

УДК: 533.6.011

Описание быстрых процессов вторжения на основе кинетической модели

В. В. Аристов^а, О. В. Ильин

Вычислительный центр им. А. А. Дородницына РАН,
Россия, 119333, г. Москва, ул. Вавилова, д. 40
E-mail: ^аaristovvl@yandex.ru

Получено 3 мая 2014 г.,
после доработки 9 июля 2014 г.

В последние годы моделирование социальных, социо-биологических и исторических процессов получило большое развитие. В настоящей работе на основе кинетического подхода моделируются исторические процессы: агрессивное вторжение нацистской Германии в Польшу, Францию и СССР. Показано, что изучаемая система нелинейных уравнений полностью интегрируема: общее решение строится в виде квадратур. Вторжение (блицкриг) описывается краевой задачей Коши для двухэлементной кинетической модели с однородными по двум частям пространства начальными условиями. Решение данной задачи имеет вид бегущей волны, а скорость смещения линии фронта зависит от отношения начальных концентраций войск. Полученные оценки скорости распространения фронта согласуются с историческими фактами.

Ключевые слова: кинетическая теория, модели агрессии

Description of the rapid invasion processes by means of the kinetic model

V. V. Aristov, O. V. Ilyin

Dorodnicyn Computing Centre of Russian Academy of Sciences, 40 Vavilova str., Moscow, 119333, Russia

Abstract. — Recently many investigations have been devoted to theoretical models in new areas concerning description of different biological, sociological and historical processes. In the present paper we investigate the nazi Germany invasion in Poland, France and USSR from the kinetic theory point of view. We model this process with the Cauchy boundary problem for the two-element kinetic equations with spatial uniform initial conditions. The solution of the problem is given in the form of the traveling wave and the propagation velocity of a frontline depends on the quotient between initial forces concentrations. Moreover it is obtained that the general solution of the model can be obtained in terms of the quadratures and elementary functions. Finally it is shown that the frontline velocities are complied with the historical data.

Keywords: kinetic theory, models of aggression

Citation: *Computer Research and Modeling*. 2014, vol. 6, no. 5, pp. 829–838 (Russian).

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (РНФ), проект 14-11-00870.

Введение

В последние десятилетия получили развитие различные математические подходы для описания биологических, социальных, исторических процессов (см. [Математическое моделирование исторических процессов, 1998; История и Математика, 2006]). Социо-культурные, психологические явления исследуются точными науками, методами статистической физики, отметим номера в [Special Issue. J. Statist. Phys., 2013], посвященные таким интересным и сложным процессам (см., например, работы [Li et al., 2013; Simkin, Roychowdhury, 2013] из этих выпусков журнала). Для такого рода процессов используются также и некоторые методы кинетической теории (см. [Prigogine, Hegerman, 1971]). Хорошо известны, например, модели по описанию распространения эпидемий и других аналогичных явлений. Во многих из них используются уравнения параболического типа (уравнения диффузии и др.). Литература, посвященная таким подходам, весьма обширна (см., обзорный результат в [Мюррей, 2011]). Здесь, начиная с решений типа Колмогорова–Фишера [Колмогоров, Петровский, Пискунов, 1937; Fischer, 1937], записываются решения типа бегущей волны. Особый интерес имеют результаты по определению распространения чумы («черной смерти») в Европе в 1347–1350 годах [Noble, 1974]. Согласно [Langer, 1964] распространение эпидемии «черной чумы» происходило с приблизительной скоростью 200–400 миль/год. По аналогии с указанной болезнью распространение идеологии «коричневой чумы» (фашизма, нацизма) в Европе XX века, возможно, надо было бы описывать сходными системами уравнений — достаточно «медленными» процессами диффузионного типа.

Мы будем также пытаться найти некоторые модели, способные описать историко-социологические процессы, но которые имеют другой характер и скорость движения (распространения). Нас будут интересовать модели с гораздо более быстрыми эффектами развития и распространения. Они относятся не к «идеологическим эпидемиям», но к непосредственно физическому этапу распространения «коричневой чумы» и касаются так называемой молниеносной войны (блицкрига) при вторжении Германии в Польшу в 1939 году, во Францию в 1940 г. и в СССР в 1941 году. Применение традиционных моделей распространения эпидемий не может описать такие «быстрые» процессы: поскольку аналоги диффузионных процессов достаточно медленны, известно, что скорость продвижения германских войск в первые недели войны достигала 200–400 км/неделю. Никаких специфических градиентов величин здесь нет, а присутствует непосредственное проникновение «быстрых элементов» в среду «неподвижных элементов», которые оказывают сопротивление проникновению, и в результате «взаимодействия», «столкновения» проникающие и неподвижные элементы выбывают из участия в процессе (за этими формальными описаниями стоят драматические и трагические события, но приходится прибегать к математизированному языку в стремлении описать закономерности происходивших исторических процессов). Соответствующие условия для рассматриваемой модели могли быть выполнены в течение непродолжительного срока (до завоевания страны или перехода к затяжной фазе войны), поэтому применимость модели с распространением с фиксированной скоростью может рассматриваться в ограниченных временных и пространственных рамках.

Ранее модель простой кинетической системы двух нелинейных уравнений применялась при изучении рассеяния тонкого молекулярного пучка [Aristov, Shakhov, 1987; Аристов, Шахов, 1988]. При постоянных (не зависящих от пространственной переменной) начальных условиях для плотностей частиц фона и входящего пучка было выявлено движение типа бегущей волны и построено соответствующее точное решение. Причем скорость движения связана со скоростью проникающего импульсного пучка только множителем, в который входит отношение плотностей частиц во входящем пучке и в фоне. В настоящей работе мы пытаемся использовать данную модель проникновения быстрых элементов в покоящуюся среду таких же элементов для описания социо-исторических процессов, а именно моделей вторжения, или агрессии (модель блицкрига).

Модель кинетического рассеяния и точное решение нелинейной системы

Согласно [Aristov, Shakhov, 1987; Аристов, Шахов, 1988] следующая система уравнений описывает изменение плотности неподвижных частиц фона (в термодинамических терминах — распределения с нулевой температурой) $n_1(t, x)$ и изменение плотности частиц $n_2(t, x)$, движущихся с одинаковыми скоростями U (распределение их также с нулевой температурой) в результате упругого столкновения. В модели вторжения будет использоваться аналогичная система:

$$\frac{\partial n_1}{\partial t} = -\sigma n_1 n_2, \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial n_2}{\partial t} + U \frac{\partial n_2}{\partial x} = -\sigma n_1 n_2. \quad (1.2)$$

Здесь величина σ характеризует, по сути, и сечение столкновения, и частоту столкновений, в свернутом виде ее размерность $[\sigma] = 1/(T_0 n_0)$, где T_0, n_0 — характерное время между столкновениями (обратная к ней величина — частота столкновений) и плотность соответственно. Или по-другому: $[\sigma] = U/(L_0 n_0)$, где L_0 — характерный пространственный масштаб (равный в терминах кинетической теории газов длине свободного пробега). В общем случае задачи Коши с различными начальными условиями для построения решения системы (1.1), (1.2) используется численный метод. Но для начальных однородных начальных условиях плотности частиц в пучке и в фоне формируется бегущая волна и может быть выписано соответствующее аналитическое решение, которое приведено в [Aristov, Shakhov, 1987; Аристов, Шахов, 1988]. Причем скорость бегущей волны при условии вторжения бесконечного «пучка частиц» с одинаковой скоростью U в среду таких же покоящихся частиц имеет вид

$$D = U \frac{n_-}{n_- + n_+}. \quad (1.3)$$

Здесь n_- — начальная плотность частиц «вторгающегося пучка» $n_2(0, x) = n_-, x < 0$; n_+ — плотность частиц фона, $n_2(0, x) = n_+, x > 0$. Будем полагать для определенности, что бегущая волна движется слева направо, т. е. $U > 0$.

Оказывается, что система уравнений (1.1), (1.2) интегрируема: можно записать решение задачи Коши для модели (1.1), (1.2) в квадратурах.

Утверждение. Система уравнений (1.1), (1.2) приводится к уравнению переноса

$$\phi_t + U \phi_x = g(x), \quad (1.4)$$

где $g(x)$ — произвольная функция, с помощью следующего линеаризующего преобразования Беклунда

$$n_1 = \sigma^{-1} \frac{\phi_t + U \phi_x}{\phi}, \quad n_2 = \sigma^{-1} \frac{\phi_t}{\phi}. \quad (1.5)$$

Справедливость утверждения проверяется прямым вычислением. Данное преобразование получается с помощью WTC-метода [Weiss, Tabor, Carnevale, 1983]. Не вдаваясь в детали, отметим, что для уравнения (1.1), (1.2) в данном методе предлагается искать решение в следующем виде:

$$n_1 = \frac{u_1(x, t)}{\phi(x, t)}, \quad n_2 = \frac{u_2(x, t)}{\phi(x, t)},$$

где u_1, u_2, ϕ неизвестные аналитические функции своих аргументов. Подставляя данные равенства в систему (1.1), (1.2) и приравнявая к нулю коэффициенты при степенях функции ϕ , получаем дифференциальное уравнение для функции ϕ (уравнение переноса (1.4)) и выражения для функций u_1, u_2 через производные от ϕ . Можно легко показать, что любое решение (1.4) является решением (1.1), (1.2), верно и обратное утверждение. Нетрудно заметить, что линеаризующие выражения для функций n_1 и n_2 аналогичны преобразованию Коула–Хопфа, приводящему уравнение Бюргерса к уравнению теплопроводности (см. [Hopf, 1950; Cole, 1951]).

Решим следующую задачу Коши для модели (1.1), (1.2). Пусть

$$\begin{aligned} n_1(t, x)|_{t=0} &= n_{10}(x), \\ n_2(t, x)|_{t=0} &= n_{20}(x), \end{aligned}$$

где $n_{10}(x) > 0, x \geq 0$ и $n_{10}(x) = 0, x < 0$; $n_{20}(x) > 0, x < 0$ и $n_{20}(x) = 0, x \geq 0$. С физической точки зрения данные граничные условия означают, что частицы фона расположены на правой полуоси x , частицы движущегося пучка в начальный момент времени находятся на левой полуоси. Очевидно, что столкновения между частицами разных типов происходят только в зоне $x \in [0, Ut]$, куда могут проникнуть частицы, движущиеся со скоростью U из области $x < 0$, будем называть эту область зоной смешения. Вне зоны смешения взаимодействия между частицами нет.

Общее решение уравнения (1.3) имеет простой вид:

$$\phi(t, x) = a(x - Ut) + b(x), \quad (1.6)$$

где $a(x - Ut), b(x)$ — произвольные гладкие функции (считаем, что $b_x = g$). Теперь подставляем равенство (1.6) в выражения (1.5) и, используя начальные условия, получаем

$$n_1 = \frac{U b_x}{a + b}, \quad n_2 = -U \frac{a_\xi}{a + b}, \quad \xi = x - Ut,$$

С учетом начальных условий имеем

$$n_1|_{t=0} = \frac{U b_x}{a + b} = n_{10}(x) \neq 0, x > 0; \quad n_2|_{t=0} = -U \frac{a_x}{a + b} = n_{20}(x) \neq 0, x < 0.$$

Окончательно находим

$$\begin{aligned} b(x) &= b_0 e^{\sigma U^{-1} \int_0^x n_{10}(z) dz}, \quad x \geq 0, \\ b(x) &= 0, \quad x < 0. \end{aligned}$$

А также

$$\begin{aligned} a(x - Ut) &= a_0 e^{\sigma U^{-1} \int_{x-Ut}^0 n_{20}(z) dz}, \quad x - Ut \leq 0, \\ a(x - Ut) &= 0, \quad x - Ut > 0. \end{aligned}$$

Итак, $a(x - Ut), b(x)$ одновременно отличны от нуля только в зоне смешения. Положим далее $a_0 = b_0 = 1$, и тогда общее решение модели (1.1), (1.2) в области смешения определяется следующими равенствами

$$n_1(t, x) = \frac{n_{10}(x) e^{\sigma U^{-1} \int_0^x n_{10}(z) dz}}{e^{\sigma U^{-1} \int_0^x n_{10}(z) dz} + e^{\sigma U^{-1} \int_{x-Ut}^0 n_{20}(z) dz}}, \quad n_2(t, x) = \frac{n_{20}(x - Ut) e^{\sigma U^{-1} \int_{x-Ut}^0 n_{20}(z) dz}}{e^{\sigma U^{-1} \int_0^x n_{10}(z) dz} + e^{\sigma U^{-1} \int_{x-Ut}^0 n_{20}(z) dz}}. \quad (1.7)$$

В случае если n_{10}, n_{20} — постоянные, равенства (1.7) переходят в решения, построенные в работах [Aristov, Shakhov, 1987; Аристов, Шахов, 1988]. Действительно, в качестве иллюстрации рассмотрим простой случай $n_{10} = n_{20} = 1$, $U = 1$, также положим $\eta = x - t/2$, тогда имеем

$$n_1 = \frac{e^{\sigma x}}{e^{\sigma x} + e^{\sigma(t-x)}} = \frac{1}{1 + e^{-2\sigma\eta}} = \frac{e^{\sigma\eta}}{e^{\sigma\eta} + e^{-\sigma\eta}} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{e^{\sigma\eta} - e^{-\sigma\eta}}{e^{\sigma\eta} + e^{-\sigma\eta}} \right) = \frac{1}{2} (1 + th(\sigma\eta)),$$

$$n_2 = \frac{e^{\sigma(t-x)}}{e^{\sigma x} + e^{\sigma(t-x)}} = \frac{1}{2} (1 - th(\sigma\eta)).$$

Легко перейти к общему случаю U . Значит, в случае постоянных начальных данных решения системы (1.1), (1.2) зависят от одной переменной $\eta = x - Dt$ (согласно некоторой терминологии ее называют автомодельной), здесь скорость D определяется согласно (1.3).

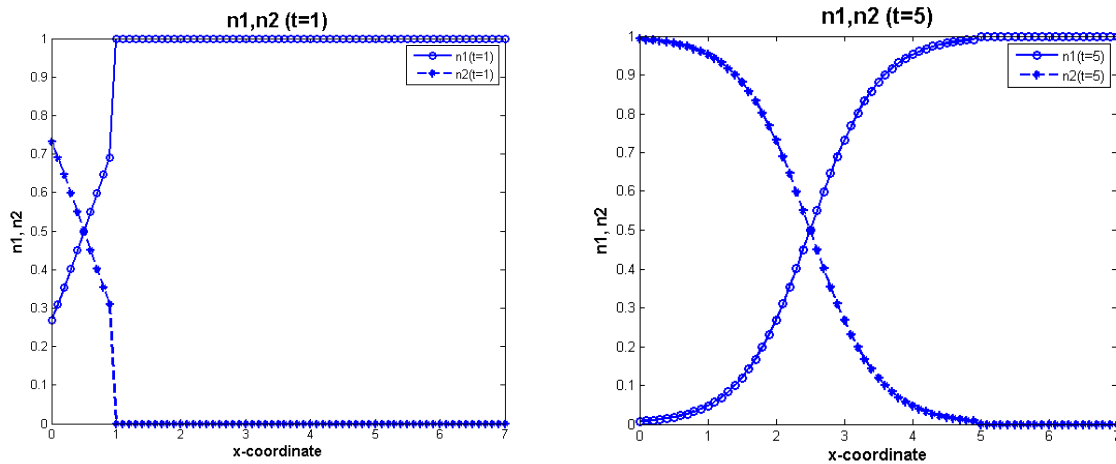


Рис. 1

Для иллюстрации на рисунке 1 приведено решение с указанными соотношениями: при равных плотностях входящих и покоящихся элементов, т. е. $n_+ = n_- = 1$ ($\sigma = 1$). Вычисления проведены согласно вышеприведенным формулам. Слева при $x < 0$ сосредоточены элементы, со скоростью $U = 1$ вторгающиеся в правую область при $x > 0$. При $t = 1$ показан начальный этап процесса, видно, как происходит проникновение слева и выбивание покоящихся элементов. При $t = 5$ фронт волны сформирован.

Описание исторических процессов с помощью модели

Мы будем пытаться применить рассматриваемую кинетическую модель для процессов агрессии — вторжения Германии в различные страны во время Второй мировой войны. Данные события — начало агрессии, характеризовались быстрым, «молниеносным» проникновением германских (здесь этот термин подразумевает также и союзников Германии) армий, прежде всего благодаря танковым прорывам в условиях, когда не существовало развернутой обороны, а было лишь очаговое сопротивление, когда не было выраженных фронтов с системой окопов и т. п. (Сразу оговоримся, что абстрагированное описание кинетического типа будет подразумевать проникновение некоторых элементов в дискретную среду таких же элементов — здесь под этими элементами понимаются некоторые «обобщенные» воинские единицы, это может быть небольшая войсковая часть, артиллерийский расчет с орудием, танк или самолет — то, что способно проникать и оказывать сопротивление, выбивая такие же элементы противоположной стороны, поэтому в таблицах имеет значение количество вооруженных сил и техни-

ки). Именно для таких коротких начальных периодов вторжения и можно попытаться применить описанную выше модель (исследователи отмечали, что концепция блицкрига действует на расстояниях до 500 км — на больших расстояниях растянутость коммуникаций неизбежно сказывается). Продвижение входящих войск, описываемое одной постоянной скоростью U , затрудняется и замедляется только сопротивлением, которое приводит к выбиванию «проникающих элементов» и самих «элементов сопротивления».

Важен вопрос о самой возможности использования одномерного приближения для такой постановки задачи. Надо предполагать соответствующее осреднение данных по достаточно большому поперечному фронту, существенно превышающему толщину фронта, например по ширине 100 км, чему удовлетворяют приводимые далее примеры. Также подразумевается, что происходит некоторое осреднение событий по времени, поэтому будем полагать, что данная простая модель справедлива.

Мы будем использовать, по сути, модель разреженного газа (см., например, [Коган, 1967], которая применима при некоторых определенных условиях. Одно из основных условий («идеального газа») записывается так: $nd^3 \ll 1$, где n — числовая плотность частиц (концентрация), d — диаметр характерного сечения взаимодействия. Это условие означает, что «объем взаимодействия» мал по сравнению с характерным физическим объемом, приходящимся на один элемент. В рассматриваемом плоском случае это неравенство должно быть изменено на $nd^2 \ll 1$, где размерность $[n] = 1/L^2$. Реальные параметры могут быть выбраны следующими: плотность элементов (боевых единиц) на квадратный километр $n \sim 10/\text{км}^2$, а $d \sim 0.1$ км. Здесь в качестве диаметра взаимодействия выбрана некая средняя дистанция поражения за счет ружейного и артиллерийского огня. При таких параметрах указанное условие выполняется. Характерная длина свободного пробега согласно кинетической теории тогда может быть оценена по соотношению $l \sim U/(sn) = 1/(nd) \sim 1/(0.1 \text{ км } 10/\text{км}^2) = 1 \text{ км}$.

Таким образом, модель «столкновений» подразумевает движение дискретных элементов в достаточно разреженном пространстве — свободное перемещение от одного акта взаимодействия к другому, что и наблюдалось, по сути, в приводимых дальше примерах внезапного наступления. Если же плотность сопротивляющихся сил достаточно высока, то модель разреженного газа не применима. Забегая вперед, отметим, что такая ситуация сложилась при наступлении германских войск в июне 1941 года на Юго-Западном направлении. Достаточно умелое расположение советских войск в местах ожидаемого наступления позволило задержать немецкие армии и сорвать план блицкрига в первые недели. Поэтому мы и не приводим в качестве примера этот участок фронта, где не было «бегущей волны» агрессии.

Также следует отметить, что условием применимости модели является постоянство сопротивления защищающейся стороны. В этом случае сечение столкновения постоянно.

Вопрос о порядке величины σ , определяющей, в частности, «толщину фронта сопротивления», достаточно сложен. В рассматриваемой модели, как отмечалось выше, эта величина имеет размерность нормированной на характерную плотность частоты столкновений. Чем выше частота столкновений, тем круче фронт движущейся волны, в приведенном аналитическом решении это означает быстрое затухание экспонент (см. формулы (1.7)). Пример рисунка 1 позволяет понять характер процесса. Для того чтобы оценить реальную ширину фронта, например в километрах, надо подставить соответствующие размерные величины в согласии с приводимыми ниже данными. Ширина фронта характеризуется величиной $l = U/(sn)$. Примем в согласии с приводимым примером, что $n \sim 1$. Будем полагать, что средняя скорость вторгающихся войск $U \sim 8\text{--}10$ км/час (имеется в виду движение механизированных частей, но здесь проводится некое осреднение быстро продвигающихся танков и гораздо медленнее двигающихся автоколонн). Предположим, что частота выбивания «боевых единиц» составляет $s \sim 10/\text{час}$. Тогда ширина движущейся волны (при $U \sim 10$ км/час) $l \sim 1$ км, что кажется достаточно реалистичным и, по-видимому, соответствует известным данным, это согласуется по порядку величины и с полученной выше характерной «длиной свободного пробега». При этом общая

возмущенная часть движущегося фронта (см. рис. 1) может составить до 5 км, что соответствует некоторым арьергардным упорным боям против агрессора.

Для описания отмеченных исторических процессов мы вначале будем считать, что начальные распределения n_{10}, n_{20} были однородными по пространству, т. е. постоянными, что позволяет сразу использовать решение для бегущей волны. Соотношение плотностей должно учитывать не только количество людских вооруженных сил, но и эффективно принимать во внимание технику (танков, самолетов), которые оказываются в определенном смысле равноценными некоторому количеству военнослужащих, оценка потребует сложных вычислений, так что ограничимся простыми связями, мы будем поэтому все «взаимодействующие элементы» называть частицами, сводя рассмотрение к описанной кинетической простой модели.

Используются данные из [История второй мировой войны, 1974; Шефов, 2010], а также из [Лиддел Гарт, 1999; фон Манштейн, 2012; Goutard, 1966], сведенные в таблицах 1–3.

Таблица 1. Соотношение сил перед вторжением Германии в Польшу 1 сентября 1939 г.

| | Германия | Польша |
|----------------------------|----------|--------|
| Личн. состав (млн человек) | 1.6 | 1 |
| Танки | 2800 | 870 |
| Самолеты | 2000 | 407 |
| Орудия и минометы | 6000 | 4300 |

Сведения о соотношении сил показывают, что у Польши и Германии перед началом боевых действий отношение плотностей «сталкивающихся элементов» можно примерно оценить как 1:2 (если учесть, как указано, некое суммарное соотношение вооруженных сил и техники с помощью введения соответствующих «весов»). О возможной применимости данной модели (то, что можно рассматривать «вторгающиеся элементы» – танки – в систему «неподвижных элементов») свидетельствуют слова известного историка Б. Лиддел Гарта из [Лиддел Гарт, 1999] о том, что в Польше господствовали устаревшие военно-теоретические взгляды, устарели и польские вооруженные силы: в их составе не было бронетанковых или механизированных дивизий. Скорость вторжения согласно модели равна

$$D = U \frac{n_-}{n_- + n_+} = U \frac{1}{1 + 1/2} = \frac{2}{3} U.$$

Принимаем, что скорость движения армии «без сопротивления» $U = 8 - 10$ км/час, время движения 6–8 час в сутки («световой день»). Тогда скорость фронта $D = (2/3)(8 - 10 \text{ км/час}) = 6 - 7$ км/час. В день (за сутки) проходимое расстояние $\sim 40 - 50$ км, армия могла бы за неделю продвинуться на ~ 350 км, что примерно соответствует фактам (германская армия прошла за это время такое расстояние от западной границы Польши до Варшавы). По соответствующим картам можно проследить и движение фронта в следующую неделю.

Таблица 2. Перед началом немецкого наступления на Западе 10 мая 1940 г.

| | Германия | Союзники (Франция, Англия, Бельгия, Голландия) |
|--------------------------|----------|--|
| Личн. состав (тыс. чел.) | 3300 | 3785 |
| Танки | 2580 | 3099 |
| Самолеты | 3894 | 3791 |
| Орудия | 7378 | 14544 |

Согласно [История второй мировой войны, 1974; Шефов, 2010] вооруженные силы Германии и Франции (с союзниками) перед началом фашистской агрессии было примерно равными (см. таблицу 2), поэтому рисунок 1 может быть некоторой простой иллюстрацией продвижения

фронта вторжения. При одинаковых граничных плотностях «вторгающихся и сопротивляющихся» реальная скорость продвижения (вторжения) определяется так:

$$D = U \frac{n_-}{n_- + n_+} = U \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}U.$$

Мы схематично рассмотрим вторую фазу этой войны — наступление немецких войск непосредственно на Францию, на Париж. Согласно фактам, изложенным, например, в [фон Манштейн, 2012] (особенно по продвижению немецких войск от Соммы до Сены и Луары), можно использовать данную модель. Сравнение теоретической оценки скорости фронта с данными по продвижению германских войск к Парижу показывает соответствие. Получаем скорость вторжения $D = (1/2)(8-10)$ км/час = $(4-5)$ км/час. Считая, что в день армии движутся 6–8 час, получаем, что скорость $D = 24-40$ км/день, что за неделю составит 170–280 км, что соответствует реальности: германская армия начала наступление 5 июня, через неделю она была в окрестности Парижа. По карте это расстояние ~ 230 км. То, что характер сражений соответствует принятой модели описания, подтверждают слова французского военачальника из [Goutard, 1966]. Французские резервы, способные закрыть брешь в линии фронта или перейти в контратаку, были исключительно слабы, поэтому, чтобы компенсировать недостаточность сил, способных оказать сопротивление немецким танковым соединениям, была создана система опорных пунктов, названных очагами сопротивления. Созданные в населенных пунктах и лесных массивах и вооруженные 75-мм пушками в качестве противотанковых средств, эти опорные пункты должны были продолжительное время оказывать сопротивление противнику, даже будучи обойденными с флангов и окруженными. Поэтому было необходимо, писал впоследствии генерал де Голль, не только завязать чисто оборонительное сражение в стиле 1918 года, но и отказаться от идеи создания непрерывного фронта. На этом примере можно понять, насколько правдоподобно выглядит предложенная модель вторжения. Французская оборона имела разрозненные «неподвижные» оборонительные пункты, которые оказывали упорное сопротивление вторгающимся частям (прежде всего танковым) противника. Такой характер сопротивления соответствует рассматриваемой модели, причем боевые действия с взаимным «выбиванием» активных элементов могли происходить лишь в течение одной-двух недель.

В [фон Манштейн, 2012] приведена карта (с. 145), дающая представление о скорости движения фронта (более точно: 38-го армейского корпуса) на протяжении двух недель наступления на Францию: от 5.6.1940 до 19.6.1940. Отмеченная промежуточная дата 9.6.1940 позволяет оценить изменение скорости в эти два временные отрезка и заключить, что скорость оставалась примерно постоянной. Величина скорости по карте примерно равна 35 км/день, что соответствует вышеприведенным вычислениям по формулам модели.

Соотношение вооруженных сил Германии и СССР перед началом фашистской агрессии 22 июня 1941 года можно оценить как примерно равные (см. таблицу 3). Однако надо учесть внезапность нападения, поэтому Германия могла вначале скрытно концентрировать войска на отдельных участках, так что здесь возникал значительный перевес в плотности сил, что и произошло на Западном фронте (в отличие от Северо-Западного и Юго-Западного). В рассматриваемой модели роль играют лишь «сопротивляющиеся» элементы, их и надо учитывать при выявлении скорости продвижения фронта. В первые дни войны многие воинские соединения Красной армии и техника не были введены в действие, и формальный перевес в самолетах, танках и орудиях был мнимым. Огромные масштабы уничтоженных самолетов, танков были связаны с неготовностью к нападению (самолеты не участвовали в боях, а были сожжены на аэродромах, танки брошены из-за нехватки горючего). Также многие дивизии, особенно на Западном фронте, оказались в окружении и не смогли оказать большого сопротивления. Поэтому на западном направлении соотношение плотностей здесь можно оценить как 1 : 2 (СССР : Германия).

Скорость реального фронта агрессии согласно предложенной модели автоволнового процесса определяется только отношением плотностей в согласии с формулой (1.3). Карты продвижения фронтов (Западного и Северо-Западного со стороны СССР) в первые дни германско-

го вторжения в СССР могут показать характер продвижения германских войск от границы до Минска. Расстояние это составляет ~ 350 км. Известно, что оно было пройдено примерно за неделю (29 июня немецкие танки были в Минске). Скорость продвижения фронта при таком продвижении в первую неделю в согласии с приведенными выше формулами (при отношении плотностей 1:2) составляла до 50 км/день, как и при наступлении на Варшаву. По плану танковые части группы немецких армий «Центр» должны были, развивая наступление по сходящимся направлениям, соединиться в районе Минска, примерно так и произошло в реальности.

Таблица 3. Перед началом вторжения в СССР 22 июня 1941 г.

| | Германия и союзники | СССР |
|--------------------------|---------------------|-------|
| Личн. состав. (млн чел.) | 4.2 | 3.2 |
| Танки | 4171 | 15687 |
| Самолеты | 4846 | 10743 |
| Орудия и минометы | 42601 | 59787 |

Другая ситуация сложилась на Северо-Западном фронте. Здесь не было такого превосходства, не было очагового сопротивления окруженных войск Красной армии, так что соотношение сил можно оценить примерно как 1 : 1 в согласии с таблицей 3. Здесь скорость составила 30–40 км/день, так что от границы до Риги фронт продвинулся за неделю на ~ 250 км, что соответствует фактам. Продвижение группы армий «Север» (Северо-Западный фронт со стороны СССР), показанное на карте на рисунке 2, позволяет оценить скорость и в первые две недели войны. Видно, что скорость оставалась примерно такой же (от Риги до Пярну). Но окончание 2-ой недели означало фактически окончание блицкрига — сопротивление стало упорным, и модель больше не может быть применена.

Заметим, что данная модель не может быть прямо применена, например, для описания событий на Юго-Западном направлении, где в первые дни войны было оказано упорное сопротивление (танковое сражение под Дубно и др.). Это означает, что условия справедливости используемой модели здесь не выполняются.

Заключение

В работе рассмотрена новая кинетическая модель для описания исторических процессов вторжения Германии в различные страны во Второй мировой войне. Полученные результаты движения фронта соотносятся с известными данными. Модель не связана с заданием градиентами каких-либо величин, а описывает процессы типа бегущей волны, основываясь на взаимодействии частиц с определенными скоростями, проникающих в среду покоящихся частиц. В первичном рассмотрении делался ряд упрощающих предположений, в частности, начальные распределения плотностей полагались однородными, в дальнейшем это ограничение может быть снято.

Список литературы

- Аристов В. В., Шахов Е. М.* Нелинейное рассеяние молекулярного пучка в разреженном газе // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 1987. — Т. 27, № 12. — С. 1845–1852.
- История второй мировой войны 1939–1945 годы. В 12 т. — М.: Воениздат, 1974.
- История и Математика: Проблемы периодизации исторических макропроцессов. — М.: КомКнига, 2006.
- Коган М. Н.* Динамика разреженного газа. — М.: Наука, 1967.
- Колмогоров А. Н., Петровский И. Г., Пискунов Н. С.* Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастанием количества вещества и его применение к одной биологической проблеме // Бюллетень МГУ. Сер. А. Математика и механика. — 1937. — Т. 1. — С. 1–25.

- Математическое моделирование исторических процессов.— М.: Изд-во МГУ, 1998.
- Мюррей Д. Математическая биология / Ред. Г. Ю. Ризниченко. — М.–Ижевск, 2011. — Т. II. — С. 862–867.
- Лиддел Гарт Б. Г. Вторая мировая война. — М.: АСТ; СПб.: Terra Fantastica, 1999.
- фон Манштейн Э. Утерянные победы. — М.: Астрель, 2012.
- Шефов Н. Вторая мировая. 1939–1945. История великой войны. — М.: Вече, 2010.
- Aristov V. V., Shakhov E. M. Scattering of impulsive molecular beam in rarefied gas // Rarefied Gas Dynamics. R. Boffi, C. Cergignani eds., B. G. Teubner. Stuttgart. —1987. — Vol. I. — P. 266–275.
- Cole J. D. On a quasi-linear parabolic equation occurring in aerodynamics // Quart. Appl. Math. — 1951. — Vol. 9. — P. 225–236.
- Fischer R. A. The wave of advance of advantageous genes // Ann. Eugenics. — 1937. — Vol. 7. — P. 355–369.
- Goutard A. Fall of France. May 20 / June 25, 1940. — History of The Second World War. — Vol. 1, No. 10 3/6. P. 253–269, 275–279 (перевод: Из «Истории второй мировой войны», Лондон, 1966.Т. 1).
- Hopf E. The partial differential equation $ut + uux + uxx = 0$. Comm. Pure Appl. Math. 1950, **3**, p. 201–230.
- Langer W. L. The Black Death // Scient. Amer. — February 1964. — Vol. 210. — P. 114–121.
- Li Q. et al. Non-consensus opinion models on complex networks // J. Stat. Phys. — 2013. — Vol. 151. — P. 92–112.
- Noble J. V. Geographic and temporal development of plagues. Nature. 1974, 250, p. 726–729.
- Prigogine I. and Herman R. Kinetic Theory of Vehicular Traffic. — New York. American Elsevier, 1971.
- Simkin M. V. and Roychowdhury V. P. A mathematical theory of fame // J. Stat. Phys. — 2013. — Vol. 151. — P. 319–328.
- Special Issue: Statistical Mechanics and Social Sciences I // J. Stat. Phys. — 2013. — Vol. 151, No. 1–2.
- Special Issue: Statistical Mechanics and Social Sciences II // J. Stat. Phys. — 2013. Vol. 151, No. 3–4.
- Weiss J., Tabor M., Carnevale G. The Painlevé property for partial differential equations // J. Math. Phys. — 1983. — Vol. 24. — P. 522–526.