция, характеризующая вероятность того, что фотон с энергией E' , находящийся в точке r и летящий в направлении $\omega' \in \Omega$, сменит направление и энергию на ω, E соответственно, $J(r, \omega, E)$ — плотность внутренних источников излучения.

Таким образом, если $J(r, \omega, E) = 0$ и какие-либо два (химически различных) вещества изотропны и имеют одинаковые коэффициенты ослабления и рассеяния, то их можно считать неразличимыми с радиационной точки зрения.

Введем следующие обозначения. Пусть вещество A является однородной смесью веществ A_1, \dots, A_n , $n \geq 2$, которые между собой химически не взаимодействуют, и итоговый объем v смеси A равен сумме объемов v_1, \dots, v_n ее компонентов A_1, \dots, A_n . Пусть m — масса вещества A ; m_1, \dots, m_n — массы веществ A_1, \dots, A_n ; ρ_1, \dots, ρ_n — плотности веществ A_1, \dots, A_n ; w_1, \dots, w_n — массовые доли, и ζ_1, \dots, ζ_n — объемные доли веществ A_1, \dots, A_n в смеси A . В таком случае по определению

$$\rho_i = \frac{m_i}{v_i}; \quad w_i = \frac{m_i}{m}; \quad \zeta_i = \frac{v_i}{v}; \quad v = \sum_{i=1}^n v_i. \quad (2)$$

Согласно формулам, приведенным в [Назаров, 2013] и [Hubbell, Seltzer, 1995] коэффициенты ослабления $\mu_a(E)$ и рассеяния $\mu_s(E)$ для смеси A имеют вид

$$\mu_a(E) = \sum_{i=1}^n \zeta_i \mu_{ai}(E). \quad (3)$$

$$\mu_s(E) = \sum_{i=1}^n \zeta_i \mu_{si}(E). \quad (4)$$

$$\text{Из (2) ясно, что все } \zeta_i \geq 0 \text{ и } \sum_{i=1}^n \zeta_i = 1. \quad (5)$$

Также из (2) получается формула для плотности итоговой смеси

$$\rho = \frac{m}{v} = \left(\frac{v}{m}\right)^{-1} = \left(\sum_{i=1}^n \frac{v_i}{m}\right)^{-1} = \left(\sum_{i=1}^n \frac{m_i}{m\rho_i}\right)^{-1} = \left(\sum_{i=1}^n \frac{w_i}{\rho_i}\right)^{-1} \quad (6)$$

и соотношения, связывающие объемные и массовые доли:

$$\zeta_i = \frac{v_i}{v} = \frac{\rho v_i}{m} = \frac{\rho m_i}{m\rho_i} = \rho \frac{w_i}{\rho_i}.$$

Пусть теперь E_1, E_2, \dots, E_N — некоторый конечный набор значений энергии из промежутка 1 кэВ–20 МэВ, причем $E_1 < E_2 < \dots < E_N$, $N \geq 1$. Пусть некоторое вещество A_0 не входит в набор веществ A_1, \dots, A_n и для A_0 известны значения коэффициентов ослабления и рассеяния $\mu_{a0}(E)$, $\mu_{s0}(E)$ для $E = E_k$, $k = 1, \dots, N$. Положим $\mu_{aik} = \mu_{ai}(E_k)$, $\mu_{sik} = \mu_{si}(E_k)$, $i = 0, 1, \dots, n$; $k = 1, \dots, N$. В этом случае выражение

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N [\mu_{a0}(E_k) - \mu_a(E_k)]^2 + \sum_{k=1}^N [\mu_{s0}(E_k) - \mu_s(E_k)]^2 &= \sum_{k=1}^N \left[\mu_{a0}(E_k) - \sum_{i=1}^n \zeta_i \mu_{ai}(E_k) \right]^2 + \\ + \sum_{k=1}^N \left[\mu_{s0}(E_k) - \sum_{i=1}^n \zeta_i \mu_{si}(E_k) \right]^2 &= \sum_{k=1}^N \left(\mu_{a0k} - \sum_{i=1}^n \zeta_i \mu_{aik} \right)^2 + \sum_{k=1}^N \left(\mu_{s0k} - \sum_{i=1}^n \zeta_i \mu_{sik} \right)^2 \end{aligned} \quad (7)$$

характеризует степень близости коэффициентов ослабления и рассеяния вещества A_0 и смеси A на множестве $\{E_1, E_2, \dots, E_N\}$. Все величины μ_{aik} , μ_{sik} , $i = 0, 1, \dots, n$; $k = 1, \dots, N$ при этом являются известными.

Задача аппроксимации заключается в таком выборе объемных долей $\zeta_1^*, \dots, \zeta_n^*$ смеси A веществ A_1, \dots, A_n , при котором выражение (7) будет минимальным. В дальнейшем мы будем ссылаться на результаты работы [Назаров, 2013], поэтому введем в рассмотрение множество M всех точек в \mathbb{R}^n , удовлетворяющих условиям (5), то есть

$$M = \{\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_n) \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n \zeta_i = 1; \zeta_i \geq 0, i = 1, \dots, n\}, \quad (8)$$

и пусть F — функция из \mathbb{R}^n в \mathbb{R} , определенная равенством

$$F(\zeta) = F(\zeta_1, \dots, \zeta_n) = \sum_{k=1}^N \left(\mu_{a0k} - \sum_{i=1}^n \zeta_i \mu_{aik} \right)^2 + \sum_{k=1}^N \left(\mu_{s0k} - \sum_{i=1}^n \zeta_i \mu_{sik} \right)^2. \quad (9)$$

Тогда задачу аппроксимации можно сформулировать в следующем виде:

Задача 1. Найти точку $\zeta^* \in M$ такую, что $F(\zeta^*) \leq F(\zeta)$ для любой точки $\zeta \in M$.

В работе [Назаров, 2013] задача 1 была сведена к нахождению решений системы линейных уравнений

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{n-1} \zeta_i \left[\sum_{k=1}^N (\mu_{ank} - \mu_{aik})(\mu_{ank} - \mu_{ajk}) + \sum_{k=1}^N (\mu_{snk} - \mu_{sik})(\mu_{snk} - \mu_{sjk}) \right] = \\ & = \sum_{k=1}^N (\mu_{ank} - \mu_{a0k})(\mu_{ank} - \mu_{ajk}) + \sum_{k=1}^N (\mu_{snk} - \mu_{s0k})(\mu_{snk} - \mu_{sjk}), \quad j = 1, \dots, n-1. \end{aligned} \quad (10)$$

В дальнейшем нам придется рассматривать выпуклые оболочки множеств в евклидовом пространстве размерности $2N$, поэтому сделаем ряд пояснений и введем некоторые обозначения.

Пусть \mathcal{E}^{2N} — множество всех отображений (конечного) множества $\{E_1, \dots, E_N\}$ в \mathbb{R}^2 . Ясно, что \mathcal{E}^{2N} есть $2N$ -мерное линейное пространство с базисом $\epsilon_{a1}, \dots, \epsilon_{aN}, \epsilon_{s1}, \dots, \epsilon_{sN}$, где $\epsilon_{ai}(E_k) = (\delta_{ik}, 0)$, $\epsilon_{si}(E_k) = (0, \delta_{ik})$; $i, k = 1, \dots, N$, и

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = k \\ 0 & \text{при } i \neq k. \end{cases}$$

Далее во избежание путаницы через $\bar{\mu}_i = \bar{\mu}_i(E)$ будем обозначать вектор пространства \mathcal{E}^{2N} , соответствующий материалу A_i , $i = 0, 1, \dots, n$. При этом запись

$$\bar{\mu}_i = (\mu_{ai}, \mu_{si}) = \sum_{k=1}^N (\mu_{aik} \epsilon_{ak} + \mu_{sik} \epsilon_{sk}), \quad i = 0, 1, \dots, n$$

есть разложение $\bar{\mu}_i$ по ортонормированному базису. Легко видеть [Назаров, 2013], что после введения в \mathcal{E}^{2N} каноническим образом скалярного произведения оно становится евклидовым пространством размерности $2N$, а упорядоченные пары сеточных функций $(\mu_{ai}(E), \mu_{si}(E))$ — элементами этого пространства. В этих обозначениях из (9) получим

$$F(\zeta) = F(\zeta_1, \dots, \zeta_n) = \left(\bar{\mu}_0 - \sum_{i=1}^n \zeta_i \bar{\mu}_i \right)^2, \quad (11)$$

то есть, $F(\zeta)$ является квадратом расстояния между точками $\bar{\mu}_0$ и $\sum_{i=1}^n \zeta_i \bar{\mu}_i$ пространства \mathcal{E}^{2N} , а система уравнений (10) примет вид

$$\left(\sum_{i=1}^{n-1} \zeta_i y_i \right) \cdot y_j = y_0 \cdot y_j, \quad j = 1, \dots, n-1, \quad (12)$$

где $y_i = \bar{\mu}_i - \bar{\mu}_n$, $i = 0, \dots, n-1$, а точка означает скалярное произведение векторов пространства \mathcal{E}^{2N} .

Далее через $\{\bar{\mu}_1, \dots, \bar{\mu}_n\}^+$ будем обозначать выпуклую оболочку (конечного) множества точек $\{\bar{\mu}_1, \dots, \bar{\mu}_n\}$ в пространстве \mathcal{E}^{2N} , а через $P(\bar{\mu}_1, \dots, \bar{\mu}_n)$ — минимальную плоскость в \mathcal{E}^{2N} , содержащую множество $\{\bar{\mu}_1, \dots, \bar{\mu}_n\}$.

Доказано [Назаров, 2013], что система уравнений (12) разрешима относительно переменных $\zeta_1, \dots, \zeta_{n-1}$ и множество всех ее решений является $(n-1-r)$ -мерной плоскостью в \mathbb{R}^{n-1} , где r есть размерность пространства, порожденного векторами y_1, \dots, y_{n-1} . Что же касается решений задачи 1, то здесь удобно рассматривать следующие три ситуации:

1) $\bar{\mu}_0 \in \{\bar{\mu}_1, \dots, \bar{\mu}_n\}^+$; тогда $\bar{\mu}_0$ совпадает со своей ортогональной проекцией $\bar{\mu}'_0$ на плоскость $P(\bar{\mu}_1, \dots, \bar{\mu}_n)$, система (12) имеет допустимые решения $(\zeta' = (\zeta'_1, \dots, \zeta'_{n-1}))$ где все $\zeta'_i \geq 0$ и $\sum_{i=1}^{n-1} \zeta'_i \leq 1$, из которых получаются все решения ζ^* задачи 1, причем $F(\zeta^*) = 0$.

2) $\bar{\mu}_0 \notin \{\bar{\mu}_1, \dots, \bar{\mu}_n\}^+$, но $\bar{\mu}'_0 \in \{\bar{\mu}_1, \dots, \bar{\mu}_n\}^+$; тогда система (12) тоже имеет допустимые решения, приводящие к решениям ζ^* задачи 1, причем $F(\zeta^*) > 0$.

3) $\bar{\mu}'_0 \notin \{\bar{\mu}_1, \dots, \bar{\mu}_n\}^+$; тогда система (12) не имеет допустимых решений, однако решение задачи 1 существует всегда, поэтому оно находится на границе ∂M множества M .

Также в [Назаров, 2013] была доказана следующая теорема.

Теорема. Из заданного набора веществ A_1, \dots, A_n тогда и только тогда можно сформировать смесь A , коэффициенты ослабления и рассеяния которой одновременно совпадают с соответствующими коэффициентами вещества A_0 для каждого значения энергии E_1, E_2, \dots, E_N , когда вектор $\bar{\mu}_0$ принадлежит выпуклой оболочке векторов $\bar{\mu}_1, \dots, \bar{\mu}_n$.

С прикладной точки зрения весьма полезным оказывается рассмотрение случая $N = 1$. В этом случае $\mathcal{E}^{2N} = \mathbb{R}^2$ и все векторы $\bar{\mu}_0, \bar{\mu}_1, \dots, \bar{\mu}_n$ можно легко изобразить точками на плоскости, поскольку они имеют только две компоненты: $\bar{\mu}_i = (\mu_{ai}, \mu_{si})$, $i = 0, 1, \dots, n$. В этом случае первая компонента μ_{ai} есть коэффициент ослабления, а вторая μ_{si} — коэффициент рассеяния вещества A_i для некоторой заданной энергии E_1 . При этом выпуклая оболочка $\{\bar{\mu}_1, \dots, \bar{\mu}_n\}^+$ множества точек $\{\bar{\mu}_1, \dots, \bar{\mu}_n\}$ легко строится с помощью карандаша и линейки, а принадлежность к ней вектора $\bar{\mu}_0$ определяется чисто визуально.

Согласно теореме 1, в случае $n = 2$ имеем $\bar{\mu}_0 \in \{\bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2\}^+$ тогда и только тогда, когда три точки $\bar{\mu}_0, \bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2$ лежат на одной прямой, причем точка $\bar{\mu}_0$ находится между $\bar{\mu}_1$ и $\bar{\mu}_2$. Такая ситуация является, естественно, исключительной.

В случае $n \geq 3$ имеем: $\bar{\mu}_0 \in \{\bar{\mu}_1, \dots, \bar{\mu}_n\}^+$ тогда и только тогда, когда точка $\bar{\mu}_0$ принадлежит треугольнику с вершинами в каких-нибудь точках из набора $\{\bar{\mu}_1, \dots, \bar{\mu}_n\}$, например в точках $\{\bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2, \bar{\mu}_3\}$. Таким образом, в этом случае для ответа на вопрос о единственности решения ζ^* задачи 1 и выполнении при этом равенства $F(\zeta^*) = 0$ нет необходимости решать систему уравнений (10). На все эти вопросы можно ответить визуально анализируя положение точек $\bar{\mu}_0, \bar{\mu}_1, \dots, \bar{\mu}_n$ на плоскости. Впрочем, для нахождения конкретных численных значений $\zeta_1^*, \dots, \zeta_n^*$ решения ζ^* , решать систему (10) все-таки придется.

В случае если $\bar{\mu}_0 \notin \{\bar{\mu}_1, \dots, \bar{\mu}_n\}^+$, опять-таки чисто визуально, не решая системы (10), можно приближенно оценить качество будущего решения ζ^* задачи 1, поскольку, согласно (9),

число $F(\zeta^*)$ есть квадрат расстояния от $\bar{\mu}_0$ до $\{\bar{\mu}_1, \dots, \bar{\mu}_n\}^+$. Эти утверждения далее будут проиллюстрированы точечными диаграммами, построенными для конкретных наборов веществ.

Изучение ситуации для конкретных веществ и примеры выпуклых оболочек

Предыдущее утверждения, изложенные в основном в работах [Назаров, 2004; Назаров, 2013], носили абстрактный характер и не зависели от конкретных веществ. В этой части работы мы остановимся на характере поведения функций $\mu_a(E)$ и $\mu_s(E)$ для различных конкретных веществ и попытаемся оценить насколько эффективной может быть имитация заданного вещества с помощью различных смесей из других веществ на практике.

Сделаем ряд предварительных замечаний. В [Hubbell, Seltzer, 1995] приведены зависимости от энергии E массовых коэффициентов ослабления $\mu_a(E)/\rho$ и поглощения $\mu_{en}(E)/\rho$ для 92 химических элементов от водорода до урана включительно и 48 веществ сложного химического состава представляющих интерес для дозиметрии (см. также [Аниконов и др., 2009 (свидетельство о гос. регистрации)] и [Аниконов и др., 2009 (официальный бюллетень)]). Данные представлены в виде сеточных функций, определенных для ряда значений энергии из промежутка 1 кэВ–20 МэВ. На основе таблиц [Hubbell, Seltzer, 1995] и дополнительной информации, почерпнутой из справочников по химии, была создана база данных, содержащая зависимости (теперь уже линейных) коэффициентов ослабления $\mu_a(E)$ и рассеяния $\mu_s(E)$ от энергии из этого промежутка. Как и в [Hubbell, Seltzer, 1995], эти зависимости были получены в виде сеточных функций и далее использовались при проведении расчетов по имитации заданных материалов смесями.

Характер поведения $\mu_a(E)$ и $\mu_s(E)$ для разных веществ во многом одинаков; отметим следующее.

1) На промежутке 1 кэВ–20 МэВ функции $\mu_a(E)$ и $\mu_s(E)$ для каждого вещества положительны и непрерывны всюду, кроме, быть может, конечного числа точек, в которых они имеют разрыв. Для химических элементов с порядковыми номерами Z меньше 11 эти функции непрерывны на данном промежутке.

2) Для каждого вещества значения $\mu_a(E)$ и $\mu_s(E)$ на промежутке 1 кэВ–20 МэВ сильно изменяются (в сотни тысяч раз). При фиксированном значении энергии E' величины $\mu_a(E')$ и $\mu_s(E')$ для разных веществ также могут сильно отличаться (см. рис. 2).

3) При $E > 116$ кэВ для всех указанных веществ функции $\mu_a(E)$ и $\mu_s(E)$ непрерывны

На рисунке 1 в качестве иллюстрации представлены графики зависимости $\mu_a(E)$ и $\mu_s(E)$ для золота. На горизонтальной оси отложено значение энергии E (МэВ), на вертикальной — значения $\mu_a(E)$ (сплошная линия) и $\mu_s(E)$ (пунктир) в размерности (см^{-1}) . Масштаб на обеих осях логарифмический. Кривые строились путем линейной интерполяции соответствующих сеточных функций.

Созданная база данных содержит 480 веществ (совокупность которых далее обозначим через S^*), включая все вещества из таблиц [Hubbell, Seltzer, 1995], а так же различные виды пластмасс, кислоты и ряд других органических и неорганических соединений. Чтобы лучше понять, как выглядит выпуклая оболочка множества S^* , соответствующая информация была представлена в виде точечных диаграмм на рисунках 2, 3 и 4 для энергии $E' = 300$ кэВ (то есть для случая $N = 1$). На горизонтальной оси откладывалось значение коэффициента ослабления $\mu_a(E')$, а на вертикальной — коэффициента рассеяния $\mu_s(E')$. Каждое вещество $A_i \in S^*$ при этом отображалось точкой с соответствующими координатами $(\mu_{ia}(E'), \mu_{is}(E'))$.

На рисунке 2 для представления всех веществ из S^* по обеим осям был выбран логарифмический масштаб. В левой нижней части диаграммы при этом находится водород, для которого коэффициенты $\mu_a(E')$ и $\mu_s(E')$ минимальны, а в правой верхней — уран с максимальными в S^* значениями $\mu_a(E')$ и $\mu_s(E')$. Эти два вещества соединены сплошной линией для более удобной

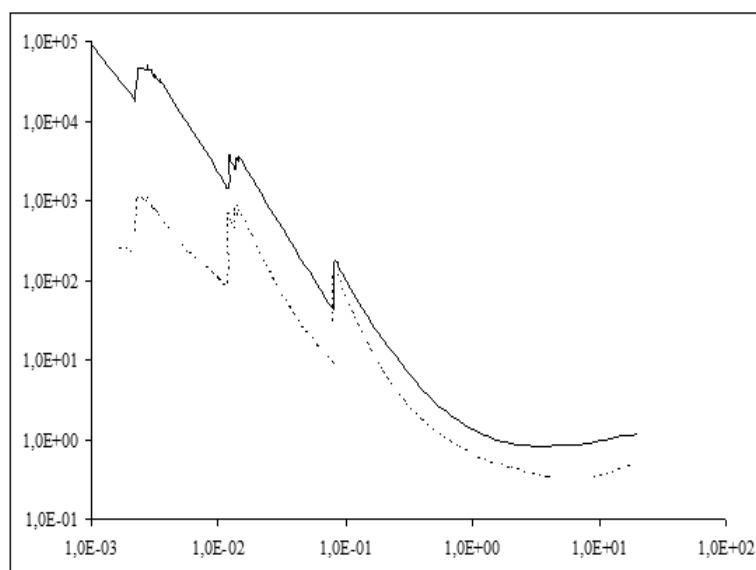


Рис. 1. Зависимость коэффициентов ослабления $\mu_a(E)$ (сплошная линия) и рассеяния (пунктир) $\mu_s(E)$ для золота от энергии E (МэВ)

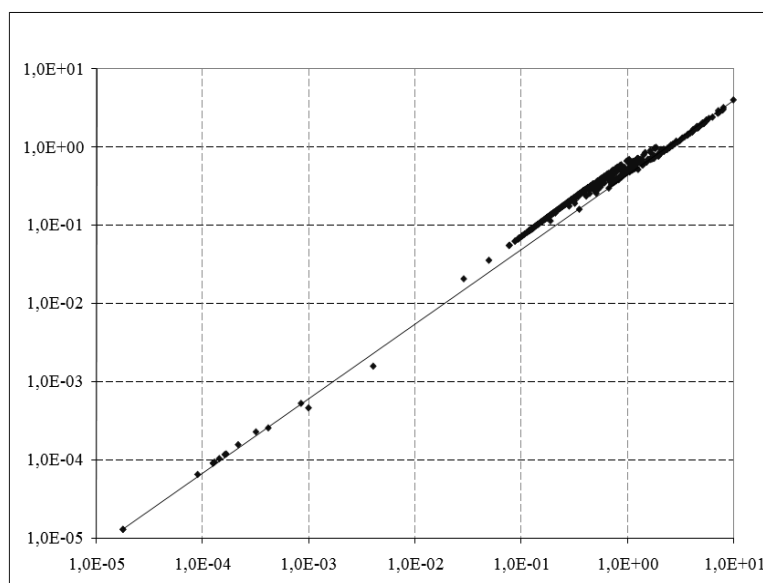


Рис. 2. Точечная диаграмма значений $\mu_a(E')$ (по горизонтали) и $\mu_s(E')$ для 480 материалов для $E' = 0.3$ МэВ, масштаб по обеим осям логарифмический. Сплошная прямая линия соединяет точки «водород» и «уран»

ориентации во множестве S^* . Как видно из диаграммы все вещества из S^* расположены достаточно близко к этой прямой. При перемещении от водорода к урану нам встретятся сначала легкие, а потом тяжелые газы (гелий, азот, кислород, хлор, ксенон, радон), затем идет литий ($\mu_a(E') = 0.049$).

Промежуток значений $0.076 < \mu_a(E') < 0.6$ приходится на вещества $S_1^* \subset S^*$, представляющие в основном различные легкие органические соединения (которых много в S^*). При выбранном масштабе осей они практически сливаются в подобие отрезка, параллельного прямой «водород–уран».

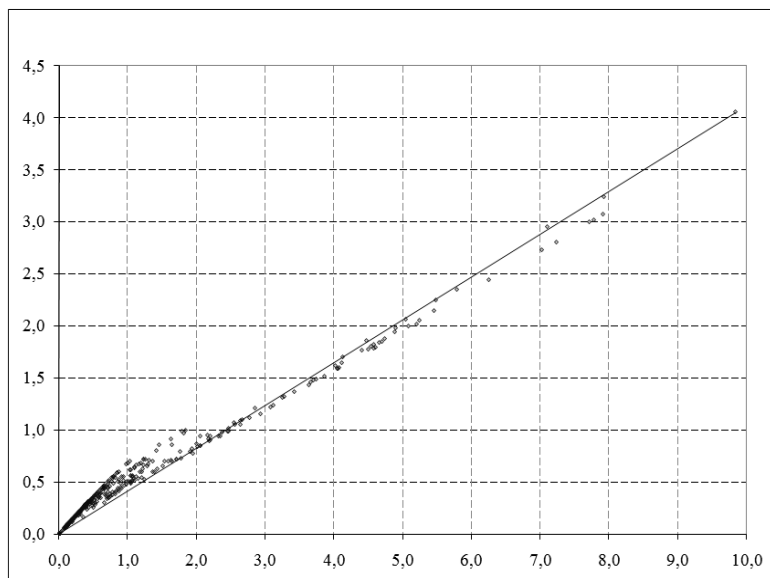


Рис. 3. Точечная диаграмма значений $\mu_a(E')$ (по горизонтали) и $\mu_s(E')$ (по вертикали) для 480 материалов для $E' = 0.3$ Мэв, масштаб по обеим осям линейный. Сплошная прямая линия соединяет точки «водород» и «уран»

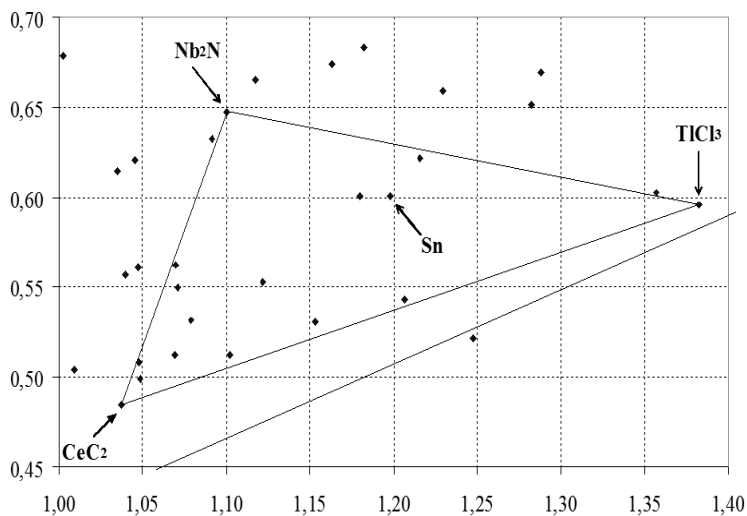


Рис. 4. Окрестность точки, соответствующей олову (Sn). В вершинах треугольника находятся нитрид ниобия (Nb_2N), карбид церия (CeC_2) и хлорид таллия ($TlCl_3$). Ниже треугольника проходит прямая «водород–уран», $E' = 0.3$ Мэв

Второй промежуток значений $2.0 < \mu_a(E') < 10.0$ приходится на вещества $S_2^* \subset S^*$, являющиеся в основном химическими элементами с большими атомными номерами и их соединениям. Их также много в S^* , и они образуют подобие второго отрезка, практически лежащего на прямой «водород–уран».

И, наконец, диапазон значений $0.6 < \mu_a(E') < 2.0$ приходится на материалы $S_0^* \subset S^*$, представляющие химические элементы со средними атомными номерами и разнообразные соединения. На рисунке 2 они образуют нечто вроде переходной области между первым и вторым промежутками.

Выбранный для представления веществ логарифмический масштаб достаточно удобен для того, чтобы получить представление о поведении коэффициентов $\mu_a(E')$ и $\mu_s(E')$ для множества S^* в целом. Однако нас больше интересует вид выпуклой оболочки множества S^* , поэтому на рисунке 3 те же вещества из S^* представлены в линейном масштабе по обеим осям. Водород и уран опять были соединены сплошной линией. Видно, что множество S_1^* превратилось в подобие отрезка прямой с наклоном к оси абсцисс большим, чем у прямой «водород–уран», а множества S_2^* и S_0^* стали выглядеть более разряженными. Таким образом, можно сказать, что выпуклая оболочка множества S^* в целом для энергии $E = 300$ кэВ представляет из себя сильно вытянутый (иглообразный) многоугольник.

Расчеты, проведенные для других значений энергии, показали, что взаимное расположение точек при этом может заметно меняться, например, место урана иногда занимает иридий, однако, в целом диаграммы выглядят аналогично рисункам 2 и 3.

Было выполнено несколько вариантов расчетов по имитации различных веществ из множеств S_1^* , S_0^* и S_2^* смесями.

В таблицах 1, 2 и 3 приведены примеры двух-, трех- и пятикомпонентных смесей, имитирующих воду. Во всех случаях $N = 2$, при этом $E_1 = 0.3$ МэВ, $E_2 = 0.4$ МэВ. Двухкомпонентная смесь (табл. 1) формировалась из углерода и полиэтилена, затем к этим материалам добавлялся силицид магния (табл. 2), а после этого пластик А-150 (см. [Hubbell, Seltzer, 1995]) и шеллак (табл. 3). Все эти вещества входят в множество S_1^* .

На первом этапе расчетов для выбранных материалов смеси решалась система уравнений (10) при соответствующих значениях N и n , находились величины ζ_1, \dots, ζ_n , значение функции $F(\zeta)$ из (9), плотности ρ смеси из (6) и величина R_c , обратная числу обусловленности матрицы L , образующей систему (10); $R_c = 1/(\|L\| \cdot \|L^{-1}\|)$, где

$$\|L\| = \max_{j=1, \dots, n-1} (|L_{1j}| + |L_{2j}| + \dots + |L_{(n-1),j}|).$$

Затем, используя формулы (3), (4), вычислялись значения коэффициентов $\mu_a(E)$ и $\mu_s(E)$ полученной смеси для ряда значений энергии E , включая величины E_1 и E_2 . Это делалось для оценки качества имитации за пределами промежутка $[E_1, E_N]$.

В первой колонке таблиц указана энергия E (МэВ), во второй и третьей — значения коэффициентов $\mu_{a0}(E)$ для воды и $\mu_a(E)$ для смеси, в четвертой — относительная разница $R_a(E)$ между $\mu_{a0}(E)$ и $\mu_a(E)$. В пятой и шестой колонках указаны значения коэффициентов $\mu_{s0}(E)$ для воды и $\mu_s(E)$ для смеси, а в седьмой — относительная разница $R_s(E)$ между $\mu_{s0}(E)$ и $\mu_s(E)$. Таким образом, величины $R_a(E)$ и $R_s(E)$, определенные формулами

$$R_a(E) = \frac{\mu_a(E) - \mu_{a0}(E)}{\mu_{a0}(E)}, \quad R_s(E) = \frac{\mu_s(E) - \mu_{s0}(E)}{\mu_{s0}(E)},$$

характеризуют качество имитации сформированной смеси. Ниже таблиц приводятся соответствующие значения для ζ_1, \dots, ζ_n , $F(\zeta)$, ρ и R_c .

Анализируя значения $R_a(E)$ и $R_s(E)$ в таблицах 1, 2, 3 можно отметить следующее.

1) Качество имитации во всех случаях является неплохим, особенно для значений энергии $E_1 = 0.3$ МэВ, $E_2 = 0.4$ МэВ и близких к ним.

2) С ростом числа компонент смеси n качество имитации улучшается, но незначительно. Это связано в первую очередь с тем, что с ростом n быстро уменьшается число R_c , матрица L становится плохо определенной и, соответственно, растут вычислительные ошибки. По этой причине использовать большое число компонент n в смеси для материалов такого типа, по-видимому, не имеет смысла.

Таблица 1. Двухкомпонентная смесь, имитирующая воду, для $N = 2$, $E_1 = 0.3$ МэВ, $E_2 = 0.4$ МэВ

E	$\mu_{a0}(E)$	$\mu_a(E)$	$R_a(E)$	$\mu_{s0}(E)$	$\mu_s(E)$	$R_s(E)$
0.1	1.707E-01	1.676E-01	-1.795E-02	1.452E-01	1.439E-01	-8.730E-03
0.15	1.505E-01	1.496E-01	-6.334E-03	1.229E-01	1.223E-01	-4.809E-03
0.2	1.370E-01	1.366E-01	-2.716E-03	1.073E-01	1.071E-01	-1.984E-03
0.3	1.186E-01	1.186E-01	-4.360E-05	8.668E-02	8.665E-02	-3.208E-04
0.4	1.061E-01	1.061E-01	3.721E-04	7.331E-02	7.329E-02	-2.183E-04
0.5	9.687E-02	9.693E-02	6.009E-04	6.388E-02	6.389E-02	1.820E-04
0.8	7.865E-02	7.871E-02	8.086E-04	4.659E-02	4.660E-02	2.966E-04
1.0	7.072E-02	7.076E-02	5.353E-04	3.969E-02	3.968E-02	-2.807E-04
1.5	5.754E-02	5.758E-02	7.721E-04	2.921E-02	2.919E-02	-5.331E-04

Для смеси углерод + полиэтилен:

$$\zeta_1 = 7.934E - 02, \zeta_2 = 9.207E - 01, F(\zeta) = 2.615E - 09, \rho = 0.991, R_c = 1$$

Таблица 2. Трехкомпонентная смесь, имитирующая воду, для $N = 2$, $E_1 = 0.3$ МэВ, $E_2 = 0.4$ МэВ

E	$\mu_{a0}(E)$	$\mu_a(E)$	$R_a(E)$	$\mu_{s0}(E)$	$\mu_s(E)$	$R_s(E)$
0.1	1.707E-01	1.691E-01	-9.173E-03	1.452E-01	1.443E-01	-6.139E-03
0.15	1.505E-01	1.500E-01	-3.495E-03	1.229E-01	1.224E-01	-3.703E-03
0.2	1.370E-01	1.368E-01	-1.528E-03	1.073E-01	1.071E-01	-1.446E-03
0.3	1.186E-01	1.186E-01	1.245E-04	8.668E-02	8.666E-02	-2.196E-04
0.4	1.061E-01	1.061E-01	1.603E-04	7.331E-02	7.328E-02	-3.548E-04
0.5	9.687E-02	9.689E-02	2.331E-04	6.388E-02	6.387E-02	-9.039E-05
0.8	7.865E-02	7.868E-02	3.278E-04	4.659E-02	4.659E-02	-5.453E-05
1.0	7.072E-02	7.072E-02	1.665E-05	3.969E-02	3.967E-02	-6.230E-04
1.5	5.754E-02	5.756E-02	2.731E-04	2.921E-02	2.919E-02	-7.175E-04

Для смеси углерод + полиэтилен + силицид магния:

$$\zeta_1 = 3.292E - 02, \zeta_2 = 9.311E - 01, \zeta_3 = 3.601E - 02, F(\zeta) = 1.546E - 09, \rho = 0.990, R_c = 1.863E - 05$$

Таблица 3. Пятикомпонентная смесь, имитирующая воду, для $N = 2$, $E_1 = 0.3$ МэВ, $E_2 = 0.4$ МэВ

E	$\mu_{a0}(E)$	$\mu_a(E)$	$R_a(E)$	$\mu_{s0}(E)$	$\mu_s(E)$	$R_s(E)$
0.1	1.707E-01	1.685E-01	-1.300E-02	1.452E-01	1.442E-01	-7.201E-03
0.15	1.505E-01	1.498E-01	-4.712E-03	1.229E-01	1.224E-01	-4.131E-03
0.2	1.370E-01	1.367E-01	-2.048E-03	1.073E-01	1.071E-01	-1.612E-03
0.3	1.186E-01	1.186E-01	1.055E-04	8.668E-02	8.666E-02	-1.981E-04
0.4	1.061E-01	1.061E-01	1.085E-04	7.331E-02	7.329E-02	-2.266E-04
0.5	9.687E-02	9.692E-02	4.609E-04	6.388E-02	6.388E-02	-3.499E-07
0.8	7.865E-02	7.869E-02	5.202E-04	4.659E-02	4.659E-02	7.612E-05
1.0	7.072E-02	7.074E-02	3.102E-04	3.969E-02	3.968E-02	-3.654E-04
1.5	5.754E-02	5.757E-02	5.625E-04	2.921E-02	2.919E-02	-5.466E-04

Для смеси углерод + пластик А-150 + полиэтилен + шеллак + силицид магния:

$$\zeta_1 = 2.442E - 03, \zeta_2 = 2.159E - 01, \zeta_3 = 5.722E - 01, \zeta_4 = 2.068E - 01, \zeta_5 = 2.663E - 03, F(\zeta) = 8.602E - 10, \rho = 0.996, R_c = 3.558E - 09$$

Во второй серии расчетов имитировалось олово (Sn) — вещество из множества S_0^* с помощью различных двух-, трех- и пятикомпонентных смесей различных веществ из S^* . Приведем пример такой имитации, не самый лучший с точки зрения качества имитации, но хорошо поясняющий ранее изложенную геометрическую теорию. Для имитации олова использовались карбид церия (CeC_2), нитрид ниобия (Nb_2N) и хлорид таллия ($TlCl_3$). На рисунке 4 представлена небольшая окрестность олова, содержащая эти и все другие близлежащие вещества из S^* для

энергии $E' = 0.3$ Мэв. Точки CeC_2 , Nb_2N и TlCl_3 соединены прямыми и образуют на плоскости с координатами $(\mu_a(E'), \mu_s(E'))$ треугольник $T = (\text{CeC}_2, \text{Nb}_2\text{N}, \text{TlCl}_3)$, содержащий Sn. Ниже этого треугольника проходит прямая «водород–уран». Точка Sn не лежит ни на одной из сторон треугольника T , поэтому, не решая системы уравнений (10) можно сразу сказать следующее.

1) Ни одна из двухкомпонентных смесей $(\text{CeC}_2 + \text{Nb}_2\text{N})$, $(\text{Nb}_2\text{N} + \text{TlCl}_3)$, $(\text{TlCl}_3 + \text{CeC}_2)$, в каких бы пропорциях компоненты этих смесей ни брались, не может обеспечить одновременного равенства коэффициентов $\mu_a(E')$ и $\mu_s(E')$ для такой смеси и для олова.

2) Точка Sn ближе всего расположена к стороне $(\text{Nb}_2\text{N}, \text{TlCl}_3)$ треугольника T , поэтому, среди всех двухкомпонентных смесей, смесь $(\text{Nb}_2\text{N} + \text{TlCl}_3)$ может обладать наилучшими имитационными характеристиками, то есть, число $F(\zeta^*)$ для нее будет минимальным.

3) В такой оптимальной двухкомпонентной смеси $(\text{Nb}_2\text{N} + \text{TlCl}_3)$ объемная доля Nb_2N будет больше, чем объемная доля TlCl_3 , поскольку, из рисунка 4 визуально видно, что точка Sn ближе к точке Nb_2N , а не к TlCl_3 .

4) Для оптимальной трехкомпонентной смеси $(\text{CeC}_2 + \text{Nb}_2\text{N} + \text{TlCl}_3)$ соответствующая точка $\zeta^* = (\zeta_1^*, \zeta_2^*, \zeta_3^*)$ единственна, поскольку точки CeC_2 , Nb_2N и TlCl_3 не лежат на одной прямой.

5) Система (10) достаточно хорошо определена, поскольку треугольник T перекошен незначительно.

Проведенные расчеты показывают правильность всех этих утверждений. Для смесей $(\text{CeC}_2 + \text{Nb}_2\text{N})$ и $(\text{CeC}_2 + \text{TlCl}_3)$ ограничимся лишь краткой сводкой результатов.

Смесь $(\text{CeC}_2 + \text{Nb}_2\text{N})$: $\zeta_1 = 4.669400E - 02$, $\zeta_2 = 9.533060E - 01$, $F(\zeta) = 1.1728285E - 02$, $\rho = 8.101124$, $R_c = 1.0$, $R_a(E') = -8.4258E - 02$, $R_s(E') = 6.5363E - 02$.

Смесь $(\text{CeC}_2 + \text{TlCl}_3)$: $\zeta_1 = 4.796697E - 01$, $\zeta_2 = 5.203303E - 01$, $F(\zeta) = 3.6540008E - 03$, $\rho = 5.069345$, $R_c = 1.0$, $R_a(E') = 1.5454E - 02$, $R_s(E') = -9.5874E - 02$.

Для смеси $(\text{TlCl}_3 + \text{Nb}_2\text{N})$ результаты расчетов приведены в таблице 4.

Таблица 4. Двухкомпонентная смесь, имитирующая олово, для $E' = 0.3$ Мэв

E	$\mu_{a0}(E)$	$\mu_a(E)$	$R_a(E)$	$\mu_{s0}(E)$	$\mu_s(E)$	$R_s(E)$
0.1	1.225E+01	1.131E+01	-7.651E-02	3.560E+00	5.301E+00	4.889E-01
0.15	4.453E+00	4.302E+00	-3.399E-02	1.442E+00	1.857E+00	2.877E-01
0.2	2.383E+00	2.353E+00	-1.241E-02	9.284E-01	1.070E+00	1.525E-01
0.3	1.198E+00	1.203E+00	4.253E-03	6.002E-01	6.283E-01	4.685E-02
0.4	8.450E-01	8.509E-01	7.003E-03	4.694E-01	4.769E-01	1.592E-02
0.5	6.852E-01	6.889E-01	5.429E-03	3.943E-01	3.957E-01	3.613E-03
0.8	4.870E-01	4.875E-01	9.293E-04	2.766E-01	2.749E-01	-6.147E-03
1.0	4.240E-01	4.236E-01	-1.038E-03	2.338E-01	2.320E-01	-7.728E-03
1.5	3.390E-01	3.371E-01	-5.513E-03	1.758E-01	1.734E-01	-1.375E-02

Для смеси хлорид таллия + нитрид ниобия:

$\zeta_1 = 3.656E - 01$, $\zeta_2 = 6.344E - 01$, $F(\zeta) = 8.166E - 04$, $\rho = 6.939$, $R_c = 1.0$

Для трехкомпонентной смеси $(\text{CeC}_2 + \text{Nb}_2\text{N} + \text{TlCl}_3)$ при $N = 1$, $E_1 = 0.3$ Мэв результаты расчетов приведены в таблице 5, а при $N = 2$, $E_1 = 0.3$ Мэв, $E_2 = 0.4$ Мэв – в таблице 6.

Сравнивая значения $R_a(E)$ и $R_s(E)$ в таблицах 4 и 5 видим, что при $E = 0.3$ Мэв для трехкомпонентной смеси они зануляются (как и значение $F(\zeta)$), однако для других значений энергии, при переходе от двух- к трехкомпонентной смеси, $R_a(E)$ и $R_s(E)$, как правило, ухудшаются.

При увеличении N до двух (табл. 6) пространство \mathcal{E}^{2N} становится четырехмерным, точка Sn покидает плоскость, проходящую через точки $(\text{CeC}_2, \text{Nb}_2\text{N}, \text{TlCl}_3)$, однако ортогональная проекция Sn на эту плоскость все еще принадлежит треугольнику T . Значение $F(\zeta)$ становится положительным.

Таблица 5. Трехкомпонентная смесь, имитирующая олово, для $E' = 0.3$ Мэв

E	$\mu_{a0}(E)$	$\mu_a(E)$	$R_a(E)$	$\mu_{s0}(E)$	$\mu_s(E)$	$R_s(E)$
0.1	1.225E+01	1.208E+01	-1.428E-02	3.560E+00	5.779E+00	6.233E-01
0.15	4.453E+00	4.531E+00	1.745E-02	1.442E+00	1.927E+00	3.363E-01
0.2	2.383E+00	2.432E+00	2.034E-02	9.284E-01	1.066E+00	1.485E-01
0.3	1.198E+00	1.198E+00	0.000E+00	6.002E-01	6.002E-01	0.000E+00
0.4	8.450E-01	8.261E-01	-2.232E-02	4.694E-01	4.479E-01	-4.579E-02
0.5	6.852E-01	6.585E-01	-3.901E-02	3.943E-01	3.689E-01	-6.446E-02
0.8	4.870E-01	4.562E-01	-6.334E-02	2.766E-01	2.542E-01	-8.104E-02
1.0	4.240E-01	3.941E-01	-7.047E-02	2.338E-01	2.141E-01	-8.418E-02
1.5	3.390E-01	3.122E-01	-7.920E-02	1.758E-01	1.601E-01	-8.935E-02

Для смеси карбид церия + хлорид таллия + нитрид ниобия:

$$\zeta_1 = 1.674E - 01, \zeta_2 = 3.849E - 01, \zeta_3 = 4.477E - 01, F(\zeta) = 0.0, \rho = 6.409, R_c = 0.344$$

Таблица 6. Трехкомпонентная смесь, имитирующая олово, для $N = 2$, $E_1 = 0.3$ Мэв, $E_2 = 0.4$ Мэв

E	$\mu_{a0}(E)$	$\mu_a(E)$	$R_a(E)$	$\mu_{s0}(E)$	$\mu_s(E)$	$R_s(E)$
0.1	1.225E+01	1.163E+01	-5.101E-02	3.560E+00	5.465E+00	5.352E-01
0.15	4.453E+00	4.391E+00	-1.397E-02	1.442E+00	1.875E+00	3.002E-01
0.2	2.383E+00	2.381E+00	-8.996E-04	9.284E-01	1.063E+00	1.447E-01
0.3	1.198E+00	1.197E+00	-6.076E-04	6.002E-01	6.137E-01	2.255E-02
0.4	8.450E-01	8.376E-01	-8.783E-03	4.694E-01	4.627E-01	-1.419E-02
0.5	6.852E-01	6.736E-01	-1.688E-02	3.943E-01	3.829E-01	-2.900E-02
0.8	4.870E-01	4.724E-01	-2.989E-02	2.766E-01	2.651E-01	-4.150E-02
1.0	4.240E-01	4.096E-01	-3.406E-02	2.338E-01	2.236E-01	-4.372E-02
1.5	3.390E-01	3.253E-01	-4.030E-02	1.758E-01	1.671E-01	-4.929E-02

Для смеси карбид церия + хлорид таллия + нитрид ниобия:

$$\zeta_1 = 9.013E - 02, \zeta_2 = 3.651E - 01, \zeta_3 = 5.448E - 01, F(\zeta) = 2.832E - 04, \rho = 6.693, R_c = 0.666$$

Таблица 7. Трехкомпонентная смесь, имитирующая золото, для $N = 2$, $E_1 = 0.3$ Мэв, $E_2 = 0.4$ Мэв

E	$\mu_{a0}(E)$	$\mu_a(E)$	$R_a(E)$	$\mu_{s0}(E)$	$\mu_s(E)$	$R_s(E)$
0.1	9.965E+01	8.967E+01	-1.002E-01	5.958E+01	5.035E+01	-1.550E-01
0.15	3.594E+01	3.577E+01	-4.880E-03	1.611E+01	1.616E+01	3.007E-03
0.2	1.780E+01	1.774E+01	-3.120E-03	7.054E+00	7.088E+00	4.802E-03
0.3	7.233E+00	7.225E+00	-1.050E-03	2.811E+00	2.827E+00	5.735E-03
0.4	4.212E+00	4.211E+00	-1.340E-04	1.750E+00	1.759E+00	5.035E-03
0.5	2.956E+00	2.959E+00	9.764E-04	1.309E+00	1.315E+00	4.432E-03
0.8	1.662E+00	1.667E+00	3.004E-03	8.068E-01	8.106E-01	4.698E-03
1.0	1.343E+00	1.348E+00	3.827E-03	6.623E-01	6.654E-01	4.721E-03
1.5	9.983E-01	1.002E+00	3.950E-03	4.973E-01	4.991E-01	3.667E-03

Для смеси вольфрам + платина + торий:

$$\zeta_1 = 1.421E - 01, \zeta_2 = 6.900E - 01, \zeta_3 = 1.679E - 01, F(\zeta) = 3.955E - 04, \rho = 19.51, R_c = 4.292E - 03$$

Попытка построить пятикомпонентную смесь для имитации олова путем добавления еще двух веществ из S_0^* к набору ($\text{CeC}_2 + \text{Nb}_2\text{N} + \text{TlCl}_3$) для $N = 2$, $E_1 = 0.3$ Мэв, $E_2 = 0.4$ Мэв, так, чтобы при этом олово принадлежало выпуклой оболочке соответствующего набора и соответственно $F(\zeta) = 0$, к успеху не привела. Однако при использовании других материалов для форми-

рования смеси это было возможно. При этом, однако, сильно возросло число обусловленности матрицы L .

Проводились также расчеты по имитации смесями различных веществ из множества S_2^* . Полученные при этом результаты были сходны со случаем имитации веществ из множества S_1^* , что несложно объясняется их положением на диаграмме (рис. 3). Пример такого расчета по имитации золота смесью из вольфрама, платины и тория приведен в таблице 7. При этом $N = 2$, $E_1 = 0.3$ Мэв, $E_2 = 0.4$ Мэв.

Заключение

В заключение можно сказать, что предложенный способ имитации заданного материала смесями из каких-либо других веществ химически нейтральных между собой позволяет во многих случаях получить достаточно хороший результат. При этом достигается одновременная близость коэффициентов ослабления и рассеяния для заданного материала и смеси, так что величины относительной разницы этих коэффициентов $R_a(E)$ и $R_s(E)$ одновременно не превышают 2–3 % на промежутке энергии в несколько сот килоэлектронвольт. Этот результат относится к значениям энергии рентгеновского излучения не ниже 100–150 кэВ. При меньших значениях энергии, при наличии скачков у коэффициентов $\mu_a(E)$, $\mu_s(E)$, диапазон удовлетворительной аппроксимации может оказаться заметно меньшим. Имитирующая смесь, как правило, может быть выбрана большим (и даже бесконечным) числом способов, поэтому существенную роль при выборе могут играть факторы стоимости такой смеси и требуемые от нее физико-химические, механические и технологические характеристики.

Для дальнейшего улучшения полученных в работе результатов было бы весьма желательно расширить базу данных материалов, используемую при общем анализе и в конкретных расчетах.

Список литературы

- Аниконов Д. С., Ковтанюк А. Е., Назаров В. Г., Прохоров И. В., Суровенко Н. С., Яровенко И. П. База данных радиационных характеристик веществ, представляющих интерес в рентгенодиагностике // Официальный бюллетень «Программы для ЭВМ, базы данных, топологии интегральных микросхем». — 2009. — № 3. — С. 334–335.
- Аниконов Д. С., Ковтанюк А. Е., Назаров В. Г., Прохоров И. В., Суровенко Н. С., Яровенко И. П. База данных радиационных характеристик веществ, представляющих интерес в рентгенодиагностике. Свидетельство о государственной регистрации базы данных № 2009620348, 19.06.2009.
- Аниконов Д. С., Прохоров И. В., Назаров В. Г., Солнышко Н. В. Способ маскировки изделий. Патент Российской Федерации № 2264424. Бюллетень № 32, 20.11.2005. — <http://www.fips.ru/>
- Аниконов Д. С., Прохоров И. В. Определение коэффициента уравнения переноса при энергетических и угловых особенностях внешнего излучения // Доклады АН, — 1992. — Т. 327, № 2. — С. 205–207.
- Аниконов Д. С., Прохоров И. В. Значение коэффициента поглощения излучения в диагностике рассеивающих и поглощающих сред // Доклады АН, — 1999. — Т. 138, № 1. — С. 24–26.
- Аниконов Д. С., Прохоров И. В., Ковтанюк А. Е. Использование уравнения переноса в томографии. — М.: Логос, 2000. — 224 с.
- Ковтанюк А. Е., Назаров В. Г., Прохоров И. В., Яровенко И. П. Способ идентификации материалов путем многократного радиографического облучения, Патент на изобретение Российской Федерации, № 2426102, 10.08.2011.

- Назаров В. Г.* Томографическая неразличимость границ контакта некоторых материалов // Дальневосточный математический сборник. 1999. — Вып. 8. — С. 110–121.
- Назаров В. Г.* Аппроксимация коэффициента поглощения для уравнения переноса излучения на заданном промежутке энергии // Сибирский журнал индустриальной математики, — 2004. — Т. 7, № 4(20). — С. 116–129.
- Назаров В. Г.* Задача создания материалов с заданными радиационными характеристиками // Сибирский журнал индустриальной математики, — 2013. — Т. 16, № 2(54). — С. 130–143.
- Anikonov D. S., Prokhorov I. V., Kovtanyuk A. E.* Investigation of scattering and absorbing media by the methods of X-ray tomography // J. Inverse and Ill-Posed Problems — 1993. — Vol. 1, No. 4. — P. 259–281.
- Hubbell J. H., Seltzer S. M.* Tables of X-Ray Mass Attenuation Coefficients and Mass Energy Absorption Coefficients 1 Kev to 20 Mev for Elements Z = 1 to 92 and 48 Additional Substances of Dosimetric Interest, NISTIR 5632, 1995.
- Kovtanyuk A. E., Prokhorov I. V.* Tomography problem for the polarized-radiation transfer equation // J. Inverse and Ill-Posed Problems — 2006. — Vol. 14, No. 6. — P. 1–12.
- Natterer F.* The Mathematics of Computerized Tomography. — Stuttgart: B.G.Teubner and John Wiley & Sons, 1986. — 341 p.