

УДК: 519.634

О контактных неустойчивостях вязкопластических жидкостей в трехмерной постановке задачи

А. Н. Долуденко

Объединенный институт высоких температур РАН,
Россия, 125412, г. Москва, ул. Ижорская, д. 13, стр.2

E-mail: adoludenko@gmail.com

*Получено 06.03.2018, после доработки — 01.06.2018.
Принято к публикации 06.06.2018.*

В работе изучаются неустойчивости Рихтмайера–Мешкова и Рэлея–Тейлора вязкопластических жидкостей (или, в частности, бингамовских жидкостей, обладающих предельным напряжением сдвига) в трехмерной постановке задачи. Анализируется развитие неустойчивостей Рихтмайера–Мешкова и Рэлея–Тейлора бингамовских жидкостей при одномодовом возмущении скорости контактной границы. Анализ проводится на основе численного моделирования с использованием метода Мак-Кормака и метода объема жидкости (метода VOF — Volume of Fluid) для отслеживания контактной границы в различные моменты времени. Представлены результаты численного моделирования неустойчивостей Рихтмайера–Мешкова и Рэлея–Тейлора бингамовской жидкости и их сравнение как с теорией, так и с результатами моделирования ньютоновской жидкости. В результате проведенных численных расчетов показано, что предел текучести вязкопластической жидкости существенно влияет на характер неустойчивости как Рэлея–Тейлора, так и Рихтмайера–Мешкова: существует критическая амплитуда начального возмущения поля скорости контактной границы, при превышении которой начинается развитие неустойчивостей. Если амплитуда начального возмущения поля скорости меньше критического значения, то это возмущение относительно быстро затухает и развития неустойчивостей не происходит. При превышении начальным возмущением критической амплитуды характер развития неустойчивостей напоминает таковой у ньютоновской жидкости. При рассмотрении неустойчивости Рихтмайера–Мешкова оцениваются критические амплитуды начального возмущения поля скорости контактной границы при различных значениях предельного напряжения сдвига бингамовской жидкости. Кроме того, наблюдается отличие поведения неньютоновской жидкости при развитии неустойчивости от плоского случая: при одном и том же значении предельного напряжения сдвига в трехмерной геометрии интервал значений амплитуды начального возмущения, при котором происходит переход от покоя к движению, несколько уже. Помимо этого показано, что критическая амплитуда начального возмущения контактной границы для неустойчивости Рэлея–Тейлора ниже, чем для неустойчивости Рихтмайера–Мешкова. Это объясняется действием силы тяжести, «помогающей» развитию неустойчивости и противодействующей силам вязкого трения.

Ключевые слова: неустойчивость, Рэлея–Тейлора, Рихтмайера–Мешкова, неньютоновская жидкость, бингамовская жидкость

UDC: 519.634

On contact instabilities of viscoplastic fluids in three-dimensional setting

A. N. Doludenko

Joint Institute for High Temperatures of the Russian Academy of Sciences,
13 Izhorskaya st., Bd. 2, Moscow, 125412, Russia

E-mail: adoludenko@gmail.com

Received 06.03.2018, after completion — 01.06.2018.

Accepted for publication 06.06.2018.

The Richtmyer–Meshkov and the Rayleigh–Taylor instabilities of viscoplastic (or the Bingham) fluids are studied in the three-dimensional formulation of the problem. A numerical modeling of the intermixing of two fluids with different rheology, whose densities differ twice, as a result of instabilities development process has been carried out. The development of the Richtmyer–Meshkov and the Rayleigh–Taylor instabilities of the Bingham fluids is analyzed utilizing the MacCormack and the Volume of Fluid (VOF) methods to reconstruct the interface during the process. Both the results of numerical simulation of the named instabilities of the Bingham liquids and their comparison with theory and the results of the Newtonian fluid simulation are presented. Critical amplitude of the initial perturbation of the contact boundary velocity field at which the development of instabilities begins was estimated. This critical amplitude presents because of the yield stress exists in the Bingham fluids. Results of numerical calculations show that the yield stress of viscoplastic fluids essentially affects the nature of the development of both Rayleigh–Taylor and Richtmyer–Meshkov instabilities. If the amplitude of the initial perturbation is less than the critical value, then the perturbation decays relatively quickly, and no instability develops. When the initial perturbation exceeds the critical amplitude, the nature of the instability development resembles that of the Newtonian fluid. In a case of the Richtmyer–Meshkov instability, the critical amplitudes of the initial perturbation of the contact boundary at different values of the yield stress are estimated. There is a distinction in behavior of the non-Newtonian fluid in a plane case: with the same value of the yield stress in three-dimensional geometry, the range of the amplitude values of the initial perturbation, when fluid starts to transit from rest to motion, is significantly narrower. In addition, it is shown that the critical amplitude of the initial perturbation of the contact boundary for the Rayleigh–Taylor instability is lower than for the Richtmyer–Meshkov instability. This is due to the action of gravity, which helps the instability to develop and counteracts the forces of viscous friction.

Keywords: instability, Rayleigh–Taylor, Richtmyer–Meshkov, Newtonian fluid, Bingham fluid

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2018, vol. 10, no. 4, pp. 431–444 (Russian).

Введение

Привычная всем вода является одним из представителей ньютоновских жидкостей, в которых возникающие касательные напряжения прямо пропорциональны скорости сдвига. Мы все привыкли к тому, что многие жидкости, которые встречаются в повседневной жизни (молоко, бензин, растительное масло), очень похожи по своим механическим свойствам на воду. Однако многие жидкости в природе (магма, лавина, грунт при оползнях), в косметике (кремы, зубные пасты, гели), пищевой отрасли (майонезы, всевозможные соусы), промышленности (краски, лаки, цементные и буровые растворы) проявляют при движении свойства, отличные от ньютоновских, и относятся к различным классам неньютоновских жидкостей.

Количество работ, касающихся неустойчивости неньютоновских жидкостей, невелико. Отсутствие активности в этой области может быть частично объяснено трудностями, связанными с анализом устойчивости, например, в вязко-пластической жидкости. Из-за предела текучести изначально неподвижное состояние будет устойчивым относительно малых возмущений. Следовательно, классический подход, основанный на линейном анализе, в этом случае неприменим.

В природе существует ряд неустойчивостей: Кельвина–Гельмгольца, Тейлора, Хертлера, Рэлея–Тейлора, Рихтмайера–Мешкова, Саффмана–Тейлора и др. Существует целый ряд статей, посвященных конвективной неустойчивости: Виханский [Vikhansky, 2009] рассматривает влияние предела текучести на конвекцию Рэлея–Бенара вязкопластической среды, используя прямое численное моделирование нагретой снизу бингамовской жидкости в квадратной полости. Он показывает, что наличие предела текучести заметно меняет динамику системы. В частности, иногда происходило следующее: после продолжительного промежутка времени хаотические колебания внезапно прекращались [Vikhansky, 2009]. С этим тесно связана публикация Метивьера и Нуара [Metivier, Nouar, 2008] о начале двумерной конвекции Рэлея–Бенара для течения в плоском канале вязкопластической жидкости. Авторы показывают, что предел текучести, представленный числом Бингама, задерживает начало конвекции. При низких значениях числа Бингама стабилизация по существу происходит от присутствия нетекучей области, где возмущение скорости затухает. При больших числах Бингама увеличение эффективной вязкости во всей области становится доминирующим стабилизирующим эффектом. Йоши Ами и др. [Joshi et al., 2011] исследовали неустойчивость Кельвина–Гельмгольца в вязкоупругих жидкостях в присутствии электромагнитных полей. Для этой неустойчивости на границе вязкоупругой и ньютоновской жидкостей они разработали дисперсионное соотношение замкнутого вида в предположении малости амплитуды возмущений. При этом учитывалось наличие градиентов электрического и магнитного полей в приближении вязкого потенциального течения.

Куссо и Гулар в своей работе [Coussot, Gaulard, 2005] описывают особенности движения пищевых продуктов. Авторы показывают, что пастообразные материалы, такие как майонез, горчица, кетчуп, пюре и т. д. при вытекании под действием тяготения распадаются на кусочки в широком диапазоне скоростей потока. Такой эффект является разновидностью неустойчивости течения, которая развивается, когда вес материала становится больше, чем соответствующее предельное напряжение сдвига. Кроме того, они показывают, что для тиксотропных материалов может наблюдаться интересное явление — по мере увеличения скорости потока размер капли может оставаться постоянным или даже уменьшаться. Это наблюдение может быть применено для управления формой и размером капель экструдатов в пищевой промышленности.

Что касается неустойчивости Рэлея–Тейлора неньютоновских жидкостей, то, например, Айткен и Уилсон [Aitken, Wilson, 1993] изучали проблему устойчивости несжимаемой упругой жидкости в состоянии покоя над свободной поверхностью. Они использовали модель Джеффри для упругой жидкости, что было достаточно для изучения возмущения состояния покоя и демонстрации того, что безразмерное критическое волновое число, $k_c = 1$, оказалось таким же, как и в ньютоновской жидкости.

В этой работе мы рассматриваем численное моделирование неустойчивостей Рихтмайера–Мешкова и Рэлея–Тейлора двух жидкостей с одинаковой реологией, плотности которых отличаются вдвое.

Постановка задачи

Рассматривается система из двух бингамовских жидкостей с условными плотностями $\rho_1 = 0.5$ и $\rho_2 = 1.0$ и пороговыми напряжениями $\tau = 0.1$ и $\tau = 1.0$. Расчетная область представляет собой вытянутый прямоугольный параллелепипед, длинная сторона которого расположена вдоль оси Oz . Сечение плоскостью, перпендикулярной оси Oz , представляет собой квадрат с длиной стороны π . Высота параллелепипеда вдвое больше стороны квадрата и равна, соответственно, 2π .

При расчетах трехмерной модели значительно увеличиваются временные затраты на расчет. В первую очередь это связано с резко увеличившимся количеством расчетных ячеек и связанных с ними вычислительных операций. При разработке трехмерного варианта алгоритма было решено с самого начала учитывать возможность его распараллеливания. Современные кластеры в основном являются вычислительными системами с распределенной памятью, поэтому в качестве технологии параллельного программирования была выбрана система MPI (Message Passing Interface).

Рассмотрим систему двух жидкостей с одинаковой реологией, но различными плотностями ($\rho_2 > \rho_1$). Предположим, что жидкости находятся в поле силы тяжести, направленной вниз. Предположим также, что жидкость с большей плотностью расположена над жидкостью с меньшей плотностью и занимает половину объема расчетной области. Свяжем с поверхностью раздела двух жидкостей систему координат, горизонтальные оси Ox и Oy которой лежат в плоскости поверхности раздела, а вертикальная ось Oz направлена вверх (рис. 1).

Уравнения сохранения количества движения и неразрывности для каждой из двух жидкостей имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) &= 0, \\ \rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) &= \operatorname{div}(\hat{T}) + \rho \mathbf{g}, \end{aligned} \quad (1)$$

где t — время, $\hat{T} = T_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij}$, τ_{ij} — тензор вязких напряжений, ρ — плотность, p — давление, \mathbf{u} — вектор скорости.

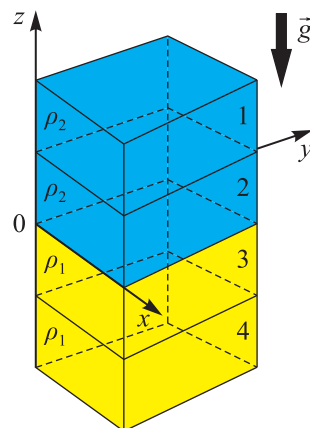


Рис. 1. К постановке задачи в трехмерном случае. Схематическое изображение расчетной области, направления действия объемной силы и взаимного расположения жидкостей с плотностями $\rho_1 < \rho_2$ в пространстве. Помимо этого приведено разделение расчетной области в данном случае на четыре части (1, 2, 3, 4) при распараллеливании

Для замыкания системы (1) используется баротропное уравнение, имеющее следующий вид

$$p_i = p_0 + E_i \frac{\rho_i - \rho_{i0}}{\rho_{i0}}, \quad i = 1, 2,$$

где $E_1 = E_2 = E$ — модуль Юнга, ρ_{i0} и p_0 — равновесные плотности жидкостей и опорное давление соответственно. Это позволяет находить поле плотности по уже известному полю давления.

Реологическое уравнение неньютоновской жидкости

Для выражения тензора вязких напряжений используются две реологические модели:

- 1) модель ньютоновской жидкости;
- 2) модель Бингама [Wang, Gordaninejad, 1999].

В случае ньютоновской жидкости связь тензора вязких напряжений τ_{ij} с тензором скоростей деформации $\dot{\gamma}_{ij}$ имеет вид [Седов, 1970]:

$$\tau_{ij} = 2\mu \dot{\gamma}_{ij},$$

$$\dot{\gamma}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right),$$

x_i , u_i — декартовы координаты и составляющая вектора скорости вдоль x_i соответственно.

Реологическая модель Гершеля – Балкли представляет собой модель неньютоновской жидкости, которая имеет пороговое напряжение сдвига. Это означает, что при сдвиговом напряжении меньше порогового жидкость движется как абсолютно твердое тело. При превышении порогового напряжения поведение жидкости зависит от реологической модели, управляющим параметром которой является степенной показатель n :

$$\tau_{ij} = (\tau_0 \dot{\gamma}^{-1} + \mu_0 \dot{\gamma}^{n-1}) \dot{\gamma}_{ij}, \quad \text{для } \tau \geq \tau_0,$$

$$\dot{\gamma}_{ij} = 0, \quad \text{для } \tau < \tau_0,$$

где $\tau = \sqrt{\tau_{ij} \tau_{ij}}$, $\dot{\gamma} = \sqrt{\dot{\gamma}_{ij} \dot{\gamma}_{ij}}$ — вторые инварианты тензоров вязкости и скоростей деформации соответственно, τ_0 — пороговое значение напряжения.

Для так называемой бингамовской жидкости показатель $n = 1$. Это означает, что при больших деформационных скоростях тензор вязких напряжений линейно зависит от тензора скоростей деформации, то есть поведение жидкости определяется ньютоновским законом вязкости. Здесь и далее в работе принимается $n = 1$, как наиболее характерный для модели Гершеля – Балкли неньютоновской жидкости, т. е. рассматривается модель Бингама.

При численных расчетах реологическое выражение для жидкости Бингама из-за неопределенности на вертикальном участке скачка аппроксимируется следующим выражением для кажущейся вязкости $\mu(\dot{\gamma})$ (рис. 2):

$$\tau_{ij} = 2\mu(\dot{\gamma})\dot{\gamma}_{ij},$$

$$\mu(\dot{\gamma}) = \begin{cases} \tau_0 \dot{\gamma}^{-1} + \mu_0 \dot{\gamma}^{n-1}, & \dot{\gamma} \geq \dot{\gamma}_{min}, \\ \tau_0 \dot{\gamma}_{min}^{-1} + \mu_0 \dot{\gamma}_{min}^{n-1}, & \dot{\gamma} < \dot{\gamma}_{min}. \end{cases}$$

Такого рода приближение было протестировано на течении Пуазейля бингамовской жидкости в плоском канале, для профиля скорости которого есть аналитическое выражение. Проводилось численное моделирование на установление стационарного течения. Профиль скорости полученного численного решения отличался от аналитического на величину от 0.1% до 1.2% в зависимости от координаты точки поперек трубы, в которой производилось измерение скорости. Поскольку результаты моделирования с использованием такого подхода фактически не отличаются от аналитических в простом случае, можно предполагать, что применение данного подхода оправдано и в более сложных течениях.

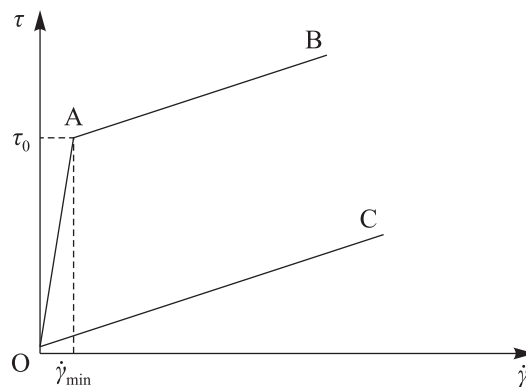


Рис. 2. Реологическая диаграмма, на которой приведена зависимость касательного напряжения сдвига τ от скоростей деформации $\dot{\gamma}$: ОАВ — для модельной бингамовской жидкости, ОС — для ньютоновской жидкости, τ_0 — предельное напряжение сдвига, при превышении которого неньютоновская жидкость движется как ньютоновская

Метод решения

Для решения поставленной задачи была создана вычислительная программа, позволяющая производить численное моделирование нестационарных течений как ньютоновской, так и неньютоновской жидкостей с использованием известной схемы Мак-Кормака [MacCormack, 1969].

На боковых гранях области поставлены условия проскальзывания касательных компонент скорости, а значение нормальной компоненты принимается равным нулю. На верхней и нижней стенках поставлены условия прилипания касательных компонент скорости, значение нормальной к стенке компоненты принимается равным нулю.

Для отслеживания поверхности раздела двух жидкостей применялся метод выделенных объемов, известный под названием VOF (Volume Of Fluid [Hirt, Nichols, 1981]). Этот метод предполагает, что две или более жидкости (или фазы) не смешиваются. Метод основан на идее так называемой функции объемной концентрации α_i для i -ой фазы. Она является характеристической функцией наблюдаемой жидкости в контрольном объеме (обычно за контрольный объем берется объем вычислительной ячейки). Когда ячейка пуста (в ней не содержится наблюдаемой жидкости), величина $\alpha_i = 0$, если же ячейка полна прослеживаемой жидкостью, то $\alpha_i = 1$, если поверхность раздела жидкостей проходит через ячейку, то $0 < \alpha_i < 1$. Функция концентрации α_i — скалярная функция.

Неустойчивость Рихтмайера – Мешкова в ньютоновских и вязкопластических средах. Определение критической амплитуды

Формулы для вычисления скорости движения вершины пузыря в пространственной геометрии для общего случая, описывающего как неустойчивость Рихтмайера–Мешкова, так и неустойчивость Рэлея–Тейлора, были получены в [Inogamov, Oparin, 1999]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial K}{\partial t} &= \frac{(1 - 4K)}{2} W, \\ \frac{\partial W}{\partial t} &= -\frac{W^2 - 4gK}{2(1 - 2K)}, \end{aligned} \quad (2)$$

где K — кривизна контактной границы, W — вертикальная скорость поверхности раздела двух сред, g — ускорение. Данные выражения были получены на основе построенной математической модели. Подробнее с ней можно ознакомиться в [Иногамов и др., 1999].

Как и в двумерном случае [Долуденко, 2017], система уравнений (2) может быть использована для описания гравитационных волн, неустойчивости Рэлея–Тейлора и неустойчивости Рихтмайера–Мешкова. В случае гравитационных волн ускорение $g = 1$, в случае неустойчивости Рэлея–Тейлора $g = -1$, для неустойчивости Рихтмайера–Мешкова g принимается равным нулю. Остановимся на варианте $g = 0$, при этом исходная система уравнений принимает вид:

$$\begin{aligned}\frac{\partial K}{\partial t} &= \frac{(1-4K)}{2}W, \\ \frac{\partial W}{\partial t} &= -\frac{W^2}{2(1-2K)}.\end{aligned}\quad (3)$$

Проинтегрировав уравнения системы (3), можно получить зависимости $K(t)$ и $W(t)$ в неявном виде

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{1-2K}{1-4K}} - 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2(1-2K)} + \sqrt{1-4K}}{\sqrt{2} + 1} &= W_0 t, \\ \frac{W_0}{W} - 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left(\frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1} \frac{\sqrt{2}W_0 - W}{\sqrt{2}W_0 + W} \right) &= W_0 t,\end{aligned}\quad (4)$$

где W — скорость движения границы раздела, W_0 — начальная скорость движения, такая, что $W(t=0) = W_0$. В дальнейшем вычисленная посредством второго уравнения системы (4) скорость движения границы раздела будет называться численно-теоретической.

Приведем ниже на графиках сравнительные кривые для бингамовской и ньютоновской жидкостей. Графики скорости от времени для обычной жидкости приведены, во-первых, для того, чтобы показать, что они в достаточной степени точно повторяют численно-теоретические графики, и во-вторых, для сравнения с кривыми зависимости скорости для неньютоновской жидкости. В трехмерном случае расчеты были проведены не только для $\tau_0 = 1.0$, но также и для $\tau_0 = 0.1$.

Как и в двумерном случае, рассмотрим систему из двух бингамовских жидкостей с плотностями $\rho_1 = 0.5$ и $\rho_2 = 1.0$ и пороговым напряжением $\tau = 1.0$. Расчетная область представляет собой вытянутый прямоугольный параллелепипед, длинная сторона которого расположена вдоль оси Oz . Сечение плоскостью, перпендикулярной оси Oz , представляет собой квадрат с длиной стороны π . Высота параллелепипеда вдвое больше стороны квадрата и равна, соответственно, 2π . На боковых гранях области поставлены условия проскальзывания, на верхней и нижней стенках — условия прилипания. Тяжелая жидкость занимает половину объема и находится над легкой жидкостью.

Размер (или, иначе, высота всплытия) пузыря определяется координатой его вершины. Так как возмущение задается функцией $W_0 \cos(kx) + W_0 \cos(ky)$, где $k = 1$, то вершина пузыря будет двигаться вдоль луча $x = 0, y = 0$. Координата вершины определяется по уровню, где плотность на луче $x = 0, y = 0$ принимает среднее значение $\rho_{av} = (\rho_1 + \rho_2)/2$. Скорость вершины пузыря определяется численным дифференцированием полученной зависимости координаты вершины пузыря от времени.

Графики зависимостей скорости и координаты пузыря от времени при амплитуде начального возмущения $W_0 = 5.5$ представлены на рис. 3. Видно отличие графиков скорости для бингамовской и ньютоновской жидкостей. Это связано с тем, что, возмущая контактную границу полем скорости с амплитудой, не превышающей по модулю величину $W_0 = 5.5$, характеристики жидкости описываются промежутком ОА (рис. 2). Это означает, что жидкость имеет «модельную» вязкость $\mu_0 \approx \tau_0/\dot{\gamma}_{\min} = 1000$, поскольку во всех расчетах параметр $\dot{\gamma}_{\min}$ принимается равным $\dot{\gamma}_{\min} = 10^{-3}$, поэтому движение происходит в вязкой жидкости и довольно быстро затухает. Кинетическая энергия возмущения на единицу объема $\rho_2 W_0^2$ все еще недостаточно велика

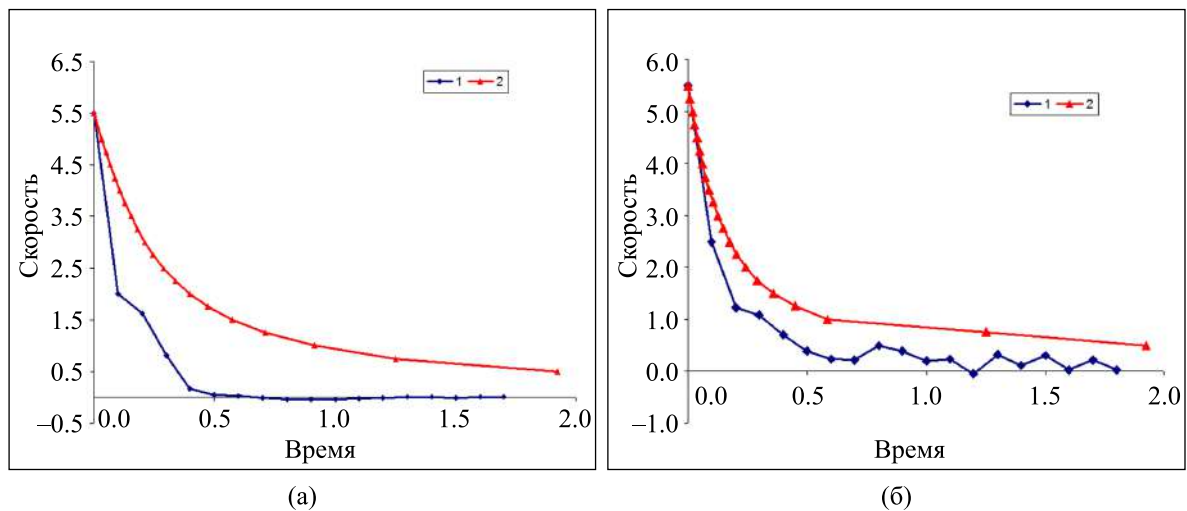


Рис. 3. Зависимость скорости пузыря от времени, амплитуда начального возмущения $W_0 = 5.5$ для бингамовской (а) и ньютоновской (б) жидкостей; 1 — численный расчет, 2 — численно-теоретический расчет. См. пояснения в тексте

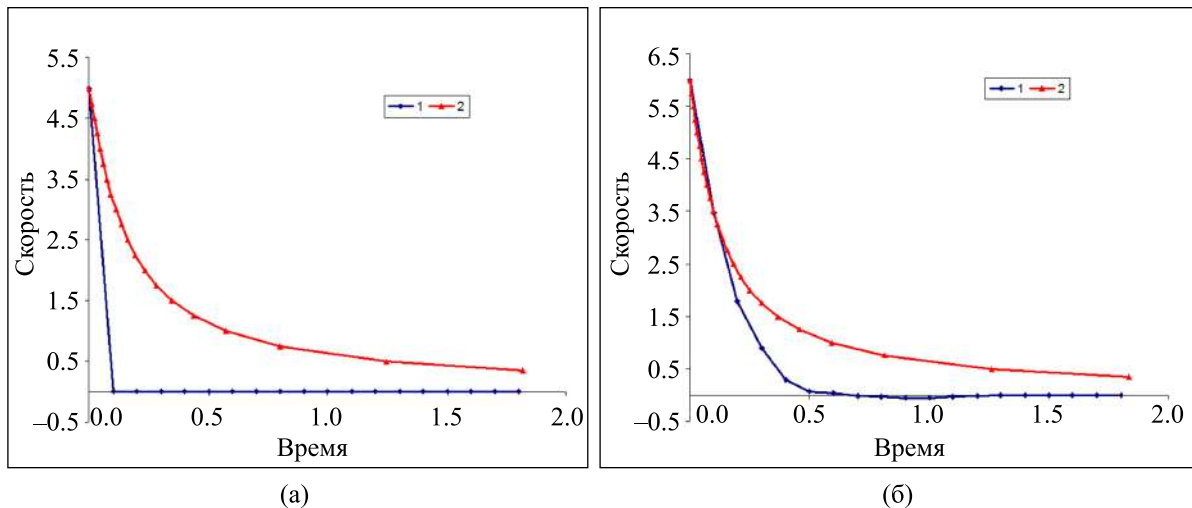


Рис. 4. Зависимость скорости пузыря от времени бингамовской жидкости, амплитуда начального возмущения $W_0 = 5.0$ (а) и $W_0 = 6.0$ (б); 1 — численный расчет, 2 — численно-теоретический расчет. См. пояснения в тексте

для начала активного развития неустойчивости. В отличие от бингамовской жидкости, ньютоновская жидкость скачком ускоряется, а потом движется по инерции с постепенно затухающей скоростью.

Теперь обратим внимание на рис. 4 и представленный на нем график скорости всплытия пузыря бингамовской жидкости для амплитуды $W_0 = 5.0$. В данном случае можно сказать, что в этом варианте замедление движения происходит очень быстро, почти мгновенно. Здесь уже можно говорить, что движения вообще нет, принять данный факт как критерий оценки критической амплитуды снизу и принять $W_{-0}^{crit} = 5.0$. При амплитуде возмущения $W_0 = 6.0$ на малых временах кривая скорости уже вполне соответствует численно-теоретическим значениям, поэтому такую амплитуду можно назвать критической (вернее, это будет оценка критической амплитуды сверху) и определить $W_{+0}^{crit} = 6.0$.

На данном примере заметно отличие поведения кривых скорости в пространственном случае от плоского. В 2D геометрии область перехода от почти неподвижного состояния до почти

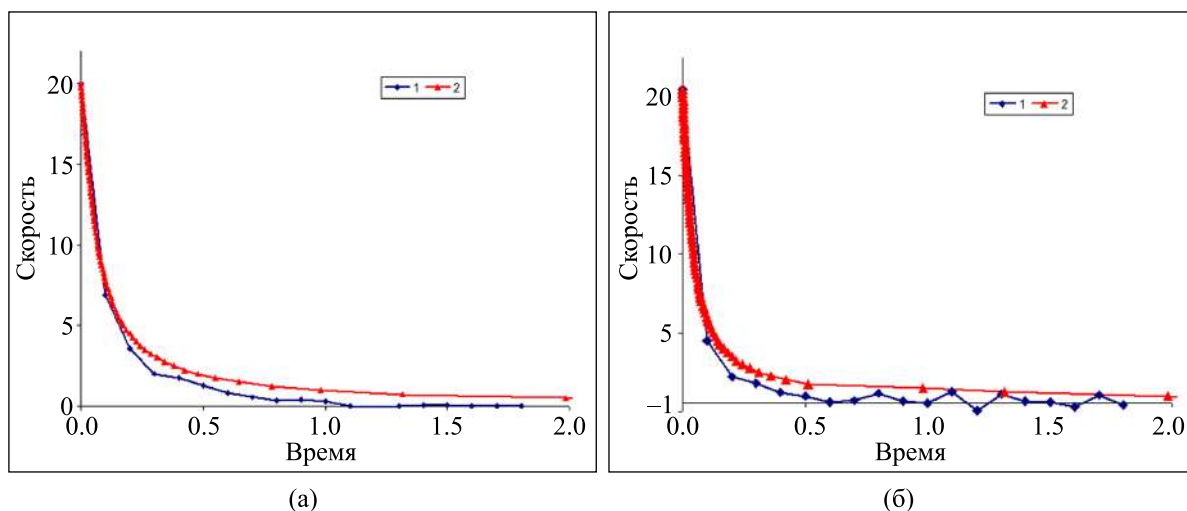


Рис. 5. Зависимость скорости пузыря от времени, амплитуда начального возмущения $W_0 = 20.0$ для бингамовской (а) и ньютоновской (б) жидкостей; 1 — численный расчет, 2 — численно-теоретический расчет. См. пояснения в тексте

ньютоновского движения на малых временах лежит в пределах по крайней мере от $W_0 = 1.0$ и непосредственно до $W_0 = 5.0$ [Долуденко, 2017]. В этой области нет такого случая, когда бы бингамовская жидкость вообще не двигалась и на протяжении всего наблюдаемого времени оставалась в покое. В 3D геометрии область перехода лежит уже в пределах от $W_0 = 5.0$, когда жидкость «заморожена», и до $W_0 = 6.0$, когда, по крайней мере на начальном этапе, среда проявляет ньютоновский закон вязкости.

При больших амплитудах начального возмущения бингамовская жидкость ведет себя как ньютоновская с вязкостью, равной вязкости неньютоновской жидкости при условии $\tau > \tau_0$. Для проверки этого утверждения в трехмерном случае были произведены расчеты с амплитудой начального возмущения заведомо больше определенной выше $W_{+0}^{crit} = 6.0$. На рис. 5 приведены графики скоростей жидкостей с разной реологией при амплитуде начального возмущения $W_0 = 20.0$.

Таким образом, была найдена примерная такая амплитуда начального возмущения поля скорости бингамовской жидкости, при которой неустойчивость Рихтмайера–Мешкова начинает развиваться, как если бы эволюция проходила в ньютоновской жидкости. Найдем отношение ζ кинетической энергии единицы объема (для жидкости с $\rho_2 = 1.0$) при критической амплитуде $W_{+0}^{crit} = 6.0$ к пороговому значению $\tau_0 = 1.0$

$$\zeta_1 = 36.0. \quad (5)$$

Теперь рассмотрим систему из двух бингамовских жидкостей с плотностями $\rho_1 = 0.5$ и $\rho_2 = 1.0$ и пороговым напряжением $\tau_0 = 0.1$. Найдем и для случая с таким порогом сдвига критическую амплитуду.

Рассмотрим рис. 6, на котором представлены графики зависимости скорости от времени для вязкопластической и ньютоновской жидкостей при амплитуде начального возмущения $W_0 = 2.0$. Заметно, что эта амплитуда не является критической, график скорости (рис. 6, а) проходит ниже численно-теоретического. Необходимо увеличить амплитуду на некоторую величину и определить, при каком значении график скорости будет согласован с теоретической кривой. График с такой амплитудой $W_0 = 2.5$ можно видеть на следующем рис. 7, а. Из него видно, что уже при таком значении величины W_0 график скорости с достаточной точностью совпадает с теоретическим. Для того, чтобы выяснить, нет ли большего согласования с теорией при больших амплитудах, справа приведены кривые для $W_0 = 5.0$.

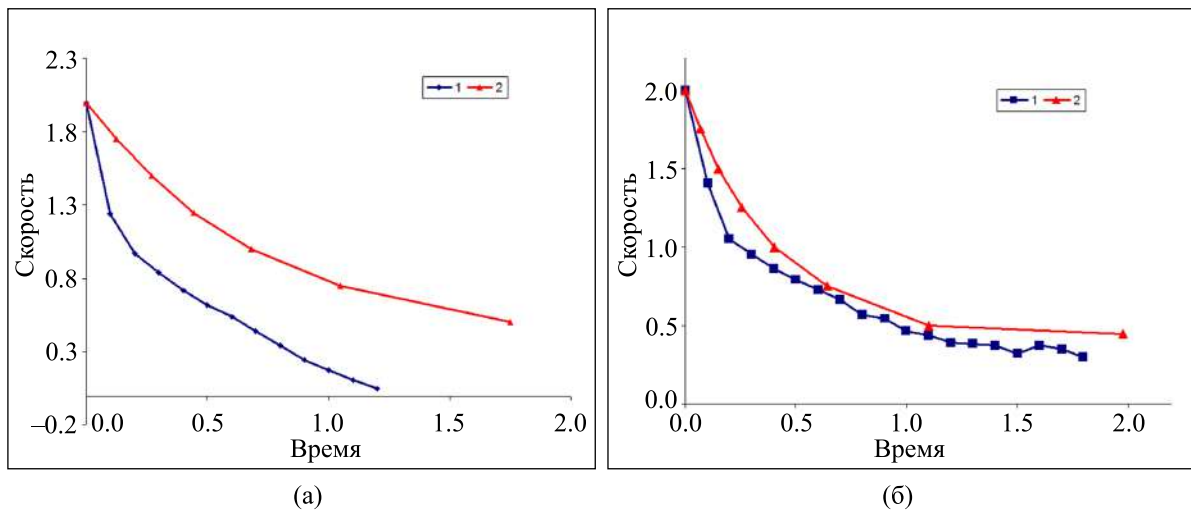


Рис. 6. Зависимость скорости пузыря от времени, амплитуда начального возмущения $W_0 = 2.0$ для бингамовской с $\tau_0 = 0.1$ (а) и ньютоновской (б) жидкостей; 1 — численный расчет, 2 — численно-теоретический расчет. См. пояснения в тексте

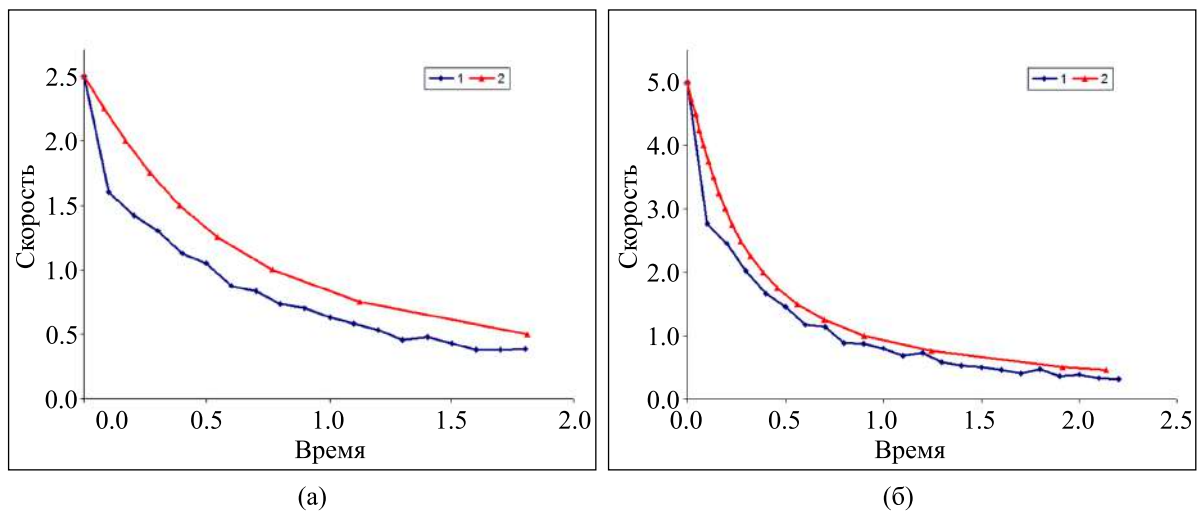


Рис. 7. Зависимость скорости пузыря от времени, амплитуда начального возмущения для бингамовской с $\tau_0 = 0.1$, $W_0 = 2.5$ (а) и $W_0 = 5.0$ (б); 1 — численный расчет, 2 — численно-теоретический расчет. См. пояснения в тексте

Разница между кривыми расчета слева и справа есть, но она не настолько велика, как разница между кривыми на рис. 7, а и 6, а. Из этого рисунка также можно сделать вывод о том, что оценкой критической амплитуды сверху как раз и является $W_{+0}^{crit} = 2.5$.

Неустойчивость Рэлея – Тейлора в ньютоновских и вязкопластических средах

Основываясь на системе уравнений (2), а также на выбранной ориентации оси Oy относительно положения жидкости, ускорение должно быть равно $g = -1$. Следует, однако, заметить, что плотности жидкостей отличаются всего лишь в два раза, поэтому для величины ускорения необходима поправка на плавучесть и принять $g = (1 - \mu)g$, где $\mu = \rho_1/\rho_2$ — отношение плотности

легкой жидкости к плотности тяжелой. Поэтому система (2) принимает вид:

$$\frac{\partial K}{\partial t} = \frac{1 - 4K}{2} W,$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -\frac{W^2 - 2K}{2(1 - 2K)}.$$

Интегрируя эту систему с начальными условиями $W(t = 0) = W_0$ и $K_0 = 0$, численно можно определить зависимости скорости от времени. Далее, интегрируя полученную зависимость, можно определить эволюцию координаты. Проведя численное моделирование неустойчивости Рэлея – Тейлора, можно построить кривую зависимости скорости роста пузыря от времени.

При моделировании неустойчивости Рэлея – Тейлора бингамовских жидкостей использовались такие же начальные и граничные условия, как и при моделировании неустойчивости Рихтмайера – Мешкова.

Рассмотрим бингамовскую жидкость с пороговым напряжением $\tau_0 = 1.0$ и амплитуду начального поля скорости $W_0 = 5.0$. Для неустойчивости Рихтмайера – Мешкова, как было найдено, критической является амплитуда $W_{+0}^{crit} = 6.0$, а при амплитуде $W_0 = 5.0$ бингамовская жидкость быстро приходит в покой (рис. 4, а). На рис. 8 показаны графики зависимости скорости роста пузыря от времени для неньютоновской (рис. 8, а) и ньютоновской (рис. 8, б) жидкостей. Из графика, соответствующего жидкости Бингама, можно сделать вывод, что легкая жидкость имеет большую скорость и движется дальше по сравнению с вариантом развития неустойчивости Рихтмайера – Мешкова (рис. 4, а). Данное различие в развитии неустойчивостей объясняется наличием поля тяжести, действие которого приводит к началу развития релей-тейлоровской неустойчивости бингамовских жидкостей при $W_0 < W_{+0}^{crit}$, где W_{+0}^{crit} определено для неустойчивости Рихтмайера – Мешкова. Для сравнения на рис. 8, б показана кривая для ньютоновской жидкости при той же амплитуде начального возмущения. При увеличении амплитуды начального возмущения скорость роста пузыря бингамовской жидкости аналогична росту пузыря ньютоновской жидкости.

Рассмотрим бингамовскую жидкость с пределом текучести $\tau_0 = 0.1$. На рис. 9 изображены кривые скоростей в зависимости от времени для жидкостей с обеими видами реологических соотношений при начальной амплитуде $W_0 = 0.5$ поля скорости. Бингамовская жидкость (рис. 9, а)

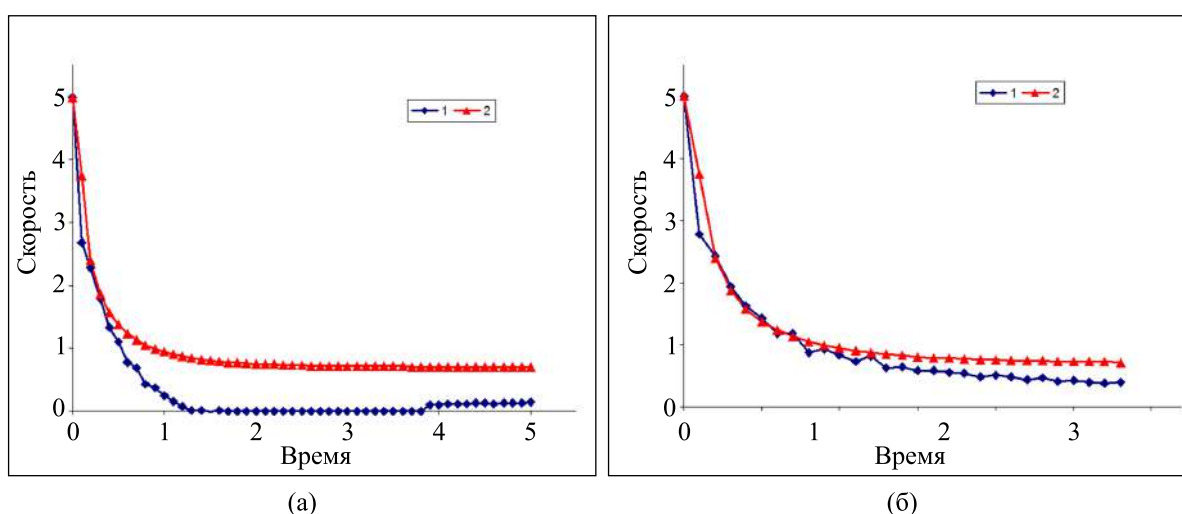


Рис. 8. Зависимость скорости пузыря от времени, амплитуда начального возмущения $W_0 = 5.0$ для бингамовской с $\tau_0 = 1.0$ (а) и ньютоновской (б) жидкостей; 1 — численный расчет, 2 — численно-теоретический расчет. См. пояснения в тексте

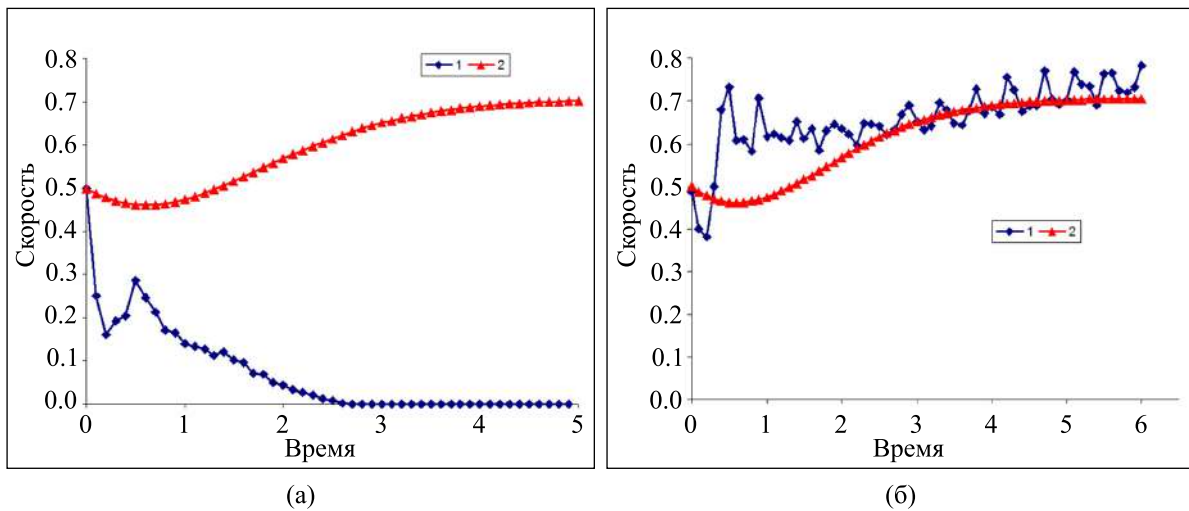


Рис. 9. Зависимость скорости пузыря от времени, амплитуда начального возмущения $W_0 = 0.5$ для бингамовской с $\tau_0 = 0.1$ (а) и ньютоновской (б) жидкостей; 1 — численный расчет, 2 — численно-теоретический расчет. См. пояснения в тексте

после начала движения быстро тормозится, что связано с высокой «модельной» вязкостью, если амплитуда начального возмущения ниже критической для данных условий. На рис. 9, б показана зависимость скорости роста пузыря от времени для ньютоновской жидкости при тех же начальных условиях.

На рис. 10 представлены результаты расчетов при увеличении амплитуды скорости до $W_0 = 2.0$. Такое значение амплитуды возмущения ниже $W_{+0}^{crit} = 2.5$, полученной для неустойчивости Рихтмайера – Мешкова при данных начальных и граничных условиях. Несмотря на это, из сравнения обоих графиков можно видеть, что характер эволюции скорости всплытия пузыря жидкости Бингама схож с графиком зависимости скорости от времени для ньютоновской жидкости.

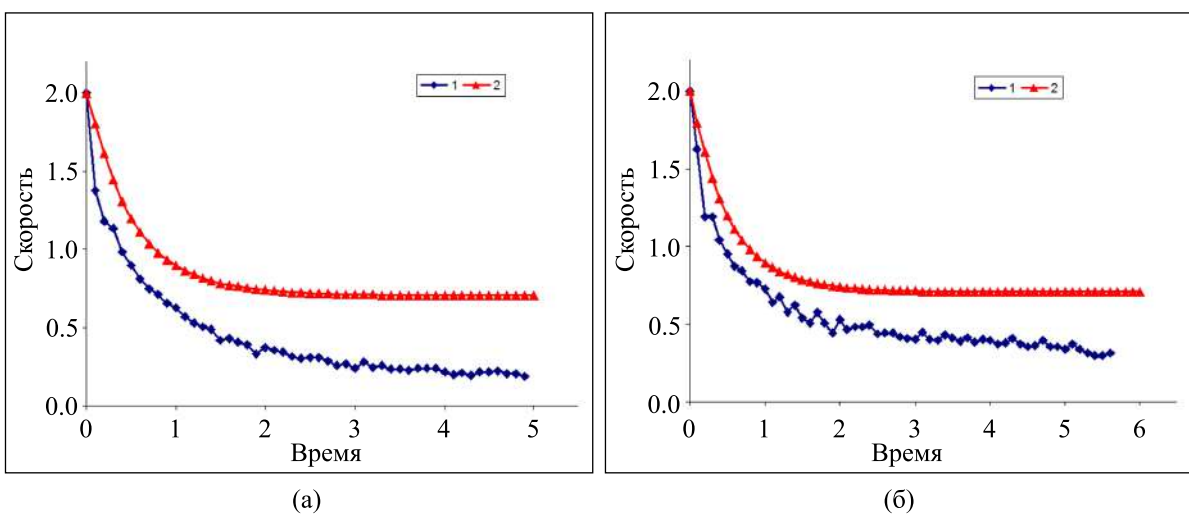


Рис. 10. Зависимость скорости пузыря от времени, амплитуда начального возмущения $W_0 = 2.0$ для бингамовской с $\tau_0 = 0.1$ (а) и ньютоновской (б) жидкостей; 1 — численный расчет, 2 — численно-теоретический расчет. См. пояснения в тексте

Выводы

Моделирование неустойчивости Рихтмайера–Мешкова с пределом текучести в пространственном случае обнаруживает, как и в плоском случае, появление порога w_0^{crit} скорости w_0 . Это связано с предельным значением порогового напряжения τ_0 . Ниже порогового значения смещениями поверхности можно пренебречь, потому что возникающие напряжения меньше, чем τ_0 и поле скорости быстро затухает из-за «модельной» ($\mu_0 = \tau_0/\dot{\gamma}_{min}$) вязкости. Существенное пластическое движение начинается выше порога. Неустойчивость Рихтмайера–Мешкова — неустойчивость поверхности, это означает, что область движения лежит близко к поверхности. Эта область растет с увеличением разницы между w_0 и пороговым значением. Для фиксированного w_0 выше порогового значения скорость затухает со временем и область движения постепенно сокращается. Жидкости приходят к покою за конечное время. Это время возрастает при увеличении значения $w_0 - w_0^{crit} > 0$. Критические амплитуды были определены по крайней мере для двух значений порогового напряжения. При различных порогах напряжения τ_0 порог скорости w_0^{crit} различен. Было подтверждено предположение о масштабируемости критической амплитуды для двух вариантов порогового напряжения τ_0 .

Переходя к рассмотрению неустойчивости Рэля–Тейлора вязкопластической жидкости, можно констатировать тот факт, что наличие предела текучести играет определяющую роль в развитии явления. Как и в неустойчивости Рихтмайера–Мешкова, большую роль играет критическая амплитуда начального возмущения w_0^{crit} . Однако вследствие действия силы тяжести, значение релей-тейлоровской критической амплитуды меньше критической амплитуды неустойчивости Рихтмайера–Мешкова. При амплитуде выше пороговой $w_0 > w_0^{crit}$ развитие неустойчивости бингамовской жидкости происходит так, как если бы жидкость была ньютоновской.

Как известно, неустойчивости Рэля–Тейлора являются негативным фактором при инерционном обжати мишени с топливом для осуществления управляемой термоядерной реакции. В результате развития неустойчивости возникают неидеальности на поверхности мишени, приводящие к тому, что последняя не сжимается до расчетных значений, и, соответственно, вещество не достигает тех параметров, при которых возникает существенно положительный выход термоядерной реакции. Если рассматривать неустойчивость Рэля–Тейлора ньютоновской жидкости, то практически единственным фактором, сдерживающим и даже подавляющим ее (неустойчивости) развитие, являются силы поверхностного натяжения, действующие на границе двух жидкостей. В случае же бингамовской жидкости появляется еще один стабилизирующий фактор — предельное напряжение сдвига.

Список литературы (References)

- Долуденко А. Н. О контактных неустойчивостях вязкопластических жидкостей в двумерной постановке задачи // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2017. — Т. 57, № 9. — С. 1570–1578.
Doludenko A. N. On Contact Instabilities of Viscoplastic Fluids in Two-Dimensional Setting // Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 2017. — Vol. 57, No. 9. — P. 1550–1557 (in Russian).
- Иногамов Н. А., Демьянов А. Ю., Сон Э. Е. Гидродинамика перемешивания. — М.: Изд-во МФТИ, 1999. — 464 с.
Inogamov N. A., Demyanov A. Yu., Son E. E. Hidrodinamika peremeshivaniya [Hydrodynamics of intermixing]. — Moscow: MIPT pub., 1999. — 464 p. (in Russian).
- Седов Л. Механика сплошной среды. Т. 1. — М.: Наука, 1970. — 492 с.
Sedov L. Mehanika sploshnoy sredy [Mechanics of continuous medium]. — Moscow: Nauka, 1970. — 492 p. (in Russian).
- Aitken L. S., Wilson S. D. R. Rayleigh–Taylor instability in elastic liquids // J. Non-Newtonian Fluid Mech. — 1993. — Vol. 49. — P. 13–22.

-
- Coussot P., Gaulard F.* Gravity flow instability of viscoplastic materials: The ketchup drip // *Phys. Rev. E.* — 2005. — Vol. 72. — P. 031409.
- Hirt C., Nichols B.* Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries // *J. Comput. Phys.* — 1981. — Vol. 39. — P. 201–225.
- Inogamov N. A., Oparin A. M.* Three-dimensional array structures associated with Richtmyer–Meshkov and Rayleigh–Taylor instability // *J. Exp. Theor. Phys.* — 1999. — Vol. 89, No. 4. — P. 481–499.
- Joshi A. S., Radhakrishna M. C., Rudraiah N.* Kelvin–Helmholtz instability in viscoelastic fluids in presence of electro-magnetic fields // *Phys. Fluids.* — 2011. — Vol. 23. — P. 094107.
- MacCormack R. W.* The effect of viscosity in hypervelocity impact cratering // *AIAA paper.* — 1969. — Vol. 69. — P. 354.
- Metivier C., Nouar C.* On linear stability of Rayleigh–Benard Poiseuille flow of viscoplastic fluids // *Phys. Fluids.* — 2008. — Vol. 20. — P. 104101.
- Vikhansky A.* Thermal convection of a viscoplastic liquid with high Rayleigh and Bingham numbers // *Phys. Fluids.* — 2009. — Vol. 21. — P. 103103.
- Wang X., Gordaninejad F.* Flow analysis of field-controllable, electro and magneto–rheological fluids using Herschel–Bulkley model // *Journal of Intelligent Materials, Systems and Structures.* — 1999. — Vol. 10, No. 8. — P. 601–608.