

УДК: 519.8

## Математическое моделирование изгиба круговой пластинки с применением $S$ -сплайнов

А. Н. Федосова<sup>1,a</sup>, Д. А. Силаев<sup>2,b</sup>

<sup>1</sup>Московский государственный строительный университет,  
129337, г. Москва, Ярославское ш., 26

<sup>2</sup>Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,  
119991, ГСП-1, г. Москва, ул. Ленинские горы, МГУ, Главное здание

E-mail: <sup>a</sup> hanim@inbox.ru, <sup>b</sup> dasilaev@mail.ru

Получено 11 июня 2011 г.,  
после доработки 25 июля 2015 г.

Настоящая работа посвящена применению теории недавно разработанных полулокальных сглаживающих сплайнов, или  $S$ -сплайнов высоких степеней, к решению задач теории упругости.  $S$ -сплайн — кусочно-полиномиальная функция, коэффициенты полиномов которой определяются из двух условий: первая часть коэффициентов определяется условиями гладкой склейки, остальные определяются методом наименьших квадратов. Мы рассмотрим, каким образом могут быть применены сплайны 7-ой степени класса  $C^4$  при решении бигармонического уравнения на круге.

Ключевые слова: аппроксимация, сплайн, численные методы, метод конечных элементов, математическая физика, теория упругости

### Mathematical modeling of bending of a circular plate using $S$ -splines

A. N. Fedosova<sup>1</sup>, D. A. Silaev<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Moscow State University of Civil Engineering, 26 Yaroslavskoe sh., Moscow, 129337, Russia

<sup>2</sup>Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, 1 Leninskiye Gory, Moscow, 119991, Russia

**Abstract.** — This article is dedicated to the use of higher degree  $S$ -splines for solving equations of the elasticity theory. As an example we consider the solution to the equation of bending of a plate on a circle.  $S$ -spline is a piecewise-polynomial function. Its coefficients are defined by two conditions. The first part of the coefficients are defined by the smoothness of the spline. The rest are determined using the least-squares method. We consider class  $C^4$  7th degree  $S$ -splines.

Keywords: approximation, spline, numerical methods, method of finite elements, the mathematical physics, the elasticity theory

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2015, vol. 7, no. 5, pp. 977–988 (Russian).

## Введение

В данной работе речь пойдет о  $S$ -сплайнах седьмой степени класса  $C^4$ , которые сохраняют непрерывными четыре производные и при этом остаются устойчивыми. Рассматриваемая задача сводится к решению неоднородного бигармонического уравнения методом Галёркина, где в качестве системы базисных функций выбраны фундаментальные  $S$ -сплайны класса  $C^4$ . Такой подход не только обеспечивает более высокую точность получаемого численного решения при сравнительно небольшом количестве базисных функций, но и позволяет легко определить искомые нагрузки. Для их определения, как известно, следует дважды численно продифференцировать получаемый потенциал, который есть решение бигармонического уравнения, что приводит к накоплению ошибок округления.

## Одномерный $S$ -сплайн седьмой степени класса $C^4$

Рассмотрим на отрезке  $[a, b]$  равномерную сетку  $\{x_k\}_{k=0}^{k=K}$ ,  $x_k = a + kh$ ,  $h = (b - a)/K$  — шаг сетки. Разобьем отрезок  $[a, b]$  на группы, для этого введем на  $[a, b]$  еще одну равномерную сетку  $\{\xi_l\}_{l=0}^{l=L}$ ,  $\xi_l = a + lH$ ,  $H = mh$ ,  $m \in N$ . Таким образом, переходя из одной группы в другую, мы осуществляем сдвиг системы координат и рассматриваем каждый  $l$ -й полином на отрезке  $[0, H]$ . Пусть значения приближаемой функции на этой сетке  $(y_0, y_1, \dots, y_K) \in \mathbf{R}^{K+1}$ . Обозначим через

$$P_S \{u : u(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + a_6x^6 + a_7x^7\}$$

множество полиномов седьмой степени. Коэффициенты разбиты на два сегмента. Коэффициенты  $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4$ , задаются из условия гладкости склейки. Здесь использованы четыре коэффициента, так как наш сплайн класса гладкости  $C^4$ . Условия гладкой склейки:

$$a_0^l = g_{l-1}(\xi_l - \xi_{l-1}) = g_{l-1}(H), \quad a_1^l = g'_{l-1}(H), \dots, a_4^l = \frac{1}{4!}g_{l-1}^{(4)}(H) \text{ при } l = 1, \dots, L-1. \quad (1)$$

Причем в периодическом случае при  $l = 0$   $a_0^0 = g_0(0) = g_{L-1}(H)$ ,  $a_1^0 = g'_{L-1}(H)$ ,  $\dots$ ,  $a_4^0 = \frac{1}{4!}g_{L-1}^{(4)}(H)$

В непериодическом случае коэффициенты  $a_0^0, a_1^0, a_2^0, a_3^0, a_4^0$  задаются начальными условиями  $y_0, y'_0, \frac{y''_0}{2!}, \frac{y^{(3)}_0}{3!}, \frac{y^{(4)}_0}{4!}$ .

По остальным коэффициентам в классе  $P_S$  ищется такой полином  $g_l$ , который минимизирует функционал

$$\Phi^l(u) = \sum_{k=0}^M (u(\xi_l + kh) - y_{ml+k})^2 \longrightarrow \min(a_5, a_6, a_7).$$

Здесь  $L$  — число групп точек (интервалов), на которые разбита исходная таблица значений приближаемой функции, и число полиномов, составляющих сплайн. Кроме того, здесь  $M + 1$  — количество точек осреднения квадратичного отклонения на одном интервале;  $m + 1$  — количество точек, входящих в область определения  $l$ -го полинома  $g_l$ ;  $\xi_l$  — точка привязки полинома  $g_l$ ;  $M - m + 1$  — число таких точек, значения которых участвуют при определении двух соседних полиномов, составляющих  $S$ -сплайн;  $M \geq m + 1$  [Силаев, Якушина, 1984; Силаев и др., 2007; Силаев, 2009; Силаев, Ингтем, 2010; Силаев, 2010].

Заметим, что в случае если функция задана таблицей, то  $y'_0, y''_0, \dots, y_0^{(p)}$  можно вычислить с помощью формул численного дифференцирования высокого порядка аппроксимации, например:

$$y_0^{(r)} = \left. \frac{d^{(r)}N_n(x)}{dx^r} \right|_{x=0} + O(h^{n+1-r}) \text{ при } r = 1, \dots, p, \quad (2)$$

где  $N_n(x)$  — интерполяционный полином степени  $n$ , построенный по значениям  $y_0, y_1, \dots, y_n$ . В форме Ньютона этот полином имеет вид

$$N_n(x) = y_0 + \sum_{s=1}^n P_s(y_0, y_1, \dots, y_s)x(x-h)\dots(x-(s-1)h),$$

где

$$P_s(y_0, y_1, \dots, y_s) = \sum_{j=0}^s C_{s,j}^j y_{s-j} / (s!h^s) \text{ — } s\text{-я разделенная разность.}$$

Будем предполагать, что заданные значения функции  $y_k$  известны с некоторой погрешностью. Точность измерения исходных значений функции должна зависеть от выбранного шага дискретности пространства. С уменьшением шага  $h$  точность измерения должна увеличиваться. Если функция  $f \in C^8[a, b]$  задана в узлах сетки  $x_k = a + kh, k = 0, 1, \dots, K$  своими значениями  $y_k$ , то для обеспечения точности моделирования требуется ограничить погрешность измерения этих данных условием  $|y_k - f(x_k)| \leq Ch^8$ , где  $C$  — некоторая константа, не зависящая от  $h$ .

**Определение 1.**  $S$ -сплайном назовем функцию, которая совпадает с полиномом  $g_l$  на каждом отрезке  $\xi_l \leq x < \xi_{l+1}$ . Обозначим ее  $S_{m,M}(x)$ , параметры  $M$  и  $m$  определены выше.

Будем минимизировать функционал  $\Phi^l$  по коэффициентам  $a_5, a_6, a_7$ . Для этого продифференцируем  $\Phi^l(g)$  по этим коэффициентам и полученные производные приравняем к нулю. Получим

$$\begin{cases} a_5^l h^5 S_{10} + a_6^l h^6 S_{11} + a_7^l h^7 S_{12} = c_1^l, \\ a_5^l h^5 S_{11} + a_6^l h^6 S_{12} + a_7^l h^7 S_{13} = c_2^l, \\ a_5^l h^5 S_{12} + a_6^l h^6 S_{13} + a_7^l h^7 S_{14} = c_3^l. \end{cases} \quad (3)$$

Здесь

$$S_j = \sum_{k=0}^M k^j, \quad c_j^l = \sum_{k=0}^M [(y_{ml+k} - a_0^l - a_1^l hk - a_2^l h^2 k^2 - a_3^l h^3 k^3 - a_4^l (hk)^4) k^{4+j}]. \quad (4)$$

Система линейных алгебраических уравнений, которой должны удовлетворять коэффициенты полиномов  $S$ -сплайна, состоит из уравнений двух видов: а) уравнений склейки для каждой пары последовательных полиномов (1); б) уравнений для определения коэффициентов при старших степенях полиномов по коэффициентам при младших степенях (3). Сделаем замену переменных  $\tilde{a}_i = a_i h^i, i = 0, 1, \dots, 7$ . При этом уравнения (1) будут иметь вид

$$\begin{cases} \tilde{a}_0^{l-1} + m\tilde{a}_1^{l-1} + m^2\tilde{a}_2^{l-1} + m^3\tilde{a}_3^{l-1} + m^4\tilde{a}_4^{l-1} + m^5\tilde{a}_5^{l-1} + m^6\tilde{a}_6^{l-1} + m^7\tilde{a}_7^{l-1} = \tilde{a}_0^l, \\ \tilde{a}_1^{l-1} + 2m\tilde{a}_2^{l-1} + 3m^2\tilde{a}_3^{l-1} + 4m^3\tilde{a}_4^{l-1} + 5m^4\tilde{a}_5^{l-1} + 6m^5\tilde{a}_6^{l-1} + 7m^6\tilde{a}_7^{l-1} = \tilde{a}_1^l, \\ \tilde{a}_2^{l-1} + 3m\tilde{a}_3^{l-1} + 6m^2\tilde{a}_4^{l-1} + 10m^3\tilde{a}_5^{l-1} + 15m^4\tilde{a}_6^{l-1} + 21m^5\tilde{a}_7^{l-1} = \tilde{a}_2^l, \\ \tilde{a}_3^{l-1} + 4m\tilde{a}_4^{l-1} + 10m^2\tilde{a}_5^{l-1} + 20m^3\tilde{a}_6^{l-1} + 35m^4\tilde{a}_7^{l-1} = \tilde{a}_3^l, \\ \tilde{a}_4^{l-1} + 5m\tilde{a}_5^{l-1} + 15m^2\tilde{a}_6^{l-1} + 35m^3\tilde{a}_7^{l-1} = \tilde{a}_4^l. \end{cases} \quad (5)$$

Уравнения из системы б (3) имеют вид

$$\begin{cases} S_5\tilde{a}_0^l + S_6\tilde{a}_1^l + S_7\tilde{a}_2^l + S_8\tilde{a}_3^l + S_9\tilde{a}_4^l + S_{10}\tilde{a}_5^l + S_{11}\tilde{a}_6^l + S_{12}\tilde{a}_7^l = P_1^l, \\ S_6\tilde{a}_0^l + S_7\tilde{a}_1^l + S_8\tilde{a}_2^l + S_9\tilde{a}_3^l + S_{10}\tilde{a}_4^l + S_{11}\tilde{a}_5^l + S_{12}\tilde{a}_6^l + S_{13}\tilde{a}_7^l = P_2^l, \\ S_7\tilde{a}_0^l + S_8\tilde{a}_1^l + S_9\tilde{a}_2^l + S_{10}\tilde{a}_3^l + S_{11}\tilde{a}_4^l + S_{12}\tilde{a}_5^l + S_{13}\tilde{a}_6^l + S_{14}\tilde{a}_7^l = P_3^l, \end{cases} \quad (6)$$

где

$$P_j^l = \sum_{k=0}^M y_{ml+k} k^{p+j}, \quad j = 1, \dots, n-p. \quad (7)$$

Здесь  $l = 0, \dots, L-1$  — номер полинома, причем если  $l = 0$ , то в периодическом случае выражение  $\tilde{a}^{l-1}$  означает  $\tilde{a}^{L-1}$ . В дальнейшем, если это не вызовет путаницы, мы будем опускать волну над переменными  $a_k^l$ .

Запишем полученную систему в матричной форме. Для этого обозначим через

$$A_0 = \begin{vmatrix} S_5 & S_6 & S_7 & S_8 & S_9 \\ S_6 & S_7 & S_8 & S_9 & S_{10} \\ S_7 & S_8 & S_9 & S_{10} & S_{11} \end{vmatrix}, \quad A_1 = \begin{vmatrix} S_{10} & S_{11} & S_{12} \\ S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{12} & S_{13} & S_{14} \end{vmatrix},$$

$$B_0 = \begin{vmatrix} 1 & m & m^2 & m^3 & m^4 \\ 0 & 1 & 2m & 3m^2 & 4m^3 \\ 0 & 0 & 1 & 3m & 6m^2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4m \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad B_1 = \begin{vmatrix} m^5 & m^6 & m^7 \\ 5m^4 & 6m^5 & 7m^6 \\ 10m^3 & 15m^4 & 21m^5 \\ 10m^2 & 20m^3 & 35m^4 \\ 5m & 15m^2 & 35m^3 \end{vmatrix}.$$

Пусть, кроме того,

$$P^l = \begin{pmatrix} P_1^l \\ P_2^l \\ P_3^l \end{pmatrix} \text{ и } X_0^l = \begin{pmatrix} a_0^l \\ a_1^l \\ a_2^l \\ a_3^l \\ a_4^l \end{pmatrix}, \quad X_1^l = \begin{pmatrix} a_5^l \\ a_6^l \\ a_7^l \end{pmatrix}, \quad \text{где } l = 0, 1, \dots, L-1. \quad (8)$$

Тогда уравнения из системы (5) примут вид

$$B_0 X_0^l + B_1 X_1^l = X_0^{l+1}, \quad (9)$$

а уравнения из системы (6) —

$$A_0 X_0^l + A_1 X_1^l = P^l. \quad (10)$$

## Существование и единственность S-сплайна класса $C^4$

Предположим, что  $m$  и  $M$  таковы, что матрица  $A_1$  имеет обратную. Тогда из (10) получаем, что

$$X_1^l = A_1^{-1} P^l - A X_0^l, \quad (11)$$

где  $A = A_1^{-1} A_0$ . Подставим выражение для  $X_1^l$  в (9). Тогда получим рекуррентное соотношение, связывающее 5 младших коэффициентов  $l+1$  полинома через 5 младших коэффициентов  $l$  полинома:

$$X_0^{l+1} = U X_0^l + \Psi^l, \quad (12)$$

где  $\Psi^l = B_1 A_1^{-1} P^l$ , матрица устойчивости  $U = B_0 - B_1 A_1^{-1} A_0$  имеет размерность  $5 \times 5$ .

Рассмотрим сначала непериодический случай. Зададим начальный вектор

$$X_0^0 = \left( y_0, h y_0', \dots, \frac{1}{4!} h^4 y_0^{(4)} \right)^T,$$

где значения производных, входящих в  $X_0^0$ , могут быть вычислены приближенно с высокой степенью точности с помощью формул численного дифференцирования (2).

**Теорема 1.** Пусть числа  $m, M, p, n$  таковы, что  $\det A_1 \neq 0$ . Тогда для любой функции  $f(x)$ , заданной на отрезке  $[a, b]$  своими значениями  $y_k$  в точках  $x_k = a + kh, h = (b - a)/K$ , и начального вектора  $X_0^0$  существует единственный непериодический сплайн  $S_{m,M}^n[y](x)$  класса  $C^4$ .

*Доказательство.* Пользуясь формулами (11), (12), последовательно находим  $X_1^0, X_0^1, \dots, X_1^{L-1}$ . Тем самым все коэффициенты полиномов, составляющих сплайн, однозначно определены.

**Теорема 2.** Пусть числа  $m, M, p, n$  таковы, что  $\det A_1 \neq 0$  и собственные числа матрицы  $U$  не равны корню степени  $L$  из единицы (здесь  $L$  — число полиномов, составляющих сплайн). Тогда для любой функции  $f$ , заданной на отрезке  $[a, b]$  своими значениями  $y_k$  в точках  $x_k = a + kh, h = (b - a)/K$ , существует единственный периодический сплайн  $S_{m,M}^n[y]$  класса  $C^4$ .

*Доказательство.* В периодическом случае применяя рекуррентную формулу (12)  $L - 1$  раз, получим:

$$X_0^0 = X_0^L = UX_0^{L-1} + \Psi^{L-1} = U(UX_0^{L-2} + \Psi^{L-2}) + \Psi^{L-1} = \dots = U^L X_0^0 + \sum_{s=1}^L U^{L-s} \Psi^{s-1},$$

откуда

$$X_0^0 = (E - U^L)^{-1} \sum_{s=1}^L U^{L-s} \Psi^{s-1}.$$

Затем последовательно находим  $X_1^0, X_0^1, \dots, X_1^{L-1}$ . Тем самым все коэффициенты полиномов, составляющих периодический сплайн, однозначно определены.

### Сходимость S-сплайна класса $C^4$

**Теорема 3.** Пусть периодическая функция  $f(x) \in C^8[a, b]$ , и пусть выполнено условие

$$|f(x_k) - y_k| \leq C_0 h^{8+\varepsilon}, \quad \varepsilon \geq 0. \tag{13}$$

Пусть, кроме того, числа  $m, M, p, n$  таковы, что  $\det A_1 \neq 0$  и собственные значения матрицы  $U$  по модулю меньше единицы, т. е.

$$|\lambda_i| < 1, \quad i = 1, \dots, p + 1. \tag{14}$$

Тогда периодический сплайн  $S_{m,M} \in C^4[a, b]$  с узлами на равномерной сетке для  $x \in [a, b]$  удовлетворяет оценкам

$$|f^{(r)}(x) - \frac{d^r}{dx^r} S_{m,M}(x)| \leq C_r h^{8-r} \quad \text{для } r = 0, 1, \dots, 7; \tag{15}$$

$x \neq \xi_l$  при  $r = 5, 6, 7$ ; в этом случае  $S_{m,M}^{(r)}(x)(\xi_l) \equiv S_{m,M}^{(r)}(x)(\xi_l + 0)$ .

Аналогичные утверждения справедливы и для непериодического случая. Доказательство производится аналогично доказательству теоремы о сходимости S-сплайна в работах [Силаев, Якушина, 1984; Силаев и др., 2007; Силаев, 2009].

### Устойчивость S-сплайна седьмой степени класса $C^4$

Для устойчивости S-сплайна необходимо, чтобы собственные числа матрицы  $U$  по модулю были меньше единицы (а если они еще и различны, то и достаточно). Собственные числа матрицы  $U$  определяются из уравнения

$$\det(U - \lambda E) = 0. \tag{16}$$

Как показано в случае кубических сплайнов, для обеспечения этого условия устойчивости необходимо перекрытие. Это означает, что имеются такие элементы исходной таблицы значений функции, которые участвуют в определении коэффициентов не менее двух соседних полиномов, составляющих сплайн. Если перекрытие достаточно большое, то это в ряде случаев является и достаточным условием [Силаев, Якушина, 1984; Силаев, 2009]. На практике наиболее употребительными являются те сплайны, для построения которых используется небольшое число точек усреднения  $M$ .

Для случая малых значений  $M$  (при  $3 \leq M \leq 10$ ) в результате расчета были получены значения собственных чисел матрицы  $U$ . Некоторые наиболее интересные полученные значения  $m$  и  $M$ , при которых достигаются наименьшие значения  $\max|\lambda_i|$  и аппроксимация  $S$ -сплайнами устойчива, представлены в таблице.

### Собственные числа матрицы $U$

$M$	$m$	$\max \lambda_i $	$M$	$m$	$\max \lambda_i $	$M$	$m$	$\max \lambda_i $	$M$	$m$	$\max \lambda_i $
4	1	0.690	4	2	0.881	5	1	0.715	5	2	0.824
6	1	0.756	6	3	0.770	7	1	0.787	7	2	0.693
7	3	0.790	7	4	0.817	8	1	0.812	8	2	0.698

Авторы благодарят студента ВМК Кочнева Ю. К., который выполнил вычисление собственных чисел матрицы устойчивости  $U$ . В дальнейшем  $M = 7$ ,  $m = 2$  и  $\lambda_{\max} = 0,693$ , что гарантирует устойчивость.

### Выбор базисных функций

**Определение 2.** Фундаментальный  $S$ -сплайн  $C_i(\varphi)$  — это периодический  $S$ -сплайн, построенный на отрезке  $[0; 2\pi]$  по данным  $y = (y_0, y_1, \dots, y_N) \in \mathbf{R}^{N+1}$  вида  $Y_j = \{y_i = \delta_{ij} | i = 0, \dots, N\}$ . Здесь  $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$  — символ Кронекера. В каждом из таких исходных данных только одно значение равно 1, остальные обнулены. Заметим, что точки 0 и  $2\pi$  тождественны. Число полиномов, составляющих сплайн,  $Q = \frac{N}{m}$  (см. рис. 1).

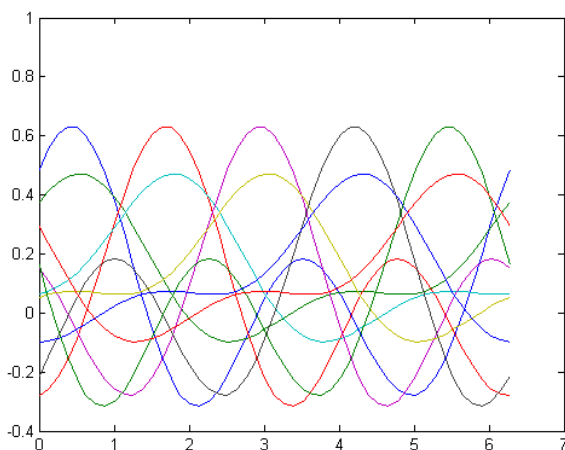


Рис. 1. Периодические фундаментальные сплайны  $C_i(\varphi)$

Аналогично вводится фундаментальный непериодический  $S$ -сплайн  $D_j(r)$ , построенный на отрезке  $r \in [0; 1]$  по данным  $y = (y_0, y_1, \dots, y_{K+1}) \in \mathbf{R}^{K+2}$  и нулевым начальным условиям.

Здесь  $Kh = 1$ , в  $K + 1$  точке фундаментальный сплайн строится для лучшего приближения границы. К ним добавляются четыре фундаментальных сплайна  $D_{01}(r), \dots, D_{04}(r)$ , построенных по начальным условиям  $y^{(j)} = \left( hy_0^{(j)}, \dots, \frac{h^4 y_4^{(j)}}{4!} \right)$ , где  $\{y_i^{(j)} = \delta_{ij} | i = 0, \dots, 4\}$ , при этом значение функции во всех остальных точках принимается равным нулю,  $j = 0 \dots 4$  (см. рис. 2 и рис. 3).

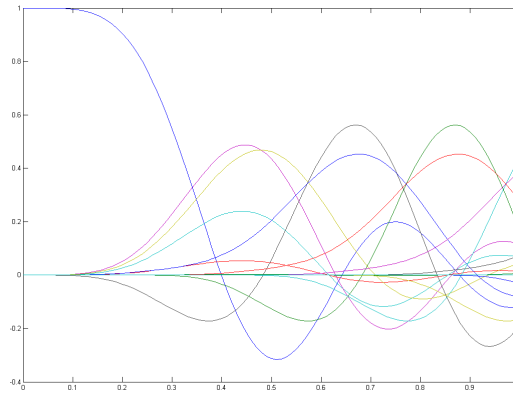


Рис. 2. Непериодические фундаментальные сплайны  $D_j(r)$

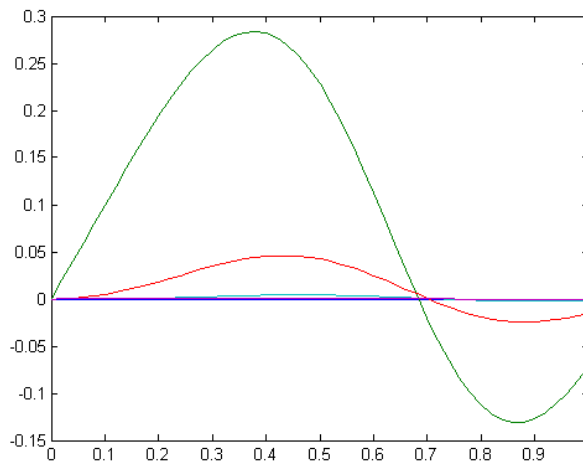


Рис. 3. Фундаментальные сплайны  $D_{0j}(r)$

Введем на круге равномерную сетку по  $\varphi$  и  $r$  (см. рис. 4). Разобьем отрезок  $r \in [0; 1]$   $K$  точками, шаг разбиения  $h_1 = \frac{1}{K}$ . Для лучшей аппроксимации на границе области добавим к разбиению 2 дополнительные точки, выходящие за пределы круга так, в  $K + 2$  точке значение  $r$  будет равно  $1 + 2h$ . Отрезок  $\varphi \in [0; 2\pi]$  разбиваем  $N$  точками с шагом  $h_2 = \frac{2\pi}{N}$ . Тогда каждая точка сетки будет иметь координату  $\{(i, j) | i = \overline{0, N}, j = \overline{0, K + 2}\}$ .

Пусть  $f \in C^8([0; 1] \times [0; 2\pi])$ . Рассмотрим  $S$ -сплайн на круге, построенный по значениям некоторой функции  $f$ .

**Теорема 4.** Пусть  $\tilde{h} = \max(h_1, h_2)$ , тогда справедливы следующие оценки:

$$\left| \frac{\partial^{p+q}}{\partial \varphi^p \partial r^q} S(\varphi, r) - \frac{\partial^{p+q}}{\partial \varphi^p \partial r^q} f(\varphi, r) \right| < C_{pq} \tilde{h}^{8-p-q}, \quad 0 \leq p + q \leq 7. \tag{17}$$



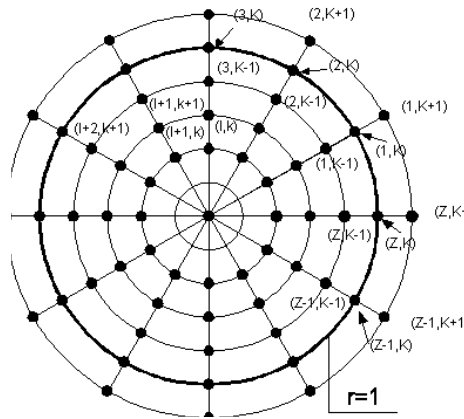


Рис. 4. Разбиение круга

Доказательство следует из построения двумерного сплайна, представления его в виде линейной комбинации фундаментальных одномерных сплайнов, а также из сходимости одномерных сплайнов (см. [Силаев, Коротаев, 2003; Силаев, Коротаев, 2009]).

### Моделирование изгиба пластинки

Уравнение Софи Жермен–Лагранжа изгиба пластин [Тимошенко, 1957] имеет вид

$$D \left( \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 U}{\partial y^4} \right) = q(x, y) \quad \text{в круге } \Omega \{ (0 \leq r < 1) \times (0 < \varphi \leq 2\pi) \}, \quad (18)$$

где  $U$  — прогиб пластинки,  $D$  — жесткость пластинки при изгибе,  $q$  — интенсивность поперечной нагрузки. Теория изгибных колебаний пластин была обоснована Густавом Кирхгофом [Kirchhoff, 1850]. Он показал, что достаточно двух граничных условий:

$$U|_{r=1} = f(\varphi), \quad \frac{\partial U}{\partial r} \Big|_{r=1} = g(\varphi). \quad (19)$$

Построение приближенного решения задачи (18), (19) будем искать по методу Галёркина [Марчук, Агашков, 1987; Флетчер, 1988] в виде

$$U(\varphi, r) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=0}^{K+1} U_{ij} C_i(\varphi) D_j(r) + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^4 U_{0ij} C_i(\varphi) D_{0j}(r), \quad (20)$$

где  $U_{ij}, U_{0ij}$  — коэффициенты, подлежащие определению. Здесь  $\{C_i(\varphi) | i = 1, \dots, N\}$  — построенная выше система одномерных фундаментальных периодических сплайнов;  $\{D_j(r) | j = 0, \dots, K + 1\}$  — одномерные фундаментальные непериодические сплайны, дополненные сплайнами  $\{D_{0j}(r) | j = 1, \dots, 4\}$ . Для удобства объединим последние две системы в одну  $\tilde{D}_j(r) = (D_{0j}(r), D_j(r))$ , в последующем «волну» над  $\tilde{D}_j(r)$  будем опускать. Получим

$$U(\varphi, r) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=0}^{K+1+4} U_{ij} C_i(\varphi) D_j(r). \quad (21)$$

Подставляем (21) в уравнение (18) и вычисляем невязку:

$$V(r, \varphi) = \Delta^2 U(\varphi, r) - \tilde{q}(\varphi, r) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=0}^{K+1+4} U_{ij} \Delta^2 (C_i(\varphi) D_j(r)) - \tilde{q}(\varphi, r), \quad (22)$$

где  $\tilde{q} = \frac{q}{D}$ .



Бигармонический оператор в полярных координатах имеет вид

$$\Delta^2 = \sum_{i=1}^8 \Delta_i, \tag{23}$$

где

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \frac{\partial^4}{\partial r^4}, & \Delta_2 &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial^4}{\partial \varphi^2 \partial r^2}, & \Delta_3 &= \frac{1}{r^4} \frac{\partial^4}{\partial \varphi^4}, & \Delta_4 &= \frac{2}{r} \frac{\partial^3}{\partial r^3}, \\ \Delta_5 &= -\frac{2}{r^3} \frac{\partial^3}{\partial \varphi^2 \partial r}, & \Delta_6 &= -\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial r^2}, & \Delta_7 &= \frac{4}{r^4} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}, & \Delta_8 &= \frac{1}{r^3} \frac{\partial}{\partial r}. \end{aligned}$$

Неизвестные коэффициенты  $U_{ij}$  (их  $N \times (K + 6)$  штук) будем выбирать из условия ортогональности невязки  $V(r, \varphi)$  к выбранным базисным функциям  $C_l(\varphi)D_k(r)$ , но таким, что узлы  $(r_k, \varphi_l) \in \Omega$  (рис. 4). Этим требованиям удовлетворяют все  $\{C_l(\varphi) \mid l = \overline{1, N}\}$ , а также сплайны  $D_k(r)$  с номерами  $k = \overline{0, K - 1}$  (точка с номером  $K$  является граничной, а  $K + 1$  точка вообще не принадлежит области), а также четыре вспомогательных сплайна  $\{D_{0,j}(r)\}$ . Таким образом, возможное число комбинаций базисных функций  $C_l(\varphi)D_k(r)$  равно  $N \times (K + 4)$ . Оставшиеся  $2 \times N$  неизвестных определим из граничных условий (20):

$$U(\varphi, r) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=0}^{K+1+4} U_{ij} C_i(\varphi) D_j(r) = f(\varphi_l), \quad l = \overline{1, N}, \tag{24}$$

$$\left. \frac{\partial U}{\partial r} \right|_{r=1} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=0}^{K+1+4} U_{ij} C_i(\varphi) D'_j(1) = g(\varphi_l), \quad l = \overline{1, N}. \tag{25}$$

Умножим невязку  $V(r, \varphi)$  на  $r^3 C_l(\varphi) D_k(r)$  и проинтегрируем по кругу  $\Omega$ . Получим  $N \times (K + 4)$  уравнений вида

$$\sum_{i,j} U_{i,j} \iint_{\Omega} C_l(\varphi) D_k(r) \Delta^2(C_i(\varphi) D_j(r)) r^4 dr d\varphi = \iint_{\Omega} \bar{q}(\varphi, r) C_l(\varphi) D_k(r) r^4 dr d\varphi. \tag{26}$$

Здесь  $k = \overline{0, K - 1 + 4}$ ,  $l = \overline{1, N}$ . Интеграл, стоящий в левой части уравнения (26), разбивается на восемь по числу слагаемых, составляющих бигармонический оператор (см. (23)):

$$\iint_{\Omega} C_l(\varphi) D_k(r) \Delta^2(C_i(\varphi) D_j(r)) r^4 dr d\varphi = \sum_{n=1}^8 I_n(i, j, l, k), \tag{27}$$

где

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{2\pi} C_l(\varphi) C_i(\varphi) d\varphi \int_0^1 D_j^{(4)}(r) D_k(r) r^4 dr, & I_2 &= \int_0^{2\pi} C_l(\varphi) C_i''(\varphi) d\varphi \int_0^1 D_j''(r) D_k(r) r^2 dr, \\ I_3 &= \int_0^{2\pi} C_l(\varphi) C_i^{(4)}(\varphi) d\varphi \int_0^1 D_j(r) D_k(r) dr, & I_4 &= 2 \int_0^{2\pi} C_l(\varphi) C_i(\varphi) d\varphi \int_0^1 D_j'''(r) D_k(r) r^3 dr, \\ I_5 &= -2 \int_0^{2\pi} C_l(\varphi) C_i''(\varphi) d\varphi \int_0^1 D_j'(r) D_k(r) r dr, & I_6 &= - \int_0^{2\pi} C_l(\varphi) C_i(\varphi) d\varphi \int_0^1 D_j''(r) D_k(r) r^2 dr, \end{aligned}$$

$$I_7 = 4 \int_0^{2\pi} C_l(\varphi) C_i''(\varphi) d\varphi \int_0^1 D_j(r) D_k(r) dr, \quad I_8 = \int_0^{2\pi} C_l(\varphi) C_i(\varphi) d\varphi \int_0^1 D_j'(r) D_k(r) r dr.$$

С целью уменьшения порядка производных было произведено интегрирование по частям. Ввиду значительного объема подсчетов данные выкладки в работе не приводятся.

Порядок аппроксимации и устойчивость метода Галёркина [Марчук, Агашков, 1987; Флетчер, 1988] определяются выбором базисных функций, а значит, получаем устойчивую схему восьмого порядка аппроксимации.

## Результаты расчетов

В качестве тестового решения была использована функция  $w(\varphi, r) = (r - 1)^2 \sin \varphi$ . Она удовлетворяет уравнению (18) при

$$\tilde{q} = \frac{q}{D} = \frac{-3 \sin \varphi (r^2 + 1)}{r^4}$$

и нулевых граничных условиях (19).

Под *единицей машинного времени* ( $\sim 2$  мин 40 с) будем понимать время, затраченное на выполнение программной реализации данного метода в указанной тестовой задаче при  $K = 2$  и  $N = 12$  на однопроцессорном компьютере со следующими характеристиками: частота процессора 2.81 ГГц, оперативная память 1 Гб. Здесь  $N = 6K$ , так как отрезок  $\varphi \in [0; 2\pi]$  примерно в 6 раз больше отрезка  $r \in [0; 1]$ . Результаты расчетов приведены в следующей таблице.

Таблица 1. Результаты численного эксперимента

$K$	$N$	$K * N$	$T_{RUN}$	$\chi$	$\tilde{h}$	$\tilde{h}^8$	$\delta$
2	6	12	0.05	0.1614	1.0472	1.4448	–
2	12	24	1	$4.6782 * 10^{-3}$	0.5236	$5.6593 * 10^{-3}$	35.7%
2	14	28	1.34	$2.4635 * 10^{-3}$	0.50	$3.9063 * 10^{-3}$	35.7%
4	24	96	9.86	$1.9844 * 10^{-5}$	0.2618	$2.2068 * 10^{-5}$	34.7%
4	26	104	11.83	$1.1123 * 10^{-5}$	0.25	$1.5259 * 10^{-5}$	34.6%
6	36	216	16.46	$6.6789 * 10^{-7}$	0.1745	$8.5973 * 10^{-7}$	33.8%

Здесь  $T_{RUN}$  — время выполнения программы, измеряемое в принятых единицах времени;  $\chi$  — максимум модуля отклонения точного решения  $w$  от найденного приближенного  $S$  во внутренних узлах сетки;  $\tilde{h} = \max(h_1, h_2)$  — максимальный шаг разбиения;  $\delta$  — доля машинного времени, уходящая на вычисление правой части системы. Следует сказать, что приведенные результаты в части подсчетов машинного времени носят условный характер, очевидно, что существуют алгоритмы, реализующие данный метод за лучшее время. Около 35% общего времени исполнения занимает вычисление правой части системы. Это объясняется использованием символьных переменных, с помощью которых возможно вычисление интегралов с заданной точностью. Возможно, использование квадратурных формул высокого порядка аппроксимации позволило бы сократить это время. Погрешность составила  $O(\tilde{h}^8)$ , при этом наибольшее отклонение достигается в нуле, там, где функция в силу особенности выбранной правой части начинает быстро возрастать. Даже при малом количестве точек разбиения ( $K = 2$ ,  $N = 12$ , что соответствует  $\tilde{h} \approx 0.5236$ ) различия между точным и приближенным решениями на графике уже не видны (см. рис. 5).

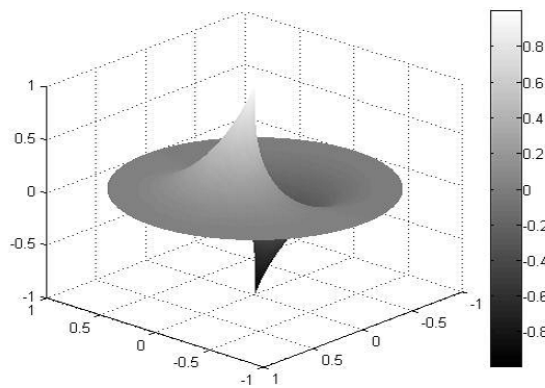


Рис. 5. Приближенное решение задачи при  $\tilde{h} \approx 0.523$

В качестве второго тестового решения была использована функция  $w(\varphi, r) = r \cos \varphi + (r^2 - 1)r^2 \sin 2\varphi$ . Она удовлетворяет однородному бигармоническому уравнению (18) при граничных условиях

$$w|_{r=1} = \cos \varphi, \quad \frac{\partial w}{\partial r}|_{r=1} = \cos \varphi (\sin \varphi + 1). \quad (28)$$

Таблица 2. Результаты численного эксперимента 2

$K$	$N$	$K * N$	$T_{RUN}$	$\chi$	$\tilde{h}$	$\tilde{h}^8$
2	12	24	0.643	$1.700 * 10^{-3}$	0.5236	$5.6593 * 10^{-3}$
2	24	48	0.854	$4.1613 * 10^{-4}$	0.50	$3.9063 * 10^{-3}$
4	24	96	6.761	$8.5135 * 10^{-6}$	0.2618	$2.2068 * 10^{-5}$
4	26	104	8.312	$6.7831 * 10^{-6}$	0.25	$1.5259 * 10^{-5}$
6	36	216	14.65	$3.6878 * 10^{-8}$	0.1745	$8.5973 * 10^{-7}$

Гостев А. С., используя  $S$ -сплайны девятой степени класса  $C^4$ , при аналогичном количестве узлов сетки – 216, получил погрешность  $\chi = 1.5223 * 10^{-9}$ , однако выполнение программы увеличилось на 20%. При этом им существенно использовалась однородность задачи, так как исходная задача сводилась к системе двух гармонических уравнений и последовательно решались две задачи Дирихле [Тихонов, Самарский, 1953]. Поскольку в данной задаче отсутствовала правая часть, символьные вычисления здесь использовались только для подсчета граничных условий, что привело к сокращению времени выполнения программы.

## Заключение

Полученные результаты красноречиво свидетельствуют об эффективности данного метода. При небольшом числе точек разбиения, к примеру 96, удалось получить колоссальную точность. При использовании хорошо реализуемой разностной схемы для обеспечения той же точности потребовалось  $(96)^4$  (!) точек. Если заменить базис, составленный из специальной системы  $S$ -сплайнов, на систему тригонометрических функций  $\{\cos nx, \sin nx\}$ , для обеспечения той же точности потребовалось бы взять  $\sim 500$  слагаемых (!). Применять данный базис при таком количестве слагаемых просто опасно, учитывая слабую сходимость рядов Фурье и накопление ошибок округления.

$S$ -сплайны класса  $C^4$  предоставляют возможность применять полиномы высоких степеней, не опасаясь потери устойчивости, что дает возможность на несколько порядков сократить количество узлов сетки, а это значит, что для решения ряда задач отпадает потребность в применении суперкомпьютеров.

## Список литературы

- Марчук Г. И., Агаишков В. И. Введение в проекционно-сеточные методы. — М. : Наука, 1987.
- Силаев Д. А., Якушина Г. И. Приближение  $S$ -сплайнами гладких функций // Труды семинара имени И. Г. Петровского. — 1984. — Вып. 10. — С. 197.
- Силаев Д. А., Коротаев Д. А.  $S$ -сплайн на круге // Международная конференция «Математика. Компьютер. Образование» — 2003. — Пушино, Январь. — С. 157.
- Силаев Д. А. Дважды непрерывно дифференцируемый полулокальный сглаживающий сплайн // Вест. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. — 2009. — № 5. — С. 11–19.
- Силаев Д. А., Коротаев Д. О. Решение краевых задач с помощью  $S$ -сплайна // Компьютерные исследования и моделирование. — 2009. — Т. 1, № 2. — С. 161–171.
- Силаев Д. А., Амилющенко А. В., Лукьянов А. И., Коротаев Д. О. Полулокальные сглаживающие сплайны класса  $C^1$  // Труды семинара имени И. Г. Петровского. — 2007. — Вып. 26. — С. 347–367.
- Silaev D. A., Amiliyushenko A. V., Luk'janov A. I., and Korotaev D. O. Semilocal smoothing spline of class  $C^1$  // Journal of Mathematical Sciences. — 2007. — June. — Vol. 143, No. 4. — P. 3401–3414.
- Силаев Д. А., Ингтем Ж. Г. Полулокальные сглаживающие сплайны седьмой степени // Вест. Ю-УрГУ. — № 35(211). Сер. Математическое моделирование и программирование. — 2010. — Вып. 6. — С. 104–112.
- Силаев Д. А. Полулокальные сглаживающие  $S$ -сплайны // Компьютерные исследования и моделирование. — 2010. — Т. 2, № 4. — С. 349–357.
- Тимошенко С. П. История сопротивления материалов с краткими сведениями из теории упругости и теории сооружений. — М. : Гостехиздат, 1957.
- Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. — М. : Гостехиздат, 1953.
- Флетчер К. Численные методы на основе метода Галёркина. — М. : Мир, 1988.
- Kirchhoff G. R. Uber das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe // Crelle Journal für die reine und angewandte Mathematik. — 1850. — Bd. 40.