

УДК: 336:51+519.2

## Статистически справедливая цена на европейские опционы колл согласно дискретной модели «среднее–дисперсия»

В. Н. Никулин<sup>а</sup>, А. С. Одинцова

Вятский государственный университет, ф-т экономики и менеджмента, кафедра ММЭ,  
Россия, 610000, г. Киров, ул. Московская, д. 36, тел.: (8332) 64-48-16

E-mail: <sup>а</sup>vnikulin.uq@gmail.com

Получено 18 марта 2014 г.,  
после доработки 16 октября 2014 г.

Мы рассматриваем портфель с опционом колл и соответствующим базовым активом при стандартном предположении, что рыночная цена является случайной величиной с логнормальным распределением. Минимизируя дисперсию (риск хеджирования) портфеля на дату погашения опциона, мы находим оптимальное соотношение опциона и актива в портфеле. Как прямое следствие мы получим статистически справедливую цену опциона колл в явной форме (случай опциона пут может быть рассмотрен аналогичным образом). В отличие от известной теории Блэка–Шоулза, любой портфель не может рассматриваться свободным от риска, потому что никаких дополнительных сделок в течение контракта не предполагается, но среднестатистический риск, относящийся к достаточно большому количеству независимых портфелей, стремится к нулю асимптотически. Это свойство иллюстрируется в экспериментальном разделе на основе ежедневных цен акций 37-ми лидирующих американских компаний за период времени, начиная с апреля 2006 года по январь 2013 года.

Ключевые слова: европейский опцион колл, модель «среднее–дисперсия», анализ временных рядов

## Statistically fair price for the European call options according to the discreet mean/variance model

V. N. Nikulin, A. S. Odintsova

Vyatka State University, Faculty of economics and management, department of MME,  
36 Moskovskaya str., Kirov, 610000, Russia

**Abstract.** — We consider a portfolio with call option and the corresponding underlying asset under the standard assumption that stock-market price represents a random variable with lognormal distribution. Minimizing the variance hedging risk of the portfolio on the date of maturity of the call option we find a fraction of the asset per unit call option. As a direct consequence we derive the statistically fair lookback call option price in explicit form. In contrast to the famous Black–Scholes theory, any portfolio cannot be regarded as risk-free because no additional transactions are supposed to be conducted over the life of the contract, but the sequence of independent portfolios will reduce risk to zero asymptotically. This property is illustrated in the experimental section using a dataset of daily stock prices of 37 leading US-based companies for the period from April 2006 to January 2013.

Keywords: European call options, «mean–variance» model, time-series analysis

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2014, vol. 6, no. 5, pp. 861–874 (Russian).

## Введение

Типичный актив  $S$  как процесс геометрического броуновского движения [Samuelson, 1965, 1973, 1973a] имеет цену, которая моделируется при помощи следующего уравнения:

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dz,$$

где  $\mu \in R$  и  $\sigma \in R_+$  — коэффициенты смещения и волатильности,  $z$  — стандартный винеровский процесс с

$$Mdz = 0, \quad M(dz)^2 = dt.$$

Согласно лемме Ито

$$d \log S(t) = \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dz. \quad (1)$$

Поэтому

$$\log S(t+T) \sim N \left( \log S(t) + \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T, \sigma \sqrt{T} \right),$$

где  $N(a, b)$  — функция распределения нормальной величины со средним  $a$  и стандартным отклонением  $b$ . Обозначим соответствующую плотность:

$$f_s(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot x \cdot b(T)} \exp \left( -\frac{(\log x - a(T))^2}{2 \cdot b^2(T)} \right),$$

где  $a(T) = \log S(t) + \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T$ ,  $b(T) = \sigma \sqrt{T}$ .

Теория опционов является одной из основных областей современной финансовой теории и практики. Как прямое следствие фундаментальных публикаций Блэка, Шоулза и Мертона в мире наблюдается стремительный рост торговой деятельности, связанной с опционами [Gong et al., 2011].

**Определение 1.** Контракт европейского опциона колл (call option) позволяет его держателю купить единицу основного актива по фиксированной цене  $K$  (strike price) после даты  $t+T$  в будущем, или держатель опциона колл может решить не использовать контракт, если цена основного актива меньше, чем цена исполнения  $K$ . Соответственно, цена Европейского опциона колл с датой погашения  $t+T$  есть

$$C(t+T) = \psi(S(t+T) - K) = \max \{0, S(t+T) - K\}.$$

За последние десятилетия наблюдается сильный рост объемов опционной торговли. Именно рынок опционов расширяет возможности инвестора регулировать надлежащим образом риск портфеля [Агасандян, 2011]. Фундаментальная проблема финансовой математики [Hand, Jaska, 1998] заключается в нахождении обоснованного хеджа или цены опциона в момент времени  $t$ , предшествующий сроку исполнения.

Основная идея предлагаемой статьи имеет следующую интерпретацию. Покупатель опциона колл исходит из предположения, что цена на соответствующую акцию вырастет в ближайшем будущем. В этом случае продавец опционов рискует понести убытки, прямо пропорциональные уровню роста акции (прибыль покупателя симметрична потерям продавца). В этой

связи, заблаговременное приобретение соответствующих акций, с тем чтобы минимизировать риск, является естественной стратегией продавца (так называемый покрытый опцион колл, covered call). Иными словами, продавец опционов колл становится также инвестором или акционером (держателем акций). Возможность падения цен на акции является вполне реальной, и, по определению, опционы пут выполняют функции страхования для инвесторов на случай падения цен на акции. Таким образом, опираясь на исторические данные, мы можем оптимизировать структуру портфеля, включающего не только акции, но и опционы колл и пут.

## Математическое ожидание хеджа (или ожидаемый хедж — ОХ) и формула Блэка–Шоулса (BS, Black–Scholes formula)

Согласно [Merton, 1973] и [Whittle, 2001] предположим, что

$$C_{\text{exp}}(t) = e^{-r \cdot T} \cdot M \psi(S(t+T) - K), \quad (2)$$

где  $r$  — безрисковая ставка, а определение функции  $\psi$  дано выше.

**Предложение 1.** Предположим, что параметры  $t$ ,  $T$ ,  $r$  и  $K$  произвольно фиксированы. Тогда

$$e^{-r \cdot T} \cdot M \psi(S(t+T) - K) = S(t) \cdot e^{(\mu-r)T} \cdot \Phi(\alpha) - K \cdot e^{-rT} \cdot \Phi(\beta), \quad (3)$$

где  $\Phi$  — функция распределения стандартного нормального закона и

$$\alpha = \frac{\log\left(\frac{S(t)}{K}\right) + \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}, \quad \beta = \alpha - \sigma\sqrt{T}.$$

Доказательство формулы (3) приведено в [Samuelson, 1965], где также замечено, что (3) совпадает с формулой Блэка–Шоулса в частном случае  $\mu = r$ :

$$C_{BS}(t) = S(t) \cdot \Phi(\alpha_r) - K \cdot e^{-rT} \cdot \Phi(\beta_r), \quad (4)$$

$$\text{где } \alpha_r = \frac{\log\left(\frac{S(t)}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}, \quad \beta_r = \alpha_r - \sigma\sqrt{T}.$$

**Замечание 1.** Формула (4) определяет основное направление ценообразования на рынке опционов [Hsiao, 2013]. Отметим также работы [Balmann et al., 2013; Федосеев и Коротких, 2010; Сологуб, 2011; Хорев, 2007], в которых теория опционов нашла дальнейшее продолжение и развитие. В частности, в [Carr et al., 2010] рассмотрен временной процесс опциона колл и исследована зависимость таких статистических характеристик, как цена опциона и его дисперсия.

Однако предположение (2) игнорирует тот факт, что продавец может сам продолжить активный торг на рынке акций. BS-формула (4) дает единственную цену европейского опциона колл [Karatzas and Kou, 1996] для идеального и непрерывного процесса торговли. Относительно этих условий контракт является самофинансируемым и свободным от риска как для продавца, так и для покупателя. Проблема хеджирования [Duffie, 1991; Schweizer, 1992] состоит в нахождении наилучшей аппроксимации цены опционов в данных финансовых условиях посредством самофинансируемых торговых стратегий, где задача состоит в минимизации ожидаемого среднего квадрата ошибки [Bobrovnytska, Schweizer, 2004]. В серии работ эта проблема была сформулирована и увязывалась с задачей линейно-квадратичного стохастического контроля [Henderson, 2005; Biagini, 2002; Biagini and Guasoni, 2002].

Согласно [Whittle, 2001] оригинальная формула Блэка–Шоулса подвергается критике на том основании, что она основана на совершенно нереалистичной перспективе свободных от риска операций, что точное следование контракту может препятствовать максимизации портфеля.

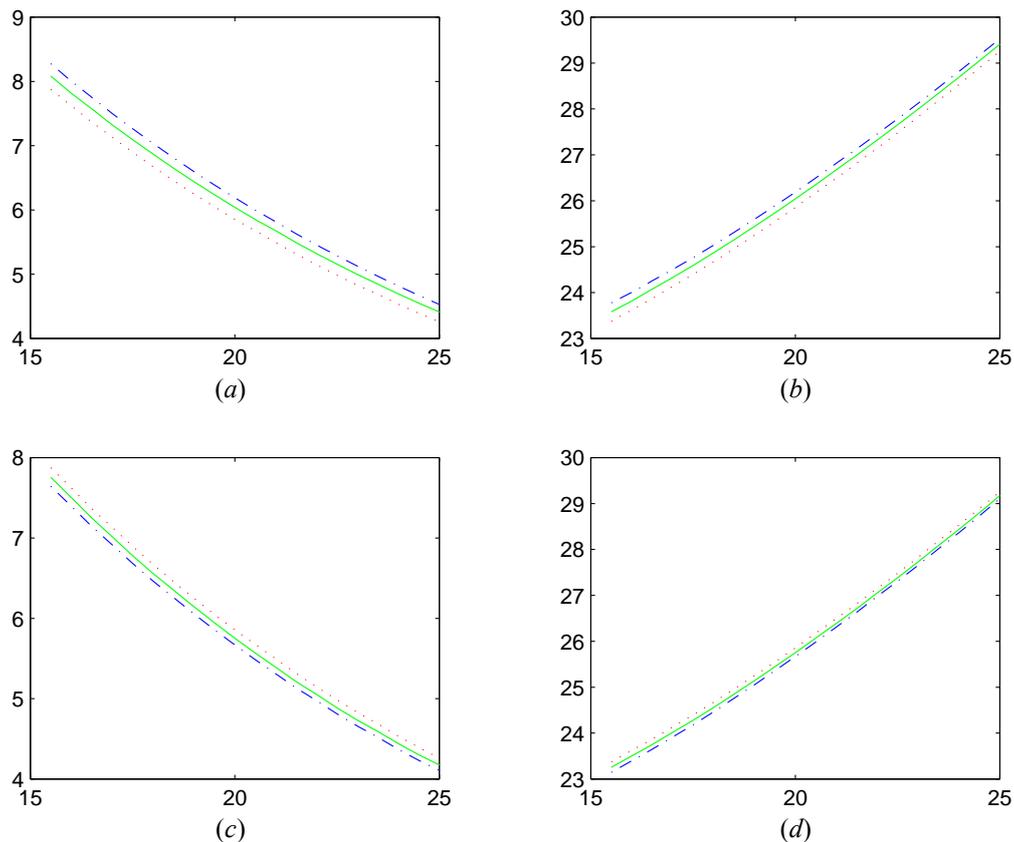


Рис. 1. Левый столбец иллюстрирует поведение опциона колл  $C$ , правый столбец иллюстрирует поведение суммы опциона и цены исполнения  $K$ , как функции  $K$ . Были использованы следующие параметры: (a, b)  $S(t) = 20$ ,  $\mu = 0.1$ ,  $r = 0.05$ ,  $\sigma = 1$ ,  $T = 180/365$ ; (c, d)  $S(t) = 20$ ,  $\mu = 0.02$ ,  $r = 0.05$ ,  $\sigma = 1$ ,  $T = 180/365$ ; зеленая сплошная линия, синяя штрихпунктирная линия и красный пунктир соответствуют  $MV$  (10),  $OX$  (3) и  $BS$  (4) решениям соответственно

### Хеджирование согласно модели «среднее–дисперсия» (mean–variance — MV)

Начиная с 1952 года, когда Марковиц опубликовал свою основополагающую работу, аналитический подход «среднее–дисперсия» стал неотъемлемой частью управления финансовыми портфелями в обеих областях теории и практики. Этот подход нашел широкое применение не только в области формирования финансовых портфелей, но и в области оценки их качества [Jiang et al., 2012].

Инвестор, имеющий портфель с ценными бумагами или акциями, покупает также опционные контракты пут с тем, чтобы минимизировать риск падения цен на акции [Shalit, Greenberg, 2013] (так называемый защищенный пут, protected put). Аналогично этому продавец опционов колл заинтересован в приобретении портфеля с акциями, с тем чтобы минимизировать риск роста цен на акции.

Рассмотрим портфель  $F$ , состоящий из опциона колл  $C$  и  $h$  единиц основного актива  $S$ . Как следствие, стоимость портфеля (случай продавца) может быть представлена следующей формулой:

$$F(t) = -C(t) + h \cdot S(t) \quad (5)$$

или

$$F(t) = \begin{cases} (h-1) \cdot S(t) + K, & \text{если } S(t) \geq K, \\ h \cdot S(t) & \text{— иначе.} \end{cases} \quad (6)$$

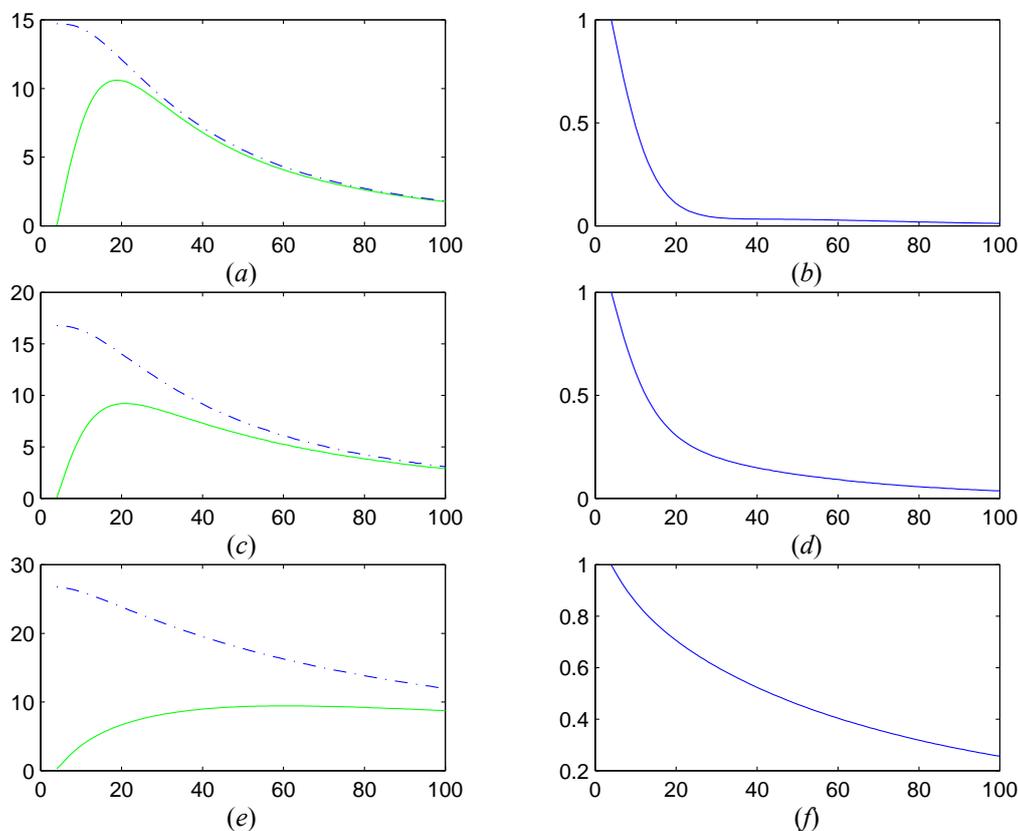


Рис. 2. Левый столбец: стандартное отклонение портфеля как функция  $K$ , где зеленая сплошная линия соответствует (10), а голубая штрихпунктирная линия соответствует портфелю с безрисковым активом (2) (ОХ-метод); правый столбец: значение параметра  $h$  как функции цены  $K$ . Следующие параметры были использованы: (a, b)  $\mu = 0.1, \sigma = 0.9$ ; (c, d)  $\mu = 0.1, \sigma = 1.0$ ; (e, f)  $\mu = 0.1, \sigma = 1.4$ . Все другие параметры те же самые, как в случае рисунка 1

Согласно фундаментальным принципам модели «среднее–дисперсия» (MV, mean–variance model) [Markowitz, 1952] мы следуем правилу, при котором инвестор рассматривает ожидаемую доходность как желательный, а дисперсию доходности — как нежелательный результат. Это правило может быть реализовано различными методами. Например, мы можем определить разбиение портфеля посредством максимизации отношения ожидаемой доходности к стандартному отклонению портфеля, или мы можем минимизировать дисперсию портфеля, предполагая (5), что ожидаемая доходность фиксирована. В нашем случае мы будем минимизировать дисперсию портфеля (5), предполагая, что число опционов колл произвольно фиксировано. Для того чтобы упростить обозначения, рассмотрим портфель с одним опционом колл.

Следующая теорема представляет основной результат статьи и устанавливает значение параметра  $h$ , чтобы минимизировать дисперсию портфеля (6). Цена хеджирования опциона колл, или просто хедж, может быть найдена согласно формуле

$$C_{MV}(t) = h \cdot S(t) - e^{-rT} MF(t+T). \quad (7)$$

**Теорема.** Предположим, что портфель  $F$  определен в (6). Тогда проблема хеджирования

$$\min_h Q_{\text{var}}(F(t+T)),$$

где  $Q_{\text{var}}(F(t+T)) := M[F(t+T) - MF(t+T)]^2$ , имеет единственное решение:

$$h = \frac{A_4 - K \cdot A_2 + (A_2 + A_3)(K \cdot A_1 - A_2)}{A_4 + A_5 - (A_2 + A_3)^2}, \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} A_1(K) &:= \int_K^{\infty} f_S(x) dx = \Phi\left(\frac{a(T) - \log K}{b(T)}\right); \\ A_2(K) &:= \int_K^{\infty} x f_S(x) dx = \exp(a(T) + b^2(T)/2) \Phi\left(b(T) + \frac{a(T) - \log K}{b(T)}\right); \\ A_3(K) &:= \int_0^K x f_S(x) dx = \exp(a(T) + b^2(T)/2) \left(1 - \Phi\left(b(T) + \frac{a(T) - \log K}{b(T)}\right)\right); \\ A_4(K) &:= \int_K^{\infty} x^2 f_S(x) dx = \exp(2(a(T) + b^2(T))) \Phi\left(2b(T) + \frac{a(T) - \log K}{b(T)}\right); \\ A_5(K) &:= \int_0^K x^2 f_S(x) dx = \exp(2(a(T) + b^2(T))) \left(1 - \Phi\left(2b(T) + \frac{a(T) - \log K}{b(T)}\right)\right). \end{aligned}$$

**Доказательство.** Согласно определения дисперсии (риска хеджирования)

$$Q_{\text{var}}(F(t+T)) = MF^2(t+T) - (MF(t+T))^2, \quad (9)$$

где

$$MF^2(t+T) = (h-1)^2 A_4 + 2K(h-1)A_2 + K^2 A_1 + h^2 A_5;$$

$$MF(t+T) = h(A_2 + A_3) - A_2 + K \cdot A_1.$$

Минимизируя (9) как функцию  $h$ , найдем требуемое решение (8).

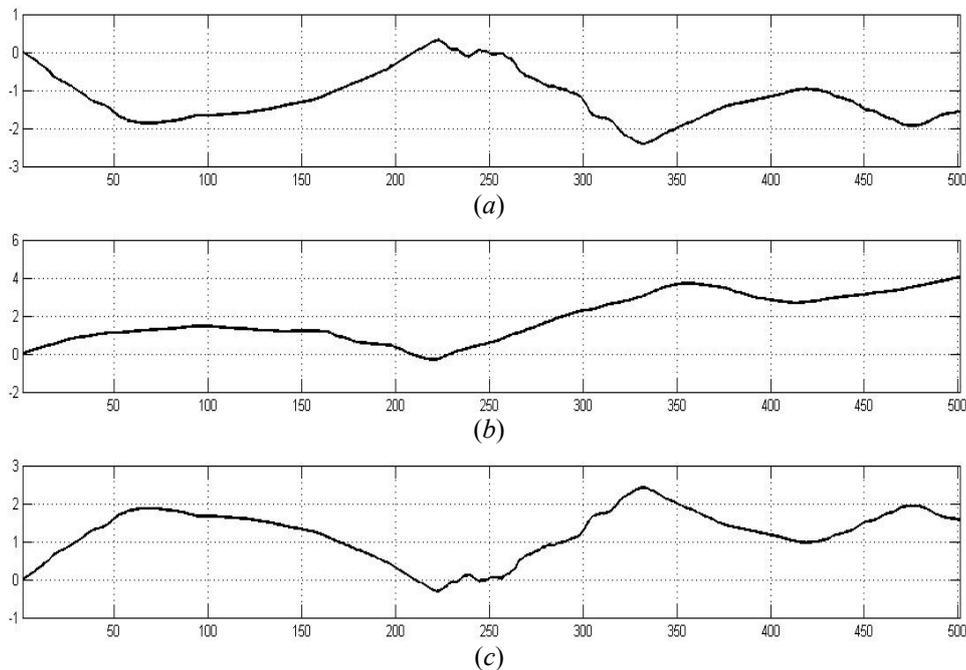


Рис. 3. Общий случай  $m = 37$  активов (см. таблицу 1). Реализация портфеля основанного на ОХ- (1-ая и 3-я строки) и MV- (2-я строка) алгоритмах: (a), (b) доходы продавца; (c) доход покупателя. Все вычисления были сделаны согласно (20a), (20c) и (22), где параметр  $h$  определен в (8)

Затем мы найдем хедж для модели «среднее–дисперсия» согласно (7):

$$C_{MV}(t) = h \cdot S(t) - e^{-rT} [h(A_2 + A_3) - A_2 + K \cdot A_1], \quad (10)$$

где параметр  $h$  определен в (8). Кроме того, мы можем переписать (3), используя новые обозначения, которые были введены в этом разделе:

$$C_{\text{exp}}(t) = e^{-rT} (A_2 - K \cdot A_1). \quad (11)$$

Вышеупомянутый опцион колл относится к портфелю с безрисковым активом:

$$F(t) = -C(t) + h, \quad (12)$$

где  $h$  — постоянный параметр. Соответствующее стандартное отклонение (standard deviation) инвариантно относительно  $h$  и может быть вычислено посредством следующей формулы (см. рис. 2):

$$S_{dev}(F(t+T)) = \sqrt{A_1(1-A_1)K^2 + 2A_2K(A_1-1) + A_4 - A_2^2}.$$

**Замечание 2.** Отметим, что цена (10) может быть отрицательной, в отличие от цены (11), которая всегда положительна по определению.

Используя соотношения  $A_2 + A_3 = \exp\left(a + \frac{b^2}{2}\right)$ ,  $A_4 + A_5 = \exp(2(a + b^2))$ , мы можем упростить (8):

$$h(K) = \frac{A_4 - K \cdot A_2 + \exp\left(a + \frac{b^2}{2}\right)(K \cdot A_1 - A_2)}{\exp(2a + b^2)(2 \exp b - 1)}. \quad (13)$$

Рассмотрим некоторые специальные свойства коэффициентов:

$$A_i(K), \quad i=1...5: \quad A_1(K) \xrightarrow{K \rightarrow 0} 1, \quad A_3(K) \xrightarrow{K \rightarrow 0} 0, \quad A_5(K) \xrightarrow{K \rightarrow 0} 0.$$

Из вышеизложенного следует, что  $h(K) \xrightarrow{K \rightarrow 0} 1$  и  $S_{dev}(K) \xrightarrow{K \rightarrow 0} 0$  (см. рис. 2).

**Предложение 2.** Предположим, что  $\sigma > 0$ . Тогда  $0 < h < 1$ , где параметр разбиения актива  $h$  определен в (8).

Доказательство предложения 2 следует из следующих двух лемм.

**Лемма 1.** Если  $\Phi$  является функцией распределения стандартного нормального закона, справедливо отношение

$$\frac{\Phi(v+b) - \Phi(v)}{\Phi(v) - \Phi(v-b)} < \exp\left(\frac{b^2}{2} - b \cdot v\right) \quad (14)$$

для любого  $v \in R$  и  $b \in R_+$ .

**Доказательство.** Мы имеем

$$\begin{aligned} \Phi(v) - \Phi(v-b) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_v^{v+b} \exp\left(-\frac{(t-b)^2}{2}\right) dt = \frac{\exp(-0.5b^2)}{\sqrt{2\pi}} \int_v^{v+b} \exp(-0.5t^2 + bt) dt < \\ &< \frac{\exp\left(-\frac{b^2}{2} + bv\right)}{\sqrt{2\pi}} \int_v^{v+b} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt = \frac{\exp\left(-\frac{b^2}{2} + bv\right)}{\sqrt{2\pi}} [\Phi(v+b) - \Phi(v)]. \end{aligned}$$

Доказательство завершено.

**Лемма 2.** Если  $\Phi$  есть функция распределения стандартного нормального закона, справедливо соотношение

$$\Phi(v) < \frac{e^{b^2} \Phi(v+b) + \exp\left(\frac{b^2}{2} - bv\right) \Phi(v-b)}{1 + \exp\left(\frac{b^2}{2} - bv\right)} \quad (15)$$

для любого  $v \in \mathbb{R}$  и  $b \in \mathbb{R}_+$ .

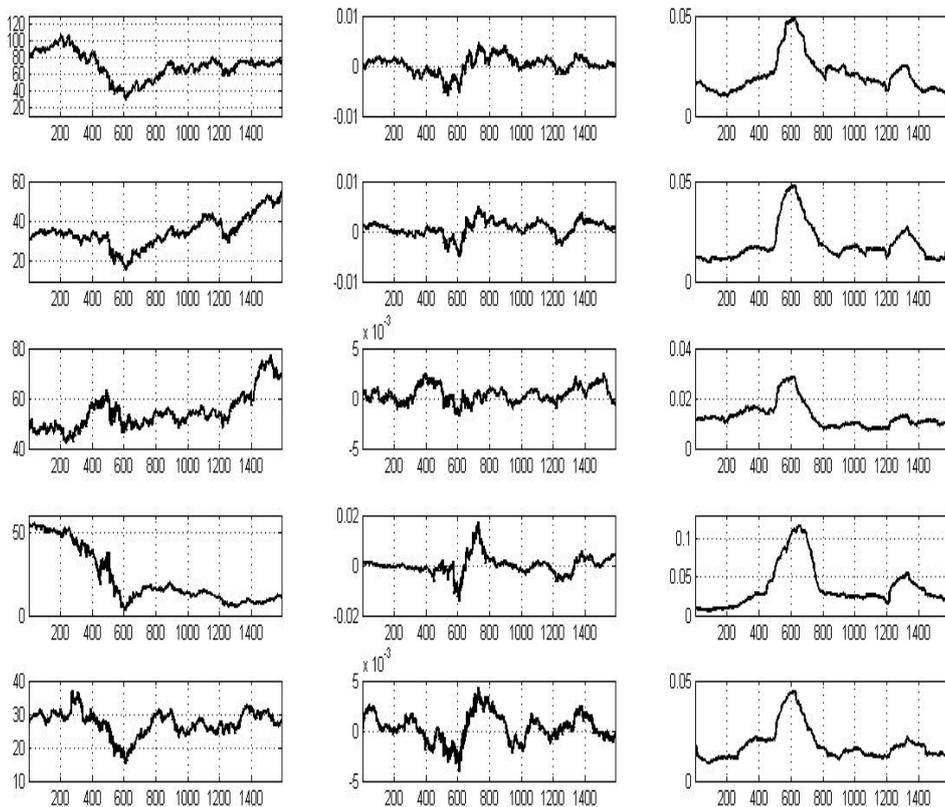


Рис. 4. Левый столбец иллюстрирует стоимость акций Boeing, Walt Disney, Wall-Mart Stores, Bank of America и Microsoft Corporation в течение периода 1587 дней (где 30 января 2013 года — последний день); средний и правый столбцы иллюстрируют изменение среднего и стандартного отклонения, которые были вычислены согласно (17) и (16) с использованием параметра сглаживания  $n = 120$

**Доказательство.** Мы имеем

$$\begin{aligned} e^{b^2} \Phi(v+b) - \Phi(v) &> e^{b^2} [\Phi(v+b) - \Phi(v)] = \frac{e^{b^2}}{\sqrt{2\pi}} \int_v^{v+b} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt = \frac{e^{b^2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{v-b}^v \exp\left(-\frac{(t+b)^2}{2}\right) dt = \\ &= \frac{\exp\left(\frac{b^2}{2}\right)}{\sqrt{2\pi}} \int_{v-b}^v \exp\left(-\frac{t^2}{2} - bt\right) dt > \exp\left(\frac{b^2}{2} - bv\right) [\Phi(v) - \Phi(v-b)]. \end{aligned}$$

Доказательство завершено.

Используя определение коэффициентов  $A_i(K)$ ,  $i=1\dots 5$ , мы можем переписать (13) в следующей форме:

$$h = \frac{e^{b^2} \Phi(v+b) - \Phi(v) - \exp\left(\frac{b^2}{2} - bv\right) [\Phi(v) - \Phi(v-b)]}{\exp(b^2) - 1},$$

где  $v = b + \frac{a - \log K}{b}$ . Тогда точные верхняя и нижняя границы для  $h$  (как это установлено в предложении 2) следуют из (14) и (15), если  $\sigma > 0$ .

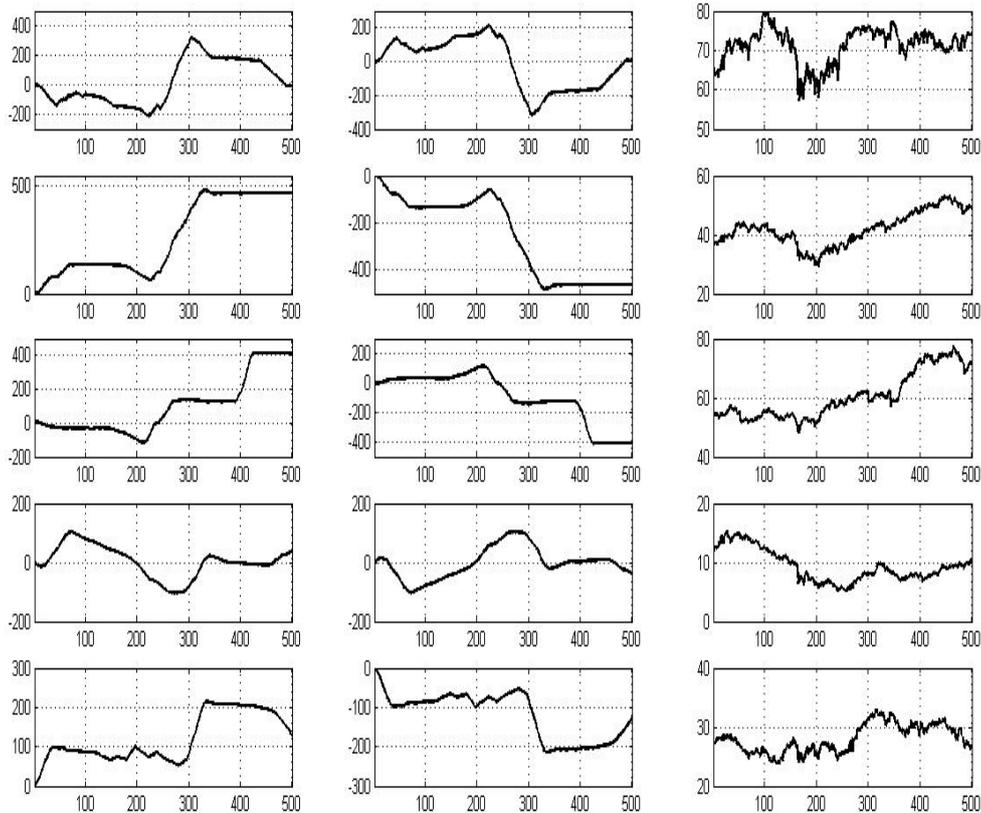


Рис. 5. Подход ОХ: первые 2 столбца представляют прибыль покупателя (18) и продавца (19) в течение периода 500 дней (см. рис. 4); третий столбец представляет соответствующую цену на опциона колл (3)

**Замечание 3.** Левый столбец рисунка 1 иллюстрирует свойство убывания цены опциона колл как функции цены исполнения. Интересно отметить, что сумма цены опциона колл и цены исполнения является возрастающей функцией цены исполнения. Этот факт вполне объясним потому что вторая часть сделки (покупка акций) не обязательна. Согласно рисунку 1 формулы (3) и (10) являются более гибкими в сравнении с формулой Блэка–Шоулса, которая является независимой от коэффициента смещения  $\mu$ .

Таблица 1. Конечную прибыль покупателя и продавца (50 дней торговли) в случаях методов ОХ и МV: все цены даются в долларах (прибыль покупателя в обоих случаях одинакова)

Название актива	Средняя цена	Покупка	ОХ-продажа	МV-продажа
The Boeing Company	71.1	-7.3	7.3	626
The Walt Disney Company	41.8	466.1	-466.1	234.7
IBM Corporation	182.2	202.3	-202.3	724.4
The Coca-Cola Company	64	-73.8	73.8	142
Pfizer Inc.	21.1	123.5	-123.5	89.3
UnitedHealth Group Incorporated	50.2	111.9	-111.9	351.7
Wal-Mart Stores Inc.	60.3	411.7	-411.7	111
BHP Billiton Limited	78.6	-667.2	667.2	1080.2

Название актива	Средняя цена	Покупка	ОХ-продажа	MV-продажа
Intel Corporation	23.5	36.6	-36.6	16.5
McDonald's Corp.	87.9	175.9	-175.9	581.9
Netflix, Inc.	140.2	-402.2	402.2	-248.4
Procter & Gamble Co.	64.8	83	-83	397.1
United States Oil	36.7	130.4	-130.4	257.9
United States Steel Corp.	33.1	-28.7	28.7	-198.4
Alcoa Inc.	11.7	-70.4	70.4	91.6
Caterpillar Inc.	95.4	898	-898	176.1
General Electric Company	19.1	277.7	-277.7	83.8
3M Company	87.6	0.9	-0.9	721.4
Nokia Corporation	5.6	-183.1	183.1	47.3
Target Corp.	55.1	-37.8	37.8	491.2
United Technologies Corp.	79.2	328	-328	536.7
Advanced Semiconductor Engineering Inc.	31.5	-60.7	60.7	508.2
Cisco Systems, Inc.	18	-161.9	161.9	362.2
The Home Depot, Inc.	44	761.1	-761.1	64.1
Johnson & Johnson	65	66.9	-66.9	328.3
Merck & Co. Inc.	37.5	296.3	-296.3	62.6
National Oilwell Varco, Inc.	72.6	1003.8	-1003.8	-52
The Travelers Companies, Inc.	59.8	300.7	-300.7	411.9
Valero Energy Corporation	25.4	607.9	-607.9	-150.7
Bank of America Corporation	9.3	40.9	-40.9	16.1
Chevron Corporation	103.5	420.5	-420.5	392.4
Hewlett-Packard Company	28.3	-818.5	818.5	443.3
JPMorgan Chase & Co.	39.2	489	-489	-29.4
Microsoft Corporation	28	126.6	-126.6	155.6
Realty Income Corp.	36.5	-101.9	101.9	312
AT&T, Inc.	31.4	127.5	-127.5	69.7
Verizon Communications Inc.	39	59.8	-59.8	179.3

## Эксперименты

Опираясь на представление (1), мы можем вычислить оценку для (текущей) волатильности [McMillan, 1993]:

$$\hat{\sigma}_{i,t} = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^n (R_{i,t-j} - \bar{R}_{i,t})^2}{n-1}}, \quad (16)$$

где

$$R_{i,t-j} = \log \frac{S_{i,t-j+1}}{S_{i,t-j}};$$

$S_{i,t}$  — заключительная цена  $i$ -го актива на день  $t > n$  и

$$\bar{R}_{i,t} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n R_{i,t-j}.$$

Затем мы можем оценить (текущее) смещение (shift parameter):

$$\bar{\mu}_{i,t} = \bar{R}_{i,t} + \frac{1}{2} \hat{\sigma}_{i,t}^2. \quad (17)$$

## Математическое ожидание хеджа

Цена опциона колл  $C_{i,t}$  (см. правый столбец рис. 5) была вычислена согласно (11) при следующем условии:  $C_{i,t} \geq 0.03 \cdot S_{i,t}$  (административные расходы не меньше, чем 3%). Цена исполнения была вычислена при использовании оценок коэффициентов смещения и волатильности

$$K_{i,t} = S_{i,t} \cdot \exp\left(\frac{\mu_{i,t} \cdot T}{\beta + \gamma \cdot \sigma_{i,t}}\right), \quad \beta = 0.3, \quad \gamma = 20.$$

Левый и средний столбцы рисунка 5 соответствуют доходу покупателя  $PB_{i,t}$  и продавца  $PS_{i,t}$ , которые были вычислены для 500 последовательных дней (30 января 2013 года — последний день). Вычисления проводились с использованием следующих правил:

$$PB_{i,t+T+j+1} = PB_{i,t+T+j} + \begin{cases} S_{i,t+T+j+1} - K_{i,t+j+1} - C_{i,t+j+1}, & \text{если } S_{i,t+T+j+1} \geq K_{i,t+j+1}, \\ -C_{i,t+j+1} & \text{— иначе;} \end{cases} \quad (18)$$

$$PS_{i,t+T+j+1} = PS_{i,t+T+j} + \begin{cases} K_{i,t+j+1} + C_{i,t+j+1} - S_{i,t+T+j+1} & \text{если } S_{i,t+T+j+1} \geq K_{i,t+j+1}; \\ C_{i,t+j+1} & \text{— иначе,} \end{cases} \quad (19)$$

где начальные значения  $PB_{i,t+T}$  и  $PS_{i,t+T}$  равны нулю.

Чтобы оценить работу системы, мы использовали  $m$  активов со специальными весовыми коэффициентами:  $w_i \propto (u_i)^{-1}$ ,  $\sum_{i=1}^m w_i = 1$ , где  $u_i$ ,  $i = 1..m$ , — средние курсы акций для рассматриваемого периода.

Средние доходы покупателей  $AB_t$  и продавцов  $AS_t$  были вычислены с использованием формул

$$AB_t = \sum_{i=1}^m w_i \cdot PB_{i,t}, \quad (20a)$$

$$AS_t = \sum_{i=1}^m w_i \cdot PS_{i,t}, \quad (20b)$$

$$AT_t = \sum_{i=1}^m w_i \cdot C_{i,t}, \quad (20c)$$

где  $AT$  — оборот финансовых средств.

**MV-хедж.** Здесь нам необходимо модифицировать (19) и (20c) (все другие формулы остаются такими же, как и в предыдущем параграфе):

$$PS_{i,t+T+j+1} = PS_{i,t+T+j} + C_{i,t+j+1} + \begin{cases} (1 - h_{i,j+1})(K_{i,t+j+1} - S_{i,t+T+j+1}) & \text{если } S_{i,t+T+j+1} \geq K_{i,t+j+1}; \\ h_{i,j+1}(S_{i,t+T+j+1} - S_{i,t+j+1}) & \text{— иначе,} \end{cases} \quad (21)$$

$$AQ_t = \sum_{i=1}^m w_i \cdot (C_{i,t} + h_{i,t} S_{i,t}). \quad (22)$$

Как следствие, прибыль продавца будет больше в сравнении с прибылью покупателя. Вторая и третья строки на рисунке 3 иллюстрируют средние доходы продавца и покупателя.

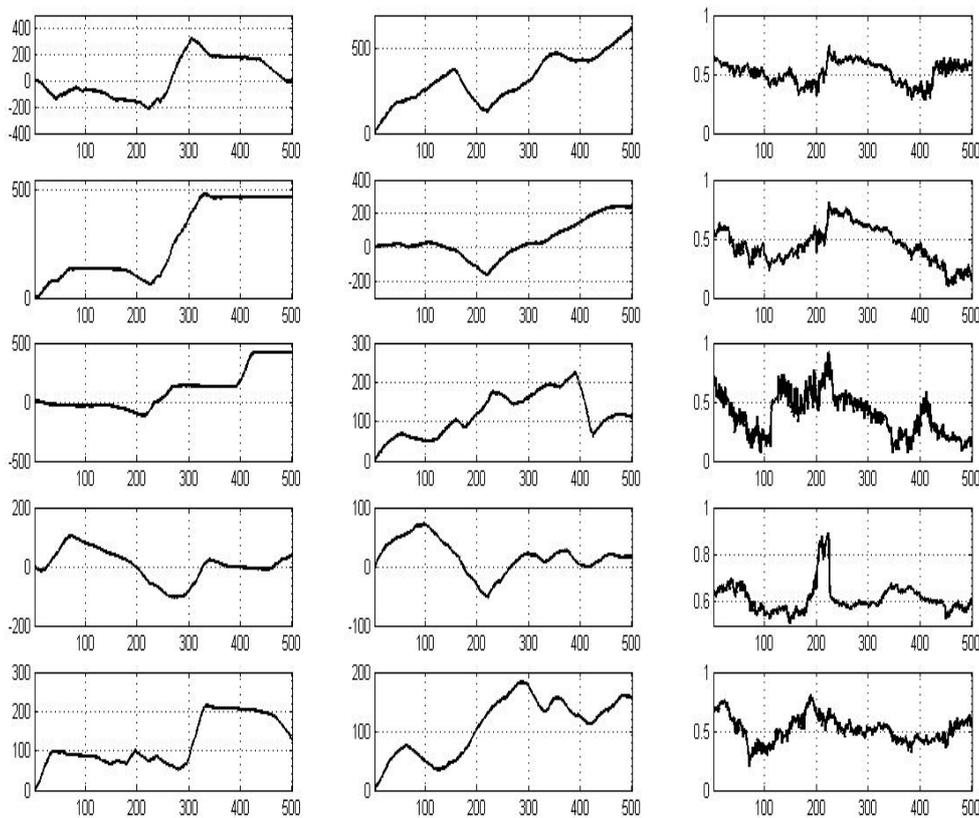


Рис. 6. MV-метод: первые два столбца представляют доходы покупателя (18) и продавца (21) в течение периода 500 дней (см. рис. 4 и 5); третий столбец представляет параметр  $h$  (8)

### Заключительные замечания

Классическое уравнение (2) устанавливает такое хеджирование, чтобы сделки были статистически доходными для покупателя, если цена меньше, или для продавца, если цена выше. Любая сделка не свободна от риска, но последовательность независимых сделок может существенно уменьшить риск (см. рис. 3 и таблицу 1).

Напротив, свободная от риска формула (4) была получена относительно идеального предположения абсолютной ликвидности рынка. Это означает, что любая сделка представляет непрерывную последовательность торгов, которые (как это было отмечено во многих статьях) не могут быть осуществлены в реальном времени.

В настоящей статье показано, что объединение опциона колл с соответствующим активом представляет дополнительную степень гибкости. С одной стороны, это поможет уменьшить риск для продавца. С другой стороны, цена на опцион колл будет уменьшена в том случае, если спрос на акцию исторически высок. В любом случае уровень MV-хеджа располагается между BS- и ОХ-ценами. Поэтому MV-хедж может рассматриваться как компромисс между двумя основными решениями (см. рис. 1).

Сравнивая первые две строки рисунка 3, которые были построены с использованием тех же самых регулирующих параметров, мы можем видеть преимущества MV-метода в сравнении с ОХ-методом.

## Список литературы

- Агасандян Г. А.* Применение континуального критерия VAR на финансовых рынках // ВЦ РАН. Москва. — 2011.
- Сологуб Р. А.* Восстановление поверхности волатильности биржевых опционов помощью индуктивно-порождаемых моделей // Машинное обучение и анализ данных. — 2011. — Т. 1, № 2. — С. 172–182.
- Федосеев А. М., Коротких В. В.* Современные подходы к определению стоимости опционов // Современная экономика: проблемы и решения. — 2010. — Т. 3, № 15. — С. 162–170.
- Хорев К. П.* Моделирование некоторых задач финансовой математики: оценка спрэд-опциона // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2007. — Т. 47, № 4. — С. 626–637.
- Balmann A., Kataria K. and Musshoff O.* Investment Reluctance in Supply Chains: An Agent-Based Real Options Approach // Journal of Mathematical Finance. — 2013. — Vol. 3. — P. 1–10.
- Biagini F.* Mean-variance hedging for interest rate models with stochastic volatility // Decisions in Economics and Finance. — 2002. — Vol. 25. — P. 1–17.
- Biagini F., Guasoni P.* Mean-variance hedging with random volatility jumps // Stochastic Analysis and Applications. — 2002. — Vol. 20, No. 3. — P. 471–494.
- Black F., Scholes M.* The pricing of options and corporate liabilities // Journal of Political Economy. — 1973. — Vol. 81. — P. 637–659.
- Bobrovnytska O., Schweizer M.* Mean-variance hedging and stochastic control: beyond the Brownian setting // IEEE Transactions on Automatic Control. — 2004. — Vol. 49, No. 3. — P. 396–408.
- Carr P., Geman H., Madan D. and Yor M.* Options on realized variance and convex orders // Quantitative Finance. — 2010. — P. 1–10.
- Hsiao Y.-L.* A Simple Method to Price Window Reset Options // Journal of Mathematical Finance. — 2013. — Vol. 3. — P. 96–102.
- Duffie D., Richardson H.* Mean variance hedging in continuous time // The Annals of Applied Probability. — 1991. — Vol. 1, No. 1. — P. 1–15.
- Gong H., Thavaneswaran A. and Liang Y.* Recent Developments in Option Pricing // Journal of Mathematical Finance. — 2011. — Vol. 1. — P. 63–71.
- Hand D., Jacka S.* Statistics in Finance // Arnold. — 1998.
- Henderson V.* Analytical comparisons of option prices in stochastic volatility models // Mathematical Finance. — 2005. — Vol. 5, No. 1. — P. 49–59.
- Jiang C., Ma Y. and An Y.* The Mean-Variance Model Revisited with a Cash Account // Journal of Mathematical Finance. — 2012. — Vol. 2. — P. 43–53.
- Karatzas I., Kou S.* On the pricing of contingent claims under constraints // Journal of Applied Probability. — 1996. — Vol. 6, No. 2. — P. 321–369.
- Markowitz H.* Portfolio selection // The Journal of Finance. — 1952. — Vol. 7, No. 1. — P. 77–91.
- McMillan L.* Options as a strategic investment: a comprehensive analysis of listed option strategies // New York Institute of Finance. — 1993.
- Merton R.* Theory of rational option pricing // The Bell Journal of Economics and Management Science. — 1973. — Vol. 4, No. 2. — P. 141–183.
- Samuelson P.* Rational theory of warrant pricing // Industrial Management Review. — 1965. — Vol. 6, No. 2. — P. 13–31.
- Samuelson P.* Mathematics of speculative price // SIAM Review. — 1973. — Vol. 15, No. 1. — P. 369–374.

- Samuelson P.* Proof that properly discounted present values of assets vibrate randomly // The Bell Journal of Economics and Management Science. — 1973a. — Vol. 4, No. 2. — P. 369–374.
- Shalit H. and Greenberg D.* Hedging with stock index options: a mean-extended Gini approach // Journal of Mathematical Finance. — 2013. — Vol. 3. — P. 119–129.
- Schweizer M.* Mean-variance hedging for general claims // The Annals of Applied Probability. — 1992. — Vol. 2, No. 1. — P. 171–179.
- Whittle P.* On the structure of proper Black-Scholes formulae // Journal of Applied Probability. — 2001. — Vol. 38(A). — P. 243–248.