

УДК: 627.157

## Устойчивость дна в напорных каналах

Ю. Г. Крат<sup>а</sup>, И. И. Потапов<sup>б</sup>

Вычислительный центр, Дальневосточное отделение Российской академии наук,  
Россия, 680000, г. Хабаровск, ул. Ким Ю Чена, д. 65

E-mail: <sup>а</sup> kratyuliya@mail.ru, <sup>б</sup> potapovii@rambler.ru

*Получено 13 октября 2014 г.,  
после доработки 23 августа 2015 г.*

В работе на основе предложенной ранее русловой модели решена одномерная задача устойчивости песчаного дна напорного канала. Особенностью исследуемой задачи является используемое оригинальное уравнение русловых деформаций, учитывающее влияние физико-механических и гранулометрических характеристик донного материала и неровности донной поверхности при русловом анализе. Еще одной особенностью рассматриваемой задачи является учет влияния не только придонного касательного, но и нормального напряжения при изучении русловой неустойчивости. Из решения задачи устойчивости песчаного дна для напорного канала получена аналитическая зависимость, определяющая длину волны для быстрорастущих донных возмущений. Выполнен анализ полученной аналитической зависимости, показано, что она обобщает ряд известных эмпирических формул: Коулмана, Шуляка и Бэгнольда. Структура полученной аналитической зависимости указывает на существование двух гидродинамических режимов, характеризуемых числом Фруда, при которых рост донных возмущений может сильно или слабо зависеть от числа Фруда. Учитывая природную стохастичность процесса движения донных волн и наличие области определения решения со слабой зависимостью от чисел Фруда, можно сделать вывод о том, что экспериментальное наблюдение за процессом развития движения донных волн в данной области должно приводить к получению данных, имеющих существенную дисперсию, что и происходит в действительности.

Ключевые слова: устойчивость дна, напорный канал, донные возмущения

Работа выполнена при поддержке фонда фундаментальных исследований РФФИ (грант № 15-05-07594 А) и комплексной программы фундаментальных исследований ДВО РАН, раздел 5.1.8 (грант 15-I-4-070).

## Bottom stability in closed conduits

Yu. G. Krat, I. I. Potapov

*Computing Center of Far Eastern Branch Russian Academy of Sciences, 65 Kim-Yu-Chen st., Khabarovsk, 680000, Russia*

**Abstract.** — In this paper on the basis of the riverbed model proposed earlier the one-dimensional stability problem of closed flow channel with sandy bed is solved. The feature of the investigated problem is used original equation of riverbed deformations, which takes into account the influence of mechanical and granulometric bed material characteristics and the bed slope when riverbed analyzing. Another feature of the discussed problem is the consideration together with shear stress influence normal stress influence when investigating the riverbed instability. The analytical dependence determined the wave length of fast-growing bed perturbations is obtained from the solution of the sandy bed stability problem for closed flow channel. The analysis of the obtained analytical dependence is performed. It is shown that the obtained dependence generalizes the row of well-known empirical formulas: Coleman, Shulyak and Bagnold. The structure of the obtained analytical dependence denotes the existence of two hydrodynamic regimes characterized by the Froude number, at which the bed perturbations growth can strongly or weakly depend on the Froude number. Considering a natural stochasticity of the waves movement process and the presence of a definition domain of the solution with a weak dependence on the Froude numbers it can be concluded that the experimental observation of the of the bed waves movement development should lead to the data acquisition with a significant dispersion and it occurs in reality.

Keywords: bed stability, closed conduit, bed perturbations

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2015, vol. 7, no. 5, pp. 1061–1068 (Russian).

## Введение

Существует множество работ, посвященных проблеме устойчивости дна каналов под действием протекающих по ним потоков [Kennedy, 1963; Reynolds, 1965; Гришанин, 1992; Komarova, Hulscher, 2000; Барышников, 2008; Петров, Потапов, 2010; Петров, Потапов, 2010а и др.]. Интерес к данной проблеме обусловлен необходимостью учета влияния развивающихся донных форм на определение значения гидравлического сопротивления при решении большого класса прикладных задач [Васильев, 1999; Лаврентьев, Шабат, 1973; Нестеров, 2006; Чалов, 1997; Россинский, Дебольский, 1980 и др.]. Сложность исследования проблемы устойчивости дна каналов связана с не решенной до настоящего времени задачей транспорта влекомых наносов [Einstein, 1950; Гончаров, 1962; Гришанин, 1992; Барышников, 2008 и др.]. Вследствие чего многие исследователи донной устойчивости [Einstein, 1950; Coleman et al., 2003; Шуляк, 1971] используют в своих работах «местные» формулы транспорта влекомых наносов, содержащие множество феноменологических параметров. Получаемые при этом результаты позволяют дать изучаемым явлениям «местное» количественное описание, а чаще только качественное описание.

В работах [Петров, Потапов, 2010; Петров, Потапов, 2010а; Петров, Потапов, 2013] была предложена аналитическая модель транспорта влекомых наносов, не содержащая в себе феноменологических параметров. На ее основе был выполнен анализ устойчивости донной поверхности. Было показано, что возмущение свободной поверхности потока приводит в ряде случаев к потере донной устойчивости. Однако из экспериментальных данных следует [Coleman et al., 2003; Шуляк, 1971], что процесс возникновения потери донной устойчивости может происходить не только в открытых потоках, но и в напорных каналах, когда возмущения свободной поверхности потока отсутствуют и не могут быть причиной возникновения донной неустойчивости, а следовательно, модель устойчивости дна, предложенная в работах [Петров, Потапов, 2010; Петров, Потапов, 2010а; Петров, Потапов, 2013], не применима.

В данной работе на основе аналитической формулы расхода наносов [Потапов, 2013; Петров, Потапов, 2014] формулируется одномерная модель устойчивости песчаного дна напорного канала прямоугольной формы. Решена задача линейной устойчивости дна несвязного канала. Получена аналитическая зависимость, определяющая длину донной волны в зависимости от числа Фруда потока и диаметра донных частиц. Выполнено сравнение полученного решения с экспериментальными данными разных авторов [Coleman et al., 2003; Nakagawa, Tsujimoto, 1984; Kuru et al., 1995], которое показало их хорошее качественное и количественное согласование. Показано, что полученное решение обобщает ряд известных эмпирических зависимостей других авторов [Coleman et al., 2003; Шуляк, 1971].

## Математическая модель задачи

В работе [Крат, Потапов, 2014] авторами на основе оригинальной формулы движения влекомых наносов [Потапов, 2013; Петров, Потапов, 2014] построена одномерная модель движения руслового потока, на основе которой получено новое уравнение русловых деформаций:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + A \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t \partial x} + B \frac{\partial \zeta}{\partial x} - C \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} - D \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^3} = 0. \quad (1)$$

Здесь  $\zeta$  — отметка донной поверхности,  $t$  — время,  $x$  — координатная ось, направленная по потоку. Коэффициенты  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  уравнения (1) имеют вид

$$\begin{aligned} A &= cS Fr^2 h, & B &= 3S Fr(a + cFr\lambda_g)U, \\ C &= (b - c(1 + Fr))S FrhU, & D &= cS Fr^2 \nu_1 h, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a &= 1 - \chi, & b &= e + c, & e &= \frac{1}{\operatorname{tg}\varphi} \left(1 - \frac{\chi}{2}\right), & c &= \frac{1 - \chi}{\operatorname{stg}\varphi}, \\
 S &= \frac{4}{3} \frac{\sqrt{\lambda_g} \lambda_g}{\kappa(1 - \varepsilon) \operatorname{tg}\varphi \rho_b}, & \rho_b &= \frac{\rho_s - \rho_w}{\rho_w}, & s &= f \rho_b, \\
 T &= \rho_w \lambda_g U^2, & T_0 &= \frac{9}{8} \frac{\kappa^2 \operatorname{tg}\varphi (\rho_s - \rho_w)}{c_x} dg, \\
 \chi &= \sqrt{\frac{T_0}{T}} = \chi_0 \frac{1}{\sqrt{Fr}}, & \chi_0 &= \sqrt{\frac{9}{8} \frac{\kappa^2 \operatorname{tg}\varphi \rho_b d}{c_x \lambda_g h}}, & Fr &= \frac{U^2}{gh},
 \end{aligned}$$

где  $h$  — средняя глубина напорного канала;  $U$  — средняя скорость потока;  $\rho_w$  — плотность жидкости;  $\rho_s$  — плотность частиц песка;  $g$  — ускорение свободного падения;  $\nu_t$  — турбулентная вязкость потока;  $\lambda_g$  — коэффициент гидравлического сопротивления, который определен, согласно работе [Гришанин, 1992], как  $\lambda_g = n \left(\frac{d}{h}\right)^{1/3}$ ,  $n = 0.08991$ ;  $d$  — диаметр донных частиц;  $\varepsilon$  — коэффициент пористости песчаного дна;  $T$  — придонное касательное напряжение;  $T_0$  — напряжение, определяющее момент начала движения донных частиц;  $c_x$  — коэффициент лобового сопротивления частиц;  $s$  — параметр стратификации активного придонного слоя, в котором переносятся частицы;  $f$  — концентрация влекаемых частиц в активном придонном слое;  $\varphi$  — угол внутреннего трения донных частиц;  $\kappa$  — постоянная Кармана;  $Fr$  — число Фруда.

## Решение задачи

Используя уравнение (1), решим задачу устойчивости песчаного дна для напорного канала. Малое возмущение донной поверхности  $\zeta$  определим как

$$\zeta = \zeta_0 h \exp(\sigma t + ikx), \quad (2)$$

где  $\zeta_0$  — безразмерный коэффициент,  $k$  — волновое число,  $\sigma$  — частота волны. Подставляя (2) в уравнение (1), получим

$$\sigma + A i \sigma k + B i k - C k^2 - D i k^3 = 0. \quad (3)$$

Из уравнения (3) получим выражение, определяющее частоту донной волны:

$$\sigma = -k \frac{B i - C k - D k^2 i}{1 + A k i}. \quad (4)$$

Выделим из выражения (4) действительную часть частоты  $\sigma$ ,  $\sigma_R = \operatorname{Re}(\sigma)$ , ответственную за скорость роста амплитуды донных возмущений:

$$\sigma_R = -k^2 \frac{C + AB + ADk^2}{1 + A^2k^2}. \quad (5)$$

Для определения максимальной скорости роста амплитуды донных возмущений [Гришанин, 1974] найдем производную по  $k$  от  $\sigma_R$  и приравняем ее к нулю:

$$\frac{d\sigma_R}{dk} = -\frac{2k(C + AB + 2ADk^2 + A^3Dk^4)}{(1 + A^2k^2)^2} = 0. \quad (6)$$

Из полученного условия (6) определим экстремальное волновое число:

$$k_{\max} = \frac{\sqrt{\sqrt{1 + \frac{A}{D}(AB - C)} - 1}}{A}, \quad (7)$$

которое позволяет определить максимально быстрорастущую длину волны  $\lambda = 2\pi/k_{\max}$  донных возмущений:

$$\lambda = \frac{2\pi c S Fr^2}{\sqrt{\sqrt{1 + S Re Fr [c Fr - e - 3 S Fr^2 c (a + c \lambda_g Fr)]} - 1}} h, \quad (8)$$

где  $Re = \frac{Uh}{\nu_i}$  — число Рейнольдса.

### Анализ решения

Выполним сравнение аналитической зависимости (8) с известными феноменологическими зависимостями других авторов [Coleman et al., 2003; Шуляк, 1971].

На рисунке 1 кривыми 1–5 представлена зависимость относительной длины донной волны  $\lambda(d, Fr)/h$  от числа Фруда для различных диаметров донных частиц  $d$ . Из графиков следует, что функция  $\lambda(d, Fr)/h$  является вогнутой, она убывает на левом интервале  $Fr_0 \leq Fr \leq Fr_{\min}$  и возрастает на правом  $Fr_{\min} \leq Fr < \infty$ .

Функция  $\lambda(d, Fr)/h$  для своей левой ветви имеет вертикальную асимптоту (см. кривые 1–5). Значение асимптоты определяется числом Фруда  $Fr_0$ , зависящим от физико-механических и гранулометрических параметров донного материала, и находится из решения уравнения

$$\sqrt{\sqrt{1 + S Re Fr_0 [c Fr - e - 3 S Fr_0^2 c (a + c \lambda_g Fr_0)]} - 1} = 0.$$

Отметим, что в решении (8) число Фруда, при котором начинается формирование донных волн  $Fr_0$ , больше числа Фруда начала движения донных частиц  $Fr_*$ , т. е. в напорном канале существует интервал  $Fr_* < Fr < Fr_0$  движения руслового потока с невозмущенным дном и только при  $Fr = Fr_0$  начинается генерация донных волн.

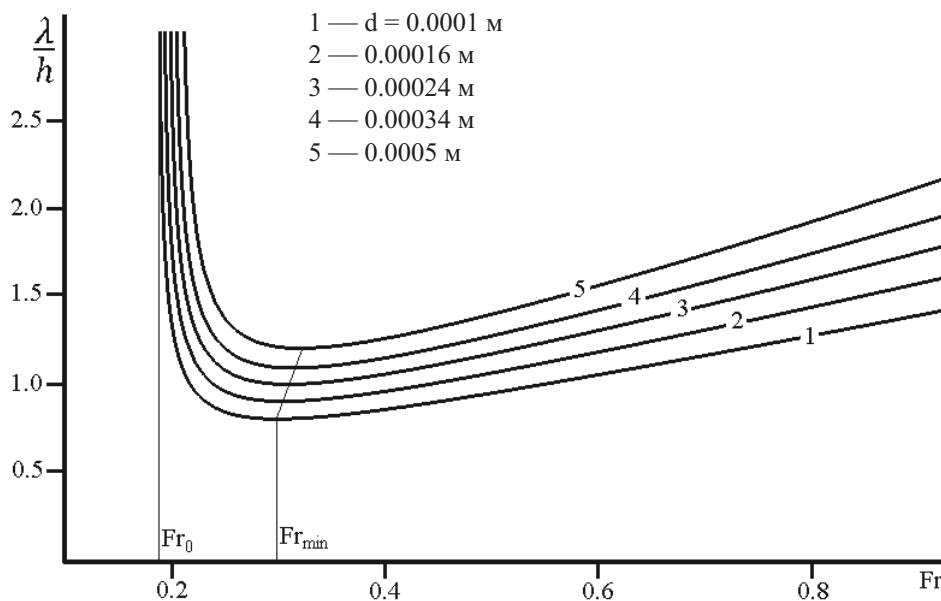


Рис. 1. Зависимость относительной длины волны  $\lambda/h$  донных возмущений от числа Фруда  $Fr$  для различных значений диаметра донных частиц  $d$

Отметим, что относительно небольшие изменения чисел Фруда потока приводят к существенному изменению длин генерируемых волн. Это хорошо заметно на рисунке 2, на котором сплошными кривыми 1–5 отображена зависимость относительной длины донной волны  $\lambda(d, Fr)/h$  от донных частиц с различной крупностью  $d$  для различных чисел Фруда, полученных по формуле (8). Пунктирными кривыми 6–8 на рисунке 2 отображаются известные феноменологические зависимости, полученные различными авторами [Coleman et al., 2003; Шуляк, 1971].

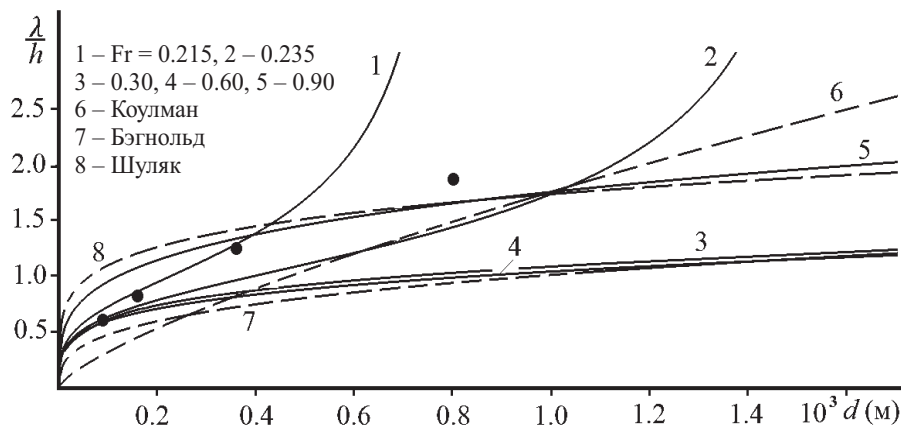


Рис. 2. Зависимость относительной длины волны  $\lambda/h$  донных возмущений от диаметра донных частиц  $d$  для различных чисел Фруда  $Fr$

Из рисунке 2 видно, что зависимость (8) (кривые 1–5) при различных числах Фруда приближается к феноменологическим зависимостям различных авторов [Coleman et al., 2003; Шуляк, 1971]. Так, при числах Фруда, характеризующих левую нисходящую ветвь (рис. 1), зависимость (8) (кривые 1, 2) близка к формуле Коулмана (9) [Coleman et al., 2003], представленная кривой 6:

$$\lambda = 31.12d^{3/4}. \quad (9)$$

При числах Фруда, близких к  $Fr_{\min}$  (кривые 3, 4), зависимость (8) близка к формуле Бэгнольда (10) [Шуляк, 1971], представленная кривой 7:

$$\lambda = C_B d^{0.3}, \quad (10)$$

где  $C_B \approx 1$  — экспериментально определяемый коэффициент.

При числах Фруда, близких к  $Fr_{\min} < Fr$  (кривая 5), зависимость (8) близка к формуле Шуляка (11) [Шуляк, 1971] (кривая 8), полученная им из теории размерностей:

$$\lambda = C_* \left( \frac{\rho_s g d^3}{\rho_w \nu^2} \right)^{0.1} \sqrt{\frac{h}{g}}, \quad (11)$$

где  $C_*$  — экспериментально определяемый коэффициент,  $\nu$  — вязкость жидкости.

Отметим, что кривые 1, 2 и 5 согласуются с экспериментальными данными Бэгнольда (точечное множество) при различных числах Фруда. Таким образом, наблюдается многозначность, когда, с одной стороны, для заданного диаметра частиц при различных числах Фруда могут наблюдаться одинаковые значения длин донных волн, а с другой — незначительные изменения чисел Фруда в области  $Fr_0 < Fr < Fr_{\min}$  могут приводить к существенным изменениям длин волн донных возмущений, что хорошо видно на рисунках 1, 2.

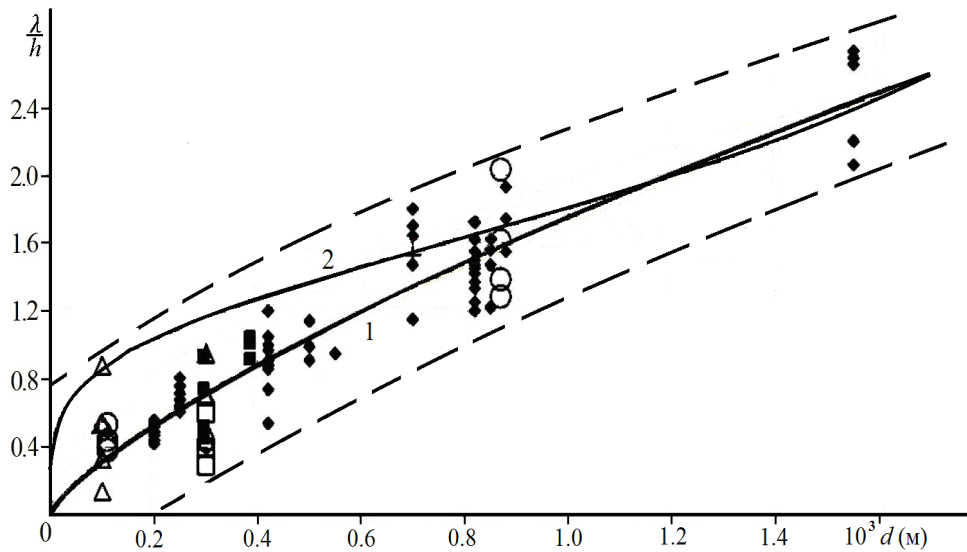


Рис. 3. Зависимость относительной длины донной волны  $\lambda/h$  от размеров донных наносов  $d$  для напорного канала. Кривая 1 определяется зависимостью (9), кривая 2 — зависимостью (8), точечные множества — экспериментальные данные различных авторов [Nakagawa, Tsujimoto, 1984; Kuru et al., 1995]

Другими словами, из графиков, представленных на рисунке 1, видно, что наличие быстро убывающей и относительно медленно возрастающей ветви функции  $\lambda(d, Fr)/h$  может приводить к неоднозначности определения значения функции при заданном диаметре донных частиц. Неоднозначность проявляется, если мы пренебрегаем даже относительно небольшим изменением гидродинамических характеристик потока, характеризуемых числом Фруда, как это сделано в зависимостях (9)–(11). Данное утверждение согласуется с экспериментальными данными различных авторов [Coleman et al., 2003], представленными на рисунке 3 точечными множествами и ограниченными пунктирными кривыми, которые определяют границы отклонений относительной длины волны донных возмущений.

Из рисунка 3 следует, что отклонение от экспериментальных данных для зависимости (9) (кривая 1, построенная по этим данным) достигает абсолютной величины  $\approx 0.4$ . Отметим, что стохастичность процесса формирования и эволюции донных волн, отмеченная в работе [Крат, Потапов, 2013], является причиной разброса измерений экспериментальных данных, не связанных с погрешностью эксперимента. Разброс измерений, в свою очередь, приводит к неоднозначностям при получении феноменологических зависимостей для длин волн в широком диапазоне чисел Фруда  $Fr > Fr_{\min}$ , в особенности при их построении на малых выборках экспериментальных данных. Тем не менее полученная зависимость (8) согласуется с известными феноменологическими зависимостями других авторов [Coleman et al., 2003; Шуляк, 1971].

## Выводы

На основе выполненного сравнительного анализа между аналитической зависимостью (8), полученной из решения линеаризованного уравнения (1), с феноменологическими зависимостями (9)–(11) и экспериментальными данными можно сделать следующие выводы:

1. Аналитическое решение (8), определяющее длины волн донных возмущений, обобщает ряд известных эмпирических формул: Коулмана, Шуляка, Бэгнольда.

2. Структура зависимости (8) указывает на существование двух гидродинамических режимов, характеризуемых числом Фруда, при которых рост донных возмущений может сильно ( $Fr_0 \leq Fr \leq Fr_{\min}$ ) или слабо ( $Fr_{\min} \leq Fr < \infty$ ) зависеть от чисел Фруда.



3. Стохастичность процесса движения донных волн может приводить к получению экспериментальных данных, имеющих существенную дисперсию. Показано, что значительная дисперсия экспериментальных данных не позволяет получить однозначную детерминированную зависимость между длиной волны донных возмущений и числом Фруда.

### Список литературы

- Барышников Н. Б.* Руслвые процессы: Учебник. — СПб. : Изд. РГГМУ, 2008. — 439 с.
- Васильев О. Ф.* Гидравлические аспекты проблем гидрологии и гидрогеологии: задачи и перспективы // Математические модели фильтрации и их приложения: Сб. научн. тр. — Новосибирск : Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева, 1999. — С. 60–70.
- Гончаров В. Н.* Динамика русловых потоков: Учебник. — Л. : Изд-во ГИМИЗ, 1962. — 368 с.
- Гришанин К. В.* Гидравлическое сопротивление естественных русел. — СПб. : Гидрометеиздат, 1992. — 181 с.
- Гришанин К. В.* Устойчивость русел рек и каналов. — Л. : Гидрометеиздат, 1974. — 143 с.
- Крат Ю. Г., Потапов И. И.* Модель стохастического развития донных волн // Вестн. Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2013. — № 2. — С. 85–91.
- Крат Ю. Г., Потапов И. И.* Об устойчивости песчаного дна напорного канала / Препринт № 197. — Хабаровск : Вычислительный центр ДВО РАН, 2014. — 12 с.
- Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Проблемы гидродинамики и их математические модели. — М. : Наука, 1973. — 420 с.
- Нестеров М. В.* Гидротехнические сооружения. — М. : Новое знание, 2006. — 616 с.
- Петров А. Г., Потапов И. И.* О развитии возмущений песчаного дна канала // ДАН. — 2010. — Т. 431, № 2. — С. 191–195.
- Петров А. Г., Потапов И. И.* О влиянии турбулентной вязкости на процессы образования и движения донных волн // ПМТФ. — 2013. — Т. 54, № 1. — С. 51–56.
- Петров А. Г., Потапов И. И.* Об устойчивости песчаного дна канала постоянной ширины // ДАН. — 2010. — Т. 433, № 2. — С. 191–195.
- Петров А. Г., Потапов И. И.* Перенос наносов под действием нормальных и касательных придонных напряжений с учетом уклона дна // ПМТФ. — 2014. — Т. 55, № 5. — С. 100–105.
- Потапов И. И.* Об уравнении удельного массового расхода влекомых наносов / Препринт № 188. — Хабаровск : Вычислительный центр ДВО РАН, 2013. — 11 с.
- Россинский К. И., Дебольский В. К.* Речные наносы. — М. : Наука, 1980. — 214 с.
- Чалов Р. С.* Общее и географическое русловедение. — М. : Изд-во МГУ, 1997. — 112 с.
- Шуляк Б. А.* Физика волн на поверхности сыпучей среды и жидкости. — М. : Наука, 1971.
- Einstein H. A.* The bedload function for sediment transportation in open channel flows. Soil. Cons. Serv. U.S. Dept. Agric. Tech. Bull. — 1950.
- Kennedy J. F.* The mechanics of dunes and antidunes in erodible bed channels // J. of Fluid Mech. — 1963. — Vol. 16, No. 4. — P. 521–544.
- Komarova N. L., Hulscher S. J. M. H.* Linear instability mechanisms for sand waves formation // J. of Fluid Mech. — 2000. — Vol. 413, — P. 219–246.
- Kuru W. C., Leighton D. T., McCreedy M. J.* Formation of waves on a horizontal erodible bed of particles // Int. J. Multiphase Flow. — 1995. — Vol. 21, No. 6. — P. 1123–1140.
- Nakagawa H., Tsujimoto T.* Spectral analysis of sand bed instability // Journal of Hydraulic Engineering. — 1984. — Vol. 110, No. 4. — P. 467–483.
- Reinolds A. J.* Waves on erodible bed of an open channel // J. of Fluid Mech. — 1965. — Vol. 22, No. 1. — P. 113–133.
- Coleman S. E., Fedele J. J., Garcia M. H.* Closed-conduit bed-forms initiation and development // Journal of Hydraulic Engineering. — 2003. — Vol. 129, No. 12. — P. 956–965.