КОМПЬЮТЕРНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ И МОДЕЛИРОВАНИЕ 2015 Т. 7 № 6 С. 1185−1203

Ки&М

МОДЕЛИ В ФИЗИКЕ И ТЕХНОЛОГИИ

УДК: 519.6

Разработка, калибровка и верификация модели движения трафика в городских условиях. Часть I

А. Е. Алексеенко[1,2], Я. А. Холодов[1,2,a], А. С. Холодов[1,2], А. И. Горева[1], М. О. Васильев[1], Ю. В. Чехович[1,3], В. Д. Мишин[1,2], В. М. Старожилец[1]

[1] Московский физико-технический институт,
Россия, 141700, Московская область, г. Долгопрудный, пер. Институтский, д. 9
[2] Институт автоматизации проектирования РАН,
Россия, 123056, г. Москва, ул. 2-ая Брестская, д. 19/18
[3] Вычислительный Центр РАН
Россия, 119333, г. Москва, ул. Вавилова, д. 40

E-mail: [a] kholodov@crec.mipt.ru

Получено 09 сентября 2015 г.

В данной работе исследуется проблема унификации процедуры разработки и калибровки математической модели движения транспортного потока на автомобильной многополосной дороге в городских условиях. При этом использовался макроскопический подход, при котором транспортный поток описывается нелинейной системой гиперболических уравнений (для плотности и скорости потока) второго порядка. Полученная модель замыкается через уравнение зависимости интенсивности транспортного потока от его плотности, получаемое эмпирическим образом для каждого отдельного участка транспортной сети с использованием данных транспортных детекторов и автомобильных GPS-треков. Проверка работоспособности разработанной нами модели и методики калибровки проводилась с использованием численных расчетов, путем проведения вычисленных экспериментов на типичных данных, таких как моделирование движения трафика на заданном участке городской транспортной сети г. Москвы.

Ключевые слова: моделирование дорожного движения, фундаментальная диаграмма, гидродинамические модели второго порядка

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2015, vol. 7, no. 6, pp. 1185–1203 (Russian).

Работа поддержана грантами РФФИ № 14-01-0060914, РНФ № 14-11-00877.

© 2015 Андрей Евгеньевич Алексеенко, Ярослав Александрович Холодов, Александр Сергеевич Холодов, Анна Игоревна Горева, Михаил Олегович Васильев, Юрий Викторович Чехович, Виктор Дмитриевич Мишин, Всеволод Михайлович Старожилец

КОМПЬЮТЕРНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ И МОДЕЛИРОВАНИЕ 2015 Т. 7 № 6 С. 1185−1203

Ки&М

МОДЕЛИ В ФИЗИКЕ И ТЕХНОЛОГИИ

Development, calibration and verification of mathematical model for multilane urban road traffic flow. Part I

A. E. Alekseenko[1,2], Ya. A. Kholodov[1,2], A. S. Kholodov[1,2], A. I. Goreva[1], M. O. Vasiliev[1], Ya. V. Chekhovich[1,3], V. D. Mishin[1,2], V. M. Starozhilets[1]

[1] *Moscow Institute of Physics and Technology, 9, Institutskii per., Dolgoprudnyi, Moscow region, 141700, Russia*
[2] *Institute of Computer Aided Design of the Russian Academy of Sciences (ICAD RAS), Moscow, 123056, Russia*
[3] *Institution of Russian Academy of Sciences Dorodnicyn Computing Centre of RAS, Moscow, 119333, Russia*

Abstract. — In this paper, we propose the unified procedure for the development and calibration of mathematical model for multilane urban road traffic flow. We use macroscopic approach, describing traffic flow with the system of second-order nonlinear hyperbolic equations (for traffic density and velocity). We close the resulting model with the equation of vehicle flow as a function of density, obtained empirically for each segment of road network using data from traffic detectors and vehicles' GPS tracks. We verify the developed new model and calibration methods by using it to model segment of Moscows Ring Road.

Keywords: traffic flow modeling, fundamental diagram, second-order hydrodynamic models

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2015, vol. 7, no. 4, pp. 1185–1203 (Russian).

Работа поддержана грантами РФФИ № 14-01-0060914, РНФ № 14-11-00877.

© 2015 Андрей Евгеньевич Алексеенко, Ярослав Александрович Холодов, Александр Сергеевич Холодов, Анна Игоревна Горева, Михаил Олегович Васильев, Юрий Викторович Чехович, Виктор Дмитриевич Мишин, Всеволод Михайлович Старожилец

1. Введение

В 50-е годы прошлого века наблюдалось бурное развитие газовой динамики (обобщенные решения законов сохранения, устойчивые разностные схемы расчета решений). Тогда же появились первые макроскопические (гидродинамические) модели, в которых транспортный поток уподобляется потоку «мотивированной» сжимаемой жидкости. В модели Лайтхилла–Уизема–Ричардса (LWR) [Lighthill, Whitham, 1955; Richards, 1956; Уизем, 1976] транспортный поток уподобляется потоку сжимаемой жидкости и описывается законом сохранения количества автомобилей. При этом в модели постулируется существование однозначной функциональной зависимости между величиной интенсивности/скорости транспортного потока автомобилей и его плотностью. Эту зависимость называют фундаментальной диаграммой. В последующие годы класс макромоделей был значительно расширен. В современном макроскопическом подходе транспортный поток описывается нелинейной системой гиперболических уравнений второго порядка (для плотности и скорости потока) в различных постановках [Payne, 1971; Daganzo, 1995; Papageorgiou, 199; Aw, Rascle, 2000; Zhang, 2002; Zhang, 2003; Siebel, Mauser, 2006], в которых уже не предполагается однозначной зависимости скорости потока от его плотности. Несмотря на элементарность, модель LWR [Lighthill, Whitham, 1955; Richards, 1956; Уизем, 1976] достаточно популярна в прикладных расчетах. Во многом это связано с недостаточным объемом имеющихся данных для использования моделей более высокого уровня, поскольку поправки, привносимые более точными моделями, нивелируются неточностью данных.

Несмотря на то что с момента появления первых фундаментальных работ прошло более полувека, по мнению ряда известных специалистов в области математического моделирования дорожного движения, проблема образования предзаторных и заторных ситуаций еще до конца не изучена. В теории трех фаз транспортного потока, предложенной Кернером [Kerner, 2009], разделение на свободный и плотный поток точно такое же, как и в классических теориях Лайтхилла–Уизема [Lighthill, Whitham, 1955; Richards, 1956; Уизем, 1976] и «Дженерал Моторс» [Gazis, 1974]. Фундаментальное отличие теории Б. С. Кернера состоит в том, что он выделяет две фазы в плотном потоке на основе общих эмпирических свойств транспортного потока, которые за все годы измерений остаются одни и те же на разных автодорогах мира. Определение трех фаз транспортного потока Кернером основано на эмпирических данных, которые наблюдаются на скоростных магистралях.

Характерным атрибутом многих современных работ, в которых предлагаются новые математические модели транспортного потока [Siebel, Mauser, 2006; Siebel, Mauser, 2006], является проверка предложенных моделей на возможность описания ими трех фаз Кернера транспортного потока [Kerner, 2009], наблюдаемых в многочисленных эмпирических (измеренных) данных. Данная проверка является хорошим тестом на работоспособность разрабатываемых моделей.

Сегодня популярный формат данных о поведении транспортной системе в виде GPS-треков автомобилей совместно с данными транспортных детекторов позволяет контролировать и тем самым уточнять параметры разрабатываемых моделей и некоторых их важных свойств. Имея информацию о том, как двигаются транспортные потоки, можно получать количественные оценки параметров используемой модели на дорогах транспортной сети. Тем не менее такой способ по-прежнему остается крайне чувствительным к точности (полноте) входных данных. Для сравнения разработанной нами модели, в которой транспортный поток описывается нелинейной системой гиперболических уравнений второго порядка с моделью первого порядка LWR [Lighthill, Whitham, 1955; Richards, 1956; Уизем, 1976], были выполнены расчеты на достаточно полных входных данных. Полученные результаты показали заметное преимущество макроскопической модели второго порядка над первым.

Далее в статье описываются разработанная нами модель и методика ее калибровки через уравнение зависимости интенсивности транспортного потока от его плотности. Данная зависимость строится эмпирическим образом для каждого отдельного участка транспортной сети с использованием данных транспортных детекторов и автомобильных GPS-треков. В конце статьи приводятся результаты сравнительных вычисленных экспериментов, выполненных на

типичных данных, таких как моделирование движения трафика на заданных участках городской транспортной сети г. Москвы, и делаются выводы о применимости разработанной модели и ее преимуществах по сравнению с моделью первого порядка LWR [Lighthill, Whitham, 1955; Richards, 1956; Уизем, 1976].

2. Используемая модель

2.1. Система уравнений на автодороге

В 1955 г. независимо в работах [Lighthill, Whitham, 1955; Richards, 1956] (см. также [Уизем, 1976]) была предложена, по-видимому, первая макроскопическая (гидродинамическая) модель однополосного транспортного потока, получившая впоследствии название модели **Лайтхилла–Уизема (Уитема)–Ричардса (LWR)**, в которой поток АТС рассматривается как поток одномерной сжимаемой жидкости. В модели LWR предполагается, что

1) существует взаимно-однозначная зависимость между скоростью $v(t,x)$ и плотностью (погонной) $\rho(t,x)$ потока;
2) выполняется «закон сохранения массы» (количества АТС).

Запись $\rho(t,x)$ — обозначает число АТС на единицу длины в момент времени t в окрестности точки трассы с координатой x. Аналогично $v(t,x)$ — скорость ***АТС*** (*автотранспортных средств*) в момент времени t в окрестности точки трассы с координатой x.

Предположение о взаимно-однозначной зависимости между скоростью $\mathrm{v}(t,x)$ и плотностью (погонной) $\rho(t,x)$ потока выразим условием

$$v(t,x)=V\left(\rho(t,x)\right). \tag{2.1}$$

Относительно функции $V(\rho)$ делается следующее предположение:

$$V'(\rho)<0\,. \tag{2.2}$$

Обозначим $Q(\rho)=\rho V(\rho)$ — интенсивность потока АТС (количество АТС, проходящих в единицу времени через заданное сечение). Зависимость $Q(\rho)$ часто называют фундаментальной (или основной) диаграммой. (Отметим, что зависимость $V(\rho)$ также иногда называют фундаментальной диаграммой.)

Закон сохранения количества автомобилей в модели LWR выражается в дифференциально форме уравнения неразрывности транспортного потока с нулевой правой частью:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial x}=\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial\left(\rho V(\rho)\right)}{\partial x}=\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial Q(\rho)}{\partial x}=0. \tag{2.3}$$

Также в правой части (2.3) надо учесть возможность изменения количества АТС, в случае если они перемещаются с одной полосы на другую или въезжают-съезжают с дороги. С учетом этих возможностей преобразуем уравнение (2.3) к следующему виду:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial Q(\rho)}{\partial x}=f_0. \tag{2.4}$$

Несмотря на элементарность, модель LWR (а также ее дифференциально-разностные и разностные аналоги) достаточно популярна в прикладных расчетах. Во многом это связано с недостаточным объемом имеющихся данных для использования моделей более высокого

уровня (поправки, привносимые более точными моделями, нивелируются неточностью данных). Ряд современных коллективов исследователей сосредотачивается на решении начально-краевых задач для уравнения (2.4) на графе транспортной сети. Основные сложности при этом возникают при постановке краевых условий в узлах графа транспортной сети.

Использование одного уравнения (2.4) не является достаточным для корректного описания всех фаз (состояний) транспортного потока [Daganzo, 1995]. Сделать это можно, если воспользоваться хорошо известными дифференциальными преобразованиями законов сохранения (см., например [Годунов, Роменский, 1998]). Умножим (2.4) на $\partial Q/\partial\rho$:

$$\frac{\partial Q}{\partial\rho}\partial\rho/\partial t+\frac{\partial Q}{\partial\rho}\partial Q/\partial x=\partial Q/\partial t+\frac{\partial Q}{\partial\rho}\partial Q/\partial x=\frac{\partial Q}{\partial\rho}f_0; \tag{2.5}$$

и воспользуемся следующими дифференциальными соотношениями:

$$\begin{cases}\partial Q/\partial t=\partial(\rho v)/\partial t=v\left(\partial\rho/\partial t\right)+\rho\left(\partial v/\partial t\right),\\ \partial Q/\partial x=\partial(\rho v)/\partial x=v\left(\partial\rho/\partial x\right)+\rho\left(\partial v/\partial x\right);\end{cases}$$

подставим их в (2.5):

$$v\left(\partial\rho/\partial t\right)+\rho\left(\partial v/\partial t\right)+\frac{\partial Q}{\partial\rho}v\left(\partial\rho/\partial x\right)+\frac{\partial Q}{\partial\rho}\rho\left(\partial v/\partial x\right)=\frac{\partial Q}{\partial\rho}f_0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\rho\left(\partial v/\partial t+\frac{\partial Q}{\partial\rho}\partial v/\partial x\right)+v\left(\partial\rho/\partial t+\frac{\partial Q}{\partial\rho}\partial\rho/\partial x\right)=\rho\left(\partial v/\partial t+\frac{\partial Q}{\partial\rho}\partial v/\partial x\right)+vf_0=\frac{\partial Q}{\partial\rho}f_0,$$

откуда получим

$$\partial v/\partial t+\frac{\partial Q}{\partial\rho}\partial v/\partial x=\left(\frac{\partial Q}{\partial\rho}-v\right)\frac{f_0}{\rho}. \tag{2.6}$$

Итак, нами получена макроскопическая модель второго порядка (порядок определяется по количеству уравнений), в которой уже не предполагается взаимно-однозначная зависимость скорости от плотности (не предполагается, что желаемая скорость устанавливается мгновенно):

$$\begin{cases}\partial\rho/\partial t+\dfrac{\partial Q}{\partial x}=f_0,\\ \partial v/\partial t+\dfrac{\partial Q}{\partial\rho}\partial v/\partial x=\left(\dfrac{\partial Q}{\partial\rho}-v\right)\dfrac{f_0}{\rho}.\end{cases} \tag{2.7}$$

Если у нас есть въезжающие или съезжающие с дороги или полосы машины, то правая часть f_0 первого уравнения в (2.7) будет представлять собой количество машин, прибывающих (знак плюс) или убывающих (знак минус) в единицу времени. И глядя на правую часть второго уравнения в (2.7), мы видим, как можно учесть этот вклад в изменение скорости автомобилей.

Число граничных условий на въездах-выездах автодороги зависит от знака собственных чисел системы (2.7): $\lambda_{1,2}=\dfrac{\partial Q(\rho)}{\partial\rho}$. Их количество на въезде либо равно двум при положительном $\dfrac{\partial Q(\rho)}{\partial\rho}>0$, либо нулю при $\dfrac{\partial Q(\rho)}{\partial\rho}\le 0$. На выездах — наоборот: ноль при $\dfrac{\partial Q(\rho)}{\partial\rho}\ge 0$ или два при $\dfrac{\partial Q(\rho)}{\partial\rho}<0$. В соответствии с этим на въездах-выездах в качестве граничных условий могут быть заданы как функции времени значения интенсивности потока автомобилей $Q(t)$

и величина скорости потока $v(t)$. Помимо граничных условий для системы (2.7) необходимо задать также некоторые начальные условия:

$$\rho(x,0)=\rho_0(x), \quad v(x,0)=v_0(x). \tag{2.8}$$

Во многих макроскопических моделях второго порядка в правой части уравнения изменения импульса (2.6) присутствует дополнительный релаксационный член: $\frac{1}{\tau}\left(V(\rho)-v\right)$, учитывающий стремления реальной скорости транспортного потока v к желаемой (равновесной) скорости $V(\rho)$, в котором $\tau \sim 1$ секунды — характеризует время реакции водителя. В нашу модель (2.7) мы его не включили исходя из соображений, что все необходимые характеристики поведения транспортного потока автоматически учитываются при получении функциональной зависимости интенсивности транспортного потока от его плотности $Q(\rho)$ по данным измерений с автострадных датчиков. Для проверки корректности данного подхода нами были сделаны сравнительные расчеты на заданных участках городской транспортной сети г. Москвы с добавлением релаксационного члена $\frac{1}{\tau}\left(V(\rho)-v\right)$ в правую часть системы уравнений (2.7) и без него. Результаты этих расчетов приводятся и анализируются в конце статьи.

2.2. Входные данные

Далее нам следует определить параметры модели, с которыми предстоит работать. В разрабатываемой модели следует учесть все возможные факторы, такие как периодически обновляемые данные о текущем состоянии дорожной ситуации, правила движения по полосам, возможные локальные перекрытия на участках дороги и т. д.

Начнем с детекторов транспорта, обычно используемых для калибровки системы, то есть идентификации фундаментальных диаграмм для всех соединений. Эта работа является, как правило, весьма трудоемкой, так как практически нет универсальных алгоритмов, автоматически обрабатывающих данные с детекторов, которые необходимы для выполнения данной задачи. Например, широко используемый метод линейной регрессии (см., например, [Wang et al., 2011]) неточно интерполирует данные в заторных областях из-за малого количества наблюдений в них. Именно поэтому так важно создать такой алгоритм, поскольку обрабатывать данные вручную при том, что на сегодняшний день в одной только Москве установлено более 3000 детекторов транспорта, не представляется возможным.

Данные измерений с автострадных датчиков позволяют идентифицировать фундаментальные диаграммы для соответствующих участков автострады. Дадим описание алгоритма калибровки.

1. Для каждого надежного датчика на выбранном участке дороги извлечем данные измерений плотности и потока за наблюдаемый период времени. Каждая точка на диаграмме определяется парой значений «плотность–поток» на плоскости $Q(\rho)$ (см., например, рис. 2.1).

2. Фильтруем данные, отбрасывая экстремальные значения, с использованием алгоритма построения альфа-оболочек. Сначала мы масштабируем данные вдоль осей Q и ρ, чтобы получить одинаковые порядки величин. Затем по результирующем точкам мы строим альфа-оболочку [Edelsbrunner, Kirkpatrick, Seidel, 1983] и удаляем точки, попавшие на оболочку [Eddie, 1982]. Процесс повторяется до тех пор, пока разница в площади оболочек между соседними итерациями составит менее 5 % либо пока не останется менее 90 % начальных точек (рис. 2.1 — нижние графики).

3. Среди измерений найдем максимальный поток $Q_1(\rho_1)=\max\limits_{\rho}\left[Q(\rho)\right]$ и его плотность ρ_1, которая является критической, поскольку при ее прохождении обычно интенсивность транспортного потока заметно падает.

4. Находим максимальное значение интенсивности $Q_0(\rho_0) = \max_Q Q\left(\frac{\rho_1}{2}\right)$ для значения плотности $\rho_0 = \left(\frac{\rho_1}{2}\right)$.

5. Далее среди измерений найдем максимально удаленную точку от начала координат на плоскости $Q(\rho)$: $Q_2(\rho_2) = \max\sqrt{\left(\frac{Q}{Q_{\max}}\right)^2 + \left(\frac{\rho}{\rho_{\max}}\right)^2}$.

6. Используя знания геометрии дороги, определим максимально возможную плотность ρ_* как произведение количества линий на дороге значения 0.15 АТС/м, исходя из известной оценки, что при количестве АТС больше 150 на один километр движение транспорта становится невозможным: $\rho_* = 0.145$ АТС/м.

7. Далее переходим к получению функциональной зависимости интенсивности транспортного потока от его плотности $Q(\rho)$.

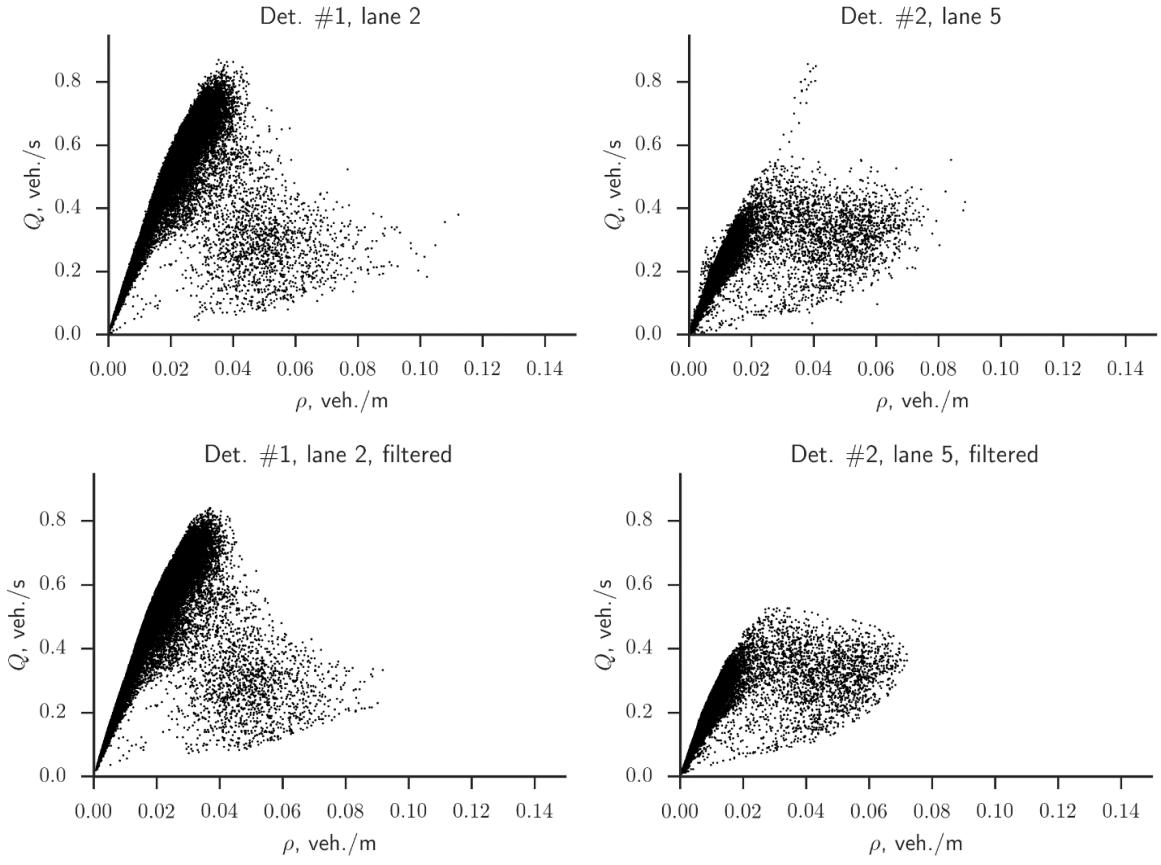

Рис. 2.1. Экспериментальные данные с двух детекторов, установленных на различных полосах МКАД — замеренные интенсивности транспортного потока $Q(\rho)$ [АТС/с] при различной плотности [АТС/м]. Данные представлены за 2012 г. в количестве 288 измерений за день. Сверху исходные данные, снизу отфильтрованные с использованием алгоритма построения выпуклых оболочек

В соответствии с теорией трех фаз транспортного потока Б. С. Кернера на скоростных автомагистралях [Kerner, 2009] выделяем три фазы транспортного потока.

1. Свободный поток: $Q(0 \le \rho < \rho_1)$.

2. Синхронизованный поток: $Q(\rho_1 \le \rho < \rho_2)$.

3. Заторный поток: $Q(\rho_2 \le \rho \le \rho_*)$.

Для каждой из фаз транспортного потока задаем ее собственную функциональную зависимость $Q(\rho)$, сшивая их в точках фазового перехода.

1. Свободный поток: $Q(\rho) = \alpha_2 \rho^2 + \alpha_1 \rho, \quad 0 \le \rho < \rho_1$.

2. Синхронизованный поток: $Q(\rho) = \beta_2 \rho^2 + \beta_1 \rho + \beta_0, \quad \rho_1 \le \rho < \rho_2$.

3. Заторный поток: $Q(\rho) = c_*(\rho_* - \rho), \quad \rho_2 \le \rho \le \rho_*$.

Коэффициенты функциональных зависимостей находим, приравнивая значения функций в найденных точках к значениям интенсивностей в них, в результате получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \alpha_2 \rho_0^2 + \alpha_1 \rho_0 = Q(\rho_0), \\ \alpha_2 \rho_1^2 + \alpha_1 \rho_1 = Q(\rho_1), \\ \beta_2 \rho_1^2 + \beta_1 \rho_1 + \beta_0 = Q(\rho_1), \\ \beta_2 \rho_2^2 + \beta_1 \rho_2 + \beta_0 = Q(\rho_2), \\ 2\beta_2 \rho_1 + \beta_1 = c_1 = \left.\dfrac{\partial Q(\rho)}{\partial \rho}\right|_{\rho=\rho_1}, \\ c_*(\rho_* - \rho_2) = Q(\rho_2). \end{cases} \tag{2.9}$$

Осталось только понять, чему будет равна производная функции после прохождения критической точки: $\left.\dfrac{\partial Q(\rho)}{\partial \rho}\right|_{\rho=\rho_1} = c_1 = ?$ в (2.10). Из экспериментальных наблюдений мы знаем, что после ее прохождения интенсивность транспортного потока заметно падает. Это означает, что поток начинает тормозиться, поэтому логично предположить, что c_1 есть скорость волны торможения и ее можно найти, построив пространственно-временную структуру или карту значений скорости транспортного потока для соответствующих участков автострады (см. рис. 2.2).

На рис. 2.2 хорошо видны красные линии распространения волн торможения навстречу движению транспортного потока. Наклон этих линий, которые со временем остаются параллельными, и есть значение скорости волны торможения c_1. Следующая проблема, которую предстоит решить, — это как автоматизировать процесс нахождения значений скорости волн торможения по карте скоростей для заданного участка дороги. Эта задача была решена с использованием алгоритмов компьютерного зрения [Bradski, 2000] в три этапа (см. рис. 2.3).

1. Выделение границ методом Кэнни [Canny, 1986] (рис. 2.3 (слева)).

2. Поиск отрезков среди выделенных границ методом Хафа [Matas, Galambos, Kittler, 2000] (рис. 2.3 (центр)).

3. Отсеивание ложных линий: сначала мы определяем все точки со скоростью $v < 10$ км/ч и сегментируем их; затем мы оставляем только те сегменты, которые имеют более 65 % их точек со скоростью $v < 10$ км/ч и при этом менее 65 % таких точек в ближайшем окружении; поскольку именно эти сегменты будут представлять собой фронты волн торможения (рис. 2.3 (справа)).

Как результат, была получена гистограмма значений скоростей волны торможения транспортного потока на внешней стороне МКАД (рис. 2.4) за 2012 г.

Отсеяв ложные значения, мы установили, что скорость волны торможения на МКАД $\left.\dfrac{\partial Q(\rho)}{\partial \rho}\right|_{\rho=\rho_1} = c_1 = 15.8$ км/ч, также мы выяснили, что она не зависит от времени года, дня недели и определяется исключительно геометрией дороги. Стоит отдельно отметить, что по своей величине скорость волны торможения на МКАД совпадает с характеристической средней скоро-

стью «заднего фронта широкого движущегося кластера» (в терминологии Кернера [Kerner, 2009]).

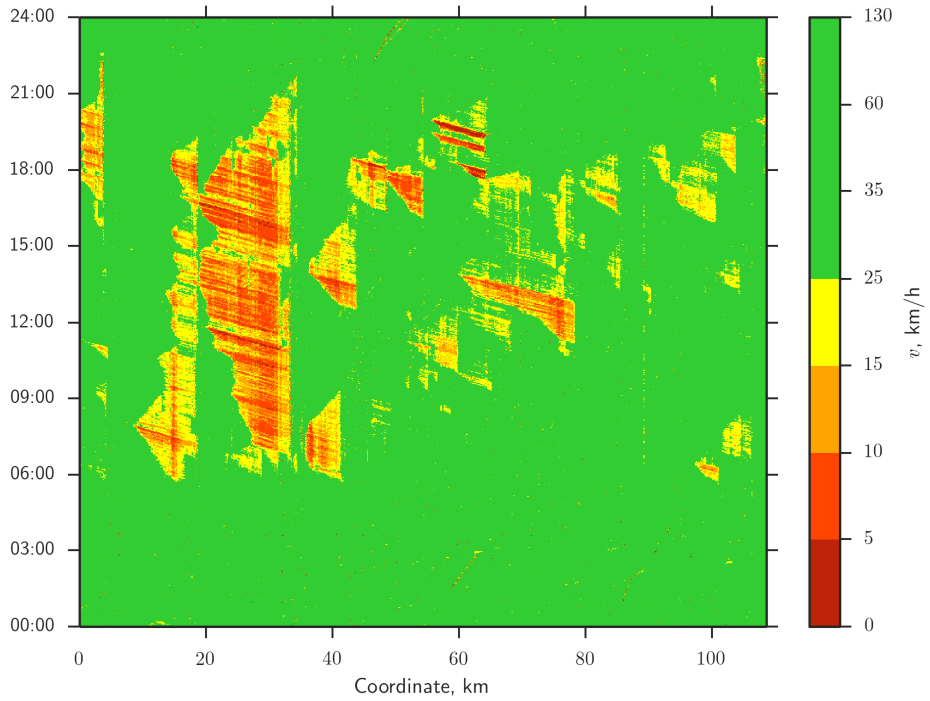

Рис. 2.2. Пространственно-временная структура значений скорости транспортного потока на внешней стороне МКАД для одного рабочего дня, 5 декабря 2012 г.

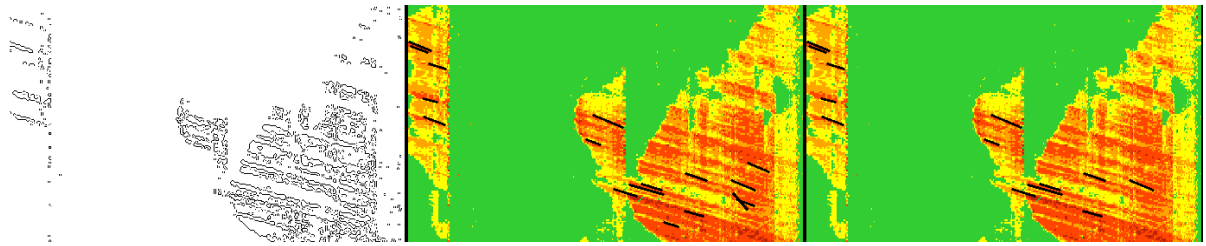

Рис. 2.3. Нахождение значений скорости волн торможения на пространственно-временной структуре значений скорости транспортного потока на внешней стороне МКАД: выделение границ методом Кэнни [Canny, 1986] (слева); поиск отрезков среди выделенных границ методом Хафа [Matas, Galambos, Kittler, 2000] (в центре); отсеивание ложных линий (справа)

Для транспортных данных с детекторов, представленных на рис. 2.1, получим значения параметров для калибровки фундаментальных диаграмм ($c_1 = 3.76$ м/с, $\rho_* = 0.145$ Атс/м):

– <u>детектор № 1</u>: $Q_1 = \max\limits_{\rho}\left[Q(\rho)\right] = 0.84$ АТС/с, $\rho_1 = 0.037$ АТС/м,

$$Q_2 = \max\sqrt{\left(\frac{Q}{Q_{\max}}\right)^2 + \left(\frac{\rho}{\rho_{\max}}\right)^2} = Q_1 = 0.84 \text{ АТС/с}, \ \rho_2 = \rho_1 = 0.037 \text{ АТС/м};$$

– <u>детектор № 2</u>: $Q_1 = \max\limits_{\rho}\left[Q(\rho)\right] = 0.59$ АТС/с, $\rho_1 = 0.034$ АТС/м,

$$Q_2 = \max\sqrt{\left(\frac{Q}{Q_{\max}}\right)^2 + \left(\frac{\rho}{\rho_{\max}}\right)^2} = 0.44 \text{ АТС/с}, \ \rho_2 = 0.076 \text{ АТС/м}.$$

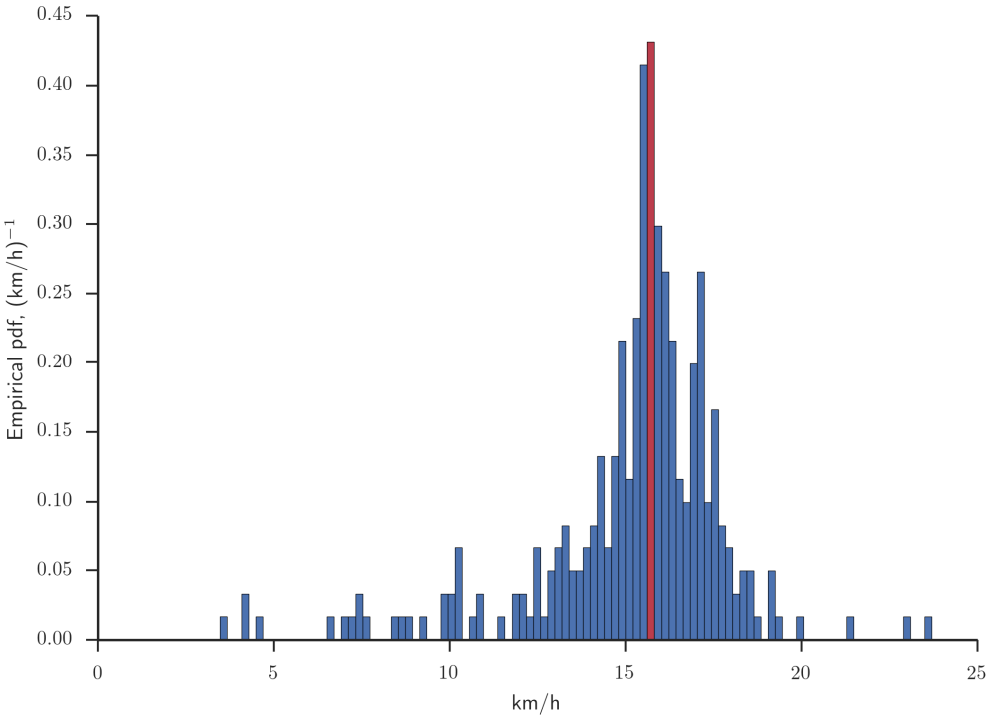

Рис. 2.4. Гистограмма значений скоростей волны торможения транспортного потока на МКАД за 2012 г.

Полученные фундаментальные диаграммы для найденных параметров представлены на рис. 2.5. Как мы видим, на второй диаграмме отсутствует фаза синхронизованного потока, которая имеет место в первом случае.

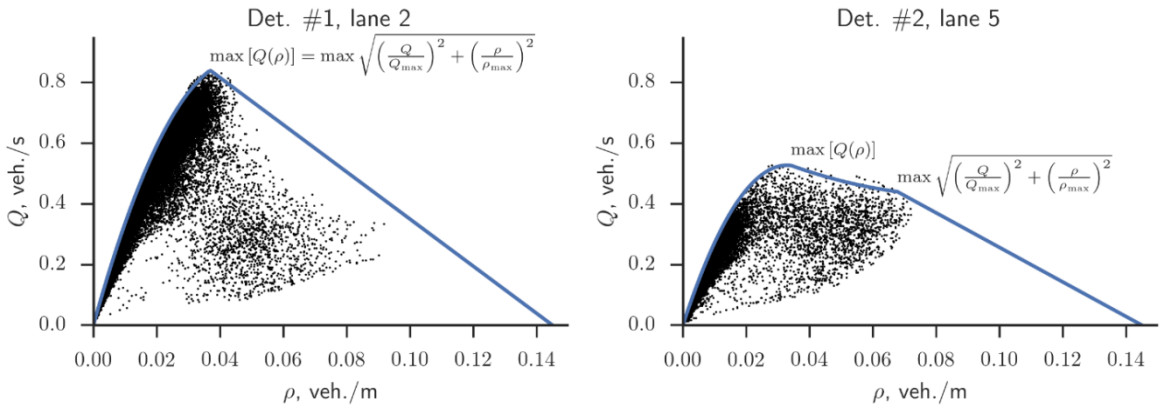

Рис. 2.5. Фундаментальные диаграммы для двух разных участков МКАД: слева для данных со второй полосы (детектор № 1); справа — с пятой полосы (детектор № 2)

Если мы построим графики зависимости собственных чисел системы (2.8): $\lambda_{1,2} = \dfrac{\partial Q(\rho)}{\partial \rho}$ от плотности транспортного потока и сравним их со скоростью $v(\rho) = \dfrac{Q(\rho)}{\rho}$, как это показано на рис. 2.6 для двух полученных фундаментальных диаграмм, то увидим, что во всем диапазоне значений плотности $(0 \le \rho \le \rho_*)$ выполняется условие $\lambda_{1,2} = \dfrac{\partial Q(\rho)}{\partial \rho} < v(\rho)$. Это означает в соответствии с теоремой, доказанной в работе [Zhang, 2003], что полученная нами математическая

модель обеспечивает анизотропию транспортного потока на решениях системы уравнений (2.7).

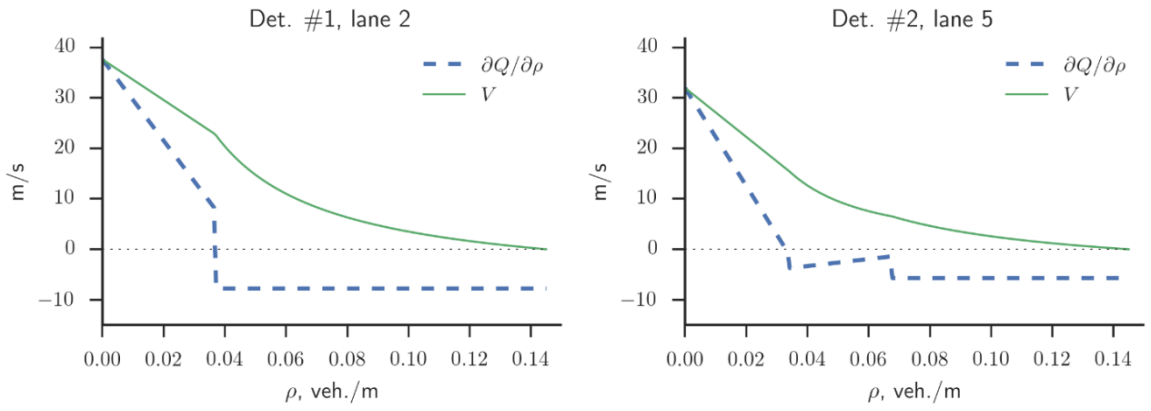

Рис. 2.6. Зависимости собственных чисел $\lambda_{1,2} = \partial Q(\rho)/\partial\rho$ от плотности транспортного потока (пунктирная линия) в сравнении со скоростью $v(\rho) = Q(\rho)/\rho$ (сплошная линия) для двух полученных фундаментальных диаграмм МКАД: слева — со второй полосы (детектор № 1); справа — с пятой полосы (детектор № 2)

Следующий вопрос, который следует обсудить: что делать в том случае, если данных измерений, полученных с детектора транспорта, недостаточно? В качестве примера рассмотрим данные, полученные с детектора транспорта, установленного на Мамадышском тракте возле города Казани (см. рис. 2.7).

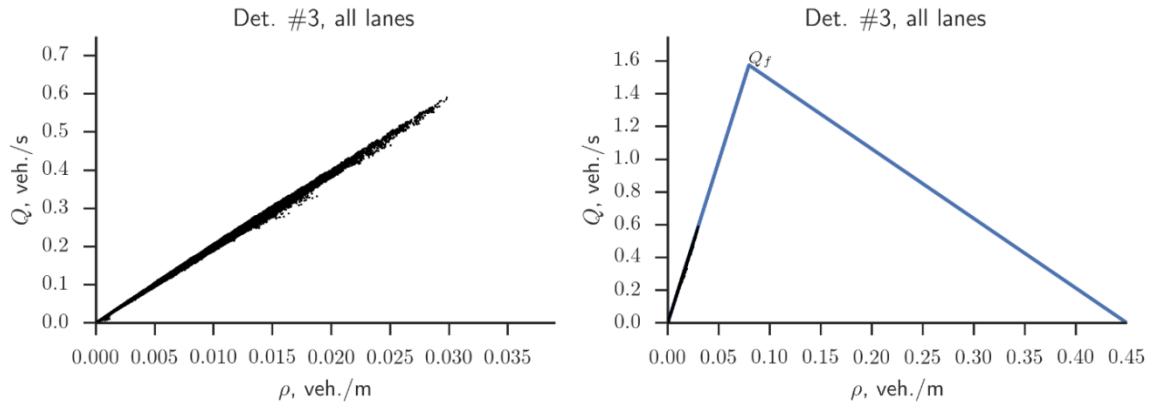

Рис. 2.7. Экспериментальные данные для участка Мамадышского тракта из трех полос — замеренные интенсивности транспортного потока $Q(\rho)$ АТС/с, при различной плотности, АТС/м. Данные представлены за февраль–сентябрь 2014 г. в количестве 288 измерений за день. Слева исходные данные, справа фундаментальная диаграмма, построенная по этим данным

Как видно из рис. 2.7 (левая часть), данных недостаточно, чтобы покрыть всю область значений плотности: $0 \le \rho \le \rho_* = 0.45$. Поэтому нам надо оценить, каким может быть значение максимальной интенсивности транспортного потока. Будим исходить из того, что поток насыщения $Q_f = \max_\rho\left[Q(\rho)\right] = 0.525 \times 3 = 1.575$ Атс/с (на практике принимается от 1800 до 2000 АТС/ч на полосу). Далее переходим к построению фундаментальной диаграммы.

1. Среди измерений найдем наибольшее значение потока $Q_1(\rho_1) = \max_\rho\left[Q(\rho)\right]$ и его плотность ρ_1, которая в данном случае уже не будет критической.

2. Находим максимальное значение интенсивности $Q_0\left(\rho_0\right)=\max\limits_{Q} Q\left(\frac{\rho_1}{2}\right)$ для значения плотности $\rho_0=\left(\frac{\rho_1}{2}\right)$.

3. Коэффициенты функциональных зависимостей свободного потока $\{\alpha_1,\alpha_2\}$ находим, приравнивая значения функций в найденных точках к значениям интенсивностей в них:

$$\begin{cases}\alpha_2\rho_0^2+\alpha_1\rho_0=Q(\rho_0),\\ \alpha_2\rho_1^2+\alpha_1\rho_1=Q(\rho_1).\end{cases} \tag{2.10}$$

4. Находим значение критической плотности ρ_f для потока насыщения Q_f, решая уравнение $\alpha_2\rho_f^2+\alpha_1\rho_f=Q_f$.

5. Находим значение скорости волны торможения c_f из соотношения $c_f=\frac{Q_f}{\left(\rho_*-\rho_f\right)}$.

6. Получаем окончательный вид функциональной зависимости интенсивности транспортного потока от его плотности $Q\left(\rho\right)$ для двух фаз транспортного потока: свободной $Q(\rho)=\alpha_2\rho^2+\alpha_1\rho,\ \left(0\le\rho<\rho_f\right)$, заторной — $Q(\rho)=c_f\left(\rho_f-\rho\right),\ \left(\rho_f\le\rho\le\rho_*\right)$ (см. рис. 2.7, правая часть). Синхронизованную фазу мы здесь не учитываем.

2.3. Алгоритм численного решения

Составляющая основу данной модели система уравнений в частных производных (2.7) имеет гиперболический тип, и для численного решения таких уравнений существует достаточно много разнообразных по своим качествам конечно-разностных методов. Вводя в рассмотрение векторы $\mathbf{V}=\{\rho,v\}^T$, $f=\{f_0,f_1\}^T$, систему уравнений (2.7) можно записать в векторной форме

$$\partial V/\partial t+\Lambda\partial V/\partial x=f(\mathbf{V},x,t) \tag{2.11}$$

с диагональной матрицей Якоби

$$\Lambda=\begin{Bmatrix}\frac{\partial Q(\rho)}{\partial\rho} & 0\\ 0 & \frac{\partial Q(\rho)}{\partial\rho}\end{Bmatrix}. \tag{2.12}$$

Собственные числа матрицы Якоби Λ: $\lambda_{1,2}=\frac{\partial Q(\rho)}{\partial\rho}$ при этом всегда будут действительны.

При выборе численного метода нам стоит принять во внимание тот факт, что решение системы уравнений (2.7) на каждом из ребер графа транспортной сети определяется изменением значений рассчитываемых параметров в его граничных точках. В этом случае можно ограничиться в выборе консервативным сеточно-характеристическим методом первого порядка аппроксимации [Magomedov, Kholodov, 1969]. Для системы уравнений (2.7), с учетом линейной независимости уравнений для плотности и скорости, алгоритм численного решения [Magomedov, Kholodov, 1969] можно разбить на два последовательных этапа:

$$\text{I.}\quad \rho_m^{n+1}=\rho_m^n-\frac{\Delta t}{2h}\left(\frac{\left(\left|\frac{\partial Q(\rho_{m-1/2}^n)}{\partial\rho}\right|+\frac{\partial Q(\rho_{m-1/2}^n)}{\partial\rho}\right)}{\left|\frac{\partial Q(\rho_{m-1/2}^n)}{\partial\rho}\right|}\left(Q_m^n-Q_{m-1}^n\right)+\right.$$

$$+\frac{\left(\left|\frac{\partial Q(\rho^n_{m+1/2})}{\partial\rho}\right|-\frac{\partial Q(\rho^n_{m+1/2})}{\partial\rho}\right)}{\left|\frac{\partial Q(\rho^n_{m+1/2})}{\partial\rho}\right|}\left(Q^n_{m+1}-Q^n_m\right)\Bigg)+\Delta t\times f_0\left(\rho^n_m\right). \tag{2.13}$$

$$\text{II.}\quad v^{n+1}_m=v^n_m-\frac{\Delta t}{2h}\left(\left(\frac{\partial Q(\rho^{n+1/2}_{m-1/2})}{\partial\rho}+\left|\frac{\partial Q(\rho^{n+1/2}_{m-1/2})}{\partial\rho}\right|\right)\left(v^n_m-v^n_{m-1}\right)+\left(\frac{\partial Q(\rho^{n+1/2}_{m+1/2})}{\partial\rho}-\left|\frac{\partial Q(\rho^{n+1/2}_{m+1/2})}{\partial\rho}\right|\right)\left(v^n_{m+1}-v^n_m\right)\right)+$$

$$+\Delta t\left(\frac{\partial Q(\rho^{n+1/2}_m)}{\partial\rho}-v^n_m\right)\frac{f_0\left(\rho^{n+1/2}_m\right)_0}{\rho^{n+1/2}_m}.$$

В (2.13) Δt и Δx — шаги численного интегрирования по времени и пространству. На первом этапе в качестве значения плотности $\rho^n_{m\pm1/2}$ используем $\rho^n_{m\pm1/2}=\frac{\rho^n_m+\rho^n_{m\pm1}}{2}$. На втором этапе в качестве значений плотности $\rho^{n+1/2}_m$ и $\rho^{n+1/2}_{m\pm1/2}$ используем $\rho^{n+1/2}_m=\frac{\rho^{n+1}_m+\rho^n_m}{2}$ и $\rho^{n+1/2}_{m\pm1/2}=\frac{\rho^{n+1}_m+\rho^n_{m\pm1}}{2}$, поскольку мы уже вычислили $\rho^{n+1}_{m\pm1}$ на первом этапе.

Систему уравнений (2.7) также необходимо численно интегрировать в граничных точках. Например, на выезде дороги в граничной точке $\left(t^{n+1},x_M\right)$ при положительном значении $\frac{\partial Q(\rho^n_{M-1/2})}{\partial\rho}>0$ получаем

$$\begin{aligned}&\text{I.}\quad \rho^{n+1}_M=\rho^n_M-\frac{\Delta t}{h}\left(Q^n_M-Q^n_{M-1}\right);\\&\text{II.}\quad v^{n+1}_M=v^n_M-\frac{\Delta t}{h}\left(\frac{\partial Q(\rho^{n+1/2}_{M-1/2})}{\partial\rho}+\left|\frac{\partial Q(\rho^{n+1/2}_{M-1/2})}{\partial\rho}\right|\right)\left(v^n_M-v^n_{M-1}\right).\end{aligned} \tag{2.14}$$

При отрицательном значении $\frac{\partial Q(\rho^n_{M-1/2})}{\partial\rho}<0$ величины $\left(\rho,v\right)^{n+1}_M$ необходимо определять из известных временных зависимостей $\left(\rho,v\right)^{n+1}_M=\left(\rho_M\left(t^{n+1}\right),v_M\left(t^{n+1}\right)\right)$, а если они неизвестны, то можно задать прозрачные граничные условия $(\partial\rho/\partial x)=0$, $(\partial v/\partial x)=0$ в следующем виде: $\left(\rho,v\right)^{n+1}_M=\left(\rho,v\right)^{n+1}_{M-1}$. На въезде дороги мы выполняем те же действия, но для противоположного знака, $\frac{\partial Q(\rho^n_{3/2})}{\partial\rho}<0$:

$$\begin{aligned}&\text{I.}\quad \rho^{n+1}_1=\rho^n_1-\frac{\Delta t}{h}\left(Q^n_2-Q^n_1\right).\\&\text{II.}\quad v^{n+1}_1=v^n_1-\frac{\Delta t}{h}\left(\frac{\partial Q(\rho^{n+1/2}_{3/2})}{\partial\rho}+\left|\frac{\partial Q(\rho^{n+1/2}_{3/2})}{\partial\rho}\right|\right)\left(v^n_2-v^n_1\right).\end{aligned} \tag{2.15}$$

Если же $\frac{\partial Q(\rho^n_{3/2})}{\partial\rho}>0$, то используем граничные условия $\left(\rho,v\right)^{n+1}_1=\left(\rho_1\left(t^{n+1}\right),v_1\left(t^{n+1}\right)\right)$.

3. Результаты расчетов

Для проверки работоспособности разработанной модели, использующей алгоритм автоматизированной идентификации фундаментальной диаграммы, был проведен вычислительный эксперимент для одного из участков МКАД (см. рис. 3.1). Для этого использовались выбранные нами два детектора транспорта № 1 и № 2, между которыми расстояние составляет 2.2 км и отсутствуют въезды и выезды с автодороги. Данные с детектора № 1 (скорость и интенсивность транспортного потока) задавались в качестве граничных условий при моделировании поведения транспортного потока, а данные следующего по направлению движения детектора № 2 использовались как тестовые для сравнения с ними полученных численных результатов. При этом на втором детекторе задавались неотражающие граничные условия в виде нулевых производных $(\partial Q/\partial x)=0$, $(\partial v/\partial x)=0$. Расчет проводился за суточный интервал одного рабочего дня. Результаты представлены на рис. 3.2–3.6 для каждой из пяти полос МКАД по отдельности и суммарно на рис. 3.7 для всех полос. Слева показаны результаты, полученные с использованием модели первого порядка LWR (2.4), посередине — с использованием разработанной анизотропной модели второго порядка (2.7) с добавлением релаксационного члена $\frac{1}{\tau}\left(V(\rho)-v\right)$ в правую часть уравнения изменения импульса, справа — без него.

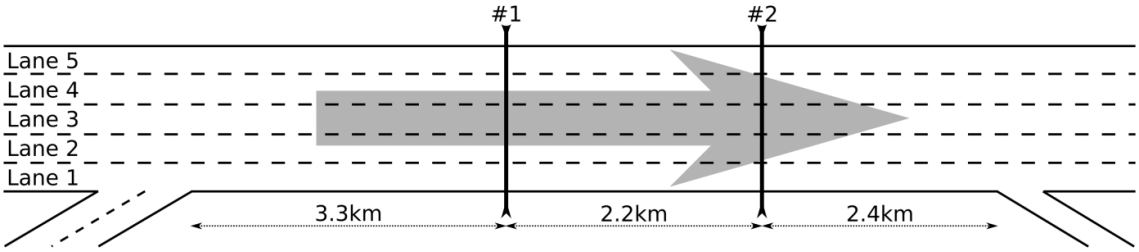

Рис. 3.1. Тестовые детекторы транспорта № 1 и № 2, выбранные на МКАД. Данные с детектора № 1 (скорость и интенсивность транспортного потока) задавались в качестве граничных условий при моделировании поведения транспортного потока, а данные следующего по направлению движения детектора № 2 использовались для сравнения с ними полученных численных результатов

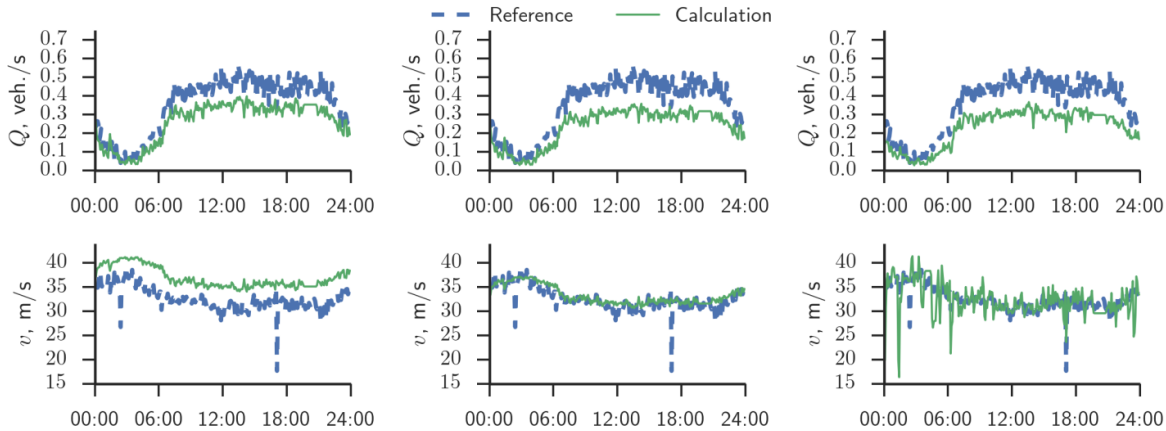

Рис. 3.2. Сравнение расчетных значений транспортных потоков (зеленый цвет) по первой полосе МКАД за суточный период времени с данными экспериментальных наблюдений (синий цвет), полученными с датчика транспорта № 2 с пятиминутным временным интервалом. Слева показаны результаты, полученные с использованием модели первого порядка LWR (2.4), посередине — с использованием разработанной анизотропной модели второго порядка (2.7) с добавлением члена $(V(\rho)-v)/\tau$ в правую часть второго уравнения, справа — без него

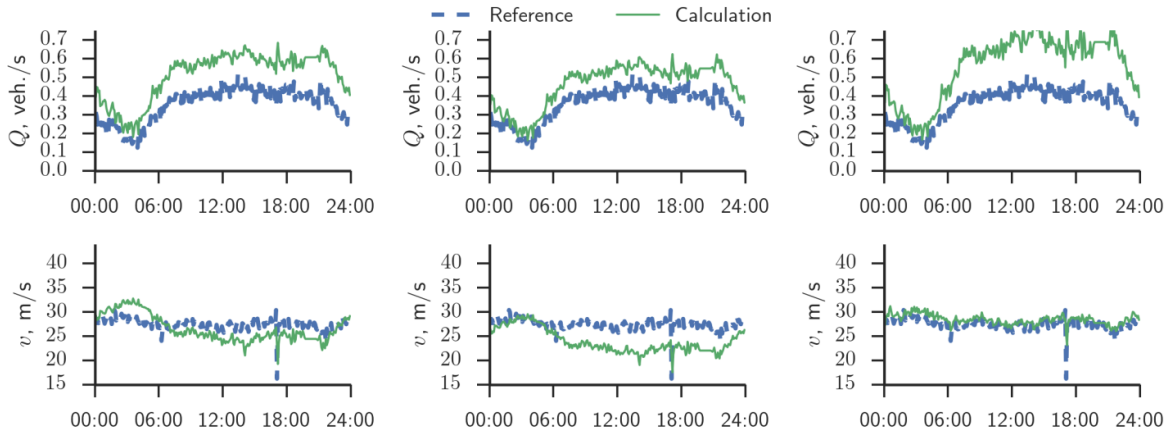

Рис. 3.3. Сравнение расчетных значений транспортных потоков (зеленый цвет) по второй полосе МКАД за суточный период времени с данными экспериментальных наблюдений (синий цвет), полученными с датчика транспорта № 2 с пятиминутным временным интервалом. Слева показаны результаты, полученные с использованием модели первого порядка LWR (2.4), посередине — с использованием разработанной анизотропной модели второго порядка (2.7) с добавлением члена $(V(\rho)-v)/\tau$ в правую часть второго уравнения, справа — без него

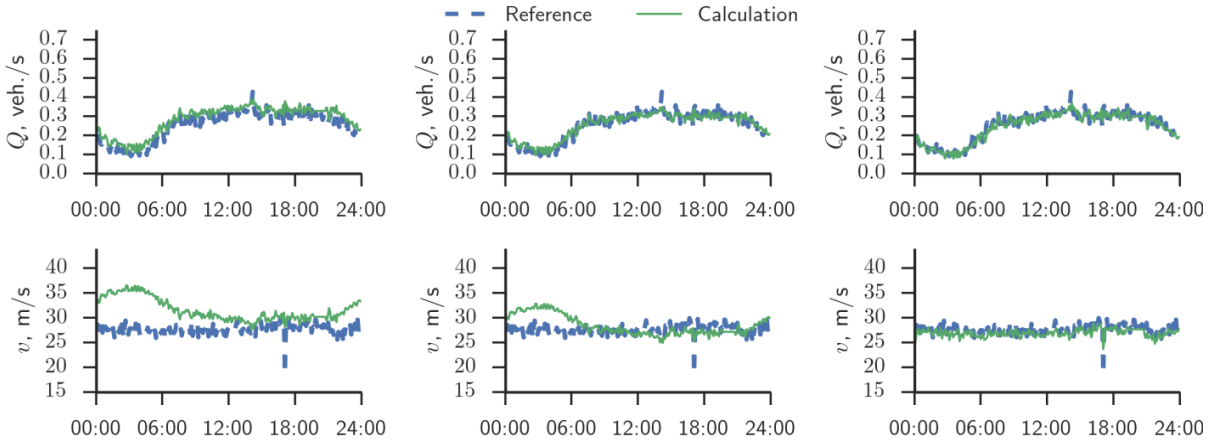

Рис. 3.4. Сравнение расчетных значений транспортных потоков (зеленый цвет) по третьей полосе МКАД за суточный период времени с данными экспериментальных наблюдений (синий цвет), полученными с датчика транспорта № 2 с пятиминутным временным интервалом. Слева показаны результаты, полученные с использованием модели первого порядка LWR (2.4), посередине — с использованием разработанной анизотропной модели второго порядка (2.7) с добавлением члена $(V(\rho)-v)/\tau$ в правую часть второго уравнения, справа — без него

Результаты расчетов показывают корректное поведение разработанной анизотропной модели второго порядка. Расхождения расчетных значений интенсивностей транспортных потоков с наблюдаемыми на первой и второй полосах (верхние графики на рис. 3.2–3.3) объясняются тем, что после датчика № 2 через 2.4 км находится съезд с внешней стороны МКАД. Этот съезд приводит к заметному перестроению водителей из первой полосы во вторую для продолжения ими движения по МКАД. Мы видим, что на первой полосе (рис. 3.2) расчетные значения интенсивностей меньше наблюдаемых, а на второй (рис. 3.3), наоборот, больше. Эти результаты подтверждают перестроение водителей из первой полосы во вторую. Данные перестроения нами в данном расчете не учитывались, так как расчет суммарной интенсивности транспортного потока по всем пяти полосам производился корректно (см. рис. 3.6). Также хорошо видны

преимущества разработанной нами анизотропной модели второго порядка (2.7) над моделью LWR (2.4). Мы видим, что расчетные значения интенсивности транспортного потока в верхних частях рисунков, полученные с использованием этих двух моделей, практически не отличаются, тогда как на результатах расчетов скорости в нижних частях рисунков заметно преимущество в точности расчетов нашей модели (2.7) над моделью LWR (2.4). Отдельно хочется отметить, что добавление члена $\frac{1}{\tau}\left(V\left(\rho\right)-v\right)$ в правую часть уравнения изменения импульса приводит к потере точности при расчете значений скорости транспортного потока. Это хорошо заметно на всех полученных графиках скорости (внизу, посередине).

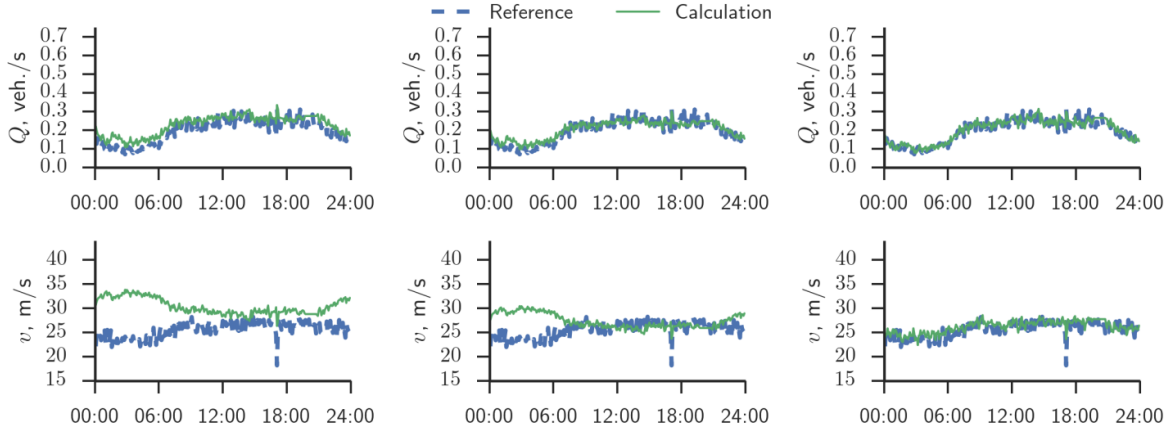

Рис. 3.5. Сравнение расчетных значений транспортных потоков (зеленый цвет) по четвертой полосе МКАД за суточный период времени с данными экспериментальных наблюдений (синий цвет), полученными с датчика транспорта № 2 с пятиминутным временным интервалом. Слева показаны результаты, полученные с использованием модели первого порядка LWR (2.4), посередине — с использованием разработанной анизотропной модели второго порядка (2.7) с добавлением члена $(V(\rho)-v)/\tau$ в правую часть второго уравнения, справа — без него

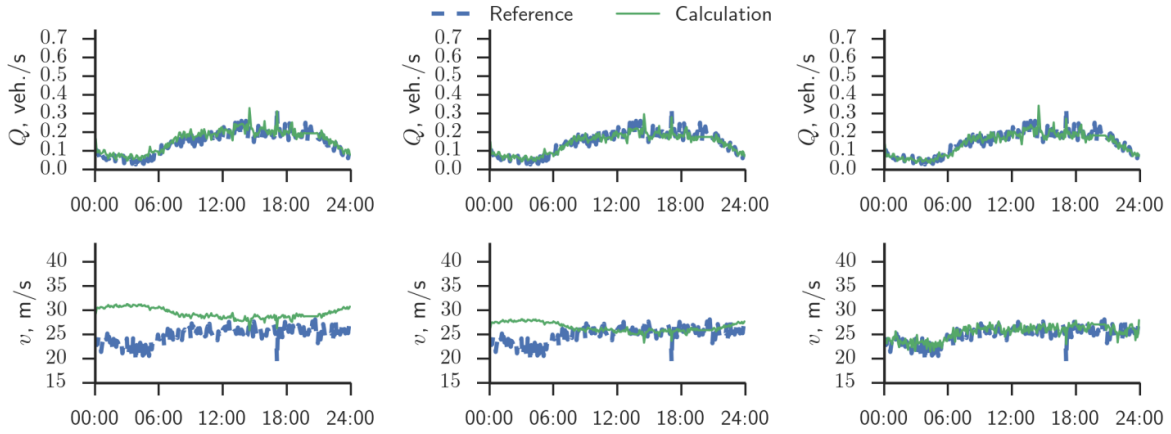

Рис. 3.6. Сравнение расчетных значений транспортных потоков (зеленый цвет) по пятой полосе МКАД за суточный период времени с данными экспериментальных наблюдений (синий цвет), полученными с датчика транспорта № 2 с пятиминутным временным интервалом. Слева показаны результаты, полученные с использованием модели первого порядка LWR (2.4), посередине — с использованием разработанной анизотропной модели второго порядка (2.7) с добавлением члена $(V(\rho)-v)/\tau$ в правую часть второго уравнения, справа — без него

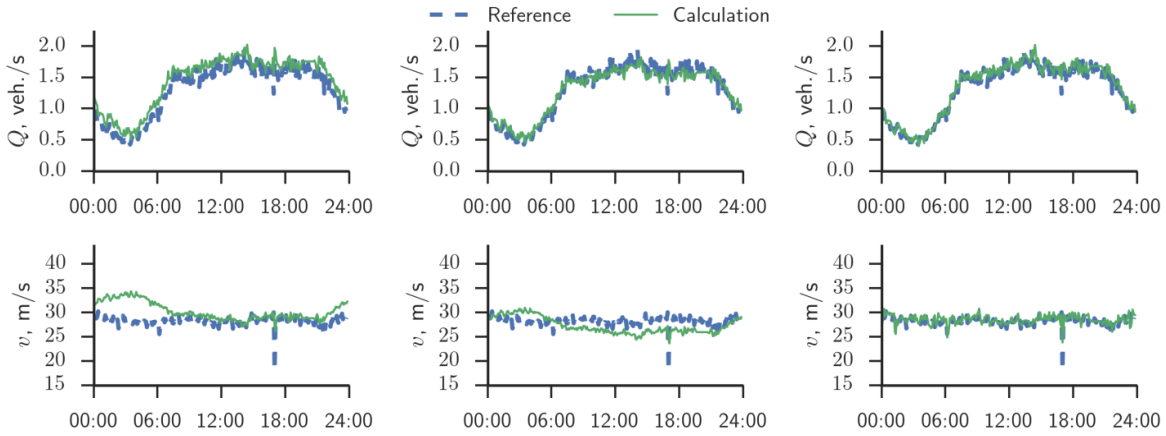

Рис. 3.7. Сравнение расчетных значений транспортных потоков (зеленый цвет) суммарно по всем пяти полосам МКАД за суточный период времени с данными экспериментальных наблюдений (синий цвет), полученными с датчика транспорта № 2 с пятиминутным временным интервалом. Слева показаны результаты, полученные с использованием модели первого порядка LWR (2.4), посередине — с использованием разработанной анизотропной модели второго порядка (2.7) с добавлением члена $(V(\rho)-v)/\tau$ в правую часть второго уравнения, справа — без него

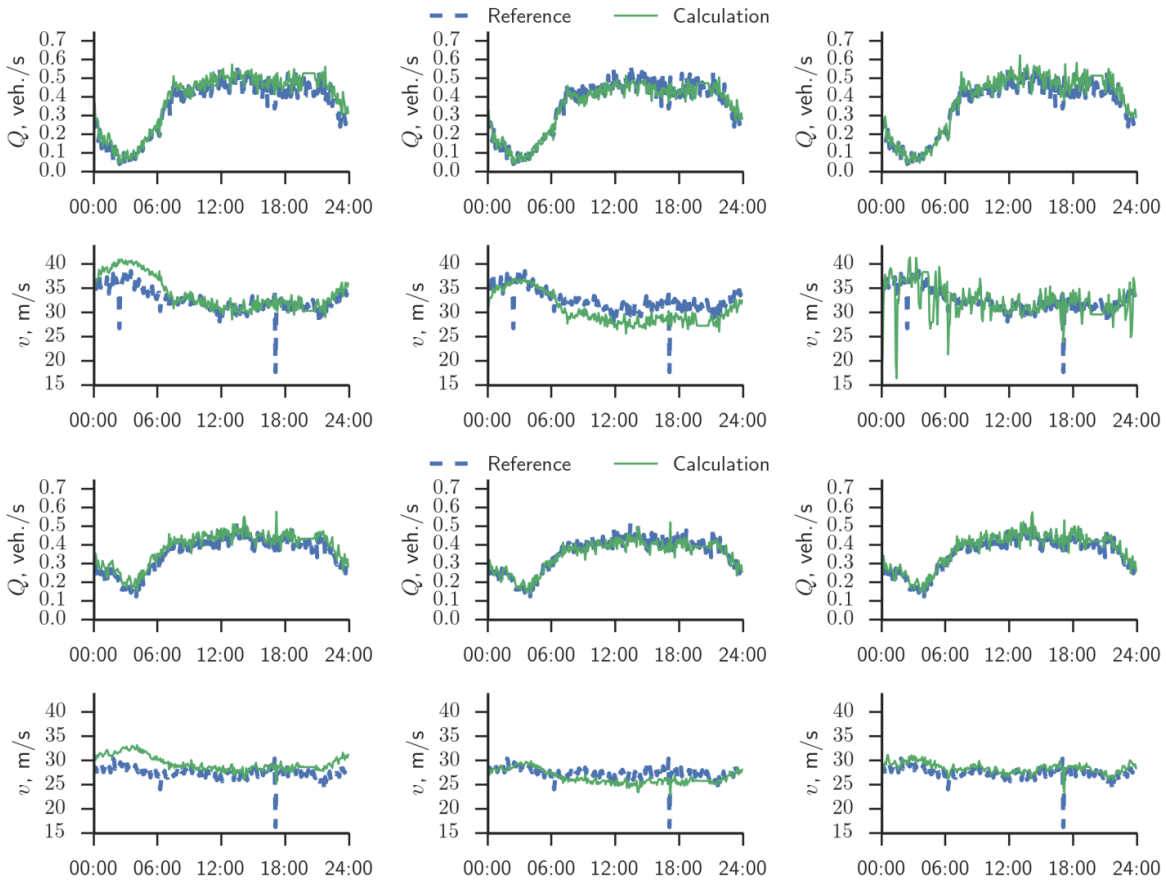

Рис. 3.8. Сравнение расчетных значений транспортных потоков (зеленый цвет) по 1-ой и 2-ой полосам МКАД (нумерация сверху вниз) за суточный период времени с данными экспериментальных наблюдений (синий цвет), полученными с датчика транспорта № 2 с пятиминутным временным интервалом. Слева показаны результаты, полученные с использованием модели первого порядка LWR (2.4), посередине — с использованием разработанной анизотропной модели второго порядка (2.7) с добавлением члена $(V(\rho)-v)/\tau$ в правую часть второго уравнения, справа — без него

Если мы теперь учтем в расчете перестроения участников движения с первой на вторую полосу в правой части системы уравнений (2.4) и (2.7), то результаты расчетов суммарной интенсивности транспортного потока по всем полосам не изменятся, а результаты значений интенсивностей по первым двум полосам теперь будут иметь лучшее совпадение с измеренными данными (см. рис. 3.8).

4. Заключение

В данной работе исследовалась проблема автоматизации калибровки вновь разработанной анизотропной математической модели движения транспортного потока на автомобильной многополосной дороге в городских условиях. При разработке данной модели нами использовался макроскопический подход, при котором транспортный поток описывается нелинейной системой гиперболических уравнений второго порядка (для плотности и скорости потока), которая замыкается через уравнение зависимости интенсивности транспортного потока от его плотности.

Зависимость интенсивности транспортного потока от его плотности задавалась эмпирическим образом для каждого отдельного участка транспортной сети через автоматизированную обработку данных измерений с автострадных детекторов и автомобильных GPS-треков.

Проверка работоспособности разработанной модели и методики ее калибровки проводилась путем проведения вычисленных экспериментов на типичных данных, таких как моделирование движения трафика на заданном участке МКАД. Результаты расчетов, полученные при моделировании движения транспорта на МКАД, показали корректное поведение разработанной модели, а также ее преимущество в точности по сравнению с моделью первого порядка LWR [Lighthill, Whitham, 1955; Richards, 1956; Уизем, 1976].

Отдельно нами исследовался вопрос необходимости использования члена $\frac{1}{\tau}\left(V\left(\rho\right)-v\right)$ в правой части уравнения изменения импульса в модели (2.7). Было установлено, что все необходимые характеристики поведения водителей в транспортном потоке автоматически учитываются при получении функциональной зависимости интенсивности транспортного потока от его плотности $Q\left(\rho\right)$ по данным измерений с автострадных датчиков. Это означает, что добавление $\frac{1}{\tau}\left(V\left(\rho\right)-v\right)$ в правую часть второго уравнения системы (2.7) является излишним и приводит к потере точности при расчете значений скорости транспортного потока.

Список литературы

Годунов С. К., Роменский Е. И. Элементы механики сплошных сред и законы сохранения. — М.: Наука, 1998. — 280 с.

Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. — М.: Мир, 1977.

Aw A., Rascle M. Resurrection of “second order” models of traffic flow // SIAM Journal of Applied Mathematics. — 2000. — Vol. 60. — P. 916–938.

Bradski, G. The OpenCV Library. Dr. Dobb's Journal of Software Tools. — 2000.

Canny, J. A Computational Approach to Edge Detection, IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence. — 1986. — Vol. 8(6). — P. 679–698.

Daganzo C. F. Requiem for second-order approximations of traffic flow // Transport. Res. B. — 1995. — Vol. 29B (4). — P. 277–286.

Eddy, W. F. Convex Hull Peeling, in: COMPSTAT 1982 5th Symposium Held at Toulouse. — 1982. — Physica-Verlag HD, Heidelberg. — P. 42–47. doi:10.1007/978-3-642-51461-6_4

Edelsbrunner H., Kirkpatrick D. G., Seidel R. On the shape of a set of points in the plane // IEEE Transactions on Information Theory. — 1983. — Vol. 29 (4). — P. 551–559.

Gazis D. C. Traffic science.— NY: Wiley, 1974.

Kerner B. S. Introduction to modern traffic flow theory and control. The long road to three — phase traffic theory. — Springer, 2009.

Lighthill M. J., Whitham G. B. On kinematic waves: II. Theory of traffic flow on long crowded roads // Proc. R. Soc. London, Ser. A. — 1955. — Vol. 229. — P. 281–345.

Magomedov K. M., Kholodov A. S. The construction of difference schemes for hyperbolic equations based on characteristic relations // USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 1969. — Vol. 9(2). — P. 158–176.

Matas J., Galambos C., Kittler J. V. Robust Detection of Lines Using the Progressive Probabilistic Hough Transform // CVIU. — 2000. — Vol. 78 1. — P. 119–137.

Papageorgiou M. Some remarks on macroscopic flow modeling // Transport. Res. A. 1998. — Vol. 32 (5). — P. 323–329.

Payne H.J. Models of freeway traffic and control // Simulation Council Proc. 28, Mathematical Models of Public Systems. Edited by G.A. Bekey. — 1971. — Vol. 1. — P. 51–61.

Richards P. I. Shock Waves on the Highway // Oper. Res. — 1956. — Vol. 4. — P. 42–51.

Siebel F., Mauser W. On the fundamental diagram of traffic flow // SIAM Journal of Applied Mathematics. — 2006. — Vol. 66(4). — P. 1150–1162.

Siebel F., Mauser W. Synchronized flow and wide moving jams from balanced vehicular traffic // Phys. Rev. E. — 2006. — Vol. 73. — P. 066108.

Wang H., Li J., Chen Q.-Y., N. D. Logistic modeling of the equilibrium speed–density relationship // Transp. Res. Part A Policy Pract. — 2011. — Vol. 45(6). — P. 554–566. doi:10.1016/j.tra.2011.03.010.

Whitham. G. B. Linear and Nonlinear Waves. — New York: Wiley, 1974.

Zhang H. M. A non-equilibrium traffic model devoid of gas-like behavior // Transp. Res. B. — 2002. Vol. 36. — P. 275–290.

Zhang H. M. Anisotropic property revisited — does it hold in multi-lane traffic? // Transportation Research Part B: Methodological, Issue 6. — 2003. — Vol. 37. — P. 561–577.