

УДК: 519.6

Сравнительный анализ методов конечных разностей и контрольного объема на примере решения нестационарной задачи естественной конвекции и теплового излучения в замкнутом кубе, заполненном диатермичной средой

Н. С. Бондарева, Н. С. Гибанов, С. Г. Мартюшев,
И. В. Мирошниченко, М. А. Шеремет^а

Научно-исследовательская лаборатория моделирования процессов конвективного теплопереноса
Федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования
«Национальный исследовательский Томский государственный университет»,
Россия, 634050, г. Томск, пр. Ленина, д. 36
E-mail: ^аsheremet@math.tsu.ru

*Получено 31.03.2017, после доработки — 09.06.2017.
Принято к публикации 20.06.2017.*

Проведен сравнительный анализ двух численных методик моделирования нестационарных режимов термогравитационной конвекции и теплового поверхностного излучения в замкнутой дифференциально обогреваемой кубической полости. Рассматриваемая область решения имела две изотермические противоположные вертикальные грани, остальные стенки являлись адиабатическими. Поверхности стенок считались диффузно-серыми, т. е. их направленные спектральные степень черноты и поглощательная способность не зависят ни от угла, ни от длины волны, но могут зависеть от температуры поверхности. Относительно отраженного излучения использовались два предположения: 1) отраженное излучение является диффузным, т. е. интенсивность отраженного излучения в любой точке границы поверхности равномерно распределена по всем направлениям; 2) отраженное излучение равномерно распределено по каждой поверхности замкнутой области решения. Математическая модель, сформулированная как в естественных переменных «скорость–давление», так и в преобразованных переменных «векторный потенциал – вектор завихренности», реализована численно методом контрольного объема и методом конечных разностей соответственно. Следует отметить, что анализ радиационного теплообмена проведен с использованием метода сальдо в варианте Поляка.

При решении краевой задачи в естественных переменных методом контрольного объема для аппроксимации конвективных слагаемых применялся степенной закон, для диффузионных слагаемых — центральные разности. Разностные уравнения движения и энергии разрешались на основе итерационного метода переменных направлений. Для поиска поля давления, согласованного с полем скорости, применялась процедура SIMPLE.

В случае метода конечных разностей и преобразованных переменных для аппроксимации конвективных слагаемых применялась монотонная схема Самарского, для диффузионных слагаемых — центральные разности. Уравнения параболического типа разрешались на основе локально-одномерной схемы Самарского. Дискретизация уравнений эллиптического типа для компонент векторного потенциала проводилась с использованием формул симметричной аппроксимации вторых производных. При этом полученное разностное уравнение разрешалось методом последовательной верхней релаксации. Оптимальное значение параметра релаксации подбиралось на основе вычислительных экспериментов.

В результате показано полное согласование полученных распределений скорости и температуры при различных значениях числа Рэлея, что отражает работоспособность представленных методик. Продемонстрирована эффективность использования преобразованных переменных и метода конечных разностей при решении класса нестационарных задач.

Ключевые слова: естественная конвекция, тепловое поверхностное излучение, диатермичная среда, естественные переменные, метод контрольного объема, преобразованные переменные, метод конечных разностей

Работа выполнена при финансовой поддержке Совета по грантам Президента РФ для молодых российских ученых (грант МД-2819.2017.8).

UDC: 519.6

Comparative analysis of finite difference method and finite volume method for unsteady natural convection and thermal radiation in a cubical cavity filled with a diathermic medium

N. S. Bondareva, N. S. Gibanov, S. G. Martyushev,
I. V. Miroshnichenko, M. A. Sheremet^a

Laboratory on Convective Heat and Mass Transfer,
National Research Tomsk State University,
Lenin ave. 36, Tomsk, 634050, Russia

E-mail: ^a sheremet@math.tsu.ru

Received 31.03.2017, after completion — 09.06.2017.

Accepted for publication 20.06.2017.

Comparative analysis of two numerical methods for simulation of unsteady natural convection and thermal surface radiation within a differentially heated cubical cavity has been carried out. The considered domain of interest had two isothermal opposite vertical faces, while other walls are adiabatic. The walls surfaces were diffuse and gray, namely, their directional spectral emissivity and absorptance do not depend on direction or wavelength but can depend on surface temperature. For the reflected radiation we had two approaches such as: 1) the reflected radiation is diffuse, namely, an intensity of the reflected radiation in any point of the surface is uniform for all directions; 2) the reflected radiation is uniform for each surface of the considered enclosure. Mathematical models formulated both in primitive variables “velocity–pressure” and in transformed variables “vector potential functions – vorticity vector” have been performed numerically using finite volume method and finite difference methods, respectively. It should be noted that radiative heat transfer has been analyzed using the net-radiation method in Poljak approach.

Using primitive variables and finite volume method for the considered boundary-value problem we applied power-law for an approximation of convective terms and central differences for an approximation of diffusive terms. The difference motion and energy equations have been solved using iterative method of alternating directions. Definition of the pressure field associated with velocity field has been performed using SIMPLE procedure.

Using transformed variables and finite difference method for the considered boundary-value problem we applied monotonic Samarsky scheme for convective terms and central differences for diffusive terms. Parabolic equations have been solved using locally one-dimensional Samarsky scheme. Discretization of elliptic equations for vector potential functions has been conducted using symmetric approximation of the second-order derivatives. Obtained difference equation has been solved by successive over-relaxation method. Optimal value of the relaxation parameter has been found on the basis of computational experiments.

As a result we have found the similar distributions of velocity and temperature in the case of these two approaches for different values of Rayleigh number, that illustrates an operability of the used techniques. The efficiency of transformed variables with finite difference method for unsteady problems has been shown.

Keywords: natural convection, thermal surface radiation, diathermic medium, primitive variables, finite volume method, transformed variables, finite difference method

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2017, vol. 9, no. 4, pp. 567–578 (Russian).

This work was supported by the Grants Council (under the President of the Russian Federation), Grant No. MD-2819.2017.8.

1. Введение

В настоящее время для решения практических задач, а иногда и фундаментальных, все чаще используются коммерческие пакеты прикладных программ, позволяющие проводить широкий спектр исследований, начиная от создания геометрии объекта и заканчивая анализом локальных и интегральных характеристик. В области анализа гидрогазодинамических процессов и тепломассопереноса нашли распространение такие пакеты, как ANSYS FLUENT [Кузнецов и др., 2013], STAR-CD [Рогожкин и др., 2014], FlowVision [Аксенов, 2017], VP2/3 (Velocity-Pressure, 2D/3D-версии) [Исаев и др., 2014], SigmaFlow [Платонов и др., 2013], SINF (Supersonic to INcompressible Flows) [Levchenya et al., 2010], а также свободно распространяемый пакет OpenFOAM (Open Field Operation and Manipulation) [Гаврилов и др., 2012]. Необходимо отметить, что во всех представленных пакетах разностные схемы сконструированы с применением метода контрольного объема для дискретизации исходных дифференциальных уравнений, записанных в естественных переменных «скорость–давление». Такой подход считается наиболее эффективным и позволяет достаточно корректно получать физически адекватные результаты. Известно, что для решения задач гидродинамики и теплопереноса можно использовать несколько отличающийся подход, основанный на исключении поля давления из рассмотрения и введении в трехмерном случае преобразованных векторных переменных «векторный потенциал – вектор завихренности» [Роуч, 1980; Андерсон и др., 1990]. Использование данного подхода не так широко распространено в связи с большим числом уравнений и сложностью постановки граничных условий для преобразованных переменных [Sheremet, 2012; Martyushev, Sheremet, 2014].

Целью настоящего исследования является сравнение эффективности метода контрольного объема в естественных переменных «скорость–давление» и метода конечных разностей в преобразованных переменных «векторный потенциал – вектор завихренности» на примере численного анализа естественной конвекции и поверхностного теплового излучения в замкнутой кубической полости с изотермическими противоположными гранями и адиабатическими остальными стенками. Следует отметить, что рассматриваемая задача имеет непосредственное отношение к вопросам охлаждения элементов радиоэлектронной аппаратуры и электронной техники. В этом случае предполагается, что тепловыделение реализуется на одной из граней замкнутой электронной ячейки, а со стороны противоположной грани функционирует пассивная система охлаждения. Исходя из трехмерности анализируемой задачи, возникает желание использовать наиболее эффективный численный метод, позволяющий получить физическое решение за минимальное вычислительное время. Основным критерием эффективности методики будет выступать время вычислений.

2. Математическая модель

Рассматривается нестационарная задача естественной конвекции и теплового поверхностного излучения в замкнутой кубической полости, представленной на рис. 1. Во все время процесса температура на гранях $x = 0$ и $x = L$ остается постоянной и равна T_h и T_c ($T_h > T_c$) соответственно. Остальные поверхности полости являются теплоизолированными.

Считается, что теплофизические свойства сухого воздуха, заполняющего внутренний объем, не зависят от температуры, а режим течения является ламинарным. Воздух считается теплопроводной, прозрачной для излучения, ньютоновской жидкостью, удовлетворяющей приближению Буссинеска. Теплообмен излучением между стенками моделируется на основе приближения поверхностного излучения [Martyushev, Sheremet, 2014]. Стенки считаются диффузно-серыми. По определению диффузно-серой поверхности, ее направленные спектральные степень черноты и поглощательная способность не зависят ни от угла, ни от длины волны, но могут зависеть от температуры поверхности [Зигель, Хауэлл, 1975].

В такой постановке процесс переноса тепла описывается системой нестационарных трехмерных уравнений Обербека–Буссинеска в воздушной полости [Sheremet, 2012; Martyushev, Sheremet, 2014] с учетом условий радиационного теплообмена на адиабатических гранях [Martyushev, Sheremet, 2014].

Математическая модель формулируется в безразмерных естественных переменных «скорость–давление–температура» [Полежаев и др., 1987]. В качестве масштабов расстояния, скорости, времени, температуры и давления были выбраны L , $\sqrt{g\beta\Delta T L}$, $\sqrt{L/g\beta\Delta T}$, $\Delta T = T_h - T_c$, $\rho g\beta\Delta T L$ соответственно. Для приведения к безразмерному виду системы уравнений использовались следующие соотношения:

$$X = x/L, Y = y/L, Z = z/L, \tau = t\sqrt{g\beta\Delta T/L}, U = u/\sqrt{g\beta\Delta T L}, V = v/\sqrt{g\beta\Delta T L}, \\ W = w/\sqrt{g\beta\Delta T L}, \Theta = (T - T_0)/(T_h - T_c), P = p/(\rho g\beta\Delta T L)$$

при $T_0 = 0.5(T_h + T_c)$.

Здесь L — размер кубической полости, g — ускорение свободного падения, β — термический коэффициент объемного расширения, ΔT — температурный напор, T_h — постоянная температура стенки $x = 0$, T_c — постоянная температура стенки $x = L$, ρ — плотность среды, x, y, z — размерные декартовы координаты, X, Y, Z — безразмерные декартовы координаты, t — размерное время, τ — безразмерное время, u, v, w — размерные компоненты вектора скорости, U, V, W — безразмерные компоненты вектора скорости, T — размерная температура, Θ — безразмерная температура, p — размерное давление, P — безразмерное давление.

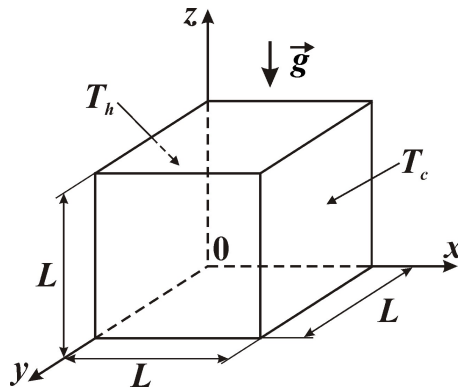


Рис. 1. Область решения задачи — кубическая полость (длина ребра L) с изотермическими гранями $x = 0$ (поддерживается постоянная температура T_h) и $x = L$ (поддерживается постоянная температура T_c), где x, y, z — координаты декартовой системы, g — ускорение свободного падения

Нестационарные безразмерные уравнения Обербека–Буссинеска в естественных переменных «скорость–давление» имеют следующий вид:

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} + \frac{\partial W}{\partial Z} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + \frac{\partial(UU)}{\partial X} + \frac{\partial(UV)}{\partial Y} + \frac{\partial(UW)}{\partial Z} = -\frac{\partial P}{\partial X} + \sqrt{\text{Pr}} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Z^2} \right), \quad (2)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} + \frac{\partial(UV)}{\partial X} + \frac{\partial(VV)}{\partial Y} + \frac{\partial(VW)}{\partial Z} = -\frac{\partial P}{\partial Y} + \sqrt{\text{Pr}} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Z^2} \right), \quad (3)$$

$$\frac{\partial W}{\partial \tau} + \frac{\partial(UW)}{\partial X} + \frac{\partial(VW)}{\partial Y} + \frac{\partial(WW)}{\partial Z} = -\frac{\partial P}{\partial Z} + \sqrt{\frac{\text{Pr}}{\text{Ra}}} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial Z^2} \right) + \Theta, \quad (4)$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \tau} + \frac{\partial(U\Theta)}{\partial X} + \frac{\partial(V\Theta)}{\partial Y} + \frac{\partial(W\Theta)}{\partial Z} = \frac{1}{\sqrt{\text{Ra} \cdot \text{Pr}}} \left(\frac{\partial^2 \Theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial Z^2} \right). \quad (5)$$

Начальные и граничные условия для системы уравнений (1)–(5) в кубической полости ($0 \leq X \leq 1$, $0 \leq Y \leq 1$, $0 \leq Z \leq 1$):

$$\tau = 0: U = V = W = 0, \quad \Theta = 0;$$

$$\tau > 0: U = V = W = 0, \quad \Theta_h = 0.5 \text{ при } X = 0;$$

$$U = V = W = 0, \quad \Theta_c = -0.5 \text{ при } X = 1;$$

$$U = V = W = 0, \quad \frac{\partial \Theta}{\partial \bar{n}} \pm \frac{\text{Sk}}{1 - \zeta} Q_{\text{rad}} = 0 \text{ на остальных границах.}$$

Здесь $\text{Pr} = \nu/a$ — число Прандтля, ν — кинематическая вязкость, a — температуропроводность, $\text{Ra} = g\beta\Delta TL^3/(va)$ — число Рэлея, Θ_h — безразмерная температура горячей стенки, Θ_c — безразмерная температура холодной стенки, $\text{Sk} = \sigma T_h^3 L/\lambda$ — число Старка, σ — постоянная Стефана–Больцмана, λ — коэффициент теплопроводности, $\zeta = T_c/T_h$ — температурный параметр, Q_{rad} — безразмерная плотность радиационного потока, \bar{n} — орт нормали к поверхности.

Преобразованные переменные, позволяющие исключить поле давления, вводятся следующим образом: векторный потенциал $\bar{\Psi} = \Psi_x \bar{i} + \Psi_y \bar{j} + \Psi_z \bar{k}$, удовлетворяющий калибровочному условию $\text{div}(\bar{\Psi}) = 0$, при этом $\bar{V} = \text{rot}(\bar{\Psi})$, вектор завихренности $\bar{\Omega} = \Omega_x \bar{i} + \Omega_y \bar{j} + \Omega_z \bar{k}$, связанный с вектором скорости соотношением вида $\bar{\Omega} = \text{rot}(\bar{V})$. Математическая модель формулируется в безразмерных преобразованных переменных «векторный потенциал – вектор завихренности – температура» [Sheremet, 2012; Martyushev, Sheremet, 2014]:

$$\frac{\partial^2 \Psi_x}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Psi_x}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 \Psi_x}{\partial Z^2} = -\Omega_x, \quad (6)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi_y}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Psi_y}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 \Psi_y}{\partial Z^2} = -\Omega_y, \quad (7)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi_z}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Psi_z}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 \Psi_z}{\partial Z^2} = -\Omega_z, \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Omega_x}{\partial \tau} + U \frac{\partial \Omega_x}{\partial X} + V \frac{\partial \Omega_x}{\partial Y} + W \frac{\partial \Omega_x}{\partial Z} - \Omega_x \frac{\partial U}{\partial X} - \Omega_y \frac{\partial U}{\partial Y} - \Omega_z \frac{\partial U}{\partial Z} = \\ = \sqrt{\frac{\text{Pr}}{\text{Ra}}} \left(\frac{\partial^2 \Omega_x}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Omega_x}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 \Omega_x}{\partial Z^2} \right) + \frac{\partial \Theta}{\partial Y}, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Omega_y}{\partial \tau} + U \frac{\partial \Omega_y}{\partial X} + V \frac{\partial \Omega_y}{\partial Y} + W \frac{\partial \Omega_y}{\partial Z} - \Omega_x \frac{\partial V}{\partial X} - \Omega_y \frac{\partial V}{\partial Y} - \Omega_z \frac{\partial V}{\partial Z} = \\ = \sqrt{\frac{\text{Pr}}{\text{Ra}}} \left(\frac{\partial^2 \Omega_y}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Omega_y}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 \Omega_y}{\partial Z^2} \right) - \frac{\partial \Theta}{\partial X}, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \Omega_z}{\partial \tau} + U \frac{\partial \Omega_z}{\partial X} + V \frac{\partial \Omega_z}{\partial Y} + W \frac{\partial \Omega_z}{\partial Z} - \Omega_x \frac{\partial W}{\partial X} - \Omega_y \frac{\partial W}{\partial Y} - \Omega_z \frac{\partial W}{\partial Z} = \\ & = \sqrt{\frac{\text{Pr}}{\text{Ra}}} \left(\frac{\partial^2 \Omega_z}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Omega_z}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 \Omega_z}{\partial Z^2} \right). \end{aligned} \quad (11)$$

Уравнение энергии (5) в случае преобразованных переменных «векторный потенциал – вектор завихренности» остается без изменений.

Начальные и граничные условия для системы уравнений (5)–(11):

$$\tau = 0: \Psi_x = \Psi_y = \Psi_z = 0, \Omega_x = \Omega_y = \Omega_z = 0, \Theta = 0;$$

$$\tau > 0: \frac{\partial \Psi_x}{\partial X} = \Psi_y = \Psi_z = 0, \Omega_x = 0, \Omega_y = -\frac{\partial^2 \Psi_y}{\partial X^2}, \Omega_z = -\frac{\partial^2 \Psi_z}{\partial X^2}, \Theta_h = 0.5 \text{ при } X = 0;$$

$$\frac{\partial \Psi_x}{\partial X} = \Psi_y = \Psi_z = 0, \Omega_x = 0, \Omega_y = -\frac{\partial^2 \Psi_y}{\partial X^2}, \Omega_z = -\frac{\partial^2 \Psi_z}{\partial X^2}, \Theta_n = -0.5 \text{ при } X = 1;$$

$$\Psi_x = \frac{\partial \Psi_y}{\partial Y} = \Psi_z = 0, \Omega_x = -\frac{\partial^2 \Psi_x}{\partial Y^2}, \Omega_y = 0, \Omega_z = -\frac{\partial^2 \Psi_z}{\partial Y^2}, \frac{\partial \Theta}{\partial Y} \pm \frac{\text{Sk}}{1-\zeta} Q_{\text{rad}} = 0 \text{ при } Y = 0, 1;$$

$$\Psi_x = \Psi_y = \frac{\partial \Psi_z}{\partial Z} = 0, \Omega_x = -\frac{\partial^2 \Psi_x}{\partial Z^2}, \Omega_y = -\frac{\partial^2 \Psi_y}{\partial Z^2}, \Omega_z = 0, \frac{\partial \Theta}{\partial Z} \pm \frac{\text{Sk}}{1-\zeta} Q_{\text{rad}} = 0 \text{ при } Z = 0, 1.$$

Для определения безразмерной плотности радиационного потока Q_{rad} применялся метод решения с использованием плотности потока эффективного излучения [Martyushev, Sheremet, 2014], который основан на реализации следующих двух разностных уравнений с использованием метода последовательной верхней релаксации:

$$Q_{\text{rad},k} = R_k - \sum_{i=1}^N F_{k-i} R_i, \quad (12)$$

$$R_k = (1 - \varepsilon_k) \sum_{i=1}^N F_{k-i} R_i + \varepsilon_k (1 - \zeta)^4 \left(\Theta_k + 0.5 \frac{1 + \zeta}{1 - \zeta} \right)^4. \quad (13)$$

Угловые коэффициенты вычислялись по определению [Martyushev, Sheremet, 2014]:

$$F_{1-2} = \frac{1}{A_1} \int_{A_1} \int_{A_2} \frac{\cos \gamma_1 \cos \gamma_2}{\pi S^2} dA_2 dA_1,$$

которое было подробно расписано в случае параллелепипеда [Martyushev, Sheremet, 2014].

Задача (1)–(5) с соответствующими начальными и граничными условиями решена методом контрольного объема (МКО) [Мартюшев и др., 2015] на равномерной структурированной сетке. Для аппроксимации конвективных слагаемых применялся степенной закон, для диффузионных слагаемых — центральные разности. Разностные уравнения движения и энергии разрешались на основе итерационного метода переменных направлений.

Для поиска поля давления, согласованного с полем скорости, применялась процедура SIMPLE, алгоритм которой на каждом временном слое имел следующий вид:

1) запоминаются поля искоемых характеристик (скорости, давления и температуры), отражающие значения этих параметров на предыдущем временном слое;

2) иницируются глобальные итерации, выполнение которых на каждом временном слое гарантирует получение корректных полей скорости, давления и температуры; на каждой глобальной итерации выполняются следующие действия:

2.1) задаются начальные приближения для полей скорости, температуры и давления;

- 2.2) определяются компоненты скорости из решения разностных уравнений количества движения с использованием приближенного поля давления;
- 2.3) вычисляется поправочное поле давления на основе определенного в п. 2.2 поля скорости;
- 2.4) корректируется поле скорости с использованием найденного поправочного поля давления;
- 2.5) определяется поле температуры.

На каждом временном слое выполнение глобальных итераций ограничивалось либо условием сходимости, либо количеством повторений (максимальное число повторений = 10). Условие сходимости имело следующий вид: сумма невязок для каждого из решаемых разностных уравнений не превышает 10^{-6} . Шаг по времени выбирался на основе условия устойчивости Куранта–Фридрихса–Леви.

Задача (5)–(11) с соответствующими начальными и граничными условиями решена методом конечных разностей (МКР) [Sheremet, 2012; Martyushev, Sheremet, 2014] на равномерной структурированной сетке. Уравнения решались последовательно, каждый временной шаг начинался с вычисления поля температуры (5), затем решались уравнения Пуассона для компонент векторного потенциала (6)–(8). Далее определялись граничные условия для компонент вектора завихренности и решались уравнения дисперсии компонент завихренности (9)–(11).

Для численного решения уравнений параболического типа (5), (9)–(11) применялась локально-одномерная схема Самарского [Sheremet, 2012; Martyushev, Sheremet, 2014]. В этой схеме решение трехмерной задачи сводится к последовательному решению одномерных задач. Для аппроксимации конвективных слагаемых использовалась монотонная схема Самарского, для диффузионных слагаемых — центральные разности. Эволюционный член представлял собой одностороннюю разность по времени и имел первый порядок точности относительно шага по времени. Все производные по пространственным координатам аппроксимировались со вторым порядком точности относительно шага по координате. Дискретизация уравнений Пуассона (6)–(8) проводилась на основе формул симметричной аппроксимации вторых производных. При этом полученное разностное уравнение разрешалось методом последовательной верхней релаксации. Оптимальное значение параметра релаксации подбиралось на основе вычислительных экспериментов.

Используемые методы решения как в преобразованных, так и в естественных переменных были подробно протестированы на пространственной задаче термогравитационной конвекции в кубе [Martyushev, Sheremet, 2014; Мартюшев и др., 2015].

3. Результаты численного моделирования

Численные исследования нестационарных режимов естественной конвекции и поверхностного теплового излучения проведены при следующих значениях безразмерных параметров: $Ra = 10^3$, $Sk = 0.5$; $Ra = 10^4$, $Sk = 1.09$; $Ra = 10^5$, $Sk = 2.34$; $Pr = 0.7$; $\varepsilon = 0.6$; $\zeta = 0.97$. Шаг по времени Δt принимал значения 0.01 и 0.1. При этом безразмерное время τ изменялось в диапазоне от 0 до 100. Основное внимание уделялось сравнительному анализу эффективности применения двух рассматриваемых методик.

На рис. 2 и 3 представлено сравнение локальных характеристик (распределения изолиний температуры и компонент скорости в средних сечениях кубической полости), полученных с использованием метода конечных разностей (сплошные линии) и метода контрольного объема (штриховые линии) при $\tau = 100$ и различных значениях числа Рэлея. Следует отметить, что представленные распределения полностью подтверждают работоспособность двух методов и отражают почти полное совпадение рассматриваемых параметров. Расчеты проводились на равномерной разностной сетке размерностью $50 \times 50 \times 50$, шаг по времени в МКР — $\Delta t = 0.01$, а в МКО были реализованы два варианта: $\Delta t = 0.01$ и $\Delta t = 0.1$. Следует отметить, что при малых значениях числа Рэлея ($Ra = 10^3$), где доминирующим механизмом передачи

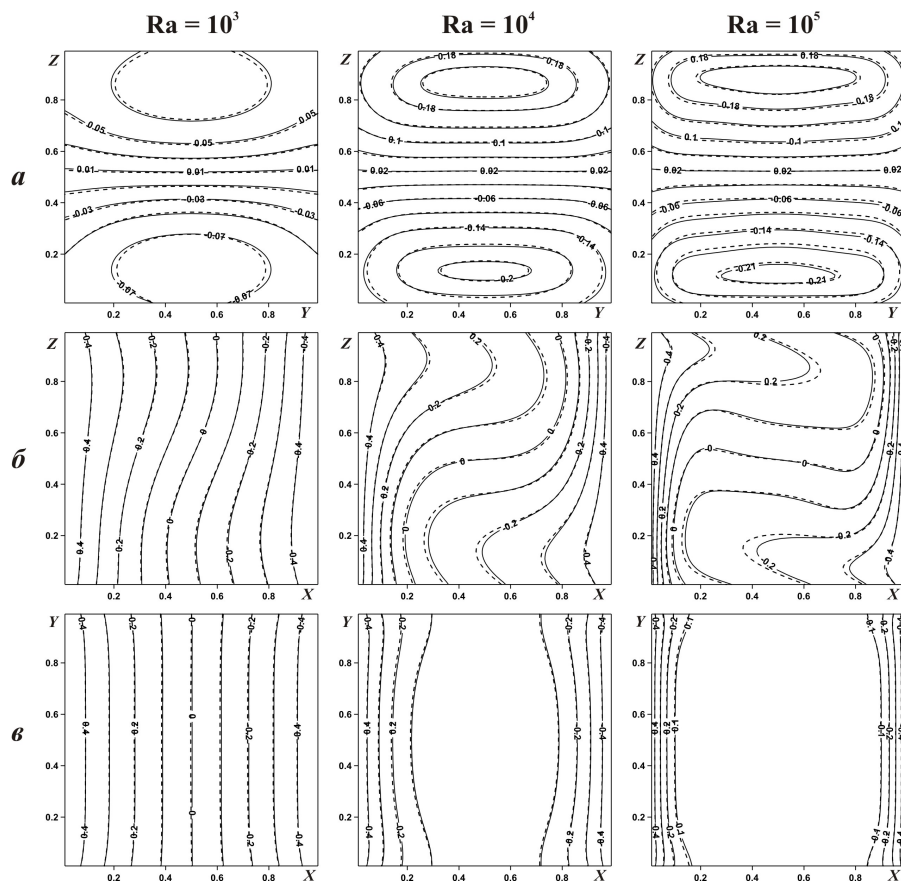


Рис. 2. Распределения температуры в сечениях $X=0.5$ (а), $Y=0.5$ (б), $Z=0.5$ (в) при $\tau = 100$ и различных значениях числа Рэлея (Ra) (сплошные линии — результаты, полученные с использованием метода конечных разностей; штриховые линии — результаты, полученные с использованием метода контрольного объема)

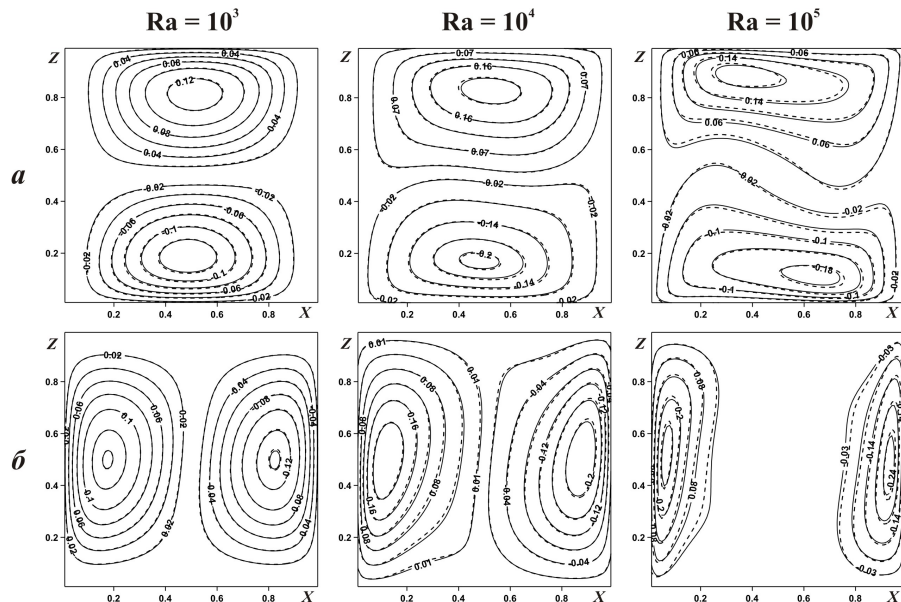


Рис. 3. Распределения U -компоненты скорости (а) и W -компоненты скорости (б) в сечении $Y=0.5$ при $\tau = 100$ и различных значениях числа Рэлея (Ra) (сплошные линии — результаты, полученные с использованием метода конечных разностей; штриховые линии — результаты, полученные с использованием метода контрольного объема)

энергии является теплопроводность, изолинии скорости и температуры в средних сечениях, полученные с использованием двух подходов, полностью совпадают. Дальнейший рост числа Рэлея, отражающий интенсификацию конвективного течения внутри полости, приводит к небольшим расхождениям в распределениях локальных характеристик, полученных на основе МКО и МКР. Основной причиной отмеченной динамики является наличие некоторого рассогласования в используемых разностных схемах аппроксимации конвективных слагаемых (в МКО — степенной закон, в МКР — монотонная схема Самарского), которые начинают доминировать при высоких числах Рэлея.

Подробный физический анализ наблюдаемых эффектов, связанных с изменением числа Рэлея и коэффициента излучения ограждающих поверхностей, представлен в [Мартюшев и др., 2015; Martyushev, Sheremet, 2015].

На рис. 4 представлены зависимости средних конвективного $\left(\overline{\text{Nu}}_{\text{con}} = \int_0^1 \int_0^1 \left| \frac{\partial \Theta}{\partial X} \right|_{X=0} dYdZ \right)$ и радиационного $\left(\overline{\text{Nu}}_{\text{rad}} = \frac{\text{Sk}}{(1-\zeta)} \int_0^1 \int_0^1 Q_{\text{rad}}|_{X=0} dYdZ \right)$ чисел Нуссельта на вертикальной нагретой

грани от времени, полученные с использованием метода конечных разностей и метода контрольного объема. В рассматриваемом диапазоне изменения числа Рэлея значения среднего радиационного числа Нуссельта не зависят от используемой вычислительной методики. В случае интегрального конвективного числа Нуссельта незначительные расхождения заметны только при $\text{Ra} = 10^5$, что обусловлено интенсификацией термогравитационной конвекции в полости и некоторым рассогласованием в используемых разностных схемах аппроксимации конвективных слагаемых.

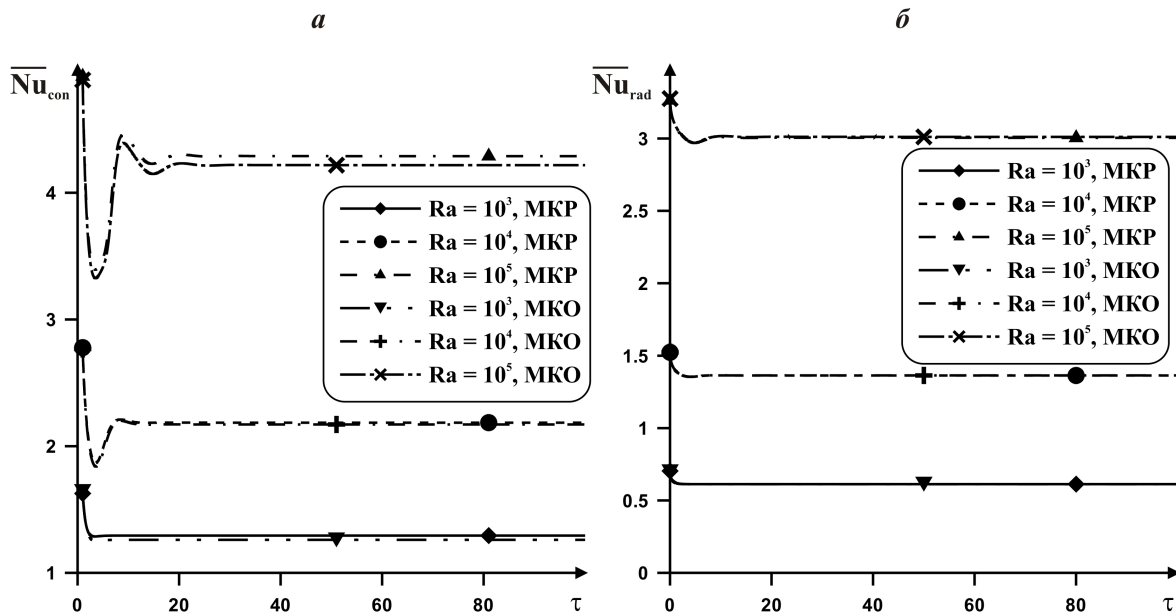


Рис. 4. Зависимости средних конвективного ($\overline{\text{Nu}}_{\text{con}}$) (а) и радиационного ($\overline{\text{Nu}}_{\text{rad}}$) (б) чисел Нуссельта от времени (τ) и числа Рэлея (Ra). МКР — метод конечных разностей, МКО — метод контрольного объема

Временную зависимость интегрального конвективного коэффициента теплообмена можно условно разделить на четыре зоны: начальный участок (или зона теплопроводности), участок интенсивного теплоотвода (или конвективная зона), участок установления и стационарный участок. Формирование и продолжительность каждой из этих зон главным образом определя-

ются значением числа Рэлея. На начальном временном участке происходит уменьшение $\overline{Nu}_{\text{con}}$ вследствие прогрева области вблизи нагретой стенки за счет теплопроводности. Такое изменение обусловлено наличием температурного перепада в начальный момент времени. После достижения минимального значения среднее конвективное число Нуссельта возрастает (участок интенсивного теплоотвода) вследствие интенсификации конвективного механизма переноса энергии. Достижение максимального значения в результате монотонного роста характеризует завершение второго участка. Последующие колебания $\overline{Nu}_{\text{con}}$ описывают участок установления, причиной формирования которого является взаимодействие между подъемной силой и силами внутреннего трения. Достижение постоянного значения среднего конвективного числа Нуссельта характеризует стационарный режим теплопереноса.

В таблице 1 представлено время вычислений (в часах) для каждого из реализованных вариантов как методом конечных разностей, так и методом контрольного объема, с использованием компьютера в стандартной комплектации (процессор Intel(R) Core(TM) i7-3770K 3.90 Ghz, оперативная память — 16.0 ГБ).

Таблица 1. Время вычислений при использовании различных методик и параметров

Ra	ε	Время вычислений (в часах) МКР, $\Delta\tau = 0.01$	Время вычислений (в часах) МКО, $\Delta\tau = 0.1$	Время вычислений (в часах) МКО, $\Delta\tau = 0.01$
10^3	0.3	9.5	>100	35.5
	0.6	18.5	>100	46.5
	0.9	17	>100	45
10^4	0.3	22.5	>100	51
	0.6	24.5	>100	49
	0.9	22	>100	48
10^5	0.3	30.5	26	65
	0.6	30.5	26	71
	0.9	28.5	28.5	68

Анализируя представленные в таблице результаты, можно отметить, что в рассматриваемом диапазоне изменения числа Рэлея при идентичных шагах по времени $\Delta\tau = 0.01$ использование метода конечных разностей и преобразованных переменных позволяет значительно сократить время вычислений от 2 раз при $Ra = 10^4$ и $\varepsilon = 0.6$ до 3.7 раза при $Ra = 10^3$ и $\varepsilon = 0.3$. Незначительное ускорение расчетов (на 15 %) при использовании МКО возможно только в случае высоких чисел Рэлея, $Ra = 10^5$, при увеличении шага по времени в 10 раз ($\Delta\tau = 0.1$).

4. Заключение

Проведенный сравнительный анализ использования двух подходов показал преимущества применения метода конечных разностей и преобразованных переменных по сравнению с естественными переменными в методе контрольного объема при решении рассматриваемого класса нестационарных пространственных задач конвективно-радиационного теплопереноса. Отмеченная особенность связана с наличием существенных временных затрат при реализации в методе контрольного объема SIMPLE-подобных алгоритмов для совместного определения полей скорости и давления, что обусловлено введением глобальных итераций по всем решаемым уравнениям.

Список литературы (References)

- Аксьонов А. А.* FlowVision: индустриальная вычислительная гидродинамика // Компьютерные исследования и моделирование. — 2017. — Т. 9, № 1. — С. 5–20.
Aksenov A. A. FlowVision: Industrialnay vichislitel'nay gidrodinamika // Komputernie issledovaniya i modelirovaniye. — 2017. — Vol. 9, no. 1. — P. 5–20 (in Russian).
- Андерсон Д., Таннехилл Дж., Плетчер Р.* Вычислительная гидромеханика и теплообмен. — Т. 2. — М.: Мир, 1990.
Anderson D. A., Tannehill J. C., Pletcher R. H. Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer. — Boca Raton: CRC Press, 2013 (in English).
- Гаврилов К. А., Демин В. А., Попов Е. А.* Моделирование трехмерных конвективных течений с помощью пакета OpenFOAM // Вестник Пермского университета. Математика, механика, информатика. — 2012. — Вып. 3 (11). — С. 23–28.
Gavrilov K. A., Demin V. A., Popov E. A. Modelirovaniye trehmernih konvektivnih techenii s pomoschiu paketa OpenFOAM // Vestnik Permskogo Universiteta. Matematika, Mehanika, Informatika. — 2012. — No. 3. — P. 23–28 (in Russian).
- Зигель Р., Хауэлл Дж.* Теплообмен излучением. — М.: Мир, 1975.
Siegel R., Howell J. R. Thermal radiation heat transfer. — London: Taylor & Francis, 2002 (in English).
- Исаев С. А., Баранов П. А., Жукова Ю. В., Терешкин А. А., Усачов А. Е.* Моделирование ветрового воздействия на ансамбль высотных зданий с помощью многоблочных вычислительных технологий // Инженерно-физический журнал. — 2014. — Т. 87, № 1. — С. 107–118.
Isaev S. A., Baranov P. A., Zhukova Yu. V., Tereshkin A. A., Usachov A. E. Simulation of the wind effect on an ensemble of high-rise buildings by means of multiblock computational technologies // Journal of Engineering Physics and Thermophysics. — 2014. — Vol. 87, no. 1. — P. 112–123 (in English).
- Кузнецов Г. В., Максимов В. И., Шеремет М. А.* Естественная конвекция в замкнутом параллелепипеде при наличии локального источника энергии // Прикладная механика и техническая физика. — 2013. — Т. 54, № 4. — С. 86–95.
Kuznetsov G. V., Maksimov V. I., Sheremet M. A. Natural convection in a closed parallelepiped with a local energy source // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. — 2013. — Vol. 54, no. 4. — P. 588–595 (in English).
- Мартюшев С. Г., Мирошниченко И. В., Шеремет М. А.* Влияние геометрического параметра на режимы естественной конвекции и теплового поверхностного излучения в замкнутом параллелепипеде // Инженерно-физический журнал. — 2015. — Т. 88, № 6. — С. 1468–1475.
Martyushev S. G., Miroshnichenko I. V., Sheremet M. A. Influence of the geometric parameter on the regimes of natural convection and thermal surface radiation in a closed parallelepiped // Journal of Engineering Physics and Thermophysics. — 2015. — Vol. 88, no. 6. — P. 1522–1529 (in English).
- Платонов Д. В., Минаков А. В., Дектерев А. А., Сентябрьков А. В.* Численное моделирование пространственных течений с закруткой потока // Компьютерные исследования и моделирование. — 2013. — Т. 5, № 4. — С. 635–648.
Platonov D. V., Minakov A. V., Dekterev A. A., Sentyabov A. V. Chislennoye modelirovaniye prostranstvennih techenii s zakrutkoi potoka // Komputernie issledovaniya i modelirovaniye. — 2013. — Vol. 5, no. 4. — P. 635–648 (in Russian).
- Полежаев В. И., Буне А. В., Везуб Н. А. и др.* Математическое моделирование конвективного тепло- и массообмена на основе уравнений Навье–Стокса. — М.: Наука, 1987.
Polezhaev V. I., Bune A. V., Verezub N. A. et al. Matematicheskoye modelirovaniye konvektivnogo teplo- i massoobmena na osnove uravnenii Navie–Stoksa. — M.: Nauka, 1987 (in Russian).
- Рогожкин С. А., Аксенов А. А., Жлуктов С. В., Осипов С. Л., Сазонова М. Л., Фадеев И. Д., Шепелев С. Ф., Шмелев В. В.* Разработка модели турбулентного теплопереноса для жидкометаллического натриевого теплоносителя и ее верификация // Вычислительная механика сплошных сред. — 2014. — Т. 7, № 3. — С. 306–316.
Rogozhkin S. A., Aksenov A. A., Zhluktov S. V., Osipov S. L., Sazonova M. L., Fadeev I. D., Shepelev S. F., Shmelev V. V. Razrabotka modeli turbulentnogo teploperenosa dlay zhidkometallicheskogo natrievogo teplonositel'ay i ee verifikatsiya // Vichislitel'nay mehanika sploshnih sred. — 2014. — Vol. 7, no. 3. — P. 306–316 (in Russian).

- Роуч П.* Вычислительная гидродинамика. — М.: Мир, 1980.
Roache P. J. Fundamentals of Computational Fluid Dynamics. — Albuquerque: Hermosa Publishers, 1998 (in English).
- Levchenya A. M., Smirnov E. M., Goryachev V. D.* RANS-based numerical simulation and visualization of the horseshoe vortex system in the leading edge endwall region of a symmetric body // International Journal of Heat and Fluid Flow. — 2010. — Vol. 31. — P. 1107–1112.
- Martyushev S. G., Sheremet M. A.* Conjugate natural convection combined with surface thermal radiation in a three-dimensional enclosure with a heat source // International Journal of Heat and Mass Transfer. — 2014. — Vol. 73. — P. 340–353.
- Martyushev S. G., Sheremet M. A.* Numerical analysis of 3D regimes of natural convection and surface radiation in a differentially heated enclosure // Journal of Engineering Thermophysics. — 2015. — Vol. 24. — P. 22–32.
- Sheremet M. A.* Laminar natural convection in an inclined cylindrical enclosure having finite thickness walls // International Journal of Heat and Mass Transfer. — 2012. — Vol. 55. — P. 3582–3600.