

УДК 517.972; 519.6; 539.3

Решение краевых задач теории тонких упругих оболочек методом Неймана

Ю. С. Найштут

Самарский государственный архитектурно-строительный университет,
Россия, 443001, г. Самара, ул. Молодогвардейская, д. 194

E-mail: neustadt99@mail.ru

Получено 26 сентября 2015 г.

Изучаются возможности применения метода Неймана для решения краевых задач теории тонких упругих оболочек. Приводится вариационная формулировка задач статического расчета оболочек, позволяющая рассматривать проблемы в рамках пространств обобщенных функций. Доказывается сходимостью процедуры Неймана для оболочек с отверстиями, когда граничный контур закреплен не полностью. Численная реализация метода Неймана обычно требует значительного времени для получения надежного результата. В статье предлагается способ, улучшающий скорость сходимости процесса, позволяющий применить параллельные вычисления и их контроль во время работы алгоритма.

Ключевые слова: краевые задачи, теория тонких упругих оболочек, метод Неймана, вариационные принципы, неравенство Корна, обобщенные функции, теоремы вложения, тензор Грина

Neumann's method to solve boundary problems of elastic thin shells

Yu. S. Nayshtut

Samara State Architectural and Building University, 194 Molodogvardeyskaya st., Samara, 443001, Russia

Abstract. — This paper studies possibilities to use Neumann's method to solve boundary problems of elastic thin shells. Variational statement of statical problems for shells allows examining the problems within the space of distributions. Convergence of the Neumann's method is proved for the shells with holes when the boundary of the domain is not completely fixed. Numerical implementation of the Neumann's method normally takes a lot of time before some reliable results can be achieved. This paper suggests a way to improve convergence of the process and allows for parallel computing and checkout procedure during calculations.

Keywords: boundary problems, theory of thin elastic shells, Neumann's method, variational principles, Korn's inequality, distributions, embedding theorems, Green tensor

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2015, vol. 7, no. 6, pp. 1143–1153 (Russian).

Введение

Применение метода Неймана в задачах математической физики имеет давнюю историю. Вначале было получено доказательство существования решений краевых задач для уравнения Лапласа в случае выпуклой границы области [Neumann, 1877] путем использования потенциалов простого и двойного слоя. Построив разрешающие интегральные уравнения, Нейман предложил метод последовательных приближений для их численного решения (метод Неймана).

Существование решений для произвольной гладкой границы доказал Фредгольм [Fredholm, 1900]. В работе [Fredholm, 1903], развивая общую теорию интегральных уравнений вида

$$\varphi(x) + \lambda \int_a^b K(x, s) \varphi(s) ds = f(x) \quad (1)$$

на отрезке $[a, b]$, Фредгольм обнаружил, что резольвента написанного уравнения является аналитической функцией в круге $|\lambda| < \lambda_1$, где λ_1 — наименьшее по модулю собственное значение однородного уравнения (1). Последнее обстоятельство может быть использовано в доказательстве сходимости ряда Неймана для произвольного контура. Действительно, пусть известно, что внутри круга $|\lambda| < 1$ резольвента регулярна, а на контуре $|\lambda| = 1$ точка $\lambda = 1$ не является ее полюсом. Тогда преобразование параметра λ по формуле

$$\lambda = \chi / (r - t\chi), \quad r - t = 1, \quad |\chi| \leq 1, \quad (2)$$

означает, что в круге $|\chi| \leq 1$ нет особенностей резольвенты. Подставив (2) в (1) и переразложив ряд, отвечающий функции $\varphi(x)$ по параметру χ , образуем сходящийся ряд для точки $\lambda = 1$. Ряд Неймана получится, если принять $r = 2$. Описанный прием для решения интегральных уравнений применялся Канторовичем [Канторович, Крылов, 1950].

Задачи теории упругости сводятся методом потенциала к сингулярным интегральным уравнениям, для которых доказываются теоремы Фредгольма [Михлин, 1962]. Поэтому применимо преобразование (2) и ряд Неймана сходится. Этот результат опубликован в [Pham The Lai, 1967; Найштут, 1969, 1970]. Попутно было установлено, что численная процедура Неймана может быть интерпретирована без привлечения интегральных уравнений, только в терминах уравнений в частных производных.

Дифференциальные уравнения допускают естественную вариационную формулировку проблем теории упругости. Отвечающий задаче функционал симметричен, и после доказательства неравенства Корна вариационные проблемы теории упругости были решены [Михлин, 1952] на этом пути. Возник вопрос, можно ли обосновать сходимость ряда Неймана в задачах теории упругости без привлечения интегральных уравнений. Задача была решена в работе [Найштут, 1978], в которой существенно использовались теоремы вложения в пространствах Соболева–Слободецкого [Слободецкий, 1958].

Перенесение метода Неймана на задачи теории оболочек в вариационной постановке требует доказательства неравенства Корна. В последние годы оно получено в работах ряда авторов [Ciarlet, 2010; Назаров, 2008]. На этой основе в п. 2 доказывается сходимость ряда Неймана в пространстве обобщенных функций для многосвязных оболочек с отверстиями. Предварительно в п. 1 приводится механическая постановка задачи теории оболочек в форме дифференциальных уравнений и в виде вариационных принципов. В п. 1 не определяются пространства, в которых разыскивается решение задачи. Начиная с п. 2, вводятся точные математические определения. В п. 3 доказана сходимость ряда Неймана для смешанных краевых задач теории оболочек, а в п. 4 обоснована процедура ускорения сходимости последовательных приближений для оболочек с отверстиями.

1. Формулировка краевых задач для оболочек с отверстиями

Рассматривается оболочка толщиной h , срединная поверхность которой представляет собой многосвязную область D^+ (рис. 1). Внешний контур $S_0 = S_1 + S_2$ состоит из двух частей: на S_1 отсутствуют перемещения, на S_2 — усилия. На внутренних контурах S_i усилия отсутствуют. В дальнейшем объединение контуров S_i обозначается буквой S . Поверхность задана ортогональными координатами главной кривизны α_1, α_2 . Кроме того, для упрощения последующих выкладок предполагается, что контур S совпадает одной из линий $\alpha_1 = \text{const}$.

Для произвольной точки поверхности $x \in D^+$ определим три вектора: e_1, e_2 , характеризуют касательную плоскость, а e_3 — нормаль. Нагрузка приложена только к контурам S . В точке контура, где положение касательной определяет вектор s , она сводится к силам Q_1^0, Q_2^0, Q_3^0 , направленным вдоль векторов e_1, e_2, e_3 , а также моменту $Q_4^0 = M_s$, направленному вдоль вектора s .

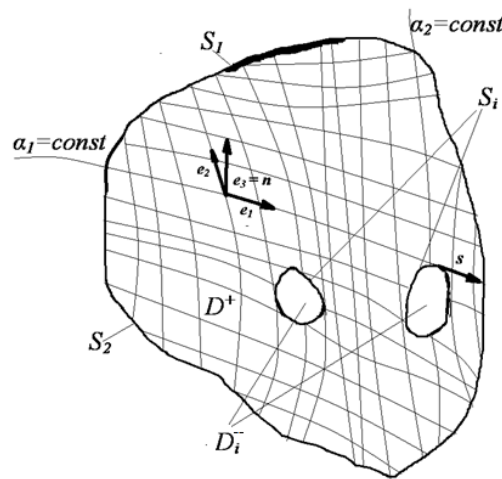


Рис. 1. Срединная поверхность оболочки с отверстиями

Под действием статической нагрузки $\{Q_1^0, Q_2^0, Q_3^0, Q_4^0\}$ точки оболочки перемещаются в местной системе координат на вектор $\mathbf{u}(u_1, u_2, u_3)$. Потенциальная энергия деформации упругой тонкой оболочки дается формулой [Новожилов, 1962]

$$W_{D^+}(\mathbf{u}) = W_\varepsilon(\mathbf{u}) + W_\chi(\mathbf{u}), \quad (3)$$

$$W_\varepsilon(\mathbf{u}) = \frac{Eh}{2(1-\nu^2)} \int_{D^+} \left[\frac{1+\nu}{2} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2 + \frac{1-\nu}{2} (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + 2(1-\nu) \left(\frac{\omega}{2} \right)^2 \right] A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2,$$

$$W_\chi(\mathbf{u}) = \frac{Eh^3}{24(1-\nu^2)} \int_{D^+} \left[\frac{1+\nu}{2} (\chi_1 + \chi_2)^2 + \frac{1-\nu}{2} (\chi_1 - \chi_2)^2 + 2(1-\nu) \tau^2 \right] A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2,$$

$$\varepsilon_1(\mathbf{u}) = \varepsilon_1 = \frac{1}{A_1} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} + \frac{u_3}{R_1},$$

$$\varepsilon_2(\mathbf{u}) = \varepsilon_2 = \frac{1}{A_2} \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} + \frac{u_3}{R_2},$$

$$\begin{aligned}\omega(\mathbf{u}) &= \omega = \frac{A_2}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{u_2}{A_2} \right) + \frac{A_1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{u_1}{A_1} \right), \\ \chi_1(\mathbf{u}) &= \chi_1 = \frac{1}{A_1} \frac{\partial \mathcal{G}_1}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \mathcal{G}_2, \\ \chi_2(\mathbf{u}) &= \chi_2 = \frac{1}{A_1} \frac{\partial \mathcal{G}_2}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \mathcal{G}_2, \\ \tau(\mathbf{u}) &= \tau = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{A_1} \frac{\partial \mathcal{G}_2}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \mathcal{G}_1 + \frac{1}{A_2} \frac{\partial \mathcal{G}_1}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \mathcal{G}_2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{R_1} \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} u_2 \right) + \frac{1}{R_2} \left(\frac{1}{A_1} \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} u_1 \right) \right].\end{aligned}\quad (4)$$

В написанных формулах A_1 и A_2 — коэффициенты первой квадратичной формы поверхности, E и ν — модуль Юнга и число Пуассона материала оболочки. Параметры R_1 и R_2 — главные радиусы кривизны. Углы поворота нормали выражаются через перемещения точек поверхности по формулам

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_1(\mathbf{u}) &= \mathcal{G}_1 = -\frac{1}{A_1} \frac{\partial u_3}{\partial \alpha_1} + \frac{u_1}{R_1}, \\ \mathcal{G}_2(\mathbf{u}) &= \mathcal{G}_2 = -\frac{1}{A_2} \frac{\partial u_3}{\partial \alpha_2} + \frac{u_2}{R_2}.\end{aligned}\quad (5)$$

Работа сил $Q^0 = \{Q_1^0, Q_2^0, Q_3^0, Q_4^0\}$ на контуре S выражается интегралом

$$P(Q^0, \mathbf{u}) = \int_S (Q_1^0 u_1 + Q_2^0 u_2 + Q_3^0 u_3 + Q_4^0 \mathcal{G}_1) ds.$$

Задача статического расчета оболочки с отверстиями состоит в нахождении вектора \mathbf{u} , который доставляет минимум полной энергии

$$\Pi(\mathbf{u}) = W_{D^+}(\mathbf{u}) + P(\mathbf{u});\quad (6)$$

и обращается вместе с углом поворота нормали в нуль на контуре S_1 :

$$\mathbf{u}(S_1) = \mathbf{0}, \quad \mathcal{G}_1(\mathbf{u}) = 0.\quad (7)$$

Вариация функционала $\Pi(\mathbf{u})$, равная нулю, и закрепление границы S_1 равносильны трем дифференциальным уравнениям

$$R(\mathbf{u}) = \mathbf{0}, \quad x \in D^+\quad (8)$$

и четырьмя граничными условиями

$$T_k^+(\mathbf{u}) = Q_k^0, \quad k = 1, 2, 3, 4, \quad x \in S,\quad (9)$$

$$T_k(\mathbf{u}) = 0, \quad x \in S_2,\quad (10)$$

$$u_1 = u_2 = u_3 = \mathcal{G}_1 = 0, \quad x \in S_1.\quad (11)$$

В линейные операторы $T(\mathbf{u})$ входят первые производные функций u_1, u_2 и третьи производные u_3 . Физический смысл этих операторов — предельные значения внутренних усилий при стремлении точки $x \in D^+$ к контуру S со стороны области D^+ . Явный вид операторов $R(\mathbf{u})$ и $T(\mathbf{u})$ не будем выписывать, так как он в дальнейшем не используется.

Обозначим множество вектор-функций, удовлетворяющих (8), (10), (11), $E(\mathbf{u})$, и будем искать на этом множестве вектор, для которого справедливо (9).

Решение разыскивается по такому правилу. Дополним многосвязную область D^+ односвязными D_i^- так, чтобы образовалась односвязная оболочка $D = D^+ + \sum D_i^-$. В области D надо найти непрерывный вектор \mathbf{u} , удовлетворяющий равенствам

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^+(x) &= \mathbf{u}^-(x) \quad \mathcal{G}_1^+ = \mathcal{G}_1^-, \quad x \in S, \\ T_k^+(\mathbf{u}) - T_k^-(\mathbf{u}) &= -T_k^-(\mathbf{u}) + Q_k^0, \quad k=1, 2, 3, 4, \quad x \in S. \end{aligned} \tag{12}$$

Знак минус в индексе — это предельные значения величин при стремлении точки из внутренней области D_i^- к границе S .

Сформулированную задачу решим по схеме последовательного приближения:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_n^+(x) &= \mathbf{u}_n^-(x) = \mathbf{u}_n(x), \quad x \in D, \quad \mathcal{G}_{1n}^+ = \mathcal{G}_{1n}^- = \mathcal{G}_{1n}, \quad x \in S, \\ n &= 1, 2, \dots, n, \\ T_k^+(\mathbf{u}_n) - T_k^-(\mathbf{u}_n) &= -T_k^-(\mathbf{u}_{n-1}) + Q_k^0, \quad k=1, 2, 3, 4, \quad x \in S. \end{aligned} \tag{13}$$

Обозначая $\mathbf{w}_n = \mathbf{u}_n - \mathbf{u}_{n-1}$, имеем

$$\begin{aligned} T_k^+(\mathbf{w}_0) - T_k^-(\mathbf{w}_0) &= Q_k^0, \quad k=1, 2, 3, 4, \\ T_k^+(\mathbf{w}_n) - T_k^-(\mathbf{w}_n) &= -T_k^-(\mathbf{w}), \quad n=1, 2, \dots, n, \\ \mathbf{w}_n^+(x) &= \mathbf{w}_n^-(x), \quad \mathcal{G}_{1n}^+ = \mathcal{G}_{1n}^-, \quad \mathbf{u}_n = \sum_{i=0}^n \mathbf{w}_i. \end{aligned} \tag{14}$$

Заметим, что

$$W_{D^+}^*(\mathbf{w}, \mathbf{u}) = \int_S (T_1^+(\mathbf{w})u_1 + T_2^+(\mathbf{w})u_2 + T_3^+(\mathbf{w})u_3 + T_4^+(\mathbf{w})\mathcal{G}) ds. \tag{15}$$

Здесь билинейная форма $W_{D^+}^*(\mathbf{w}, \mathbf{u})$ получается из квадратичного функционала $W_{D^+}(\mathbf{u})$ путем замены каждого квадратного члена, зависящего от одного вектора, на скалярное произведение одинаковых функций, зависящих от двух векторов.

Например, $(\varepsilon_1(\mathbf{u}) + \varepsilon_2(\mathbf{u}))^2$ заменяется на $(\varepsilon_1(\mathbf{u}) + \varepsilon_2(\mathbf{u}))((\varepsilon_1(\mathbf{v}) + \varepsilon_2(\mathbf{v}))/2)$.

Остальные замены производятся аналогично. Поэтому сходимость процесса (14) в норме, порожденной скалярным произведением $W_{D^+}^*(\mathbf{w}, \mathbf{u})$, обеспечена, если для любого вектора \mathbf{u} , удовлетворяющего (8) при $x \in D$ и непрерывного на S , имеет место неравенство

$$W_{D^+}(\mathbf{u}) > c W_{D^-}(\mathbf{u}). \tag{16}$$

Здесь и в дальнейшем буквой c обозначаются различные положительные постоянные.

Действительно, из (12) и (14) следует предельное равенство $W_{D^+}(\mathbf{u}) + W_{D^-}(\mathbf{u}) = W_{D^-}(\mathbf{u})$, и для сходимости (14) достаточно удовлетворить неравенству

$$\sup \frac{W(\mathbf{u})}{W(\mathbf{u}) + W(\mathbf{u})} < 1,$$

которое равносильно (16). В следующем пункте описаны условия, при которых выполняется неравенство (16).

2. Доказательство сходимости ряда Неймана (14)

Область, ограниченную контуром S_0 , считаем липшицевой. Для двумерных оболочек это означает, что области D^+ , D^- могут быть разбиты на конечное число кусков таким образом,

что для каждого из них существует проекция на плоскость со свойством

$$|z^* - z| < c|x^* - x|. \quad (17)$$

Здесь слева — декартово расстояние между точками z^* и z , лежащими на поверхности, а справа — расстояние между проекциями тех же точек.

Решение задачи разыскивается в пространстве $E(\mathbf{u})$, порождаемом скалярным произведением $W_D^*(\mathbf{w}, \mathbf{u})$. Пространство $E(\mathbf{u})$ получается в результате пополнения по норме

$$\|\mathbf{u}\|_W^2 = W_D(\mathbf{u})$$

пространства $K(\mathbf{u}) = \{K_1(u_1), K_1(u_2), K_2(u_3)\}$, где u_1, u_2, u_3 — составляющие вектора перемещений \mathbf{u} . Множество $K_1(u)$ — пространство непрерывных вместе с первыми производными функций, а $K_2(u)$ — пространство функций, имеющих вторые непрерывные производные.

Определим также в области D класс обобщенных функций

$$H(D) = \{H^1(u_1) \times H^1(u_2) \times H^2(u_3)\}.$$

Здесь H^1, H^2 — пространства Соболева с нормами соответственно

$$\|u\|_{H^1} = \left\{ \sum_{0 \leq m \leq 1} (D^m u)^2 \right\}^{1/2}, \quad \|u\|_{H^2} = \left\{ \sum_{0 \leq m \leq 2} (D^m u)^2 \right\}^{1/2}.$$

Буквами $D^m u$ обозначается норма обобщенной производной порядка m в пространстве $L_2(D)$.

Норму в $H(D)$ определим формулой

$$\|\mathbf{u}\|_{H(D)} = \|u_1\|_{H^1} + \|u_2\|_{H^1} + \|u_3\|_{H^2}.$$

Ясно, что

$$\|\mathbf{u}\|_W^2 \leq c \|\mathbf{u}\|_{H(D)}^2. \quad (18)$$

Определим на контуре S пространство 4-векторов \mathbf{u} с составляющими $u_1, u_2, u_3, \mathcal{G}_1$:

$$H(S) = \{H^{1/2}(u_1) \times H^{1/2}(u_2) \times H^{3/2}(u_3) \times H^{1/2}(\mathcal{G}_1)\}.$$

В классе Соболева–Слободецкого норма задается формулой

$$\|u\|_{H^m} = \left\| (1 + |t|^2)^{m/2} \hat{u}(t) \right\|_{L_2(D)}.$$

Здесь $\hat{u}(t)$ — преобразование Фурье функции $u(x)$. Норму в $H(S)$ примем в виде

$$\|\mathbf{u}\|_S = \|u_1\|_{H^{1/2}} + \|u_2\|_{H^{1/2}} + \|u_3\|_{H^{3/2}} + \|\mathcal{G}_1\|_{H^{1/2}}. \quad (19)$$

Если контур S удовлетворяет условию Липшица, то существует след векторов из $H(D)$ в $H(S)$, что выполнено неравенство

$$\|\mathbf{u}\|_S \leq c \|\mathbf{u}\|_{H_D}. \quad (20)$$

Воспользуемся тем, что вектор \mathbf{u} удовлетворяет (8) внутри области D^+ . Поэтому выполняется неравенство Корна

$$\|\mathbf{u}\|_W \leq c \|\mathbf{u}\|_{H_D}. \quad (21)$$

Доказательство неравенства Корна для различных задач привлекало многих авторов, начиная с работ Фридрикса [Friedrichs, 1947; Михлин, 1952]. Применительно к упругим оболочкам оно найдено Сьярле [Ciarlet, Mardera, 2001]. Из (20), (21) следует

$$\| \mathbf{u} \|_W \leq c \| \mathbf{u} \|_S. \tag{22}$$

С другой стороны, в области D^- функция $W_{D^-}(\mathbf{u})$ достигает минимума при любом возможном продолжении вектора \mathbf{u} с контура S внутрь области. Для липшицевых контуров непрерывное продолжение возможно [Бесов, Ильин, Никольский, 1975; Мазья, 1985], поэтому

$$W_{D^-} \leq c \| \mathbf{u} \|_S^2. \tag{23}$$

Комбинируя (22) и (23), получаем доказательство неравенства (16), и сходимость ряда Неймана обоснована.

Существенно, что каждый член ряда (14) может быть вычислен явно как потенциал простого слоя, если известна матрица Грина G_{in} для области D , по формуле

$$\mathbf{w}_n = \int_S G_{ik} \times T_k^-(\mathbf{w}_{n-1}) ds, \tag{24}$$

$$G_{ik} = \begin{vmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} & G_{14} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} & G_{24} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} & G_{34} \end{vmatrix}.$$

Крестик в формуле (24) означает умножение матрицы на столбец. В матрице G_{ik} первые три столбца — это три вектора, которые являются решениями уравнений (8), когда стоящий справа ноль заменяется тремя столбцами матрицы Δ :

$$\Delta = \begin{vmatrix} \delta & 0 & 0 \\ 0 & \delta & 0 \\ 0 & 0 & \delta \end{vmatrix}.$$

Здесь буквой δ обозначается δ -функция, а четвертый столбец — это три функции

$$G_{14} = -\frac{1}{A_1} \frac{\partial G_{31}}{\partial \alpha_1} + \frac{G_{11}}{R_1}, \quad G_{24} = -\frac{1}{A_1} \frac{\partial G_{32}}{\partial \alpha_1} + \frac{G_{12}}{R_2}, \quad G_{34} = -\frac{1}{A_1} \frac{\partial G_{33}}{\partial \alpha_1}. \tag{25}$$

В формулах (25) предполагается, что координатная линия $\alpha_1 = \text{const}$ совпадает с контуром S . Если последнее обстоятельство не выполняется, то формулы (25) удлинятся, но компоненты четвертого столбца остаются линейными функциями от элементов первых трех столбцов.

Поскольку потенциал простого слоя удовлетворяет (8), непрерывен на S , а оператор $T_k(\mathbf{w}_n)$ имеет на контуре S скачок, равный $T_k(\mathbf{w}_{n-1})$, формула (24) реализует алгоритм (14).

В задачах теории упругости для бесконечных областей (тензор Грина состоит лишь из фундаментального решения) и для расчета изгибаемых пластин (когда можно явно записать формулы для тензора Грина) вычисления сводятся к квадратурам сингулярных интегралов.

3. Применение метода Неймана к смешанным задачам теории оболочек

Ряд Неймана (14) может быть построен и для других краевых задач теории оболочек. Покажем это на примере смешанной задачи, когда внутри области D^- вектор \mathbf{u} удовлетворяет (8), часть контура S_1 зашкреплена, а на S_2 действуют силы $\mathbf{Q}^0 = \{Q_1^0, Q_2^0, Q_3^0, Q_4^0\}$ (рис. 2).

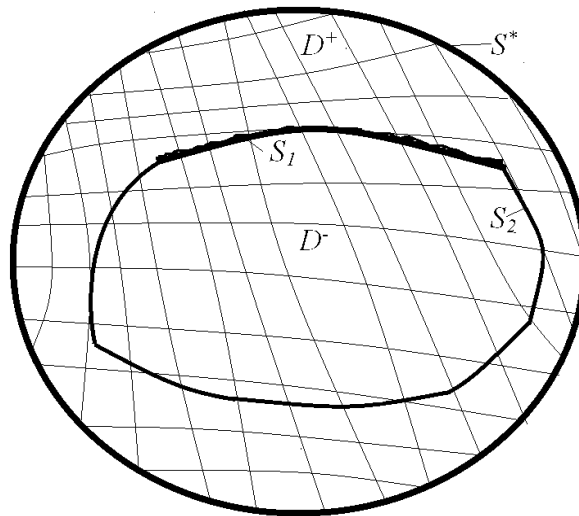


Рис. 2. Оболочка со смешанными краевыми условиями D^- и ее дополнение D^+

На кривой S_1 определим строку (4-вектор) \mathbf{u}^* с компонентами $\{u_1, u_2, u_3, \mathcal{G}_1\}$.

Поставим смешанную задачу теории оболочек

$$R(\mathbf{u}) = \mathbf{0}, x \in D^-, \mathbf{u}^* = \mathbf{0}, x \in S_1, T(\mathbf{u}) = \mathbf{Q}^0, x \in S_2. \quad (26)$$

Как в п. 2, дополним область D^- поверхностью D^+ до границы S^* и будем в расширенной области $D^- + D^+ = D$ искать такой вектор \mathbf{u} , что

$$\begin{aligned} R(\mathbf{u}) &= \mathbf{0}, x \in D, \mathbf{u}^* = \mathbf{0}, x \in S^*, \\ \mathbf{u}_-^* - \mathbf{u}_+^* &= -\mathbf{u}_+^*, T(\mathbf{u}) - T(\mathbf{u}) = \mathbf{0}, x \in S_1, \\ \mathbf{u}_-^* - \mathbf{u}_+^* &= \mathbf{0}, T(\mathbf{u}) - T(\mathbf{u}) = -T(\mathbf{u}) + \mathbf{Q}^0, x \in S_2. \end{aligned} \quad (27)$$

Для задачи (27) процедура Неймана (14) записывается в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_n &= \sum_{i=0}^n \mathbf{w}_i, R(\mathbf{w}_n) = \mathbf{0}, x \in D, \mathbf{w}_n = \mathbf{0}, x \in S^*, \\ \mathbf{w}_{-n}^* - \mathbf{w}_{+n}^* &= -\mathbf{w}_{+(n-1)}^*, T(\mathbf{w}) - T(\mathbf{w}) = \mathbf{0}, x \in S_1, \\ \mathbf{w}_{-n}^* - \mathbf{w}_{+n}^* &= \mathbf{0}, T(\mathbf{w}) - T(\mathbf{w}) = -T_k^+(\mathbf{w}), x \in S_2. \end{aligned} \quad (28)$$

Применив формулу (15) к контуру $S = S_1 + S_2$, видим, что сходимость ряда (28) обеспечена, если выполнено неравенство (16). Ранее это неравенство доказывалось на основе того, что $W_{D^+}(\mathbf{u})$ и $W_{D^-}(\mathbf{u})$ оценивались через норму в гильбертовом пространстве \mathbf{u} .

В задаче (28) граничные условия на контуре S_1 близки к условиям задачи Неймана для эллиптического уравнения. Поэтому задачу (28) не удастся сформулировать в рамках гильбертова пространства, но она допускает интерпретацию в банаховом пространстве соболевских функций отрицательного порядка.

Определим норму вектора \mathbf{u} формулой

$$\|\mathbf{u}\|_S = \|T\mathbf{u}\|_{S_1} + \|\mathbf{u}\|_{S_1}. \quad (29)$$

Второй член находится по формуле (19), а первый — это норма 4-вектора в пространстве

$$H^*(S_1) = \{H^{-1/2}(u_1) \times H^{-1/2}(u_2) \times H^{-3/2}(u_3) \times H^{-1/2}(\mathcal{G}_1)\},$$

которая вычисляется по правилу

$$\|T\mathbf{u}\|_{S_1} = \|T_1(\mathbf{u})\|_{H^{-1/2}} + \|T_2(\mathbf{u})\|_{H^{-1/2}} + \|T_3(\mathbf{u})\|_{H^{-3/2}} + \|T_4(\mathbf{u})\|_{H^{-1/2}}. \quad (30)$$

Если равенства (28) толковать как тождества

$$W_{D^+}^*(\mathbf{v}, \mathbf{w}_n) + W_{D^-}^*(\mathbf{v}, \mathbf{w}_n) = P_S^*(\mathbf{v}, \mathbf{w}_{n-1}), \quad (31)$$

которые должны выполняться с любым вектором $\mathbf{v} \in H(D)$ и

$$P_S^*(\mathbf{v}, \mathbf{w}_{n-1}) = P(T\mathbf{v}, \mathbf{w}_{n-1}), T\mathbf{v} \in H^*(S_1); P_S^*(\mathbf{v}, \mathbf{w}_{n-1}) = P(\mathbf{v}, T\mathbf{w}_{n-1}), \mathbf{v} \in H(S_2), \quad (32)$$

то получим для задачи (31), (32) с учетом теорем вложения для области D^+ такие оценки для вектора любого приближения $\mathbf{u} = \mathbf{w}_n$:

$$\|\mathbf{u}\|_{H(D^+)} \leq c \|\mathbf{u}\|_S. \quad (33)$$

Доказательству неравенств типа (33) для эллиптических систем, начиная с 1960 годов, посвящено много работ [Каган, 1962; Ciarlet, 2000; Агранович, 2014].

С другой стороны, неравенство Корна [Ciarlet, 2010] для области D^- позволяет написать

$$\|\mathbf{u}\|_{H(D^-)} \leq c \|\mathbf{u}\|_S. \quad (34)$$

Последние соотношения равносильны неравенству (16), сходимость процесса Неймана в энергетической норме обеспечена.

Каждый член ряда (28) может быть выписан явно, если ввести сопряженную матрицу Грина (аналог потенциала двойного слоя)

$$\mathbf{w}_n = \int_{S_2} G_{ik} \times T_i^+(\mathbf{w}_{n-1}) ds + \int_{S_1} T^{\wedge} G_{ik} \times (\mathbf{w}_{+(n-1)}^*) ds. \quad (35)$$

Первый интеграл не отличается от (24), а матрица $T^{\wedge} G_{ik}$ запишется так:

$$T^{\wedge} G_{ki} = \begin{vmatrix} T^{\wedge} G_{11} & T^{\wedge} G_{12} & T^{\wedge} G_{13} & T^{\wedge} G_{14} \\ T^{\wedge} G_{21} & T^{\wedge} G_{22} & T^{\wedge} G_{23} & T^{\wedge} G_{24} \\ T^{\wedge} G_{31} & T^{\wedge} G_{32} & T^{\wedge} G_{33} & T^{\wedge} G_{34} \end{vmatrix}.$$

Элементы написанной матрицы образуются по формулам

$$T^{\wedge} G_{ki} = T_i(\mathbf{g}_k), \quad k = 1, 2, 3, \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad \mathbf{g}_k = \{G_{1k}, G_{2k}, G_{3k}\} \quad (36)$$

Действительно, первое уравнение из (27) следует из определения тензора Грина, второе — в силу того, что потенциал двойного слоя имеет на S_2 скачок перемещений \mathbf{w}_{n-1}^* , а в то же время оператор $T_k(\mathbf{w}_n)$ непрерывен (аналог теоремы Ляпунова [Гюнтер, 1953] в теории потенциала). Первый интеграл в (35) непрерывен и имеет скачок, равный $T_i(\mathbf{w}_{n-1})$, на контуре S_2 (аналог потенциала простого слоя). Таким образом, можно получить решение смешанной задачи теории оболочек для произвольной границы, если известна матрица Грина для одной стандартной области.

4. Улучшение сходимости рядов Неймана для оболочек с отверстиями

Формулы (24), (35) показывают, что упругое напряженно-деформированное состояние оболочек сложной формы можно описать на основе расчета сравнительно простых односвяз-

ных тел. В то же время численный анализ многосвязных оболочек свидетельствует о том, что вблизи отверстий наблюдается значительная концентрация напряжений. Следовательно, сходимость рядов (14) не должна быть слишком быстрой. Для небольших отверстий параметр c в формуле (16) должен приближаться к нулю. Возникает задача улучшения сходимости рядов (14) для оболочек с малыми отверстиями.

Рассмотрим близкую задачу нахождения собственных значений λ_i и собственных вектор-функций \mathbf{q}_i системы (37)

$$\begin{aligned} T_k^+(\mathbf{q}_i) - T_k^-(\mathbf{q}_i) &= -\lambda_i T_k^-(\mathbf{q}_i), \quad x \in S, \\ R(\mathbf{q}_i) &= \mathbf{0}, \quad \mathbf{q}_i^+(x) = \mathbf{q}_i^-(x), \quad x \in D. \end{aligned} \quad (37)$$

Формула (15) сводит поставленный вопрос к задаче существования дискретного спектра и соответствующих собственных функций в гильбертовом пространстве. Так как эта задача разрешима, то любой вектор пространства $E(\mathbf{u})$ можно разложить в сходящийся ряд по ортонормированной системе \mathbf{q}_i

$$T_k^-(\mathbf{w}_0) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i T_k^-(\mathbf{q}_i). \quad (38)$$

В силу симметрии формы $W_D^*(\mathbf{w}, \mathbf{u})$ и неравенства (16) все собственные числа действительны и превосходят единицу:

$$\lambda_i = \{1 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \infty\}. \quad (39)$$

Преобразование каждого члена ряда (38) по формуле (14) с учетом (37) приводит к равенству

$$T_k^+(\mathbf{q}_i)_n - T_k^-(\mathbf{q}_i)_n = -T_k^- a_i (\mathbf{q}_i)_{(n-1)} = \frac{a_i}{\lambda_i} (T_k^+(\mathbf{q}_i) - T_k^-(\mathbf{q}_i))_{(n-1)}. \quad (40)$$

Это равенство показывает, что после n итераций ряд (38) превратится в

$$T_k^-(\mathbf{w}_0)_n = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_i}{\lambda_i^n} T_k^-(\mathbf{q}_i). \quad (41)$$

Вследствие (39) ряд (41) асимптотически стремится как геометрическая прогрессия к первой собственной функции системы (37):

$$T_k^-(\mathbf{w}_n) = \frac{a_1}{\lambda_1^n} T_k^-(\mathbf{q}_1). \quad (42)$$

Свойство (42) часто используется в теории симметричных интегральных уравнений. Оно не только позволяет ускорить процесс вычислений путем суммирования образующейся геометрической прогрессии, но и служит критерием правильности работы алгоритма. Другое достоинство схемы (14) состоит в возможности использования параллельных вычислений при нахождении интегралов (24), (35).

Список литературы

- Агранович М. С.* Соболевские пространства, их обобщения и эллиптические задачи в областях с гладкой и липшицевой границей. Электронное издание. — М.: МЦНМО, 2014. — 379 с.
- Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения. — М.: Наука, 1975. — 482 с.
- Гюнтер Н. М.* Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики. — М.: Гостехиздат, 1953. — 415 с.

- Каган П. Б.* Функциональные пространства С. Л. Соболева отрицательного порядка и их приложение к задаче Неймана // Изв. вузов. Матем. — 1962. — № 5. — С. 43–46.
- Канторович Л. В., Крылов В. И.* Приближенные методы высшего анализа (Изд. 3). — М.: Гостехиздат, 1950. — 697 с.
- Мазья В. Г.* Пространства С. Л. Соболева. — Л.: Изд-во ЛГУ, 1985. — 415 с.
- Михлин С. Г.* Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. — М.: Физматгиз, 1962. — 254 с.
- Михлин С. Г.* Проблема минимума квадратичного функционала. — М.–Л.: Гостехиздат, 1952. — 216 с.
- Назаров С. А.* Неравенства Корна для упругих сочленений массивных тел, тонких пластин и стержней // Успехи математических наук. — 2008. — Т. 63, Вып. 1. — С. 37–110.
- Найшутт Ю. С.* О расчете оболочек с отверстиями // Прикл. математика и механика. — 1969. — Т. 33, № 4. — С. 764–768.
- Найшутт Ю. С.* Об одном методе расчета пластинок с отверстиями и его численной реализации // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. — 1970. — № 1. — С. 80–90.
- Найшутт Ю. С.* Об одном энергетическом неравенстве и его применении в теории упругости // Прикладные вопросы системного анализа. Куйбышев: Изд-во Куйбышевского госуниверситета, 1978. — С. 138–145.
- Новожилов В. В.* Теория тонких оболочек. — Л.: Судпромгиз, 1962. — 431 с.
- Слободецкий Л. Н.* Обобщенные пространства Соболева и их приложения к краевым задачам для дифференциальных уравнений в частных производных // Ученые записки Ленинградского гос. пед. ин-та. — 1958. — Т. 197. — С. 54–112.
- Ciarlet P. G., Maddare S.* On Korn's inequalities in curvilinear coordinates // Mathematical Models and Methods in Applied Sciences. — 2001. — Vol. 11, No. 8. — P. 1379–1391.
- Ciarlet P. G.* On Korn's inequality // Chinese Annals of Math Ser B. — 2010. — Vol. 31B(5). — P. 607–618.
- Ciarlet P. G.* Mathematical elasticity. Vol. III: Theory of shells, Collection "Studies in Mathematics and its applications". North-Holland. Amsterdam, 2000. — 659 p.
- Fredholm I.* Sur une nouvelle methode pour la resolution du probleme de Dirichlet (1900) // Coll. works, Mittag-Leffler Institute, Malmo, 1955.
- Fredholm I.* Sur une classe d'equations fonctionnelles // Acta Mathematica. — 1903. — Vol. 27. — P. 365–390.
- Friedrichs K. O.* On the boundary-value problems of the theory of elasticity and Korn's inequality // Annals of Mathematics. — 1947. — Vol. 48, No. 2. — P. 441–471.
- Neumann C.* Untersuchungen über das logarithmische und Newton'sche Potential. Teubner Leipzig, 1877. — 368 p.
- Pham The Lai* Potentiels e'lastique // Journal de mecanique. — 1967. — Vol. 6, No. 2. — P. 211–242.