

УДК: 539.31:517.928.7

Приближенная модель плоских статических задач нелинейной упругости

Б. А. Жуков¹, Н. А. Щукина^{2,а}

¹ Волгоградский государственный технический университет
Россия, 400005, г. Волгоград, пр-т им. Ленина, 28

² Московский государственный университет экономики, статистики и информатики (МЭСИ)
Россия, 119501, г. Москва, ул. Нежинская, 7

E-mail: ^а shchukinan@yandex.ru

Получено 1 апреля 2015 г.

Работа посвящена построению приближенной математической модели нелинейной теории упругости для плоской деформации. В качестве метода, реализующего символьные вычисления, применяется метод эффектов третьего порядка. Предложенная модель позволяет использовать методы линейной теории упругости для решения конкретных задач. Данный метод является пригодным для автоматического получения аналитических решений плоских задач нелинейной теории упругости о концентрации напряжений около отверстий на базе математического пакета Maple. На примере треугольного контура исследован нелинейный эффект зависимости коэффициента концентрации напряжений от уровня внешней нагрузки.

Ключевые слова: нелинейная теория упругости, эффекты третьего порядка, приближенная математическая модель, коэффициент концентрации напряжений

The approximate model of plane static problems of the nonlinear elasticity theory

B. A. Zhukov¹, N. A. Shchukina²

¹ Volgograd State Technical University, VSTU, 28 Lenin av., Volgograd, 400005, Russia

² Moscow State University of Economics, Statistics and Informatics, MSU of ESS, 7 Nezhinskaya str., Moscow, 119501, Russia

Abstract. — This article is dedicated to the construction of the approximate mathematical model of the nonlinear elasticity theory for plane strain state. The third order effects method applied to symbolic computing. There three boundary value problems for the first, the second and the third order effects has been obtained within this method, which gets ability to use well-elaborated methods of the linear elasticity theory for the solution of specific problems. This method can be applied for analytical solving of plane problems of nonlinear elasticity theory of stress concentration around holes in mathematical package Maple. Considered example of the triangular hole. The influence of external loads on the stress concentration factor.

Keywords: nonlinear elasticity theory, the third order effects, an approximate mathematical model, the stress concentration factor

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2015, vol. 7, no. 4, pp. 889–896 (Russian).

Введение

Нахождение аналитических решений задач нелинейной теории упругости в настоящее время представляет собой достаточно сложный процесс. Найденные точные решения для конкретных потенциалов энергии деформации гиперупругих материалов могут удовлетворительно совпадать с экспериментальными данными для одного вида деформированного состояния, но неудовлетворительно описывать другие деформированные состояния. В связи с этим возникает задача разработки такой приближенной модели нелинейной теории гиперупругости, которая одинаково удовлетворительно описывает различные напряженные состояния для средних уровней деформации и позволяет использовать для решения нелинейных задач методы линейной теории. Одним из методов, приводящих к решению задач линейной теории упругости неоднородных тел, служит метод возмущения, который сводит решение нелинейной задачи к решению ряда линейных задач, но уже однородных тел. Этот метод основан на разложении объектов, описывающих напряженно-деформированное состояние, в ряд по степеням малого параметра. Удерживая один, два или три члена этого разложения, получим решение в рамках эффектов первого, второго или третьего порядка. Для нахождения каждого члена разложения получается задача линейной теории упругости однородных тел, но с добавочными «внешними» поверхностными и объемными усилиями, которые зависят от решений в рамках эффектов предыдущих порядков. Для точного аналитического решения плоских задач при искривлении поверхности разработан мощный аппарат, использующий теорию функций комплексной переменной. Такой подход положен в основу создания данной приближенной модели нелинейной теории гиперупругости. Из-за громоздких вычислений разложение выше второго порядка практически не используется. Появление современных пакетов символьной математики позволяет написать программы, облегчающие манипулирование с громоздкими выражениями, описывающими эффекты третьего порядка при произвольном напряженно-деформированном состоянии. В качестве системы для реализации и автоматизации расчетов выбрана система Maple, которая содержит средства символьной математики и позволяет использовать мощные средства исследования дифференциальных уравнений и возможности визуализации результатов.

Математическая постановка задачи

В статических задачах предполагается, что эластомер является гиперупругим материалом, то есть существует потенциал энергии упругой деформации. Для изотропного несжимаемого материала функция удельной потенциальной энергии деформации (потенциал энергии деформации) имеет вид [Жуков, Щукина, 2010]

$$w = \frac{1}{6} \left\{ (3\mu + \mu_1) [I_1(\mathbf{G}) - 3] - \mu_1 [I_2(\mathbf{G}) - 3] + \frac{\mu_2 + \mu_1 - \mu}{8} [I_2(\mathbf{G}) - 3]^2 \right\},$$

где μ , μ_1 , μ_2 — константы, причем μ — модуль сдвига линейной теории, $I_k(\mathbf{G})$ — главные инварианты меры деформации Коши \mathbf{G} .

Ориентируем пространственную декартову систему координат так, чтобы вектор перемещения имел вид

$$\mathbf{U} = \mathbf{R} - \mathbf{r} = [X(x, y) - x] \mathbf{i} + [Y(x, y) - y] \mathbf{j},$$

где \mathbf{R} и \mathbf{r} — радиус-векторы точек в плоскости, ортогональной оси OZ , в текущей и отсчетной конфигурациях соответственно, (X, Y) — координаты точек в плоскости XOY в текущей конфигурации, а (x, y) — координаты тех же точек в отсчетной, последние принимаются в качестве материальных.

Ограничивая разложение для радиус-вектора частиц в текущей конфигурации \mathbf{R} до третьего порядка по малому параметру η , согласно работе [Жуков, 2001] получим представление

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} + \overset{s}{\nabla} f \eta + \left(\overset{s}{\nabla} f \cdot \overset{0}{\nabla} \overset{s}{\nabla} f + \overset{s}{\nabla} h \right) \frac{\eta^2}{2} + \left[\overset{s}{\nabla} f \cdot \overset{0}{\nabla} \left(\overset{s}{\nabla} f \cdot \overset{0}{\nabla} \overset{s}{\nabla} f + 3 \overset{s}{\nabla} h \right) + \overset{s}{\nabla} g \right] \frac{\eta^3}{6}. \quad (1)$$

Здесь $\overset{0}{\nabla} = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y}$ — оператор Гамильтона в базисе исходной конфигурации,

$\overset{s}{\nabla} = -\mathbf{i} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial x}$ — симплектический оператор. Дифференциальные операторы действуют только на первый множитель справа, не являющийся оператором. Здесь и далее точка означает скалярное произведение, знак «Т» — транспонирование.

Используя разложение (1), получим представления тензора напряжений Пиолы \mathbf{D} и тензора напряжений Коши $\mathbf{S} = \overset{0}{\nabla} \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{D}$ в рамках эффектов третьего порядка

$$\mathbf{D} = \boldsymbol{\sigma} \eta + \mathbf{D}_2 \eta^2 + \mathbf{D}_3 \eta^3 \text{ и } \mathbf{S} = \boldsymbol{\sigma} \eta + \mathbf{S}_2 \eta^2 + \mathbf{S}_3 \eta^3, \quad (2)$$

где $\boldsymbol{\sigma} = 2\mu[\boldsymbol{\varepsilon}_1 + p_1 \mathbf{E}]$, $\mathbf{D}_2 = 2\mu \left(\frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}_2 + (p_2 - I_1(\mathbf{B}) + \alpha \boldsymbol{\varepsilon}_1 \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_1) \mathbf{E} + \mathbf{B} + \mathbf{B}^T - p_1 \overset{s}{\nabla} \overset{0}{\nabla} f \right)$,

$$\mathbf{D}_3 = 2\mu \left[\frac{1}{6} \boldsymbol{\varepsilon}_3 + (p_3 - I_1(\mathbf{A}) - I_1(\mathbf{C}) + 2p_1 I_1(\mathbf{B}) + 4\alpha \boldsymbol{\varepsilon}_1 \cdot \mathbf{B} + \alpha \boldsymbol{\varepsilon}_1 \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_2) \mathbf{E} - \right. \\ \left. - p_2 \overset{s}{\nabla} \overset{0}{\nabla} f - p_1 \left(2\mathbf{B}^T + \frac{1}{2} \overset{s}{\nabla} \overset{0}{\nabla} h \right) + \mathbf{A} + \mathbf{A}^T + \mathbf{C} + \mathbf{C}^T + \alpha \boldsymbol{\varepsilon}_1 \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_1 \overset{0}{\nabla} \overset{s}{\nabla} f \right],$$

$$\mathbf{S}_2 = 2\mu \left(\frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}_2 + (p_2 - I_1(\mathbf{B}) + \alpha \boldsymbol{\varepsilon}_1 \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_1) \mathbf{E} + \overset{s}{\nabla} \overset{0}{\nabla} f \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_1 + \mathbf{B} + \mathbf{B}^T \right),$$

$$\mathbf{S}_3 = 2\mu \left[\frac{1}{6} \boldsymbol{\varepsilon}_3 + (p_3 - I_1(\mathbf{A}) - I_1(\mathbf{C}) + 2p_1 I_1(\mathbf{B}) + 4\alpha \boldsymbol{\varepsilon}_1 \cdot \mathbf{B} + \alpha \boldsymbol{\varepsilon}_1 \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_2) \mathbf{E} - I_1(\mathbf{B}) \overset{s}{\nabla} \overset{0}{\nabla} f - \right. \\ \left. - p_1 \overset{s}{\nabla} \overset{0}{\nabla} f \cdot \overset{s}{\nabla} \overset{0}{\nabla} f + \left(2\mathbf{B}^T + \frac{1}{2} \overset{s}{\nabla} \overset{0}{\nabla} h \right) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_1 + \overset{s}{\nabla} \overset{0}{\nabla} f \cdot \left(\mathbf{B} + \mathbf{B}^T + \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}_2 \right) + \mathbf{A} + \mathbf{A}^T + \mathbf{C} + \mathbf{C}^T + 2\alpha \boldsymbol{\varepsilon}_1 \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_1 \boldsymbol{\varepsilon}_1 \right],$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1 = \frac{1}{2} \left(\overset{0}{\nabla} \overset{s}{\nabla} f + \overset{s}{\nabla} \overset{0}{\nabla} f \right), \boldsymbol{\varepsilon}_2 = \frac{1}{2} \left(\overset{0}{\nabla} \overset{s}{\nabla} h + \overset{s}{\nabla} \overset{0}{\nabla} h \right), \boldsymbol{\varepsilon}_3 = \frac{1}{2} \left(\overset{0}{\nabla} \overset{s}{\nabla} g + \overset{s}{\nabla} \overset{0}{\nabla} g \right), \alpha = \frac{\mu_2 + \mu_1 - \mu}{12\mu},$$

$$p = \mu \left(-\frac{1}{2} + p_1 \eta + p_2 \eta^2 + p_3 \eta^3 \right)$$

— функция, связанная с гидростатическим давлением,

$$\mathbf{A} = \frac{1}{4} \overset{0}{\nabla} \left(\overset{s}{\nabla} f \cdot \overset{0}{\nabla} \overset{s}{\nabla} h \right) = \frac{1}{4} \left(\overset{0}{\nabla} \overset{s}{\nabla} f \cdot \overset{0}{\nabla} \overset{s}{\nabla} h + \overset{s}{\nabla} f \cdot \overset{0}{\nabla} \overset{0}{\nabla} \overset{s}{\nabla} h \right),$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{4} \overset{0}{\nabla} \left(\overset{s}{\nabla} f \cdot \overset{0}{\nabla} \overset{s}{\nabla} f \right) = \frac{1}{4} \left(\overset{0}{\nabla} \overset{s}{\nabla} f \cdot \overset{0}{\nabla} \overset{s}{\nabla} f + \overset{s}{\nabla} f \cdot \overset{0}{\nabla} \overset{0}{\nabla} \overset{s}{\nabla} f \right),$$

$$\mathbf{C} = \frac{1}{3} \overset{0}{\nabla} \left(\overset{s}{\nabla} f \cdot \mathbf{B} \right) = \frac{1}{3} \left(\overset{0}{\nabla} \overset{s}{\nabla} f \cdot \mathbf{B} + \overset{0}{\nabla} \mathbf{B}^T \cdot \overset{s}{\nabla} f \right).$$

Уравнения равновесия приводит к системе уравнений для эффектов первого, второго и третьего порядков соответственно:

$$2 \overset{0}{\nabla} p_1 + \overset{s}{\nabla} \Delta f = 0,$$

$$\begin{aligned} & \overset{0}{\nabla} (p_2 - I_1(\mathbf{B}) + \alpha \boldsymbol{\varepsilon}_1 \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_1) + \frac{1}{4} \overset{S}{\nabla} \Delta h + \frac{1}{2} \overset{S}{\nabla} \Delta f \cdot \overset{S}{\nabla} \overset{0}{\nabla} f + \overset{0}{\nabla} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{B}^T) = 0, \\ & \overset{0}{\nabla} (p_3 - I_1(\mathbf{A}) - I_1(\mathbf{C}) + 2p_1 I_1(\mathbf{B}) + 4\alpha \boldsymbol{\varepsilon}_1 \cdot \mathbf{B} + \alpha \boldsymbol{\varepsilon}_1 \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_2) + \frac{1}{12} \overset{S}{\nabla} \Delta g - \overset{0}{\nabla} p_2 \cdot \overset{S}{\nabla} \overset{0}{\nabla} f + \\ & + \frac{1}{2} \overset{S}{\nabla} \Delta f \cdot \left(2\mathbf{B}^T + \frac{1}{2} \overset{S}{\nabla} \overset{0}{\nabla} h \right) - 2p_1 \overset{0}{\nabla} \cdot (\mathbf{B}^T) + \alpha \overset{0}{\nabla} \cdot \left[\boldsymbol{\varepsilon}_1 \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_1 \overset{0}{\nabla} \overset{S}{\nabla} f \right] + \overset{0}{\nabla} \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{A}^T + \mathbf{C} + \mathbf{C}^T) = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Условия интегрируемости приводят к следующим уравнениям:

$$\begin{aligned} & \Delta \Delta f = 0, \quad \Delta \Delta h = 0, \\ & \frac{1}{12} \Delta \Delta g = \overset{S}{\nabla} \overset{0}{\nabla} p_2 \cdot \overset{S}{\nabla} \overset{0}{\nabla} f - \overset{S}{\nabla} \overset{0}{\nabla} p_1 \cdot \left(2\mathbf{B}^T + \frac{1}{2} \overset{S}{\nabla} \overset{0}{\nabla} h \right) + 2 \overset{S}{\nabla} p_1 \overset{0}{\nabla} \cdot \mathbf{B}^T - \\ & - \overset{S}{\nabla} \overset{0}{\nabla} \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{C}) - \alpha \overset{S}{\nabla} \overset{0}{\nabla} \cdot \left[\boldsymbol{\varepsilon}_1 \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_1 \overset{0}{\nabla} \overset{S}{\nabla} f \right] \end{aligned} \quad (4)$$

Таким образом, функции $f(x, y)$ и $h(x, y)$ — бигармонические, а $g(x, y)$ представляет собой сумму бигармонической функции и некоторого частного решения дифференциального уравнения (4).

Обозначим через $\mathbf{f} = \mathbf{f}'\eta + \mathbf{f}''\eta^2 + \mathbf{f}'''\eta^3$ вектор плотности внешних сил, приложенный к деформированной боковой поверхности и рассчитанный на единицу площади этой поверхности. Тогда для эффектов первого, второго и третьего порядков силовые граничные условия в напряжениях получим в форме

$$\begin{aligned} & \mathbf{n} \cdot (\boldsymbol{\varepsilon}_1 + p_1 \mathbf{E}) = \mathbf{f}_1, \\ & \mathbf{n} \cdot \left(\frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}_2 + (p_2 - I_1(\mathbf{B}) + \alpha \boldsymbol{\varepsilon}_1 \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_1) \mathbf{E} \right) = \mathbf{f}_2 - \mathbf{n} \cdot \left(\mathbf{B} + \mathbf{B}^T - p_1 \overset{S}{\nabla} \overset{0}{\nabla} f \right), \\ & \mathbf{n} \cdot \left(\frac{1}{6} \boldsymbol{\varepsilon}_3 + (p_3 - I_1(\mathbf{A}) - I_1(\mathbf{C}) + 2p_1 I_1(\mathbf{B}) + 4\alpha \boldsymbol{\varepsilon}_1 \cdot \mathbf{B} + \alpha \boldsymbol{\varepsilon}_1 \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_2) \mathbf{E} \right) = \\ & = \mathbf{f}_3 + \mathbf{n} \cdot \left[p_2 \overset{S}{\nabla} \overset{0}{\nabla} f + p_1 \left(2\mathbf{B}^T + \frac{1}{2} \overset{S}{\nabla} \overset{0}{\nabla} h \right) - (\mathbf{A} + \mathbf{A}^T + \mathbf{C} + \mathbf{C}^T) - \alpha \boldsymbol{\varepsilon}_1 \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_1 \overset{0}{\nabla} \overset{S}{\nabla} f \right], \end{aligned} \quad (5)$$

где $\mathbf{f}_1 = \frac{\mathbf{f}'}{2\mu}$, $\mathbf{f}_2 = \frac{\mathbf{f}''}{2\mu} - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_1 \cdot \mathbf{n} \frac{\mathbf{f}'}{2\mu}$,

$$\mathbf{f}_3 = \frac{\mathbf{f}'''}{2\mu} - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_1 \cdot \mathbf{n} \frac{\mathbf{f}''}{2\mu} - \left[\mathbf{n} \cdot \left(2\boldsymbol{\varepsilon}_2 + \mathbf{B} + \mathbf{B}^T + \frac{1}{2} \overset{0}{\nabla} \overset{S}{\nabla} f \cdot \overset{S}{\nabla} \overset{0}{\nabla} f - 2\boldsymbol{\varepsilon}_1^2 \right) \cdot \mathbf{n} + \frac{1}{2} (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_1 \cdot \mathbf{n})^2 \right] \frac{\mathbf{f}'}{2\mu}.$$

Если плотность внешних сил $\mathbf{f} = \mathbf{f}'\eta + \mathbf{f}''\eta^2 + \mathbf{f}'''\eta^3$ задана в отсчетной конфигурации, а нагружение «мертвое», то $\mathbf{f}_1 = \frac{\mathbf{f}'}{2\mu}$, $\mathbf{f}_2 = \frac{\mathbf{f}''}{2\mu}$, $\mathbf{f}_3 = \frac{\mathbf{f}'''}{2\mu}$.

Таким образом, выражения (1)–(5) представляют приближенную нелинейную модель плоской деформации несжимаемого однородного изотропного материала в рамках разложения по степеням малого параметра до третьего порядка включительно.

Для областей произвольной формы необходимо рассмотреть комплексное представление перемещений и напряжений для эффектов первого и второго порядка. С помощью стандартной процедуры [Мухелишвили, 1966] граничные задачи линейной теории упругости сводятся к интегральным уравнениям теории функций комплексной переменной. Рассматриваются об-

ласти, которые можно конформно отобразить на внешность окружности единичного радиуса с центром в начале координат с помощью функции вида

$$z = \nu(\xi) = \xi + \sum_{k=0}^{k=n} \frac{a_k}{\xi^k}.$$

Для этих областей интегральные уравнения теории функций комплексного переменного приводятся к алгебраическим уравнениям с помощью интегралов типа Коши. Для эффектов первого и второго порядков искомые потенциалы аппроксимируются разложением в ряды Лорана, а коэффициенты находятся из условия удовлетворения граничным условиям на бесконечности и на контуре отверстия. На бесконечности с помощью предельного перехода получаем конечную систему линейных алгебраических уравнений для части коэффициентов разложения. Для нахождения оставшихся коэффициентов требуется вычисление интегралов типа Коши на контуре отверстия. На свободном от нагрузки контуре нормальные напряжения равны нулю, поэтому тангенциальные напряжения на контуре, потребные для вычисления коэффициента концентрации, вычисляются в виде инварианта $\sigma_{\tau\tau} = \sigma_{\tau\tau} + \sigma_{\eta\eta} = \sigma_{11} + \sigma_{22}$ тензора напряжений Коши.

Задача о концентрации напряжений около треугольного отверстия при равномерном растяжении на бесконечности в Maple

Для нахождения аналитического решения задач нелинейной теории упругости на базе математического пакета Maple создан комплекс программ, позволяющий проводить символьные вычисления. Алгоритм реализован в рамках эффектов второго порядка и позволяет находить выражение коэффициента концентрации напряжений для различных форм отверстия при различных видах деформации. Основная идея, положенная в основу создания специализированной библиотеки, состоит в том, что она не вычисляет объекты по готовым формулам (2)–(5), а находит разложения этих объектов, начиная с разложения вектора перемещения (1), автоматически удовлетворяющего условию несжимаемости. В созданной библиотеке программ все операции распространены на тензоры, компоненты которых являются рядами, до второго порядка включительно.

Без потери общности будем считать радиус отверстия равным единице. Контур отверстия свободен от напряжений. На бесконечности приложена равномерная радиальная нагрузка интенсивности $p = \mu\eta$.

Рассмотрим цилиндрическую систему координат $\{r, \varphi, z\}$ и введем единичный базис $\mathbf{e}_1 = \cos\varphi\mathbf{i} + \sin\varphi\mathbf{j}$, $\mathbf{e}_2 = -\sin\varphi\mathbf{i} + \cos\varphi\mathbf{j}$, $\mathbf{e}_3 = \mathbf{k}$.

Коэффициент концентрации напряжений в нелинейной теории, как и в классическом решении линейной теории, определяется как $k = \frac{S_{22}}{p} \Big|_{r=1}$, где S_{22} — тангенциальная компонента «плоской» части тензора истинных напряжений Коши $\mathbf{S} = S_{11}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 + S_{22}\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2$. Представление этой компоненты в рамках приближенной теории имеет вид $S_{22} = \sigma_{22}\eta + S_{22}''\eta^2$. Тогда разложение для коэффициента концентрации имеет вид:

$$k = \frac{S_{22}}{p} \Big|_{r=1} = \frac{\sigma_{22}\eta + S_{22}''\eta^2}{\mu\eta} \Big|_{r=1} = \frac{\sigma_{22}}{\mu} \Big|_{r=1} + \frac{S_{22}''}{\mu} \Big|_{r=1} \eta = k_1 + k_2\eta.$$

Конформное отображение внешности треугольника на внешность круга $|\xi| \geq 1$ задается формулой $z = \xi + \frac{1}{3\xi^2} + \frac{1}{45\xi^5}$. На бесконечности приложена равномерная нагрузка интенсивно-

сти $p = \mu\eta$, где η — малый параметр. Обозначим разложение вектора внешних сил $\mathbf{f} = \mathbf{f}'\eta + \mathbf{f}''\eta^2$. Тогда на бесконечности на площадках с нормальным вектором \mathbf{i} имеем компоненты разложения $\mathbf{f}' = \mu\mathbf{i}$, $\mathbf{f}'' = 0$, а на площадке с нормальным вектором \mathbf{j} — компоненты $\mathbf{f}' = \mu\mathbf{j}$, $\mathbf{f}'' = 0$.

Параметрические уравнения контура отверстия имеют вид:

$$x = \frac{2}{45} \cos \varphi (8 \cos^4 \varphi - 10 \cos^2 \varphi + 15 \cos \varphi + 25) - \frac{1}{3},$$

$$y = -\frac{2}{45} \sin \varphi (8 \cos^4 \varphi - 6 \cos^2 \varphi + 15 \cos \varphi - 22).$$

Вершинам этого треугольника соответствуют значения параметра $\varphi = 0$ и $\varphi = \pm \frac{2\pi}{3}$. Для линейного приближения наибольшее значение относительного инварианта $\frac{S}{p}$ тензора напряжений Коши достигается в вершинах треугольника и равно $k_1 = \frac{712}{43}$. Для квадратичного приближения разложение коэффициента концентрации напряжений по малому параметру $\eta = \frac{p}{\mu}$ принимает вид $k = \frac{712}{43} - \frac{127669}{7396} \eta$. Значение тангенциальных напряжений зависит от величины интенсивности приложенной внешней нагрузки p . При этом при всех значениях параметра η наблюдаем эффект раздвоения максимума относительно вершин треугольного отверстия, а в самих вершинах треугольника достигается минимум.

Графики распределения относительных тангенциальных напряжений на внутреннем контуре отверстия, свободном от нагрузок, вычисленных в рамках эффектов первого и второго порядков при различных значениях параметра η , изображены на рисунках 1–3. Тонкая линия соответствует решению, полученному в рамках линейной теории, толстая линия соответствует решению в рамках эффектов второго порядка.

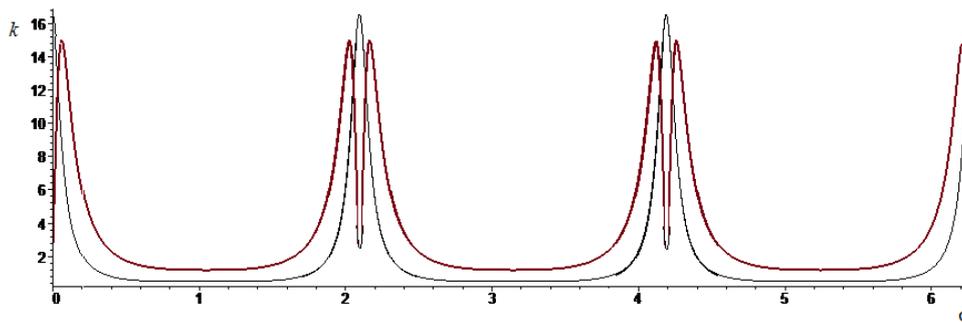


Рис. 1. Распределение относительных тангенциальных напряжений на контуре отверстия (развертка) при $\eta = \frac{p}{\mu} = 0.8$

Как видно из графиков, в квадратичном приближении при различных значениях параметра η максимум величины коэффициента концентрации напряжений достигается при различных значениях φ . При этом величина максимального значения $k = \frac{S}{p}$, по сравнению с класси-

ческим решением линейной теории, уменьшается. Ниже представлена таблица максимального значения коэффициента концентрации напряжений на контуре отверстий и соответствующие значения параметра φ в зависимости от величины внешней нагрузки p .

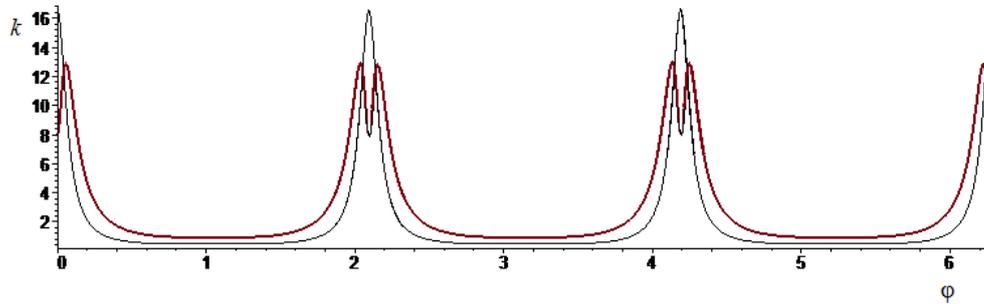


Рис. 2. Распределение относительных тангенциальных напряжений на контуре отверстия (развертка) при $\eta = \frac{P}{\mu} = 0.5$

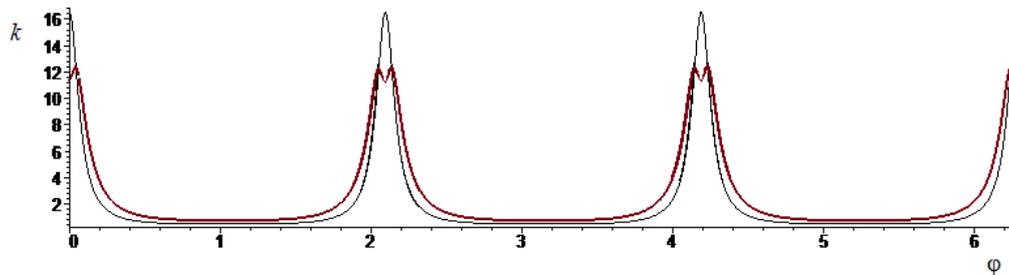


Рис. 3. Распределение относительных тангенциальных напряжений на контуре отверстия (развертка) при $\eta = \frac{P}{\mu} = 0.3$

Таблица 1

$\eta = \frac{P}{\mu}$	k_{\max}	φ_{\max}
0.1	14.83195326	0.00001716614
0.2	13.11079202	0.00935668945
0.3	12.37821990	0.03749942780
0.4	12.48501162	0.05035400390
0.5	12.92200328	0.05755462704
0.6	13.20643370	0.07500002682
0.7	14.05552454	0.07500000000
0.8	14.90461674	0.07500000000
0.9	15.75371198	0.07500000000

Таким образом, учет нелинейности в области концентраторов напряжений не только снижает значение тангенциальных напряжений, но и позволяет говорить об эффекте раздвоения одного максимума в вершине угловой точки на два симметричных максимума в окрестности данной вершины.

Список литературы

- Жуков Б. А.* Один вариант метода Синьорини при плоской деформации несжимаемого материала // Изв. РАН. МТТ. — 2001. — № 4. — С. 59–67.
- Жуков Б. А., Щукина Н. А.* Модель эффектов третьего порядка в статических задачах расчетов резинотехнических изделий // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Серия Естественные науки, 2010. — № 3. — С. 24–27.
- Мухелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. 5-е изд. — М. : Наука, 1966. — 707 с.