

УДК: 519.8

## Управление движением тела с помощью внутренних масс в вязкой жидкости

А. А. Килин<sup>1,a</sup>, А. И. Кленов<sup>2,b</sup>, В. А. Тенев<sup>2,c</sup>

<sup>1</sup>Удмуртский государственный университет,  
Россия, 426034, г. Ижевск, ул. Университетская, д. 1

<sup>2</sup>Ижевский государственный технический университет имени М. Т. Калашникова,  
Россия, 426069, г. Ижевск, ул. Студенческая, д. 7

E-mail: <sup>a</sup> aka@rcd.ru, <sup>b</sup> tolik-klenov@mail.ru, <sup>c</sup> tenenev@istu.ru

*Получено 06.04.2018*

*Принято к публикации 04.05.2018.*

Данная статья посвящена изучению самопродвижения тел в жидкости за счет действия внутренних механизмов, без изменения внешней формы тела. В работе представлен обзор теоретических работ, обосновывающих возможность данного перемещения в идеальной и вязкой жидкостях.

Рассмотрен частный случай самопродвижения твердого тела по поверхности жидкости за счет движения двух внутренних масс по окружностям. В работе представлена математическая модель движения твердого тела с подвижными внутренними массами в трехмерной постановке. Данная модель учитывает трехмерные колебания тела при движении, возникающие под действием внешних сил — силы тяжести, силы Архимеда и сил, действующих на тело со стороны вязкой жидкости.

В качестве тела рассмотрен однородный эллиптический цилиндр с килем, расположенным вдоль большей диагонали. Внутри цилиндра расположены две материальные точечные массы, перемещающиеся по окружностям. Центры окружностей лежат на наименьшей диагонали эллипса на равном удалении от центра масс.

Уравнения движения рассматриваемой системы (тело с двумя материальными точками, помещенное в жидкость) представлены в виде уравнений Кирхгофа с добавлением внешних сил и моментов, действующих на тело. Для описания сил сопротивления движению в жидкости выбрана феноменологическая модель вязкого трения, квадратичная по скорости. Коэффициенты сопротивления движению, используемые в модели, определялись экспериментально. Силы, действующие на киль, определялись с помощью численного моделирования колебаний кия в вязкой жидкости с использованием уравнений Навье – Стокса.

В данной работе была проведена экспериментальная проверка предложенной математической модели. Представлено несколько серий экспериментов по самопродвижению тела в жидкости с помощью вращения внутренних масс с разными скоростями вращения. Исследована зависимость средней скорости продвижения, размаха поперечных колебаний в зависимости от частоты вращения внутренних масс. Проведено сравнение полученных экспериментальных данных с результатами, полученными в рамках предложенной математической модели.

Ключевые слова: движение в жидкости, самопродвижение, уравнения движения, безвинтовой надводный робот, уравнения Навье – Стокса

Работа А. А. Килина выполнена при поддержке РФФИ (грант № 15-08-09093-а). Работа А. И. Кленова и В. А. Тенева выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки России (грант 1.2405.2017/4.6).

UDC: 519.8

## Controlling the movement of the body using internal masses in a viscous liquid

A. A. Kilin<sup>1,a</sup>, A. I. Klenov<sup>2,b</sup>, V. A. Tenenev<sup>2,c</sup>

<sup>1</sup>Udmurt State University,

1 Universitetskaya st., Izhevsk, 426034, Russia

<sup>2</sup>M. T. Kalashnikov Izhevsk State Technical University,

7 Studencheskaya st., Izhevsk, 426069, Russia

E-mail: <sup>a</sup> aka@rcd.ru, <sup>b</sup> tolik-klenov@mail.ru, <sup>c</sup> tenenev@istu.ru

Received 06.04.2018

Accepted for publication 04.05.2018.

This article is devoted to the study of self-propulsion of bodies in a fluid by the action of internal mechanisms, without changing the external shape of the body. The paper presents an overview of theoretical papers that justify the possibility of this displacement in ideal and viscous liquids.

A special case of self-propulsion of a rigid body along the surface of a liquid is considered due to the motion of two internal masses along the circles. The paper presents a mathematical model of the motion of a solid body with moving internal masses in a three-dimensional formulation. This model takes into account the three-dimensional vibrations of the body during motion, which arise under the action of external forces-gravity force, Archimedes force and forces acting on the body, from the side of a viscous fluid.

The body is a homogeneous elliptical cylinder with a keel located along the larger diagonal. Inside the cylinder there are two material point masses moving along the circles. The centers of the circles lie on the smallest diagonal of the ellipse at an equal distance from the center of mass.

Equations of motion of the system (a body with two material points, placed in a fluid) are represented as Kirchhoff equations with the addition of external forces and moments acting on the body. The phenomenological model of viscous friction is quadratic in velocity used to describe the forces of resistance to motion in a fluid. The coefficients of resistance to movement were determined experimentally. The forces acting on the keel were determined by numerical modeling of the keel oscillations in a viscous liquid using the Navier–Stokes equations.

In this paper, an experimental verification of the proposed mathematical model was carried out. Several series of experiments on self-propulsion of a body in a liquid by means of rotation of internal masses with different speeds of rotation are presented. The dependence of the average propagation velocity, the amplitude of the transverse oscillations as a function of the rotational speed of internal masses is investigated. The obtained experimental data are compared with the results obtained within the framework of the proposed mathematical model.

Keywords: motion in a fluid, self-promotion, the equations of movement, above-water screwless robot, Navier–Stokes equations

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2018, vol. 10, no. 4, pp. 445–460 (Russian).

The work of A. A. Kilin was supported by the Russian Foundation for Basic Research under grant No. 15-08-09093-a. The work of A. I. Klenov and V. A. Tenenev carried out within the framework of the state assignment by the Ministry of Education and Science No. 1.2405.2017/4.6.

## 1. Введение

Исследование самопродвижения тел в жидкости тесно связано с созданием работизированных автономных надводных и подводных аппаратов. Как правило, большинство таких устройств перемещаются в жидкости за счет гребных винтов, но существуют и другие способы самопродвижения. Помимо вышеупомянутого, наиболее распространенными являются: передвижение с использованием приводов, имитирующих движение рыб, змей (биомеханический биоподобный способ), реактивный привод (с использованием «помпы»), перемещение за счет изменения формы тела. В последнее время активно обсуждаются возможности самопродвижения без изменения внешней формы тела за счет действия внутренних механизмов (перемещения внутренних масс), не взаимодействующих со средой.

### Модель идеальной жидкости

Впервые теоретическое обоснование возможности перемещения твердого тела в жидкости за счет перемещения внутренних масс (изменения распределения массы) было предложено в работах В. В. Козлова и С. М. Рамоданова [Козлов, Рамоданов, 2001; Козлов, Рамоданов, 2002]. Авторами рассматривается движение системы («тело + внутренняя масса + жидкость») на основе уравнений Кирхгофа и доказывается частный случай управляемости. В частности, доказана управляемость на нулевом уровне интегралов движения (импульса и момента импульса системы). Показано, что необходимым условием для управляемости твердого тела за счет движения внутренних масс (механизмов) является анизотропия инерционных сил (присоединенных масс), действующих на тело со стороны жидкости. Далее в работе [Козлов, Онищенко, 2003] для аналогичной модели приводятся частные случаи законов перемещения внутренних масс, обеспечивающих в среднем направленное движение тела в жидкости.

На практике перемещение внутренней массы по произвольной траектории реализовать технически сложно. Поэтому в ряде работ были использованы более простые управляющие внутренние механизмы. В частности, в работе [Ramodanov, Tenenev, 2012; Ветчанин и др., 2015] рассматривалось управление движением с помощью внутреннего маховика, изменяющего собственный гиросtatический момент системы. В работах [Leonard, 1997; Leonard, Marsden, 1997; Leonard, Woolsey, 2002] данный принцип (изменение собственного гиросtatического момента за счет вращения внутренних роторов) используется для стабилизации движения подводного судна и сохранения устойчивости положений равновесия подводного аппарата нулевой плавучести с несовпадающими центрами тяжести и давления.

В ряде работ рассматриваются также механизмы с периодическим возвратно-поступательным перемещением внутреннего тела [Черноусько, 2005; Черноусько, 2006; Черноусько, Болотник, 2010; Ветчанин, Тенев, 2011b] и вращающимися внутренними телами. В работе [Килин, Ветчанин, 2015] доказана полная управляемость системы твердого тела с двумя подвижными вращающимися массами на нулевом уровне первых интегралов. Определены законы перемещения внутренних масс для реализации элементарных маневров — гейтов (разворот на месте и поступательное в среднем движение), комбинируя которые можно реализовать перемещение тела из одной точки в другую. В работах [Ramodanov, Tenenev, 2012; Ramodanov, Tenenev, 2015] рассматриваются также вопросы оптимального управления движением таких систем в идеальной жидкости с помощью генетических алгоритмов.

### Учет циркуляции жидкости вокруг тела

При движении тела в реальной жидкости вокруг него образуется циркуляция жидкости (обусловленная его обтеканием), а при наличии в форме тела острых кромок или движения жидкости с  $Re > 1$  можно наблюдать и образование различных вихревых структур, что существенным образом меняет динамику системы. Наличие циркуляции жидкости вокруг тела оказывает

влияние на его траекторию и управляемость. Так, при движении системы наблюдается отклонение ее от заданной траектории, поэтому при построении алгоритмов управления необходимо это учитывать и компенсировать управляющим воздействием.

Свободное движение тела с циркуляцией исследовано, например, в работе [Borisov, Mamaev, 2006]. Управляемое движение тела с помощью различных внутренних механизмов с учетом циркуляции исследовалось в [Vetchanin, Kilin, 2016a; Vetchanin, Kilin, 2016b; Vetchanin, Kilin, 2017]. В данных работах была доказана полная управляемость рассматриваемой системы на фиксированном уровне первых интегралов. Кроме того, показано, что наличие циркуляции приводит к движению тела («дрейфу») в отсутствие управления даже на нулевом уровне первых интегралов. В [Vetchanin, Kilin, 2016b; Vetchanin, Kilin, 2017] было доказано, что «дрейф» может быть скомпенсирован с помощью управления только внутри некоторой ограниченной области.

Одним из способов учета влияния вихревых структур на движение тела является добавление в модель идеальной жидкости точечных вихрей. Свободное движение тела в присутствии произвольного числа точечных вихрей рассмотрено в работах [Borisov et al., 2003; Borisov et al., 2007; Shashikanth, 2005; Kelly, Shashikanth, 2008].

Управляемое движение твердого тела с внутренним ротором в присутствии вихревых структур рассматривается в работах [Tallapragada, Kelly, 2017; Tallapragada, Pollard, 2017]. В данных работах авторы постулируют образование вихрей за движущимся телом через равные промежутки времени. Параметры нисходящих вихревых структур определяются из условия сохранения интегралов импульса и момента импульса системы «тело + жидкость». В промежутках между сходами вихрей движение происходит в соответствии с моделью идеальной жидкости. Такой постулат выглядит несколько сомнительно и требует экспериментальной проверки либо численного моделирования с помощью уравнений Навье – Стокса.

#### **Движение в вязкой жидкости**

Аналогичная задача об управляемом движении тела с внутренними массами и неизменяемой внешней оболочкой с учетом вязкости жидкости рассмотрена в работе [Рамоданов, Тенев, 2011]. Численное моделирование показало существенное влияние сил, момента вязкого сопротивления и «предыстории» движения тела на его траекторию. В частности, в работе показано, что самопродвижение тела с одинаковыми присоединенными массами, невозможное в идеальной жидкости, вполне осуществимо в вязкой жидкости. В работах [Ветчанин, Тенев, 2011a; Ветчанин, Тенев, 2011b] на основе численного решения уравнений движения тела и гидродинамических уравнений получены аппроксимирующие зависимости для силы вязкого сопротивления. В работе [Ветчанин и др., 2012] исследован характер движения твердых тел каплеобразной и сферической формы с переменным распределением внутренних масс в вязкой жидкости в трехмерной постановке. Показана возможность перемещения тела в произвольном направлении, и получен характер зависимости сил сопротивления при возвратно-поступательном перемещении внутренней массы для данных форм.

#### **Экспериментальные работы**

Результаты экспериментального исследования движения твердого тела, перемещающегося за счет изменения распределения масс (вращения двух внутренних масс), приведены в работе [Klenov, Kilin, 2016]. Сравнительный анализ экспериментальных и теоретических данных показал, что скорость самопродвижения созданного экспериментального образца на два порядка превышает значения скорости, полученные в рамках модели идеальной жидкости. Также был экспериментально исследован характер циркуляции жидкости вокруг движущегося тела. В частности, эксперимент показал наличие на корме в области киля двух пульсирующих вихревых структур противоположной завихренности. На основе полученных результатов можно сделать вывод, что в рассматриваемых моделях не учитывается некоторый определяющий механизм передвижения.

В данной работе мы рассмотрим модель движения твердого тела с подвижными внутренними массами в трехмерной постановке, учитывающей трехмерный колебательный режим, силу тяжести, выталкивающую силу Архимеда и силу сопротивления со стороны вязкой жидкости.

## 2. Математическая модель движения

Рассмотрим трехмерную задачу о движении твердого тела с внутренним механизмом по поверхности жидкости (см. рис. 1). При рассмотрении будем считать, что тело представляет собой однородный эллиптический цилиндр с килем, расположенным вдоль большей диагонали. Центр масс такого тела лежит на оси, проходящей через центр эллипса (в геометрическом центре цилиндра).

Для описания движения тела введем две системы координат: неподвижную ( $Oxyz$ ) и подвижную ( $O_1\xi\eta\zeta$ ), жестко связанную с телом (рис. 1). Начало подвижной системы координат лежит в центре масс тела, а оси направлены вдоль главных осей тела.

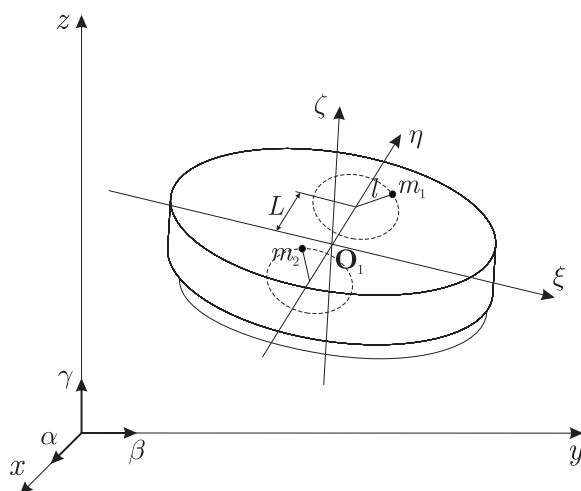


Рис. 1. Трехмерное твердое тело, несущее две материальные точки

Внутренний механизм представляет собой две одинаковые точечные массы  $m_1 = m_2$ , вращающиеся в противоположные стороны по окружности радиусом  $l$  с одинаковыми (по модулю) угловыми скоростями  $\omega$ . Центры данных окружностей лежат на наименьшей диагонали эллипса на равном удалении от центра масс  $L$ . Начальные положения точечных масс на окружности задаются углами  $\vartheta_k$ ,  $k = 1, 2$ , которые отмеряются от оси  $O_1\xi$  против часовой стрелки.

Положение внутренних масс относительно подвижной системы координат ( $O_1\xi\eta\zeta$ ) будем задавать радиус-вектором  $r_k = (\xi_k, \eta_k, \zeta_k)^T$ . Тогда движение  $k$ -й внутренней массы в подвижной системе координат можно записать в следующем виде:

$$r_k(t) = r_{k0} + l \begin{pmatrix} \cos((-1)^{k+1}2\pi\omega t + \vartheta_k) \\ \sin((-1)^{k+1}2\pi\omega t + \vartheta_k) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dot{r}_k(t) = (-1)^{k+1}2\pi l\omega \begin{pmatrix} -\sin((-1)^{k+1}2\pi\omega t + \vartheta_k) \\ \cos((-1)^{k+1}2\pi\omega t + \vartheta_k) \\ 0 \end{pmatrix},$$

где вектора  $r_{k0}$  — положение центров окружностей, по которым движутся внутренние массы. В нашем случае  $r_{10} = (0 \ L \ 0)^T$  и  $r_{20} = (0 \ -L \ 0)^T$ .

В данной работе будем рассматривать такие вращения внутренних масс, при которых центр масс всей системы колеблется вдоль оси  $O_1\eta$ . Для этого начальные положения внутренних масс должны удовлетворять соотношению:  $(\vartheta_1 + \vartheta_2) \bmod 2\pi = \pi$ .

## 2.1. Кинематические соотношения

Положение начала подвижной системы координат относительно неподвижной будем задавать радиус вектором  $\mathbf{R} = (x, y, z)^T$ . Обозначим через  $\alpha, \beta, \gamma$  единичные вектора (см. рис. 1), направленные вдоль осей  $Ox, Oy, Oz$  соответственно. Их проекции на оси подвижной системы координат образуют ортогональную матрицу перехода от неподвижной системы координат в подвижную:

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Пара  $(\mathbf{R}, \mathbf{Q})$  однозначно определяет положение тела. Эволюция векторов  $\mathbf{R}, \alpha, \beta, \gamma$  во времени описывается следующими кинематическими соотношениями:

$$\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{Q}^T \mathbf{V}, \quad (2)$$

$$\dot{\alpha} = \alpha \times \Omega, \quad \dot{\beta} = \beta \times \Omega, \quad \dot{\gamma} = \gamma \times \Omega, \quad (3)$$

где  $\mathbf{V} = (V_\xi, V_\eta, V_\zeta)^T$  и  $\Omega = (\Omega_\xi, \Omega_\eta, \Omega_\zeta)^T$  — векторы поступательной и угловой скоростей тела. Здесь и далее все вектора и тензоры будем считать записанными относительно подвижной системы координат, если не оговорено обратное.

В данном случае матрицу  $\mathbf{Q}$  удобно представить в углах Крылова ( $\phi$  — угол крена;  $\psi$  — угол рыскания;  $\theta$  — угол тангажа). Тогда матрица вращения  $\mathbf{Q}$  определяется следующим образом:

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \cos \psi \cos \theta & \sin \theta & -\sin \psi \cos \theta \\ -\sin \phi \sin \psi \sin \theta + \sin \phi \sin \psi & \cos \phi \cos \theta & \cos \phi \sin \psi \sin \theta + \sin \phi \cos \psi \\ \sin \phi \sin \psi \sin \theta + \cos \phi \sin \psi & -\sin \phi \cos \theta & -\sin \phi \sin \psi \sin \theta + \cos \phi \cos \psi \end{pmatrix} \quad (4)$$

Мы будем рассматривать движение, при котором углы  $\phi, \psi, \theta$  изменяются в интервале  $(-\pi/2, \pi/2)$ . В этом интервале данные углы удобно представить через матрицу направляющих косинусов следующими уравнениями:

$$\phi = -\arcsin \left( \frac{\beta_3}{\sqrt{1 - \beta_1^2}} \right), \quad \psi = -\arcsin \left( \frac{\gamma_1}{\sqrt{1 - \beta_1^2}} \right), \quad \theta = \arcsin \beta_1. \quad (5)$$

## 2.2. Уравнения движения и первые интегралы

Движение произвольного тела в жидкости в предположении, что вязкие эффекты отсутствуют, описывается уравнениями Кирхгофа:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \mathbf{V}} \right) = \frac{\partial T}{\partial \mathbf{V}} \times \Omega, \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \Omega} \right) = \frac{\partial T}{\partial \Omega} \times \Omega + \frac{\partial T}{\partial \mathbf{V}} \times \mathbf{V}, \quad (6)$$

где  $T$  — кинетическая энергия всей системы («оболочка + жидкость + внутренние массы»).

Кинетическая энергия тела определяется выражением:

$$T_s = \frac{1}{2} m_s (\mathbf{V}, \mathbf{V}) + \frac{1}{2} (\mathbf{I}_s \Omega, \Omega), \quad (7)$$

где  $m_s$  — масса твердого тела,  $\mathbf{I}_s$  — главный центральный тензор инерции тела.

Кинетическая энергия жидкости:

$$T_f = \frac{1}{2} (\Lambda_V \mathbf{V}, \mathbf{V}) + \frac{1}{2} (\Lambda_\Omega \Omega, \Omega), \quad (8)$$

где для рассматриваемого тела в выбранной системе координат:  $\Lambda_V = \text{diag}(\lambda_{11}, \lambda_{22}, \lambda_{33})$  — тензор присоединенных масс;  $\Lambda_\Omega = \text{diag}(\lambda_{44}, \lambda_{55}, \lambda_{66})$  — тензор присоединенных моментов инерции без учета влияния кила (учитывающий влияние плоского дна). Кинетическая энергия  $k$ -ой внутренней массы  $k = \overline{0, K}$ :

$$T_k = \frac{1}{2} m_k (\mathbf{V} + \dot{r}_k + \boldsymbol{\Omega} \times r_k, \mathbf{V} + \dot{r}_k + \boldsymbol{\Omega} \times r_k). \quad (9)$$

Для удобства записи представим векторное произведение  $\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}$  в виде:

$$\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} = \mathbf{G}\boldsymbol{\Omega}, \quad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} 0 & \zeta & -\eta \\ -\zeta & 0 & \xi \\ \eta & -\xi & 0 \end{pmatrix}, \quad (10)$$

где  $\xi, \eta, \zeta$  — компоненты вектора  $\mathbf{r}$ . С учетом этого суммарная кинетическая энергия системы с точностью до известной функции времени имеет вид:

$$T = T_s + T_f + \sum_{k=1}^K T_k = \frac{1}{2} (\mathbf{C}\mathbf{V}, \mathbf{V}) + (\mathbf{K}_1, \mathbf{V}) + (\mathbf{B}\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{V}) + \frac{1}{2} (\mathbf{I}\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\Omega}) + (\mathbf{K}_2, \boldsymbol{\Omega}), \quad (11)$$

где матрицы  $\mathbf{C}, \mathbf{K}_1, \mathbf{B}, \mathbf{I}, \mathbf{K}_2$  имеют вид

$$\mathbf{C} = (m_s + 2m_k)\mathbf{E} + \Lambda_V, \quad \mathbf{K}_1 = \sum_{k=1}^K m_k \dot{r}_k, \quad \mathbf{B} = \sum_{k=1}^K m_k \mathbf{G}_k, \\ \mathbf{I} = \Lambda_\Omega + \mathbf{I}_s + \sum_{k=1}^K m_k \mathbf{G}^T \mathbf{G}, \quad \mathbf{K}_2 = \sum_{k=1}^K m_k \dot{r}_k \mathbf{G},$$

где  $\mathbf{E}$  — единичная матрица.

Вычислим импульс и момент импульса системы:

$$\mathbf{P} = \frac{\partial T}{\partial \mathbf{V}} = \mathbf{C}\mathbf{V} + \mathbf{B}\boldsymbol{\Omega} + \mathbf{K}_1, \\ \mathbf{M} = \frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{\Omega}} = \mathbf{I}\boldsymbol{\Omega} + \mathbf{B}^T \mathbf{V} + \mathbf{K}_2. \quad (12)$$

Подставив выражения (12) в уравнение (6), получим уравнения движения при отсутствии внешних сил

$$\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{P} \times \boldsymbol{\Omega}, \\ \dot{\mathbf{M}} = \mathbf{M} \times \boldsymbol{\Omega} + \mathbf{P} \times \mathbf{V}, \quad (13)$$

где  $\mathbf{V}$  и  $\boldsymbol{\Omega}$  определяются из решения системы уравнений (12).

При наличии внешних сил  $\mathbf{F}$  и моментов сил  $\mathbf{N}$  уравнения движения запишутся следующим образом:

$$\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{P} \times \boldsymbol{\Omega} + \mathbf{F}, \\ \dot{\mathbf{M}} = \mathbf{M} \times \boldsymbol{\Omega} + \mathbf{P} \times \mathbf{V} + \mathbf{N}. \quad (14)$$

Уравнения (14), (2), (3) образуют замкнутую систему, полностью описывающую движение твердого тела по поверхности жидкости за счет перемещения внутренних масс.

В дальнейшем все численные расчеты будем проводить при следующих параметрах системы, которые соответствуют реально созданному устройству [Klenov, Kilin, 2016]:

$$m_s = 0.8417 \text{ кг}, \quad \mathbf{I}_s = \text{diag}(0.00185118 \ 0.00378528 \ 0.00294828) \text{ кг} \cdot \text{м}^2, \\ m_1 = m_2 = 0.050 \text{ кг}, \quad l = 0.033 \text{ м}, \quad L = 0.042 \text{ м}, \quad (15) \\ \Lambda_V = \text{diag}(0.9 \ 1.46 \ 0.9) \text{ кг}, \quad \Lambda_\Omega = \text{diag}(0.001 \ 0.0044 \ 0.001) \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

### 2.3. Определение внешних сил и моментов

На рассматриваемую механическую систему материальных точек действуют внешние силы и связанные с ними моменты: сила сопротивления со стороны жидкости, сила тяжести и выталкивающая сила Архимеда. Поэтому суммарную силу, действующую на тела, можно определить следующим образом:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_v + \mathbf{F}_f - \left( m_s + \sum_{k=1}^K m_k \right) g \boldsymbol{\gamma} + \rho_f g H \boldsymbol{\gamma}, \quad (16)$$

где  $\mathbf{F}_v$  — сила, действующая со стороны жидкости на тело (связанная с обтеканием вязкой жидкостью),  $\mathbf{F}_f$  — сила, действующая на тело со стороны жидкости, обусловленная наличием киля;  $\rho_f$  — плотность жидкости;  $H$  — объем погруженной части оболочки;  $g$  — ускорение свободного падения.

Полный момент внешних сил:

$$\mathbf{N} = \mathbf{N}_v + \mathbf{N}_f - g \left( \sum_{k=1}^K m_k \mathbf{r}_k \times \boldsymbol{\gamma} \right) + \rho_f g H (\mathbf{r}_A \times \boldsymbol{\gamma}), \quad (17)$$

где  $\mathbf{N}_v$  — момент вязких сил,  $\mathbf{N}_f$  — момент сил, действующих на тело со стороны жидкости, обусловленный наличием киля,  $\mathbf{r}_A$  — радиус-вектор центра давления (точки приложения силы Архимеда).

Сделаем следующие предположения о характере действующих сил:

1. Сила  $\mathbf{F}_v$  и момент силы  $\mathbf{N}_v$ , действующие на тело со стороны жидкости, имеют характер вязких сил и квадратично зависят от линейных и угловых скоростей движения тела

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_v &= -|\mathbf{V}| \begin{pmatrix} C_\xi & 0 & 0 \\ 0 & C_\eta & 0 \\ 0 & 0 & C_\zeta \end{pmatrix} \mathbf{V}, \\ \mathbf{N}_v &= -|\boldsymbol{\Omega}| \begin{pmatrix} C_{N\xi} & 0 & 0 \\ 0 & C_{N\eta} & 0 \\ 0 & 0 & C_{N\zeta} \end{pmatrix} \boldsymbol{\Omega}, \end{aligned} \quad (18)$$

где  $C_\xi, C_\eta, C_\zeta$  — коэффициенты сопротивления по соответствующим осям  $\xi, \eta, \zeta$ , умноженные на плотность жидкости и миделево сечение;  $C_{N\xi}, C_{N\eta}, C_{N\zeta}$  — коэффициенты сопротивления вращению.

2. В рассматриваемом случае при вращении внутренних масс создается периодическое изменение положения центра масс вдоль оси  $O_1\eta$ . Вследствие чего тело совершает периодические колебания вокруг оси  $O_1\xi$ . Колебания вокруг оси  $O_1\eta$  незначительны. Поэтому будем считать, что  $C_{N\eta} = 0$ .
3. Движение вдоль  $O_1\zeta$  также мало по сравнению с остальными, поэтому  $C_\zeta = 0$ .
4. При определении силы  $\mathbf{F}_f$  и момента  $\mathbf{N}_f$  будем считать, что сила действует на киль в направлении перпендикулярном к его плоскости:

$$\mathbf{F}_f = \begin{pmatrix} 0 \\ F_f \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (19)$$



Тогда соответствующий момент имеет вид:

$$N_f = \begin{pmatrix} F_f r_f \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (20)$$

где  $r_f$  — точка приложения силы, действующей на киль.

5. Будем считать, что сила  $F_f$  имеет две составляющие, определяющиеся эффектом присоединенных масс и вязкостью жидкости в рамках линейной по угловым скоростям модели:

$$F_f = \mu_1 \dot{\Omega}_\xi + \mu_2 \Omega_\xi. \quad (21)$$

6. Процесс волнообразования мы также не учитываем. Колебания вдоль оси  $O_1 \zeta$  незначительны и мало изменяют объем погруженной части тела. Поэтому будем считать что  $H = \text{const}$ .

Для определения коэффициентов  $\mu_1$ ,  $\mu_2$  и  $r_f$ , связанных с действием гидродинамической силы  $F_f$ , было проведено численное моделирование движения кия в вязкой жидкости с использованием уравнения Навье–Стокса. Коэффициенты  $C_\xi$ ,  $C_\eta$ ,  $C_{N\xi}$  определены из предварительных натуральных экспериментов. Коэффициент  $C_{N\xi}$  определялся на заключительном этапе моделирования методом минимизации среднего квадратичного отклонения теоретической траектории движения от экспериментальной. В результате чего получено следующее значение  $C_{N\xi} = 0.1$ . Радиус вектор центра давления  $r_A$  определен по 3-D модели в SolidWorks  $r_A = 0.019$  м.

### 2.3.1. Определение сил и моментов, действующих на киль

Для определения силы  $F_f$  рассмотрим задачу обтекания кия, совершающего периодические колебания вокруг оси  $O_1 \xi$ , с помощью уравнения Навье–Стокса в двумерной постановке. При этом изменения угла  $\phi$  имеет вид:

$$\phi(t) = \phi(0) \sin(2\pi\omega t). \quad (22)$$

Амплитуду колебаний возьмем  $\phi(0) = 0.1$  рад., что соответствует крену тела в положении равновесия при углах поворота внутренних масс  $\vartheta_1 = -\pi/2$  и  $\vartheta_2 = -\pi/2$ . Частота колебаний  $\omega$  соответствует частоте вращения внутренних масс и изменяется в интервале от 100 до 1000 об/мин.

Уравнения движения в подвижной системе координат имеют вид:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{V}_f &= 0, \\ \frac{\partial \mathbf{V}_f}{\partial t} + \nabla \left( (\mathbf{V}_f - \mathbf{W}) \mathbf{V}_f \right) &= -\frac{\nabla p}{\rho_f} + \nu \nabla^2 \mathbf{V}_f - \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V}_f, \end{aligned} \quad (23)$$

где  $\mathbf{V}_f = (0, V_\eta, V_\zeta)^T$  — вектор абсолютной скорости жидкости;  $\mathbf{W} = \boldsymbol{\Omega} \times r = (0, -\Omega_\xi \zeta, \Omega_\xi \eta)^T$  — вектор переносной скорости частицы жидкости в точке  $r$ ;  $\boldsymbol{\Omega} = (\Omega_\xi, 0, 0)^T$  — вектор угловой скорости тела;  $p$ ,  $\rho_f$ ,  $\nu$  — давление, плотность и кинематический коэффициент вязкости.

Для системы уравнений (23) задавались граничные условия:

1. На поверхности кия

$$\begin{aligned} \mathbf{V} \cdot n &= (\boldsymbol{\Omega} \times r_s) \cdot n, \\ n \times \mathbf{V} &= n \times (\boldsymbol{\Omega} \times r_s), \end{aligned}$$

где  $r_s$  — радиус вектор точки кия на поверхности,  $n$  — внешняя нормаль для поверхности кия.

2. На бесконечности

$$V_f = 0.$$

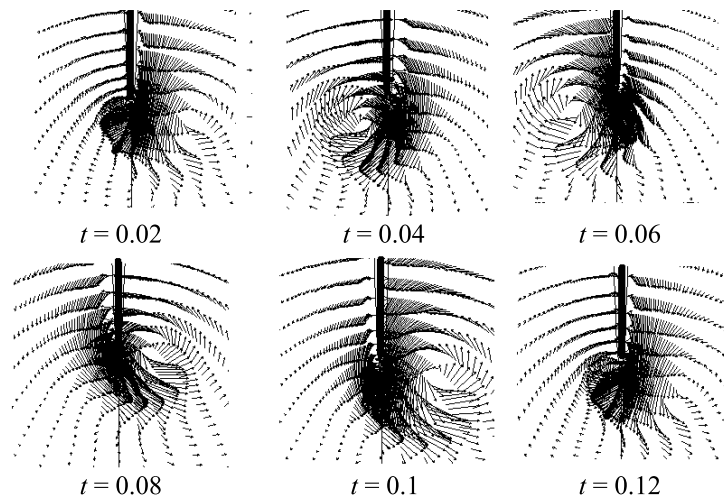


Рис. 2. Векторное поле течения в плоскости  $(\eta, \zeta)$  при обтекании киля

Силы реакции жидкости на тело и момент вязких сил определяются интегралами по поверхности:

$$F_f(t) = \int_S [-p\mathbf{E} + \rho_f \mathbf{v}(\nabla V_f + \nabla V_f^T)] \cdot \mathbf{n} ds, \quad (24)$$

$$N_f(t) = \int_S \mathbf{r}_s \times [-p\mathbf{E} + \rho_f \mathbf{v}(\nabla V_f + \nabla V_f^T)] \cdot \mathbf{n} ds.$$

Для решения уравнений (23) в криволинейной системе координат применялся проекционный метод [Рамоданов, Тененев, 2011]. Метод имеет второй порядок точности по времени и по пространственным координатам. При вращении внутренних масс со скоростью  $\Omega_\xi = 600$  об/мин картина течения около киля в плоскости  $(\eta, \zeta)$  в разные моменты времени показана на рис. 2. При повороте киля возникают вихри, попеременно отрывающиеся с обеих сторон.

При решении дифференциального уравнения (23) были определены силы и момент сил (24), действующие на киль при изменении угла  $\phi$  относительно оси  $O_1\xi$ . Усредненная по  $\phi$  зависимость сила  $F_f(\Omega_\xi, \Omega_\xi)$  аппроксимирована соотношением (21). При известной силе и моменте по формуле (20) определен радиус действия силы  $r_f$ . В результате численного моделирования получены следующие значения:

$$\mu_1 = -22.1, \quad \mu_2 = -0.409, \quad r_f = 0.035 \text{ м.} \quad (25)$$

Сравнение численных расчетов и аппроксимации представлены на рис. 3, 4.

### 2.3.2. Определение коэффициентов сопротивления

Для определения коэффициентов сопротивления  $C_\xi, C_\eta, C_{N\xi}$  проведены предварительные эксперименты с неподвижными внутренними массами по следующей методике: внутренние массы тела устанавливались в положение  $\vartheta_1 = 0, \vartheta_2 = -\pi$ , при котором углы ориентации  $\phi = \psi = \theta = 0$  и в направлениях  $(O_1\xi, O_1\eta)$ , поочередно устройству придавался начальный импульс и записывалось его движение. А для определения  $C_{N\xi}$  телу создавался начальный угол крена. Коэффициенты сопротивления определялись с помощью аппроксимации экспериментальных данных зависимостями (18). На рис. 5 и 6 представлены изменения продольной  $V_\xi$  и поперечной  $V_\eta$  скорости движения тела по времени.

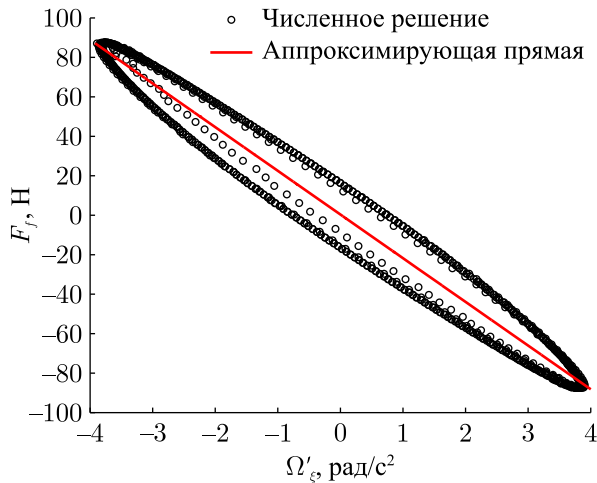


Рис. 3. Зависимость силы, действующей на киль  $F_f$ , от углового ускорения тела  $\Omega'_\xi$

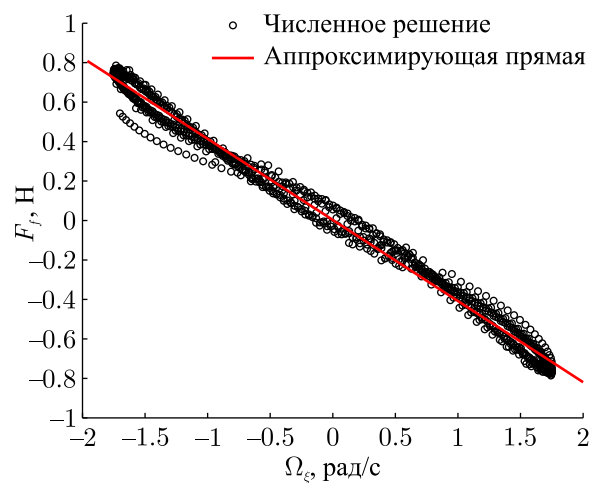


Рис. 4. Зависимость силы, действующей на киль  $F_f$ , от угловой скорости тела  $\Omega_\xi$

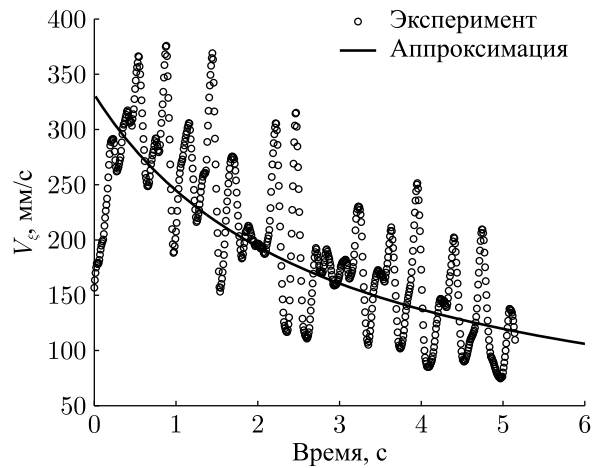


Рис. 5. Изменение продольной скорости движения тела  $V_\xi$  во времени при торможении

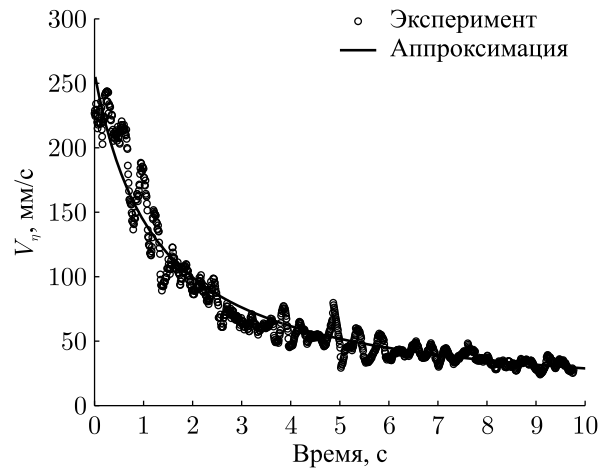


Рис. 6. Изменение поперечной скорости движения тела  $V_\eta$  во времени при торможении

На рис. 7 показаны затухающие колебания и изменение угла крена  $\phi$  во времени, возникшие при начальном угле крена.

В результате данных экспериментов были получены следующие коэффициенты сопротивления для зависимостей:

$$C_\xi = 1.5, \quad C_\eta = 7, \quad C_{N\xi} = 0.0275. \tag{26}$$

#### 2.4. Начальные условия

При рассмотрении движения твердого тела с внутренними подвижными массами из состояния покоя, начальные условия для системы дифференциальных уравнений (14), (2) имеют вид:

$$\mathbf{P}(0) = 0, \quad \mathbf{M}(0) = \mathbf{K}_2(0), \quad r(0) = 0.$$

Начальные условия для векторов  $\alpha, \beta, \gamma$  находятся через углы, определяющие положение тела в пространстве:  $\phi, \psi, \theta$ . При начальных углах смещения внутренних масс  $\vartheta_1 = 0$  и  $\vartheta_2 = -\pi$  углы ориентации тела  $\phi = \theta = \psi = 0$ . Подставив данные значения в (1), получим начальные условия для матрицы поворота  $\mathbf{Q}(0) = \mathbf{E}$ .

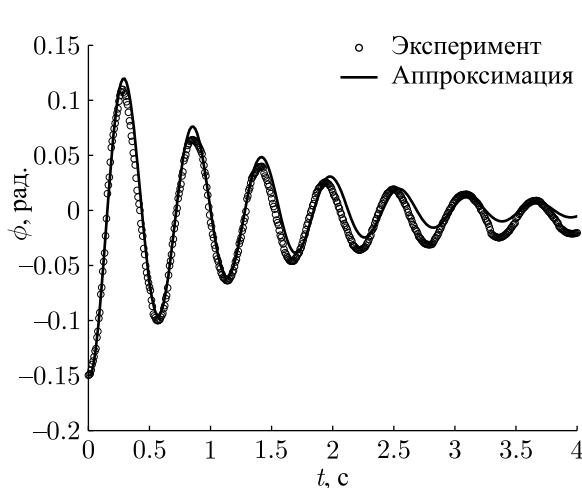


Рис. 7. Изменение угла крена  $\phi$  во времени при затухающих колебаниях

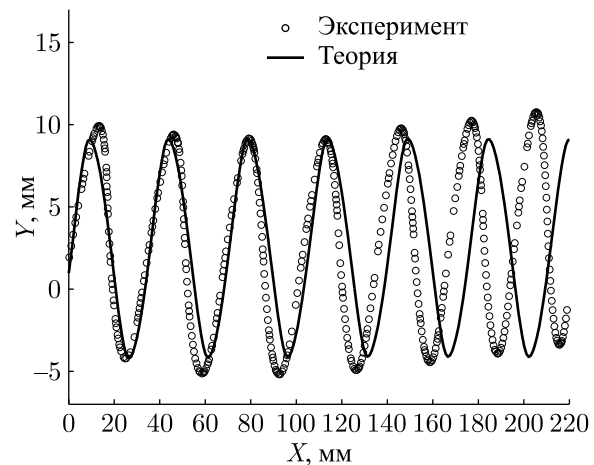


Рис. 8. Фрагмент траектории движения центра масс при скорости вращения внутренних масс  $\omega = 100$  об/мин

### 3. Результаты натурального эксперимента

Для проверки согласованности математической модели движения твердого тела с подвижными внутренними массами с реальным устройством были проведены эксперименты при различных скоростях вращения внутренних масс  $\omega$  по следующему алгоритму:

1. На корпусе закрепить светоотражающие маркеры системы Vicon Motion Capture, задающие систему координат, жестко связанную с устройством.
2. Выставить начальное смещение внутренних масс  $\vartheta_1 = 0$ ,  $\vartheta_2 = -\pi$ .
3. Поместить устройство в центр бассейна. В нашем случае использовался круглый бассейн диаметром 2 м и глубиной 0.4 м.
4. Выждать время релаксации воды (порядка 5 мин).
5. Запустить систему отслеживания движения Vicon Motion Capture, задать необходимую частоту вращения внутренних масс и запустить устройство.
6. По полученным данным рассчитать среднее направление движения и определить параметры траектории движения (амплитуду, среднюю скорость движения) и углы ориентации  $\phi$ ,  $\psi$ ,  $\theta$ .

По данной методике было проведено несколько серий экспериментов с различными скоростями вращения внутренних масс не менее 5 в каждой серии. Полученные экспериментальные данные сравнивались с результатами численного моделирования движения твердого тела с внутренними подвижными массами (уравнение (14)), которое решалось методом Рунге–Кутты–Вернера 6-го порядка точности с контролем погрешности интегрирования [Hairer, Norsett, 1991]. В качестве параметров системы использовались значения (15), (25), (26).

На рис. 8 представлены экспериментальная и теоретическая траектории движения тела при скорости вращения внутренних масс  $\omega = 100$  об/мин. В обоих случаях происходит в среднем прямолинейное движение с периодическими поперечными колебаниями. По основным показателям траектории (амплитуда, частота колебания, шаг продвижения) совпадение достаточно удовлетворительное.

На рис. 9–10 представлены графики изменения продольной (вдоль оси  $O_1\xi$ ) и поперечной (вдоль оси  $O_1\eta$ ) скоростей движения, расчетные значения которых также совпадают по частоте и амплитуде с результатами эксперимента.

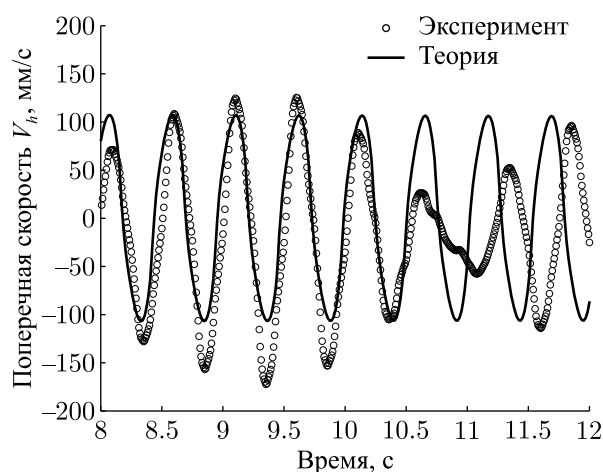


Рис. 9. Изменение поперечной скорости движения тела  $V_\eta$  во времени при скорости вращения внутренних масс  $\omega = 100$  об/мин

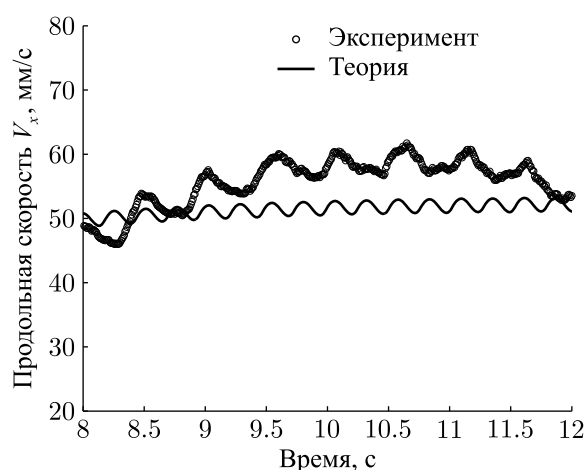


Рис. 10. Изменение продольной скорости движения тела  $V_\xi$  во времени при скорости вращения внутренних масс  $\omega = 100$  об/мин

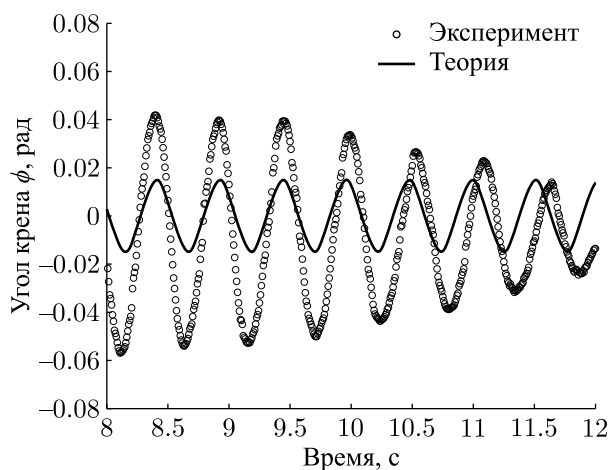


Рис. 11. Изменение угла крена тела  $\phi$  во времени при скорости вращения внутренних масс  $\omega = 100$  об/мин

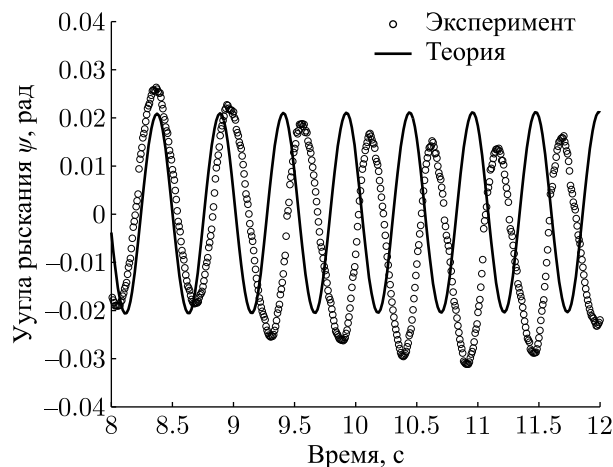


Рис. 12. Изменение угла рыскания тела  $\psi$  во времени при скорости вращения внутренних масс  $\omega = 100$  об/мин

Графики изменения углов ориентации тела (крена и рыскания) при движении представлены на рис. 11, 12.

Из графика изменения угла крена  $\phi$  (рис. 11) видно, что амплитуда колебаний экспериментальных данных в два раза превышает теоретические значения. Данное расхождение можно объяснить наличием волнообразования на поверхности жидкости при движении, что не учитывается моделью.

На рис. 13, 14 представлены зависимости экспериментальных и теоретических значений скорости продвижения и размаха амплитуды твердого тела, перемещающегося за счет вращения внутренних масс, от частоты вращения внутренних масс. Маркером обозначены экспериментальные данные, сплошная линия соответствует модели движения в вязкой жидкости (предложенной в данной работе), пунктирная линия — модель движения в идеальной жидкости.

Из графиков видно, что с ростом частоты вращения внутренних масс расчетная средняя скорость продвижения устройства, полученная с использованием предложенной математической модели (сплошная линия), согласуется с результатами экспериментов и возрастает, причем нелинейно. Для сравнения на рис. 13 нанесена пунктирная линия, соответствующая двумерному рас-

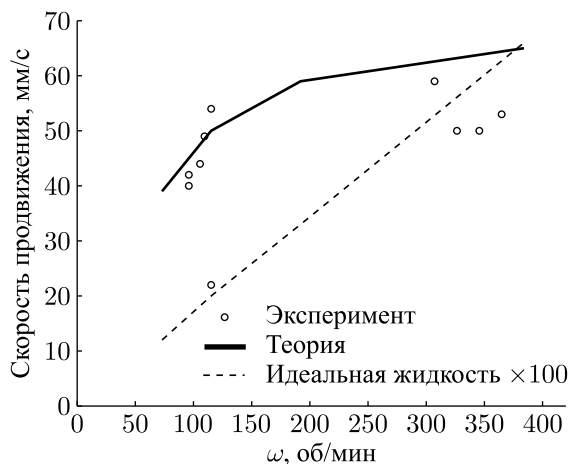


Рис. 13. Изменение средней скорости движения в зависимости от частоты колебаний

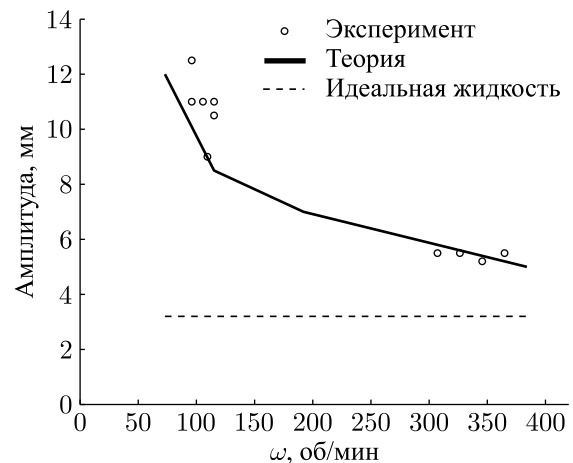


Рис. 14. Изменение величины размаха поперечных перемещений в зависимости от частоты колебаний

чету скорости в идеальной жидкости. Величина скорости умножена для масштабирования на 100. Таким образом, модель идеальной жидкости, не учитывающая трехмерный колебательный режим движения, дает по скорости продвижения отличие на 2 порядка как от экспериментальных значений, так и от полученных по трехмерной модели движения тела.

Зависимость величины размаха (удвоенной амплитуды) поперечных перемещений тела от частоты колебаний показана на рис. 14. Размах поперечных перемещений уменьшается с увеличением частоты колебаний. Этот эффект проявляется как в экспериментах, так и в расчетных результатах. В случае двумерного движения в идеальной жидкости амплитуда является постоянной.

#### 4. Заключение

Несмотря на ряд ограничений, математическая модель движения твердого тела с вращающимися внутренними массами, учитывающая силу тяжести, выталкивающую силу Архимеда и силу сопротивления со стороны вязкой жидкости, дает хорошее совпадение расчетных характеристик движения с результатами экспериментов как качественно, так и количественно. Таким образом, можно сделать вывод, что данная математическая модель применима для описания движения твердого тела с перемещающимися внутренними массами по поверхности жидкости и для подводного движения тела с нулевой плавучестью (в отсутствии силы Архимеда). Дальнейшее уточнение модели должно быть направлено на учет трехмерного обтекания тела вязкой жидкостью с образованием поверхностных волн и движения во всех направлениях.

Авторы выражают благодарность И. С. Мамаеву и Е. В. Ветчанину за интерес, проявленный к данной работе.

#### Список литературы (References)

- Ветчанин Е. В., Караваев Ю. Л., Калинин А. А., Клековкин А. В., Пивоварова Е. Н. Модель безвинтового подводного робота // Вестник удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2015. — Т. 25, № 4. — С. 544–553.  
 Vetchanin E. V., Karavaev Y. L., Kalinkin A. A., Klekovkin A. V., Pivovarov E. N. Model' bezvintovogo podvodnogo robota [A model of a screwless underwater robot] // Vestnik udmurtskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternyye nauki. — 2015. — Vol. 25, No. 4. — P. 544–553 (in Russian).

- Ветчанин Е. В., Тененев В. А.* Моделирование управления движением в вязкой жидкости тела с переменной геометрией масс // Компьютерные исследования и моделирование. — 2011. — Т. 3, № 4. — С. 371–381.  
*Vetchanin E. V., Tenenev V. A.* Modelirovaniye upravleniya dvizheniyem v vyazkoy zhidkosti tela s peremennoy geometriyey mass [Motion control simulating in a viscous liquid of a body with variable geometry of weights] // Computer Research and Modeling. — 2011a. — Vol. 3, No. 4. — P. 371–381 (in Russian).
- Ветчанин Е. В., Тененев В. А.* Управляемое движение тела в жидкости при возвратно-поступательном перемещении внутренней материальной точки // Интеллектуальные системы в производстве. — 2011. — № 2. — С. 62–72.  
*Vetchanin E. V., Tenenev V. A.* Upravlyayemoye dvizheniye tela v zhidkosti pri vozvratno-postupatel'nom peremeshchenii vnutrenney material'noy tochki [The Controlled Movement of an Object in Liquid at Reciprocating Motion of an Internal Point Particle] // Intellektual'nyye sistemy v proizvodstve. — 2011b. — No. 2. — P. 62–72 (in Russian).
- Ветчанин Е. В., Тененев В. А., Мамаев И. С.* Движение тела с переменной геометрией масс в вязкой жидкости // Нелинейная динамика. — 2012. — Т. 8, № 4. — С. 815–836.  
*Vetchanin E. V., Tenenev V. A., Mamaev I. S.* Dvizheniye tela s peremennoy geometriyey mass v vyazkoy zhidkosti [The motion of a body with variable mass geometry in a viscous fluid] // Nonlinear dynamics. — 2012. — Vol. 8, No. 4. — P. 815–836 (in Russian).
- Килин А. А., Ветчанин Е. В.* Управление движением твердого тела в жидкости с помощью двух подвижных масс // Нелинейная динамика. — 2015. — Т. 11, № 4. — С. 633–645.  
*Kilin A. A., Vetchanin E. V.* Upravleniye dvizheniyem tverdogo tela v zhidkosti s pomoshch'yu dvukh podvizhnykh mass Nelineynaya dinamika [The control of the motion through an ideal fluid of a rigid body by means of two moving masses] // Nonlinear dynamics. — 2015. — Vol. 11, No. 4. — P. 633–645 (in Russian).
- Козлов В. В., Рамоданов С. М.* О движении изменяемого тела в идеальной жидкости // ПММ. — 2001. — Т. 65, вып. 4. — С. 592–601.  
*Kozlov V. V., Ramodanov S. M.* O dvizhenii izmeniaemogo tela v ideal'noj zhidkosti [The Motion of a Variable Body in an Ideal Fluid] // Prikl. Mat. Mekh. — 2001. — Vol. 65, No. 4. — P. 592–601 (in Russian).
- Козлов В. В., Рамоданов С. М.* О движении в идеальной жидкости тела с жесткой оболочкой и меняющейся геометрией масс // Докл. РАН. — 2002. — Т. 382, № 4. — С. 478–481.  
*Kozlov V. V., Ramodanov S. M.* O dvizhenii v ideal'noj zhidkosti tela s zhestkoy obolochkoy i menyayushcheysya geometriyey mass [On the motion in the ideal fluid of a body with a rigid shell and a changing mass geometry] // Report of the Russian Academy of Sciences. — 2002. — Vol. 382, No. 4. — P. 478–481 (in Russian).
- Козлов В. В., Онищенко Д. А.* О движении в идеальной жидкости тела, содержащего внутри себя подвижную сосредоточенную массу // ПММ. — 2003. — Т. 67, вып. 4. — С. 620–633.  
*Kozlov V. V., Onishchenkov S. M.* O dvizhenii v ideal'noj zhidkosti tela, sodержashchego vnutri sebya podvizhnuyu sosredotochennuyu massu [The motion of the rigid body containing a moving point mass in an unbounded ideal fluid] // Prikl. Mat. Mekh. — 2003. — Vol. 67, No. 4. — P. 620–633 (in Russian).
- Рамоданов С. М., Тененев В. А.* Движение тела с переменной геометрией масс в безграничной вязкой жидкости // Нелинейная динамика. — 2011. — Т. 7, № 3. — С. 635–647.  
*Ramodanov S. M., Tenenev V. A.* Dvizheniye tela s peremennoy geometriyey mass v bezgranichnoy vyazkoy zhidkosti [Motion of a body with variable mass geometry in an infinite viscous fluid] // Nonlinear dynamics. — 2011. — Vol. 7, No. 3. — P. 635–647 (in Russian).
- Черноустко Ф. Л.* О движении тела, содержащего подвижную внутреннюю массу // Докл. РАН. — 2005. — Т. 405, № 1. — С. 56–60.  
*Chernous'ko F. L.* O dvizhenii tela, sodержashchego podvizhnuyu vnutrennyuyu massu [On the motion of a body containing a movable inner mass] // Report of the Russian Academy of Sciences. — 2005. — Vol. 405, No. 1. — P. 56–60 (in Russian).
- Черноустко Ф. Л.* Анализ и оптимизация движения тела, управляемого посредством подвижной внутренней массы // Прикладная математика и механика. — 2006. — Т. 70, вып. 6. — С. 915–941.  
*Chernous'ko F. L.* Analiz i optimizatsiya dvizheniya tela, upravlyayemogo posredstvom podvizhnoy vnutrenney massy [Analysis and optimization of motion of a body controlled by a moving internal mass] // Applied Mathematics and Mechanics. — 2006. — Vol. 70, No. 6. — P. 915–941 (in Russian).
- Черноустко Ф. Л., Болотник Н. Н.* Мобильные роботы, управляемые движением внутренних тел // Труды института математики и механики УрО РАН. — 2010. — Т. 16, № 5. — С. 213–222.  
*Chernous'ko F. L., Bolotnik N. N.* Mobil'nyye roboty, upravlyayemyye dvizheniyem vnutrennikh tel [Mobile robots controlled by the motion of internal bodies] // Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN. — 2010. — Vol. 16, No. 5. — P. 213–222 (in Russian).

- Borisov A. V., Kozlov V. V., Mamaev I. S.* Asymptotic stability and associated problems of dynamics of falling rigid body // *Regular and Chaotic Dynamics*. — 2007. — Vol. 12, No. 5. — P. 531–565.
- Borisov A. V., Mamaev I. S.* On the motion of a heavy rigid body in an ideal fluid with circulation // *CHAOS*. — 2006. — Vol. 16, No. 1. — P. 013118 (7 pages).
- Borisov A. V., Mamaev I. S., Ramodanov S. M.* Motion of a circular cylinder and  $n$  point vortices in a perfect fluid // *Regular and Chaotic Dynamics*. — 2003. — Vol. 8, No. 4. — P. 449–462.
- Hairer E., Norsett S. P.* Solving Ordinary Differential Equations. — Berlin: Springer-Verlag, 1991. — Vol. 1. — 528 p.
- Kelly S. D., Shashikanth B. N.* Hamiltonian Structure for a Neutrally Buoyant Rigid Body Interacting with  $N$  Vortex Rings of Arbitrary Shape: the Case of arbitrary Smooth Body Shape // *Theor. Comput. Fluid Dyn.* — 2008. — Vol. 22. — P. 37–64.
- Klenov A. I., Kilin A. A.* Influence of Vortex Structures on the Controlled Motion of an Above-water Screwless Robot // *Regular and Chaotic Dynamics*. — 2016. — Vol. 21, Nos. 7–8. — P. 927–938.
- Leonard N. E.* Stability of a bottom-heavy underwater vehicle // *Automatica*. — 1997. — Vol. 33, No. 3. — P. 331–346.
- Leonard N. E., Marsden J. E.* Stability and Drift of Underwater Vehicle Dynamics: Mechanical Systems with Rigid Motion Symmetry // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. — 1997. — Vol. 105, No. 1. — P. 130–162
- Leonard N. E., Woolsey C. A.* Stabilizing underwater vehicle motion using internal rotors // *Automatica*. — 2002. — Vol. 38, No. 12. — P. 2053–2062.
- Ramodanov S. M., Tenenev V. A.* Treschev Self-propulsion of a Body with Rigid Surface and Variable Coefficient of Lift in a Perfect Fluid // *Regular and Chaotic Dynamics*. — 2012. — Vol. 17, No. 6. — P. 547–558.
- Ramodanov S. M., Tenenev V. A.* The motion of a two-dimensional body, controlled by two moving internal masses, in an ideal fluid // *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. — 2015. — Vol. 79, No. 4. — P. 325–333.
- Shashikanth B. N.* Poisson brackets for the dynamically interacting system of a 2D rigid cylinder and  $N$  point vortices: the case of arbitrary smooth cylinder shapes // *Regular and Chaotic Dynamics*. — 2005. — Vol. 10, No. 1. — P. 1–11.
- Tallapragada P., Kelly S. D.* Integrability of Velocity Constraints Modeling Vortex Shedding in Ideal Fluids // *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*. — 2017. — Vol. 12, Iss. 2.
- Tallapragada P., Pollard B.* An Aquatic Robot Propelled by an Internal Rotor IEEE // *ASME Transactionson Mechatronics*. — April 2017. — Vol. 22, Iss. 2.
- Vetchanin E. V., Kilin A. A.* Controlled Motion of a Rigid Body with Internal Mechanisms in an Ideal Incompressible Fluid // *Trudy Matematicheskogo Instituta imeni V. A. Steklova*. — 2016a. — Vol. 295. — P. 321–351.
- Vetchanin E. V., Kilin A. A.* Free and controlled motion of a body with moving internal mass through a fluid in the presence of circulation around the body // *Doklady Physics*. — January 2016b. — Vol. 61, Iss. 1. — P. 32–36.
- Vetchanin E. V., Kilin A. A.* Control of Body Motion in an Ideal Fluid Using the Internal Mass and the Rotor in the Presence of Circulation Around the Body // *Journal of Dynamical and Control Systems*. — April 2017. — Vol. 23, Iss. 2. — P. 435–458.