

УДК: 519.6

## **Аналитическое решение и компьютерное моделирование задачи расчета параметров распределения Райса в предельных случаях большого и малого отношения сигнала к шуму**

**Т. В. Яковлева**

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки  
«Вычислительный центр им. А. А. Дородницына Российской академии наук»,  
Россия, 119333, г. Москва, ул. Вавилова, д. 40

E-mail: tan-ya@bk.ru

*Получено 18 ноября 2014 г.,  
после доработки 05 декабря 2014 г.*

В работе решается задача вычисления параметров случайного сигнала в условиях распределения Райса на основе принципа максимума правдоподобия в предельных случаях большого и малого значения отношения сигнала к шуму. Получены аналитические формулы для решения системы уравнений максимума правдоподобия для искоемых параметров сигнала и шума как для однопараметрического приближения, когда рассчитывается только один параметр задачи — величина сигнала, в предположении априорной известности второго параметра — дисперсии шума, так и для двухпараметрической задачи, когда оба параметра априорно неизвестны. Непосредственное вычисление искоемых параметров сигнала и шума по формулам позволяет избежать необходимости ресурсоемкого численного решения системы нелинейных уравнений и тем самым оптимизировать время компьютерной обработки сигналов и изображений. Представлены результаты компьютерного моделирования задачи, подтверждающие теоретические выводы. Задача является значимой для целей обработки райсовских данных, в частности, в системах магнитно-резонансной визуализации.

Ключевые слова: функция плотности вероятности, распределение Райса, метод максимума правдоподобия, выборки измерений, отношение сигнала к шуму

## Analytical solution and computer simulation of the task of Rician distribution's parameters in limiting cases of large and small values of signal-to-noise ratio

T. V. Yakovleva

*Institution of Russian Academy of Sciences Dorodnicyn Computing Centre of RAS,  
40, Vavilov st., Moscow, 119333, Russia*

**Abstract.** — The paper provides a solution of a task of calculating the parameters of a Rician distributed signal on the basis of the maximum likelihood principle in limiting cases of large and small values of the signal-to-noise ratio. The analytical formulas are obtained for the solution of the maximum likelihood equations' system for the required signal and noise parameters for both the one-parameter approximation, when only one parameter is being calculated on the assumption that the second one is known a-priori, and for the two-parameter task, when both parameters are a-priori unknown. The direct calculation of required signal and noise parameters by formulas allows escaping the necessity of time resource consuming numerical solving the nonlinear equations' s system and thus optimizing the duration of computer processing of signals and images. There are presented the results of computer simulation of a task confirming the theoretical conclusions. The task is meaningful for the purposes of Rician data processing, in particular, magnetic-resonance visualization.

Keywords: probability density function, Rice distribution, maximum likelihood method, samples of measurements, signal-to-noise ratio

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2015, vol. 7, no. 2, pp. 227–242 (Russian).

## 1. Введение

Распределение Райса [Rice, 1945] используется в задачах обработки случайных сигналов, когда измеряемой и анализируемой величиной является амплитуда выходного сигнала, представляющего собой сумму искомого исходного сигнала и случайного шума, образованного многими независимыми нормально распределенными слагаемыми с некоторой величиной дисперсии и нулевым средним значением. Очевидно, что амплитуда такого сигнала представляет собой некую случайную величину, причем статистический характер искажений амплитуды отличается от гауссовского, характерного для действительной и мнимой частей сигнала. Как известно, амплитуда, или огибающая, сигнала с гауссовскими действительной и мнимой частями подчиняется распределению Райса. Решаемая при обработке данных задача восстановления исходного, незашумленного сигнала состоит в определении априорно неизвестных параметров сигнала и шума на основе измеренных выборочных данных [Benedict, Soong, 1967; Carobbi, Cati, 2008; Sijbers, den Dekker, Scheunders, Dyck, 1998; Sijbers, den Dekker, 2004; Яковлева, 2014; Яковлева, Кульберг, 2014]. Многие авторы [Sijbers, den Dekker, Scheunders, Dyck, 1998; Sijbers, den Dekker, 2004] решают эту задачу в так называемом однопараметрическом приближении, когда параметр сигнала оценивается в предположении, что дисперсия шума является априорно известной величиной, что на практике никогда не реализуется. Ошибка в вычислении дисперсии неизбежно влечет за собой ошибку в оценке полезного сигнала. Поэтому весьма актуальной является задача точного определения величины параметра дисперсии шума для последующего точного определения средней величины сигнала.

В силу невыполнимости на практике предположения об априорной известности дисперсии шума актуальным является решение двухпараметрической задачи [Benedict, Soong, 1967; Carobbi, Cati, 2008; Яковлева, 2014; Яковлева, Кульберг, 2014], когда определяются оба априорно неизвестных параметра — средняя величина сигнала и дисперсия шума.

Нелинейные методы, используемые для анализа и фильтрации сигналов и изображений в условиях распределения Райса, часто основаны на использовании статистических подходов к решению задачи, среди которых наибольшее распространение получил метод максимума правдоподобия [Benedict, Soong, 1967; Carobbi, Cati, 2008; Sijbers, den Dekker, Scheunders, Dyck, 1998; Sijbers, den Dekker, 2004; Яковлева, 2014; Яковлева, Кульберг, 2014]. Теоретическое развитие метода максимума правдоподобия и обоснование его применимости для решения двухпараметрической задачи одновременной оценки сигнала и шума даны, в частности, в работах [Яковлева, 2014; Яковлева, Кульберг, 2014; Yakovleva, Kulberg, 2013]: получены уравнения максимума правдоподобия, численное решение которых позволяет рассчитать искомые параметры задачи. Однако необходимость численного решения уравнений влечет за собой определенные требования к вычислительным ресурсам. С другой стороны, как показал проведенный математический анализ задачи, в предельных случаях большой и малой величины отношения сигнала к шуму могут быть получены аналитические формулы, которые позволяют непосредственно рассчитать искомые параметры на основе данных выборок измерений, тем самым избегая необходимости численного решения сложных нелинейных уравнений, что означает существенное сокращение времени обработки сигнала и поэтому имеет большое значение для практического применения аналитического метода.

## 2. Постановка задачи. Исходные уравнения

Как указывалось выше, величиной, подчиняющейся распределению Райса, является измеряемая амплитуда выходного сигнала  $x$ , полученного сложением исходного сигнала и случайного шума, который, в свою очередь, образуется суммированием большого числа независимых компонент. Обозначим действительную и мнимую части выходного сигнала как  $x_{\text{Re}}$  и  $x_{\text{Im}}$ . Величины  $x_{\text{Re}}$  и  $x_{\text{Im}}$  являются случайными, независимыми и имеют гауссовское распределение

с одинаковыми дисперсиями и ненулевыми математическими ожиданиями. В качестве примера райсовского сигнала может служить сигнал магнитно-резонансного изображения. Тогда амплитуда комплексного сигнала  $x = \sqrt{x_{\text{Re}}^2 + x_{\text{Im}}^2}$  формирует изучаемое магнитно-резонансное изображение. Для параметров случайного сигнала будем использовать следующие обозначения:  $\nu$  — амплитуда исходного сигнала, т. е. сигнала в отсутствии гауссовского шума;  $\sigma^2$  — дисперсия гауссовского шума, искажающего сигнал. Величина  $\nu/\sigma$  характеризует отношение сигнала к шуму. Тогда амплитуда  $x$  сигнала имеет распределение Райса, плотность вероятности которого определяется формулой

$$P(x|\nu, \sigma^2) = \frac{x}{\sigma^2} \cdot \exp\left(-\frac{x^2 + \nu^2}{2\sigma^2}\right) \cdot I_0\left(\frac{x\nu}{\sigma^2}\right). \quad (1)$$

Здесь и ниже будем использовать следующие обозначения:

$I_\alpha(z)$  — модифицированная функция Бесселя первого рода (или функция Инфельда) порядка  $\alpha$ ;  $x_i$  — результат  $i$ -го измерения сигнала в выборке, т. е. величина  $i$ -го элемента выборки;  $n$  — количество элементов в выборке (длина выборки). Для обозначения различных видов усреднения по выборке будем использовать угловые скобки:  $\langle x \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ ;

$\langle x^2 \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2$ ; ...,  $\langle x^k \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^k$ . Тогда функция совместной плотности вероятности событий, состоящих в том, что результатом  $i$ -того измерения является величина  $x_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ), выражается как произведение функций плотности вероятности для каждого измерения из данной выборки:  $L(\vec{x}|\nu, \sigma^2) = \prod_{i=1}^n P(x_i|\nu, \sigma^2)$ , где функция  $P(x_i|\nu, \sigma^2)$  определяется выражением (1), вектор

выборки  $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n)$  —  $n$ -мерный вектор, компоненты которого определяются измеренными в выборках значениями анализируемой величины  $x$ . Функцию  $L(\vec{x}|\nu, \sigma^2)$  называют также

функцией правдоподобия. При известных данных выборки, полученных в результате измерений, эта функция является функцией неизвестных статистических параметров  $\nu$  и  $\sigma^2$ . Метод максимума правдоподобия состоит в определении тех значений параметров  $\nu$  и  $\sigma^2$ , которые максимизируют функцию правдоподобия  $L(\vec{x}|\nu, \sigma^2)$ , или, что эквивалентно, максимизируют ее логарифм.

Система уравнений максимума правдоподобия для определения неизвестных статистических параметров  $\nu$  и  $\sigma^2$  получается приравнованием нулю частных производных логарифмической функции правдоподобия по обоим искомым параметрам сигнала и имеет следующий вид [Яковлева, 2014; Яковлева, Кульберг, 2014]:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \nu} \ln L(\vec{x}|\nu, \sigma^2) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial \sigma^2} \ln L(\vec{x}|\nu, \sigma^2) = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Как показывает математический анализ задачи [Яковлева, 2014], уравнения для искомым параметров задачи  $\nu$  и  $\sigma^2$  и, следовательно, их решения зависят от поведения функции  $\tilde{I}(z) = \frac{I_1(z)}{I_0(z)}$ , являющейся отношением модифицированных функций Бесселя первого рода

первого и нулевого порядков. Тогда система уравнений максимума правдоподобия для  $\nu$  и  $\sigma^2$  может быть представлена в следующем виде [Яковлева, 2014; Яковлева, Кульберг, 2014]:

$$\begin{cases} \nu - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \cdot \tilde{I}\left(\frac{x_i \nu}{\sigma^2}\right) = 0, \\ \sigma^2 - \frac{1}{2 \cdot n} \sum_{i=1}^n (x_i^2 + \nu^2) + \frac{\nu}{n} \sum_{i=1}^n x_i \cdot \tilde{I}\left(\frac{x_i \nu}{\sigma^2}\right) = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Решение системы уравнений (3) максимума правдоподобия позволяет определить искомые параметры  $\nu$  и  $\sigma^2$  анализируемого сигнала на основании данных, полученных в выборке  $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n)$  из  $n$  измерений величины сигнала  $x_1, \dots, x_n$ . Другими словами, решение системы уравнений (3) определяет искомое решение двухпараметрической задачи. Случай однопараметрического приближения означает, что величина  $\sigma^2$  является априорно известной. Тогда второй параметр задачи — средняя величина сигнала  $\nu$  — определяется посредством решения только первого уравнения системы (3), так как именно это уравнение получено дифференцированием функции правдоподобия по искомому параметру  $\nu$ . В результате изучения свойств решения задачи доказаны существование и единственность решения системы (3) [Яковлева, 2014; Яковлева, Кульберг, 2014]. В нижеследующих разделах на основе уравнений (3) получены аналитические формулы для искомых параметров  $\nu$  и  $\sigma^2$  в предельных случаях большой и малой величины отношения сигнала к шуму.

### 3. Однопараметрическая задача

В однопараметрическом приближении, т. е. в предположении, что дисперсия шума является априори известной величиной, второй статистический параметр задачи — величина сигнала  $\nu$  — определяется посредством решения первого уравнения системы (3), т. е. уравнение для решения однопараметрической задачи имеет вид

$$\nu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \cdot \tilde{I}\left(\frac{x_i \nu}{\sigma^2}\right). \quad (4)$$

Свойства решения рассматриваемых уравнений (3), (4) определяются свойствами функции  $\tilde{I}(z) = \frac{I_1(z)}{I_0(z)}$ . Для последующего анализа нам понадобятся формулы разложения данной функции в ряд при малом значении аргумента и асимптотическое представление данной функции. Эти формулы могут быть получены с учетом свойств модифицированных функций Бесселя первого рода нулевого и первого порядков [Абрамов, Стиган, 1979]. Полученная в результате таких расчетов формула разложения функции  $\tilde{I}(z) = \frac{I_1(z)}{I_0(z)}$  при малом значении аргумента имеет вид

$$\tilde{I}(z) \underset{z \rightarrow 0}{\approx} \frac{z}{2} \cdot \left(1 - \frac{z^2}{8} + O(z^4)\right). \quad (5)$$

Асимптотическое поведение функции  $\tilde{I}(z) = \frac{I_1(z)}{I_0(z)}$ , как можно показать, определяется выражением

$$\tilde{I}(z) \underset{z \gg 1}{\sim} 1 - \frac{1}{2z} - \frac{1}{8z^2} + O\left(\frac{1}{z^3}\right). \quad (6)$$

Рассмотрим предельный случай очень малой величины отношения сигнала к шуму, т. е. случай, когда выполняется условие  $\frac{\nu}{\sigma} \ll 1$ . В этом случае, используя формулу (5), нетрудно получить из (4) следующее уравнение для определения параметра  $\nu$ :

$$\nu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \cdot \frac{x_i \nu}{2\sigma^2} \left( 1 - \frac{x_i^2 \nu^2}{8\sigma^4} \right). \quad (7)$$

Поскольку в данном разделе работы ставится цель получить аналитические формулы для искомых параметров, то, очевидно, мы рассматриваем только нетривиальные решения  $\nu \neq 0$  (тривиальное решение и условия, в которых оно реализуется, обсуждались в [Яковлева, 2014]). Поэтому, разделив обе части уравнения (7) на величину  $\nu \neq 0$ , получим для определения  $\nu$  следующее квадратное уравнение:

$$\frac{\nu^2 \cdot \langle x^4 \rangle}{16 \cdot \sigma^6} = \frac{\langle x^2 \rangle}{2 \cdot \sigma^2} - 1. \quad (8)$$

В данном уравнении угловыми скобками обозначено усреднение по выборке соответствующей величины согласно введенным выше обозначениям. Из уравнения (8) получаем аналитическое выражение для искомого параметра  $\nu$  в предельном случае очень малого отношения сигнала к шуму (очевидно, что физический смысл имеют только неотрицательные значения  $\nu$ ):

$$\nu \underset{\nu/\sigma \ll 1}{\simeq} \frac{4 \cdot \sigma^3}{\sqrt{\langle x^4 \rangle}} \cdot \sqrt{\frac{\langle x^2 \rangle}{2 \cdot \sigma^2} - 1} = \frac{2 \cdot \sigma}{\sqrt{\frac{\langle x^4 \rangle}{4 \cdot \sigma^4}}} \cdot \sqrt{\frac{\langle x^2 \rangle}{2 \cdot \sigma^2} - 1}. \quad (9)$$

Можно показать, что при достаточно большой длине выборки выражение под корнем в формуле (9) всегда неотрицательно.

Таким образом, в однопараметрическом приближении формула (9) позволяет в предельном случае малого отношения сигнала к шуму просто рассчитать среднюю величину исходного сигнала на основе данных выборок измерений и априори известной величины дисперсии, не прибегая к численному решению уравнения (4). Физический смысл формулы (9) весьма понятен. Изменение величины шума, воздействующего на исходный сигнал и определяемого дисперсией  $\sigma^2$ , влечет за собой изменение средних величин его второй и четвертой степеней.

С учетом того, что при малом значении величины отношения сигнала к шуму величин  $\frac{\langle x^2 \rangle}{\sigma^2}$

и  $\frac{\langle x^4 \rangle}{\sigma^4}$  меняются медленно с изменением величины дисперсии  $\sigma^2$ , из формулы (9) получаем естественный, физически понятный вывод: при оценивании параметра  $\nu$  на основе выборок измерений при  $\frac{\nu}{\sigma} \ll 1$  в приближении а priori известной дисперсии искомая величина параметра  $\nu$  с максимальным правдоподобием изменяется пропорционально величине стандартного отклонения  $\sigma$ , которая, вообще говоря, может меняться в зависимости, например, от внешних условий.

Рассмотрим теперь задачу в однопараметрическом приближении при очень большом отношении сигнала к шуму, т. е. противоположный рассмотренному выше предельный случай  $\frac{\nu}{\sigma} \gg 1$ . В этом случае, используя асимптотическую формулу (6) для введенной функции

$\tilde{I}(z) = \frac{I_1(z)}{I_0(z)}$ , из уравнения (4) нетрудно получить следующую приближенную формулу для

расчета величины математического ожидания сигнала:

$$\nu \underset{\nu/\sigma \gg 1}{\simeq} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \langle x \rangle. \tag{10}$$

Формула (10) физически понятна, ведь очень большое отношение сигнала к шуму означает, что мы имеем дело с почти детерминированным сигналом. В этом случае, практически в отсутствие стохастичности процесса, расчет параметра  $\nu$ , представляющего собой математическое ожидание независимых действительной  $x_{\text{Re}}$  и мнимой  $x_{\text{Im}}$  частей измеряемого сигнала  $x = \sqrt{x_{\text{Re}}^2 + x_{\text{Im}}^2}$ , по формуле (10), как средней величины по выборке измерений сигнала  $x$  вполне закономерен.

#### 4. Двухпараметрическая задача

Рассмотрим теперь возможности аналитического расчета обоих статистических параметров для двухпараметрической задачи, т. е. в отсутствие предположения об априорной известности величины дисперсии.

В предельном случае очень малого значения отношения сигнала к шуму, т. е. при  $\frac{\nu}{\sigma} \ll 1$ , из второго уравнения системы (3) следует, что в этом случае выполняется также условие  $\frac{\nu^2}{\langle x^2 \rangle} \ll 1$ . Преобразуем уравнение для параметра  $\nu$  (первое из уравнений системы (3)), используя разложение в ряд по данному параметру  $\frac{\nu^2}{\langle x^2 \rangle} \ll 1$ . Для этого необходимо использовать

формулу для разложения в ряд функции  $\tilde{I}(z)$  при малых значениях аргумента  $z \ll 1$  с точностью до более высоких степеней аргумента  $z$ , чем в (6). Используя известные формулы разложения модифицированных функций Бесселя первого рода первого и нулевого порядка [Абрамовиц, Стиган, 1979], получим из (4)

$$\begin{aligned} \tilde{I}(z) &= \frac{I_1(z)}{I_0(z)} \underset{z \rightarrow 0}{\simeq} \frac{z/2 \left[ 1 + \frac{(z/2)^2}{2} + \frac{(z/2)^4}{12} + \dots \right]}{1 + \frac{(z/2)^2}{4} + \dots} = \\ &= \frac{z}{2} \left[ 1 - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{z}{2}\right)^2 + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{z}{2}\right)^4 + O(z^6) \right]. \end{aligned} \tag{11}$$

Таким образом, получаем для разложения в ряд функции  $\tilde{I}(z)$  следующее выражение:

$$\tilde{I}(z) \underset{z \rightarrow 0}{\simeq} \frac{z}{2} \left[ 1 - \frac{z^2}{8} + \frac{z^4}{48} + O(z^6) \right]. \tag{12}$$

Используя (12) при  $z = \frac{2x_i\nu}{\langle x^2 \rangle - \nu^2}$ , получим из первого уравнения системы (3) следующее соотношение:

$$\nu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \cdot \frac{x_i\nu}{(\langle x^2 \rangle - \nu^2)} \cdot \left[ 1 - \frac{4x_i^2\nu^2}{8(\langle x^2 \rangle - \nu^2)^2} + \frac{16x_i^4\nu^4}{48(\langle x^2 \rangle - \nu^2)^4} \right]. \tag{13}$$

Проводя несложные преобразования уравнения (13) и принимая во внимание, что нас интересуют только нетривиальные решения  $\nu \neq 0$ , получаем следующее уравнение для  $\nu$ :

$$\left(1 - \frac{\nu^2}{\langle x^2 \rangle}\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{\langle x^2 \rangle} \left[ 1 - \frac{x_i^2 \nu^2}{2 \langle x^2 \rangle^2 \left(1 - \frac{\nu^2}{\langle x^2 \rangle}\right)^2} + \frac{x_i^4 \nu^4}{3 \langle x^2 \rangle^4 \left(1 - \frac{\nu^2}{\langle x^2 \rangle}\right)^4} \right]. \quad (14)$$

Умножая обе части уравнения (14) на  $\left(1 - \frac{\nu^2}{\langle x^2 \rangle}\right)^4$ , вводя обозначение  $y = \frac{\nu^2}{\langle x^2 \rangle}$  и учитывая члены порядка  $y^2 = \frac{\nu^4}{\langle x^2 \rangle^2}$  ( $y \ll 1$ ) включительно, можно преобразовать уравнение (14) к следующему виду:

$$1 - 4y = (1 - 2y) \cdot \frac{\langle x^4 \rangle}{2 \langle x^2 \rangle^2} - y \cdot \frac{\langle x^6 \rangle}{3 \langle x^2 \rangle^3}. \quad (15)$$

В (15) используются введенные выше обозначения для средних величин  $\langle x^k \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^k$ . В результате несложных преобразований из (15) получаем следующее уравнение:

$$1 - \frac{\langle x^4 \rangle}{2 \langle x^2 \rangle^2} = y \cdot \left[ 4 - \frac{\langle x^4 \rangle}{2 \langle x^2 \rangle^2} - \frac{\langle x^6 \rangle}{3 \langle x^2 \rangle^3} \right]. \quad (16)$$

Принимая во внимание, что  $y = \frac{\nu^2}{\langle x^2 \rangle}$ , уравнение (16) можно представить в виде

$$\frac{\nu^2}{\langle x^2 \rangle} = \frac{\left(1 - \frac{\langle x^4 \rangle}{2 \langle x^2 \rangle^2}\right)}{\left(4 - \frac{\langle x^4 \rangle}{2 \langle x^2 \rangle^2} - \frac{\langle x^6 \rangle}{3 \langle x^2 \rangle^3}\right)}. \quad (17)$$

Из (17) получаем аналитическую формулу для параметра  $\nu$  двухпараметрической задачи в рассматриваемом предельном случае малого отношения сигнала к шуму  $\left(\frac{\nu}{\sigma} \ll 1\right)$ :

$$\nu \underset{\nu/\sigma \ll 1}{\approx} \sqrt{\langle x^2 \rangle \frac{\left(1 - \frac{\langle x^4 \rangle}{2 \langle x^2 \rangle^2}\right)}{\left(4 - \frac{\langle x^4 \rangle}{2 \langle x^2 \rangle^2} - \frac{\langle x^6 \rangle}{3 \langle x^2 \rangle^3}\right)}}. \quad (18)$$

С помощью несложных математических выкладок убедимся, что стоящие в скобках величины в числителе и знаменателе подкоренного выражения в формуле (18) являются неотрица-

тельными при достаточно больших значениях длины выборки  $n$ , по которой происходит усреднение сигнала. При этом речь идет о таких значениях длины выборки  $n$ , когда среднее значение по выборке, обозначаемое в (18) угловыми скобками, можно с требуемой точностью заменить на соответствующую величину момента, которая соответствует усреднению при бесконечно большой длине выборки. В этом случае мы можем в (18) пренебречь различием между средней величиной по выборке и соответствующим моментом и использовать для доказательства положительности величин в скобках в подкоренном выражении в (18) известные формулы для моментов райсовской случайной величины. Фактически это условие определяет требование к длине выборке, обеспечивающей применимость полученного аналитического решения.

Известны следующие соотношения для 2-го и 4-го моментов случайной величины, подчиняющейся распределению Райса [Park Jr., 1961]:

$$\begin{aligned} \overline{x^2} &= 2 \cdot \sigma^2 + \nu^2, \\ \overline{x^4} &= 8 \cdot \sigma^4 + 8 \cdot \sigma^2 \cdot \nu^2 + \nu^4. \end{aligned} \tag{19}$$

Полагая, что количество проводимых измерений в выборках достаточно велико и принимая во внимание данные соотношения, нетрудно убедиться, что в рассматриваемом нами случае малого отношения сигнала к шуму, т. е. при  $\frac{\nu}{\sigma} \ll 1$ , справедлива формула

$$\frac{\langle x^4 \rangle}{2 \cdot \langle x^2 \rangle^2} \underset{\nu/\sigma \ll 1}{\approx} 1 - \frac{1}{8} \cdot \frac{\nu^4}{\sigma^4} < 1. \tag{20}$$

Аналогичным образом нетрудно получить для величины  $\frac{\langle x^6 \rangle}{3 \langle x^2 \rangle^3}$ , стоящей в знаменателе в подкоренном выражении в (18), следующее выражение при  $\frac{\nu}{\sigma} \ll 1$ :

$$\frac{\langle x^6 \rangle}{3 \langle x^2 \rangle^3} \underset{\nu/\sigma \ll 1}{\approx} 2 - \frac{3}{8} \cdot \frac{\nu^4}{\sigma^4} < 2. \tag{21}$$

Таким образом, при достаточно больших значениях длины выборки  $n$ , по которой происходит усреднение сигнала, стоящие в скобках величины в числителе и знаменателе подкоренного выражения в формуле (20) являются положительными, причем величина знаменателя при этом больше 1.

Используя формулу (21), можно на основе данных измерений  $x$  Райсовского сигнала, в частности сигнала магнитно-резонансного изображения, рассчитать величину исходного, незашумленного сигнала без каких-либо априорных предположений относительно неизвестной величины дисперсии шума. Величину дисперсии, в свою очередь, можно рассчитать, используя второе уравнение системы (3). Подставляя в него формулу (18) для параметра  $\nu$ , получаем аналитическое решение для параметра дисперсии двухпараметрической задачи:

$$\sigma^2 = \frac{1}{2} \cdot (\langle x^2 \rangle - \nu^2) \underset{\nu/\sigma \ll 1}{\approx} \frac{\langle x^2 \rangle}{2} \cdot \frac{\left( 3 - \frac{\langle x^6 \rangle}{6 \langle x^2 \rangle^3} \right)}{\left( 4 - \frac{\langle x^4 \rangle}{2 \langle x^2 \rangle^2} - \frac{\langle x^6 \rangle}{3 \langle x^2 \rangle^3} \right)}. \tag{22}$$

Таким образом, в предельном случае малого значения отношения сигнала к шуму  $\frac{\nu}{\sigma} \ll 1$  на основе метода максимума правдоподобия нами получено аналитическое решение двухпараметрической задачи, т. е. задачи одновременного вычисления сигнала и шума. Это аналитическое решение определяется формулами (18) и (22). Как показали результаты численных экспериментов, из двух полученных аналитических формул для расчета сигнала и шума методом максимума правдоподобия практическое значение имеет именно формула (22), которая позволяет рассчитать величину стандартного отклонения (или дисперсии) случайного райсовского сигнала в условиях слабого сигнала, когда величина полезного сигнала значительно меньше величины шума.

В другом предельном случае, когда отношение сигнала к шуму очень велико,  $\frac{\nu}{\sigma} \gg 1$ , используя асимптотику функции  $\tilde{I}(z) = \frac{I_1(z)}{I_0(z)}$ , получим для расчета параметра  $\nu$  формулу, совпадающую с формулой (10) для однопараметрической задачи:  $\nu \underset{\nu/\sigma \gg 1}{\simeq} \langle x \rangle$ , что вполне объяснимо в силу того, что в данном случае распределение Райса переходит в распределение Гаусса, такое же, которому подчиняются составляющие  $x_{\text{Re}}$  и  $x_{\text{Im}}$  сигнала  $x = \sqrt{x_{\text{Re}}^2 + x_{\text{Im}}^2}$ , формирующего изучаемое магнитно-резонансное изображение, и при этом математическое ожидание сигнала  $\langle x \rangle$  совпадает с математическим ожиданием  $\nu$  его нормально распределенных действительной и мнимой составляющих  $x_{\text{Re}}$  и  $x_{\text{Im}}$ . Из второго уравнения системы (3) при этом получим для дисперсии  $\sigma^2$

$$\sigma^2 = \frac{1}{2}(\langle x^2 \rangle - \nu^2) \underset{\nu/\sigma \gg 1}{\simeq} \frac{1}{2}(\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2) = \frac{1}{2}\sigma_x^2, \quad (23)$$

где величина  $\sigma_x^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$  представляет собой дисперсию случайного сигнала  $x = \sqrt{x_{\text{Re}}^2 + x_{\text{Im}}^2}$ .

Таким образом, в предельном случае, когда отношение сигнала к шуму очень велико,  $\frac{\nu}{\sigma} \gg 1$ , дисперсия  $\sigma_x^2$  измеряемого сигнала  $x$  связана с искомым параметром дисперсии составляющих его компонент  $x_{\text{Re}}$  и  $x_{\text{Im}}$  соотношением  $\sigma_x^2 = 2\sigma^2$ .

Резюмируя вышеизложенное, можно сделать следующий вывод: при анализе и обработке случайных сигналов, подчиняющихся райсовской статистике, в частности сигналов магнитно-резонансного изображения, для определения истинной величины сигнала изображения, т. е. для эффективного подавления шума, следует рассчитывать параметры  $\nu$  и  $\sigma^2$  посредством численного решения системы уравнений (3), а в предельных случаях малых и больших отношений сигнала к шуму можно непосредственно использовать формулы (18) и (22) для расчета параметра математического ожидания  $\nu$  исходного сигнала и параметра стандартного отклонения  $\sigma$  (или дисперсии  $\sigma^2$ ).

## 5. Расчет дисперсии сигнала изображения в случае распределения Релея

В данном разделе рассмотрим предельный случай, соответствующий наличию случайного шума в отсутствие полезного сигнала. При этом распределении Райса переходит в распределение Релея. В этом случае математическое ожидание исходного сигнала, формирующего изо-

бражение, равно нулю:  $\nu = 0$ , и в задаче остается только один неизвестный параметр — дисперсия  $\sigma^2$ . Применение метода максимума правдоподобия в этом случае позволяет определить дисперсию шума на основе данных выборки измерений. Мы имеем дело с однопараметрической задачей, но в отличие от однопараметрической задачи, рассмотренной выше, когда искомым параметром является математическое ожидание исходного сигнала  $\nu$ , определяемого в предположении а priori известной величины дисперсии шума  $\sigma^2$ , в данном разделе мы рассматриваем задачу, в которой искомым неизвестным параметром является как раз дисперсия  $\sigma^2$ , которая, вообще говоря, может быть переменной величиной, т. е. меняется при переходе от одного участка изображения к другому. При этом полезный сигнал  $\nu$  является пренебрежимо малым.

В данном случае амплитуда  $x$  сигнала имеет распределение Релея, плотность вероятности  $P_R$  которого определяется следующей формулой:

$$P_R(x|\sigma^2) = \frac{x}{\sigma^2} \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right). \quad (24)$$

Рассмотрим выборку из  $n$  измерений величины амплитуды сигнала  $x$ . Тогда функция правдоподобия, т. е. функция совместной плотности вероятности событий, состоящих в том, что результатом  $i$ -того измерения является величина  $x_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ), выражается как произведение функций плотности вероятности для каждого измерения из данной выборки, характеризуемой введенным выше вектором выборки  $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n)$ :

$$L_R(\vec{x}|\sigma^2) = \prod_{i=1}^n P_R(x_i|\sigma^2) \cdot \frac{1}{2}, \quad (25)$$

где функция  $P_R(x_i|\sigma^2)$  определяется выражением (24). При известных данных выборок, полученных в результате измерений, это функция одного неизвестного статистического параметра задачи — параметра дисперсии  $\sigma^2$ . Метод максимального правдоподобия, как известно, состоит в определении тех значений искомого статистического параметра, которые максимизируют функцию правдоподобия (25), или, что эквивалентно, ее логарифм. Логарифмическая функция правдоподобия для распределения Релея имеет вид

$$\ln L_R(\vec{x}|\sigma^2) = \sum_{i=1}^n \ln P_R(x_i|\sigma^2) = \sum_{i=1}^n \left\{ \ln x_i - \ln \sigma^2 - \frac{x_i^2}{2 \cdot \sigma^2} \right\}. \quad (26)$$

Уравнение максимума правдоподобия для искомого параметра  $\sigma^2$  имеет вид

$$\frac{d}{d\sigma^2} \ln L_R(\vec{x}|\sigma^2) = 0. \quad (27)$$

Подставляя (26) в (27) и производя несложные преобразования, получаем

$$\frac{n}{\sigma^2} = \frac{1}{2(\sigma^2)^2} \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2. \quad (28)$$

Таким образом, решение уравнения правдоподобия для параметра дисперсии  $\sigma^2$  в предельном случае распределения Релея имеет вид

$$\sigma^2 = \frac{1}{2} \langle x^2 \rangle. \quad (29)$$

Принимая во внимание, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle x^2 \rangle = \overline{x^2}$ , нетрудно видеть, что по мере увеличения числа измерений в выборке, т. е. по мере увеличения точности определения дисперсии  $\sigma^2$ , выражение (29) переходит в выражение  $\sigma^2 = \frac{1}{2} \overline{x^2}$ , что согласуется с известной формулой для распределения Релея.

## 6. Результаты численных экспериментов

В данном разделе приведены результаты вычислений искомых параметров по аналитическим формулам, полученные при компьютерном моделировании задачи. При этом данные выборок измерений генерировались датчиком случайных чисел с распределением Райса для исходно заданных значений параметров  $\nu$  и  $\sigma$ .

На рисунке 1 представлены графики, иллюстрирующие точность расчетов неизвестной величины стандартного отклонения анализируемого сигнала, а именно: данные графики отображают расчетные значения для параметра стандартного отклонения  $\sigma_{\text{calc}}$ , вычисленные по формуле (22), полученной методом максимума правдоподобия в условиях малой величины отношения сигнала к шуму  $\frac{\nu}{\sigma} \ll 1$  (пунктирная линия), и по формуле (29), полученной для распределения Рэлея, т. е. в условиях отсутствия полезного сигнала ( $\nu = 0$ ) (сплошная ломаная линия), в зависимости от исходно заданной реальной величины этого параметра, которая отображается на графике тонкой прямой линией. Как видно из рисунка 1, точность расчетов стандартного отклонения (или дисперсии) по формулам (22) и (29) практически не отличается, что вполне ожидаемо в условиях рассматриваемого приближения  $\frac{\nu}{\sigma} \ll 1$ . Представленные графики соответствуют величине параметра сигнала  $\nu = 4$  (левая колонка) и  $\nu = 1.6$  (правая колонка), в то время как значение параметра  $\sigma$  меняется в диапазоне от 16 до 50, при этом на оси абсцисс графиков указаны номера точек отсчета исходно заданного параметра стандартного отклонения. Численные эксперименты производились при различных значениях длины выборки:  $n = 8$  — верхний ряд графиков,  $n = 32$  — средний ряд,  $n = 128$  — нижний ряд графиков.

Из приведенных на рисунке 1 графиков следует, что точность расчетов повышается с увеличением длины выборки. Более высокая точность расчета, иллюстрируемая графиками в правой колонке, обусловлена тем, что для них условие  $\frac{\nu}{\sigma} \ll 1$  выполняется лучше, обеспечивая тем самым более высокую точность расчетов по аналитическим формулам.

В работе были проведены численные эксперименты, результаты которых позволили сравнить точность расчета искомого параметра  $\sigma$  по приближенным формулам аналитического решения задачи и путем точного численного решения уравнений двухпараметрической задачи. На рисунке 2 представлены графики, иллюстрирующие точность расчетов величины стандартного отклонения анализируемого сигнала  $\sigma_{\text{calc}}$ , вычисленные по формуле (22), полученной методом максимума правдоподобия в условиях малой величины отношения сигнала к шуму  $\frac{\nu}{\sigma} \ll 1$  (пунктирная линия), и путем численного решения исходной системы уравнений (3). При этом в численных экспериментах, результаты которых представлены на рисунке 2, величина параметра  $\nu$  изменялась в диапазоне от 0 до 3 (по оси абсцисс отложены точки отсчета данного параметра), а исходно заданная величина параметра  $\sigma$  выбиралась равной  $\sigma = 25$ . Численные эксперименты производились при различных значениях длины выборки:  $n = 8$  — верхний график,  $n = 32$  — средний график,  $n = 128$  — нижний график.

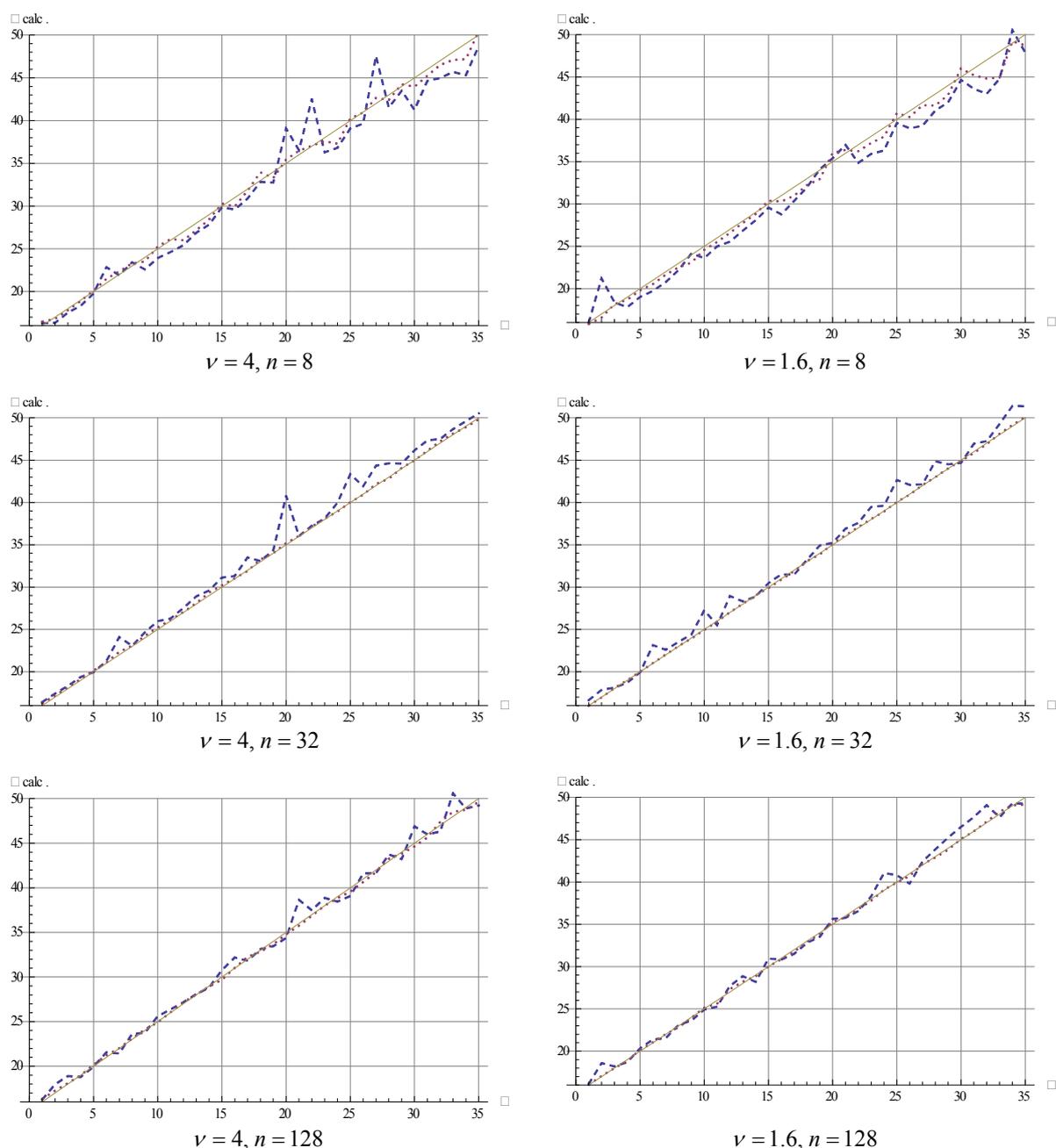


Рис. 1. Расчетные значения для параметра стандартного отклонения  $\sigma_{\text{calc}}$ , вычисленные по формуле (22) (пунктирная линия) и по формуле (29) (точечная линия) в зависимости от исходно заданной реальной величины этого параметра (тонкая прямая линия) для различных длин выборки

Как следует из графических результатов, представленных на рисунке 2, вычисление значения искомого параметра по формуле обеспечивает точность, близкую к точности непосредственного численного решения исходных уравнений задачи. Однако при этом расчеты по аналитическим формулам позволяют существенно сократить необходимые для решения задачи вычислительные ресурсы. Вместе с тем следует отметить, что разброс значений искомого параметра, рассчитанных путем численного решения уравнений, уменьшается с ростом длины выборки гораздо заметнее, чем при расчете этого параметра по аналитическим формулам.

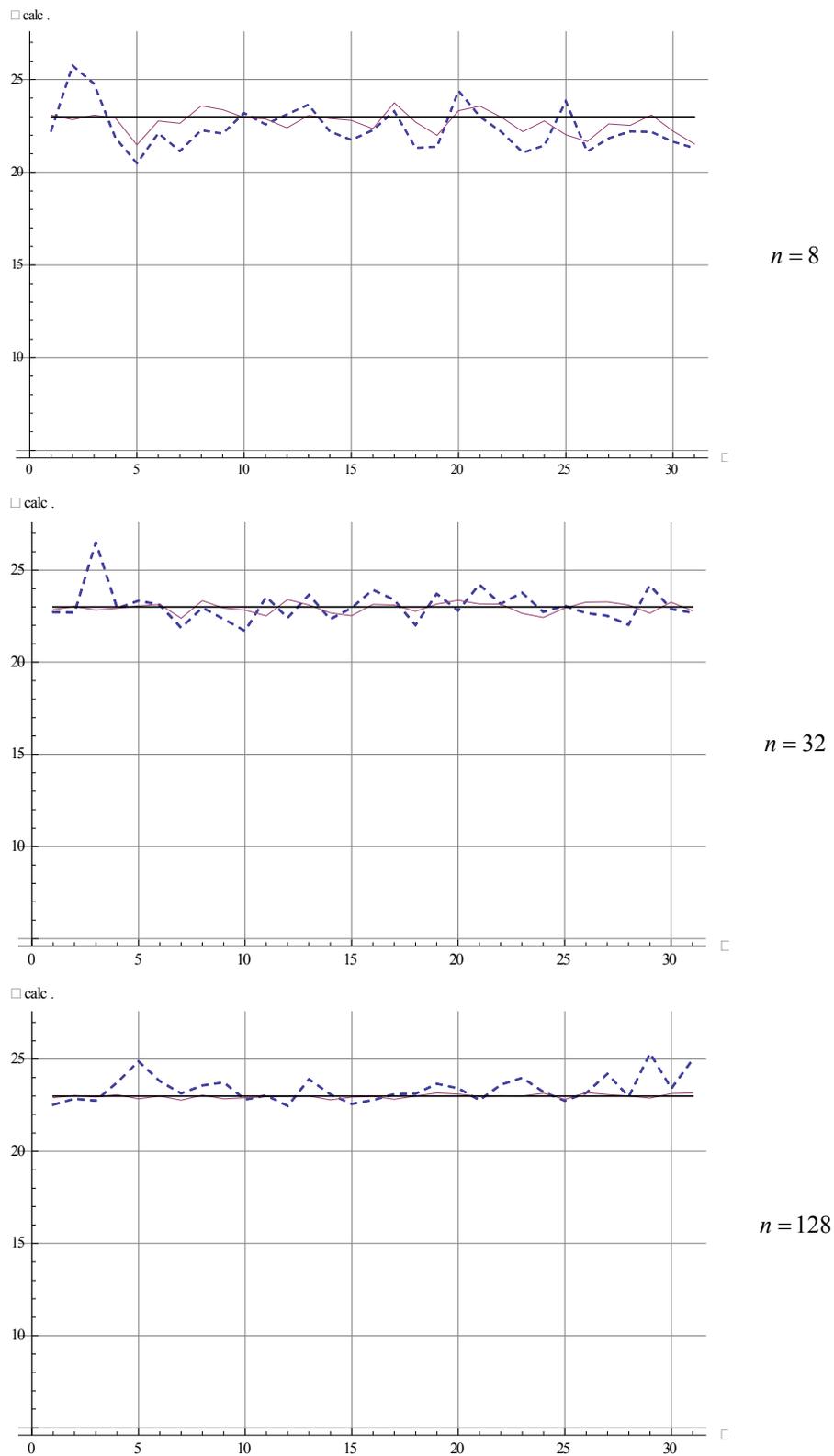


Рис. 2. Расчетные значения для параметра стандартного отклонения  $\sigma_{calc}$ , вычисленные по формуле (22) (пунктирная линия) и путем численного решения системы уравнений (3) (тонкая ломаная линия) в зависимости от исходно заданной величины сигнала  $\nu$  при различных длинах выборки. Тонкая горизонтальная прямая линия отображает исходно заданное значение  $\sigma = 23$

На рисунке 3 представлены графические данные для расчетных значений величины стандартного отклонения, вычисленной по формуле (22) (пунктирная линия) и по формуле (29) (точечная линия), в зависимости от реальной величины параметра сигнала  $\nu$  при фиксированной величине исходно заданного значения параметра  $\sigma$  (тонкая горизонтальная линия  $\sigma = \text{const}$ ). При этом графики на рисунке 3, *a* соответствуют  $\sigma = 16$ , а на рисунке 3, *б* —  $\sigma = 50$ . Параметр  $\nu$  на обоих графиках изменяется от 1 до 10. Из представленных графиков следует, что с ростом значения параметра сигнала  $\nu$  (при перемещении слева направо вдоль графиков) точность расчета параметра  $\sigma$  по обеим формулам падает, причем обе формулы дают завышенное значение величины стандартного отклонения. Это объясняется тем, что с ростом величины  $\nu$  пренебрежение ею становится все менее обоснованным и ее вклад в среднюю величину сигнала «переносится» на величину стандартного отклонения, завышая последнюю по сравнению с ее реальным значением.

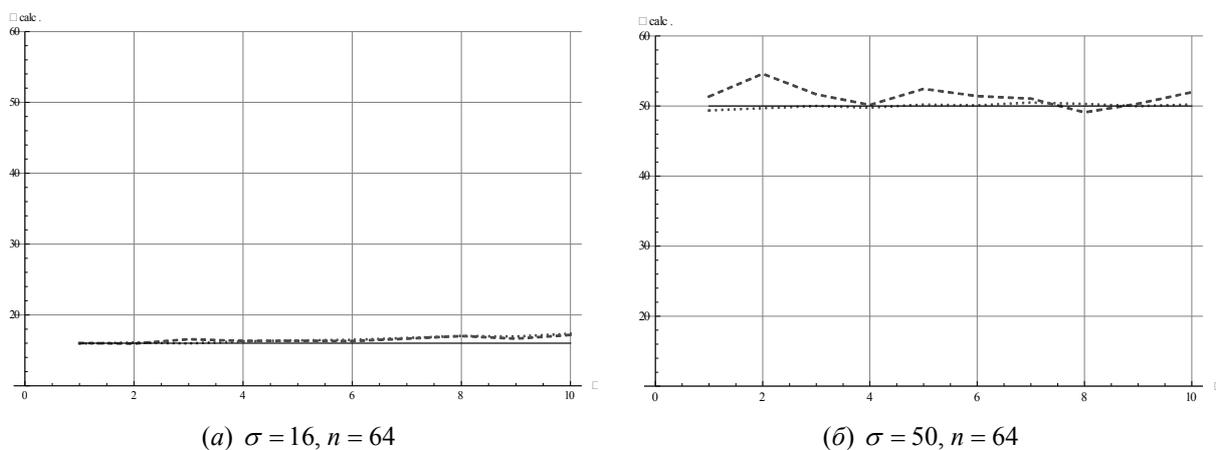


Рис. 3. Графики расчетных значений величины стандартного отклонения, вычисленной по формуле (22) (пунктирная линия) и по формуле (29) (точечная линия), в зависимости от реальной величины параметра сигнала  $\nu$  при фиксированной величине исходно заданного значения параметра  $\sigma$  (тонкая горизонтальная линия)

Из проведенного сопоставительного анализа точности расчетов параметра дисперсии шума по формулам (22) и (29) можно сделать вывод о том, что в предельном случае очень слабого сигнала на фоне шума формулы (22) и (29) дают практически одинаковую точность расчета этого параметра.

## 7. Заключение

В работе получены формулы расчета искомых параметров случайного сигнала на основе данных выборки измерений для предельных случаев большой и малой величин отношения сигнала к шуму. Непосредственное вычисление искомых величин сигнала и шума по формулам позволяет избежать необходимости численного решения сложных нелинейных уравнений, что обеспечивает существенное сокращение времени обработки сигнала и поэтому имеет большое значение для практического применения аналитического метода. Анализ результатов численных экспериментов подтверждает возможность расчета величины стандартного отклонения случайного раисовского сигнала по полученным аналитическим формулам с достаточно высокой точностью в условиях слабого сигнала, когда величина полезного сигнала значительно меньше величины шума, чем подтверждается практическое значение полученных в работе результатов.

## Список литературы

- Абрамовиц М., Стиган И.* Справочник по специальным функциям. — М.: Наука, 1979.
- Яковлева Т. В.* Условия применимости статистической модели Райса и расчет параметров райсовского сигнала методом максимума правдоподобия // Компьютерные исследования и моделирование. — 2014. — Т. 6, № 1. — С. 13–25.
- Яковлева Т. В., Кульберг Н. С.* Особенности функции правдоподобия статистического распределения Райса // Доклады Академии наук. Математика. — 2014. — Т. 457, № 4. — С. 394–397.
- Benedict T. R., Soong T. T.* The joint estimation of signal and noise from the sum envelope // IEEE Trans. Inf. Theory. — Jul. 1967. — Vol. IT-13, no. 3. — P. 447–454.
- Carobbi C. F. M., Cati M.* The absolute maximum of the likelihood function of the Rice distribution: existence and uniqueness // IEEE Trans. on Instrumentation and Measurement. — April 2008. — Vol. 57, no. 4. — P. 682–689.
- Park J. H. Jr.* Moments of generalized Rayleigh distribution // Q. Appl. Math. — 1961. — Vol. 19, no. 1. — P. 45–49.
- Rice S. O.* Mathematical Analysis of Random Noise // Bell System Technical Journal. — 1945. — Vol. 24. — P. 46–156.
- Sijbers J., den Dekker A. J.* Maximum Likelihood estimation of signal amplitude and noise variance from MR data // Magn. Reson. — 2004. — Vol. 51, no. 3. — P. 586–594.
- Sijbers J., den Dekker A. J., Scheunders P., Dyck D. V.* Maximum-Likelihood Estimation of Rician Distribution Parameters // IEEE Transactions on Medical Imaging. — June 1998. — Vol. 17, no. 3. — P. 357–361.
- Yakovleva T. V., Kulberg N. S.* Noise and Signal Estimation in MRI: Two-Parametric Analysis of Rice-Distributed Data by Means of the Maximum Likelihood Approach // *American Journal of Theoretical and Applied Statistics*. — 2013. — Vol. 2, no. 3. — P. 67–79. — doi: 10.11648/j.ajtas.20130203.15.