

УДК: 519.63:532.5

Моделирование анизотропной конвекции бинарной жидкости, насыщающей пористую среду

М. А. Абделхафиз^{1,2,a}, В. Г. Цибулин^{1,b}

¹Южный федеральный университет,
Россия, 344006, г. Ростов-на-Дону, ул. Большая Садовая, д. 105/42

²Сохаг университет,
Египет, 82524, г. Сохаг, Нассер Сити

E-mail: ^a mostafa.abdallah@yahoo.com, ^b vgcibulin@sfedu.ru

Получено 27.06.2018, после доработки — 20.08.2018.

Принято к публикации 27.08.2018.

В предположении анизотропии свойств жидкости и среды моделируется возникновение гравитационной конвекции в пористом прямоугольнике, насыщенном теплопроводной жидкостью с примесью и подогреваемом снизу. Рассматривается плоская задача на основе уравнений Дарси–Буссинеска для бинарной жидкости с учетом эффекта Соре. Устанавливаются условия, при которых система уравнений относительно функции тока, отклонений температуры и концентрации от равновесного состояния является косимметричной и возможно ответвление от механического равновесия непрерывного семейства стационарных движений.

Показано, что в условиях существования косимметрии имеются подобласти параметров, для которых критические значения температурного и концентрационного чисел Рэлея находятся по явным формулам. Для случая монотонной неустойчивости механического равновесия выведены формулы критических чисел Рэлея и приведены результаты подтверждающих вычислений.

Развита конечно-разностная дискретизация задачи второго порядка точности по пространственным переменным, сохраняющая косимметричность исследуемой системы. С помощью разработанной численной схемы проведен анализ устойчивости механического равновесия при различных комбинациях управляющих параметров.

На плоскости температурного и концентрационного чисел Рэлея представлены нейтральные кривые устойчивости механического равновесия и рассчитаны участки колебательной неустойчивости. Установлена зависимость от параметров термодиффузии концентрационного числа Рэлея, при котором колебательная неустойчивость предшествует монотонной. В общей ситуации, когда не выполняются условия косимметрии, выведенные формулы критических чисел Рэлея могут быть использованы для оценки порогов возникновения конвекции.

Ключевые слова: конвекция, бинарная жидкость, пористая среда, эффект Соре, анизотропия, косимметрия, метод конечных разностей

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 18-01-00453.

UDC: 519.63:532.5

Modeling of anisotropic convection for the binary fluid in porous medium

M. A. Abdelhafez^{1,2,a}, V. G. Tsybulin^{1,b}

¹Southern Federal University,
105/42 Bolshaya Sadovaya st., Rostov-on-Don, 344006, Russia

²Sohag University,
Nasser city, Sohag, 82524, the Arab Republic of Egypt

E-mail: ^a mostafa.abdallah@yahoo.com, ^b vgcibulin@sfnedu.ru

Received 27.06.2018, after completion — 20.08.2018.

Accepted for publication 27.08.2018.

We study an appearance of gravitational convection in a porous medium saturated by the double-diffusive fluid. The rectangle heated from below is considered with anisotropy of media properties. We analyze Darcy–Boussinesq equations for a binary fluid with Soret effect.

Resulting system for the stream function, the deviation of temperature and concentration is cosymmetric under some additional conditions for the parameters of the problem. It means that the quiescent state (mechanical equilibrium) loses its stability and a continuous family of stationary regimes branches off. We derive explicit formulas for the critical values of the Rayleigh numbers both for temperature and concentration under these conditions of the cosymmetry. It allows to analyze monotonic instability of mechanical equilibrium, the results of corresponding computations are presented.

A finite-difference discretization of a second-order accuracy is developed with preserving of the cosymmetry of the underlying system. The derived numerical scheme is applied to analyze the stability of mechanical equilibrium.

The appearance of stationary and nonstationary convective regimes is studied. The neutral stability curves for the mechanical equilibrium are presented. The map for the plane of the Rayleigh numbers (temperature and concentration) are displayed. The impact of the parameters of thermal diffusion on the Rayleigh concentration number is established, at which the oscillating instability precedes the monotonic instability. In the general situation, when the conditions of cosymmetry are not satisfied, the derived formulas of the critical Rayleigh numbers can be used to estimate the thresholds for the convection onset.

Keywords: convection, binary fluid, porous media, Soret effect, anisotropy, cosymmetry, finite-difference method

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2018, vol. 10, no. 6, pp. 801–816 (Russian).

This work was supported RFBR grant No. 18-01-00453.

Введение

Во многих технических и технологических процессах в настоящее время применяются многокомпонентные жидкости [Нигматулин, 1987]. В частности, для течений в пористых средах перспективным является использование бинарных жидкостей, причем теплопроводность бинарной жидкости может значительно превышать теплопроводность базовой жидкости. Для обеспечения устойчивости технологических процессов важным является предупреждение конвективных движений [Nield, Bejan, 2013]. Вопросы конвективной устойчивости смесей, состоящих из нереагирующих компонентов, рассматриваются в монографиях [Гершуни, Жуховицкий, 1972; Nield, Bejan, 2013]. Для определения пороговых значений критических чисел Рэлея требуется анализ монотонной и колебательной неустойчивостей. Малоисследованным остается вопрос о возникновении колебательных процессов в бинарных жидкостях, насыщающих пористые анизотропные массивы. Анализ конвекции с учетом анизотропии тепловых характеристик и проницаемости проводился в ряде работ (см., например, [Storesletten, 2004; Tyvand, Storesletten, 2015]). Возникновению конвекции в бинарных жидкостях и наножидкостях, насыщающих пористые среды, посвящены работы последнего времени (см. [Rebhi et al., 2017; Yacine et al., 2016; Nield, Kuznetsov, 2011; Umavathi et al., 2017] и приведенные там ссылки).

При исследовании конвекции несжимаемой жидкости в пористой среде на основе модели Дарси в [Любимов, 1975] обнаружен эффект одновременного существования бесконечного числа стационарных режимов, ответвившихся от потерявшего устойчивость механического равновесия. Это явление было объяснено В. И. Юдовичем [Юдович, 1991; Yudovich, 1995] на основе развитой им теории косимметрии. В отличие от задач с непрерывными симметриями [Андреев и др., 2008], в которых семейства решений обладают одинаковым спектром устойчивости, случай косимметрии характеризуется возникновением семейств решений с индивидуальным спектром устойчивости. Это было подтверждено расчетами конвективных движений для плоских задач фильтрационной конвекции теплопроводной жидкости [Говорухин, 1999; Karasözen, Tsybulin, 1999; Bratsun et al., 1995; Maryshev et al., 2013] и многокомпонентных жидкостей без учета эффекта Соре [Кантур, Цибулин, 2004]. При исследовании конвекции в пористой среде с учетом анизотропии свойств жидкости и среды в [Абделхафиз, Цибулин, 2017a] были установлены условия на коэффициенты задачи, при которых возникает косимметрия.

Согласно [Юдович, 1991] косимметрией дифференциального уравнения $\dot{u} = F(u)$, $u \in R^n$, называется вектор, ортогональный F , т. е. $(L, F) = 0$. Если система дифференциальных уравнений имеет равновесие u_* и $L(u_*) \neq 0$, то при отсутствии дополнительных вырождений [Юдович, 1991] равновесие u_* принадлежит семейству равновесий. Теоретические результаты об ответвлении однопараметрических семейств стационарных движений в случае косимметрии задачи Дарси подтверждаются данными экспериментов [Глухов и др., 1978; Глухов, Путин, 1999]. Помимо задач фильтрационной конвекции, косимметрия обнаружена в популяционных системах [Будянский, Цибулин, 2015; Елифанов, Цибулин, 2017]. Наличие косимметрии в таких задачах означает мультистабильность — сосуществование различных устойчивых распределений конкурирующих видов.

Целью данной работы является развитие методов анализа возникновения конвекции в жидкости с примесью, насыщающей пористую анизотропную среду. Для этого применяется подход, основанный на анализе условий, при которых задача является косимметричной. В случае монотонной неустойчивости выводятся явные формулы для критических чисел Рэлея. Для анализа колебательной неустойчивости проводится расчет с применением метода конечных разностей, сохраняющего косимметрию.

Уравнения конвекции бинарной жидкости в пористой среде

Рассматривается задача о возникновении конвекции теплопроводной жидкости с примесью (наножидкости) в пористой области. Считается, что инерцией скорости можно пренебрегать. Применяются уравнения Буссинеска – Дарси [Nield, Bejan, 2013], которые в безразмерных переменных могут быть записаны в следующем виде:

$$\nabla p + \mu M \cdot V + \rho_0 [\beta_T (T - T_0) + \beta_C (C - C_0)] \vec{g} = 0, \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0, \quad \nabla = (\partial_x, \partial_y, \partial_z), \quad (2)$$

$$\kappa_1 \partial_t T + \kappa_2 \vec{V} \cdot \nabla T = \nabla \cdot (\Lambda^T \cdot \nabla T), \quad (3)$$

$$\kappa_3 \partial_t C + \kappa_4 \vec{V} \cdot \nabla C = \nabla \cdot (\Lambda^C \cdot \nabla C + \Lambda^{CT} \cdot \nabla T). \quad (4)$$

Здесь t – время, (x, y, z) – декартовы координаты, параметр η учитывает инерцию поля скорости $\vec{V} = (u, v, w)$, p – давление, T – температура, C – концентрация примеси, μ – вязкость жидкости, ρ – плотность, $\vec{g} = (0, 0, -g)$ и g – ускорение свободного падения, Λ^T – тензор коэффициентов теплопроводности, M – тензор коэффициентов обратной проницаемости, ρ_0 – плотность жидкости при отсчетной температуре T_0 и концентрации C_0 . β_T и β_C – коэффициенты теплового и объемного концентрационного расширения, Λ^C и Λ^{CT} – тензоры коэффициентов молекулярной диффузии и термодиффузии (эффект Соре), параметры κ_j ($j = 1, \dots, 4$) характеризуют инерцию распространению тепла и примеси, $\kappa_1 = (\rho c_p)_m$ есть осредненное для жидкости и пористой среды произведение плотности на теплоемкость при постоянном давлении, а $\kappa_2 = (\rho c_p)_f$ соответствует жидкости при наличии примеси. Аналогичные характеристики κ_3, κ_4 используются в уравнении (4), причем считается, что $\kappa_1/\kappa_2 = \kappa_3/\kappa_4$.

На основе уравнений (1)–(4) рассматривается плоская задача о подогреве прямоугольного контейнера $D = [0, a] \times [0, b]$, на границе которого заданы условия непротекания $\vec{v} \cdot n|_{\partial D} = 0$, n – нормаль к границе ∂D и линейные по высоте профили распределения температуры и примеси:

$$T_*(y) = T_2 - \frac{y}{b} \Delta T, \quad \Delta T = (T_2 - T_1),$$

$$C_*(y) = C_2 - \frac{y}{b} \Delta C, \quad \Delta C = (C_2 - C_1),$$

здесь T_1 и T_2 (C_1 и C_2) – температуры (концентрации примеси) на верхней ($y = b$) и нижней ($y = 0$) границах соответственно, сила тяжести действует в направлении, обратном координате y .

Вводится возмущение температурного поля θ и концентрации c :

$$T(x, y, t) = T_*(y) + \theta(x, y, t), \quad C(x, y, t) = C_*(y) + c(x, y, t)$$

и делается переход к безразмерным величинам по формулам

$$u = v_* u', \quad v = v_* v', \quad x = b x', \quad y = b y', \quad t = t_* t', \quad \theta = \frac{\theta'}{\beta_T}, \quad c = \frac{c'}{\beta_C},$$

$$p - \rho_0 g \int_0^y [\beta_T (T_* - T_0) + \beta_C (C_* - C_0)] dy = P_* p', \quad M_{ij} = \frac{\rho_0 g \mu_{ij}}{v_* \mu},$$

$$\Lambda_{ij}^T = \Lambda_{11}^T d_{ij}^T, \quad \Lambda_{ij}^C = \frac{\Lambda_{11}^T \kappa_3}{\kappa_1} d_{ij}^C, \quad \Lambda_{ij}^{CT} = \frac{\beta_T \Lambda_{11}^T \kappa_3}{\beta_C \kappa_1} d_{ij}^{CT}, \quad (5)$$

где размерные характеристики времени t_* , скорости v_* , давления P_* , определены следующим образом:

$$t_* = \frac{b^2 \kappa_1}{\Lambda_{11}^T}, \quad v_* = \frac{\Lambda_{11}^T}{\kappa_2 b}, \quad P_* = \rho_0 g b. \quad (6)$$

Поведение системы характеризуется двумя параметрами: температурным числом Рэлея λ^T и концентрационным числом Рэлея λ^C :

$$\lambda^T = \frac{\kappa_2 v_* \Delta T b \beta_T}{\Lambda_{11}^T} = \Delta T \beta_T, \quad \lambda^C = \frac{\kappa_4 \kappa_1 v_* \Delta C b \beta_C}{\kappa_3 \Lambda_{11}^T} = \Delta C \beta_C. \quad (7)$$

Уравнения для двумерной задачи (1)–(4) можно переписать в виде (штрихи над безразмерными переменными опускаются)

$$0 = -\partial_x p - \mu_{11} u - \mu_{12} v, \quad (8)$$

$$0 = -\partial_y p - \mu_{21} u - \mu_{22} v + \theta + c, \quad (9)$$

$$0 = \partial_x u + \partial_y v, \quad (10)$$

$$\partial_t \theta = L^T \theta - u \partial_x \theta - v \partial_y \theta + \lambda^T v, \quad (11)$$

$$\partial_t c = L^C c - u \partial_x c - v \partial_y c + \lambda^C v + L^{CT} \theta, \quad (12)$$

где оператор теплопроводности L^T дается выражением

$$L^T = \partial_x [d_{11}^T \partial_x + d_{12}^T \partial_y] + \partial_y [d_{21}^T \partial_x + d_{22}^T \partial_y]. \quad (13)$$

Операторы L^C и L^{CT} получаются из (13) заменой d_{ij}^T на d_{ij}^C и d_{ij}^{CT} соответственно.

Уравнения (8)–(12) дополняются краевыми условиями непротекания и однородности девиации температуры θ и концентрации c на границе ∂D :

$$u(0, y, t) = u(a, y, t) = 0, \quad v(x, 0, t) = v(x, b, t) = 0, \quad (14)$$

$$\theta(x, 0, t) = \theta(0, y, t) = \theta(a, y, t) = \theta(x, b, t) = 0, \quad (15)$$

$$c(x, 0, t) = c(0, y, t) = c(a, y, t) = c(x, b, t) = 0. \quad (16)$$

Условия для девиации концентрации примеси (16) задаются аналогично условиям для температуры, что позволяют получить косимметрию в рассматриваемой задаче и вывести явные формулы для критических чисел Рэлея. На практике данные условия трудно реализуемы; например, на боковых границах обычно ставятся условия Неймана.

В результате введения функции тока ψ ,

$$u = \psi_y, \quad v = -\psi_x, \quad (17)$$

получается система относительно температуры θ и концентрации c :

$$0 = M_0 \psi + \theta_x + c_x, \quad M_0 \psi = \mu_{11} \psi_{yy} - (\mu_{12} + \mu_{21}) \psi_{xy} + \mu_{22} \psi_{xx}, \quad (18)$$

$$\dot{\theta} = L^T \theta - \lambda^T \psi_x - J(\psi, \theta), \quad J(\psi, \theta) = \theta_x \psi_y - \theta_y \psi_x, \quad (19)$$

$$\dot{c} = L^C c - \lambda^C \psi_x + L^{CT} \theta - J(\psi, c). \quad (20)$$

Здесь точкой обозначено дифференцирование по времени t . Из (14) следуют краевые условия для функции тока:

$$\psi(x, 0, t) = \psi(0, y, t) = \psi(a, y, t) = \psi(x, b, t) = 0. \quad (21)$$

Косимметрия

В [Абделхафиз, Цибулин, 2017а] показано, что задача о конвекции теплопроводной жидкости в пористой среде с учетом анизотропии является косимметричной. Следующая лемма устанавливает условия существования линейной по переменным задачи косимметрии для системы (15), (16), (18)–(21).

Лемма. Вектор-функция

$$L = (\theta + c, S_1\psi, S_2\psi), \quad S_1 = \mu_{11} \frac{[d_{22}^{CT} - d_{22}^C]}{d_{22}^T d_{22}^C}, \quad S_2 = -\frac{\mu_{11}}{d_{22}^C}, \quad (22)$$

будет косимметрией системы (15), (16), (18)–(21) при выполнении условий на параметры

$$\begin{aligned} \mu_{11}d_{12}^C &= -\mu_{12}d_{22}^C, \quad \mu_{11}d_{21}^C = -\mu_{21}d_{22}^C, \quad \mu_{11}d_{11}^C = \mu_{22}d_{22}^C, \\ [\mu_{12}d_{22}^C + \mu_{11}d_{12}^{CT}]d_{22}^T &= [-d_{22}^C + d_{22}^{CT}]\mu_{11}d_{12}^T, \\ [\mu_{21}d_{22}^C + \mu_{11}d_{21}^{CT}]d_{22}^T &= [-d_{22}^C + d_{22}^{CT}]\mu_{11}d_{21}^T, \\ [-\mu_{22}d_{22}^C + \mu_{11}d_{11}^{CT}]d_{22}^T &= [-d_{22}^C + d_{22}^{CT}]\mu_{11}d_{11}^T. \end{aligned} \quad (23)$$

Доказательство. После умножения правой части системы (18)–(20) на косимметрию (22) и интегрирования по частям с учетом краевых условий (15), (16), (21) получается интеграл

$$\begin{aligned} I = \int_{\Omega} & \left[\psi_y \theta_y [\mu_{11} + S_1 d_{22}^T + S_2 d_{22}^{CT}] + \psi_y c_y [\mu_{11} + S_2 d_{22}^C] + \right. \\ & + \psi_y \theta_x [-\mu_{12} + S_1 d_{12}^T + S_2 d_{12}^{CT}] + \psi_y c_x [-\mu_{12} + S_2 d_{12}^C] + \\ & + \psi_x \theta_y [-\mu_{21} + S_1 d_{21}^T + S_2 d_{21}^{CT}] + \psi_x c_y [-\mu_{21} + S_2 d_{21}^C] + \\ & \left. + \psi_x \theta_x [\mu_{22} + S_1 d_{11}^T + S_2 d_{11}^{CT}] + \psi_x c_x [\mu_{22} + S_2 d_{11}^C] \right] dx dy. \end{aligned} \quad (24)$$

В силу условий (23) этот интеграл обнуляется для любых функций ψ, θ, c , удовлетворяющих краевым условиям. Это означает ортогональность вектор-функции L векторному полю задачи, т. е. L является косимметрией системы (15), (16), (18)–(21).

В случае нулевых смешанных компонент ($\mu_{ij} = d_{ij}^T = d_{ij}^C = d_{ij}^{CT} = 0, i \neq j, i, j = 1, 2$) из (23) остаются следующие два условия косимметрии:

$$\mu_{11}d_{11}^C = \mu_{22}d_{22}^C, \quad (25)$$

$$[-\mu_{22}d_{22}^C + \mu_{11}d_{11}^{CT}]d_{22}^T = [-d_{22}^C + d_{22}^{CT}]\mu_{11}d_{11}^T. \quad (26)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Аналогично [Абделхафиз, Цибулин, 2017а] можно показать, что при условиях (23) система (8)–(13), (14)–(16) обладает косимметрией $L = (\theta_x, c_x, 0, S_1\psi, S_2\psi)$. Таким образом, для задачи с учетом анизотропии тепловых свойств бинарной жидкости и проницаемости среды получены условия, при которых соответствующая система уравнений имеет линейную по переменным задачи косимметрию.

При отсутствии примеси ($c = 0$) задача сводится к системе для теплопроводной жидкости. В этом случае косимметрией системы (15), (18), (19) и (21) является вектор $L = (\theta, S\psi)$, где $S = -\mu_{11}/d_{22}^T$, и должны быть выполнены следующие соотношения на параметры задачи:

$$\mu_{11}d_{12}^T = -\mu_{12}d_{22}^T, \quad \mu_{11}d_{21}^T = -\mu_{21}d_{22}^T, \quad \mu_{11}d_{11}^T = \mu_{22}d_{22}^T. \quad (27)$$

Отметим, что в [Абделхафиз, Цибулин, 2017а] условия косимметричности для анизотропной гравитационной конвекции в пористой среде были получены в предположении $S = -1$; следовательно, формулы (27) расширяют множество значений коэффициентов, сохраняющих косимметричность задачи.

Анализ устойчивости механического равновесия

Уравнениям (18)–(20) удовлетворяет нулевое решение $\theta = \psi = c = 0$, отвечающее механическому равновесию. Далее проводится анализ устойчивости механического равновесия в случае

$$\mu_{12} = \mu_{21} = d_{12}^T = d_{21}^T = d_{12}^C = d_{21}^C = d_{12}^{CT} = d_{21}^{CT} = 0.$$

Для возмущений получается линейная система

$$0 = \mu_{11}\psi_{yy} + \mu_{22}\psi_{xx} + \theta_x + c_x, \quad (28)$$

$$\dot{\theta} = d_{11}^T \theta_{xx} + d_{22}^T \theta_{yy} - \lambda^T \psi_x, \quad (29)$$

$$\dot{c} = d_{11}^C c_{xx} + d_{22}^C c_{yy} - \lambda^C \psi_x + d_{11}^{CT} \theta_{xx} + d_{22}^{CT} \theta_{yy} \quad (30)$$

с нулевыми краевыми условиями

$$\psi|_{\partial\bar{D}} = \theta|_{\partial\bar{D}} = c|_{\partial\bar{D}} = 0. \quad (31)$$

Спектральная задача для определения спектра устойчивости механического равновесия имеет вид (σ — декремент)

$$0 = \mu_{11}\psi_{yy} + \mu_{22}\psi_{xx} + \theta_x + c_x, \quad (32)$$

$$\sigma\theta = d_{11}^T \theta_{xx} + d_{22}^T \theta_{yy} - \lambda^T \psi_x, \quad (33)$$

$$\sigma c = d_{11}^C c_{xx} + d_{22}^C c_{yy} - \lambda^C \psi_x + d_{11}^{CT} \theta_{xx} + d_{22}^{CT} \theta_{yy}. \quad (34)$$

Для получения критических чисел Рэлея λ^T , λ^C , отвечающих монотонной потере устойчивости механического равновесия (декремент равен нулю), система (32)–(34), переписывается с введением следующих обозначений:

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{\mu_{11}}{\mu_{22}}, & \lambda_1 &= \frac{\lambda^T}{\mu_{22}d_{11}^T}, & \lambda_2 &= \frac{\lambda^C}{\mu_{22}d_{11}^C}, \\ d_1 &= \frac{d_{22}^T}{d_{11}^T}, & d_2 &= \frac{d_{22}^C}{d_{11}^C}, & d_3 &= \frac{d_{11}^{CT}}{d_{11}^C}, & d_4 &= \frac{d_{22}^{CT}}{d_{11}^C} \end{aligned} \quad (35)$$

и замены переменных

$$\theta' = \frac{\theta}{\mu_{22}}, \quad c' = \frac{c}{\mu_{22}}.$$

В результате удаления штрихов для θ , c получается система

$$0 = \mu\psi_{yy} + \psi_{xx} + (\theta + c)_x, \quad (36)$$

$$0 = \theta_{xx} + d_1\theta_{yy} - \lambda_1\psi_x, \quad (37)$$

$$0 = c_{xx} + d_2c_{yy} - \lambda_2\psi_x + d_3\theta_{xx} + d_4\theta_{yy}, \quad (38)$$

$$\psi|_{\partial\bar{D}} = \theta|_{\partial\bar{D}} = c|_{\partial\bar{D}} = 0. \quad (39)$$

Косимметрией системы (36)–(39) будет вектор-функция

$$L = (\theta + c, (d_3 - 1)\psi, -\psi). \quad (40)$$

При этом должны выполняться условия косимметрии (25), (26), записываемые в новых обозначениях в виде

$$d_2 = \mu, \quad d_{11}^T [d_{22}^{CT} - d_{22}^C] = d_{22}^T [d_{11}^{CT} - d_{11}^C]. \quad (41)$$

Утверждение. Критические числа Рэлея λ^T и λ^C , отвечающие монотонной неустойчивости механического равновесия, связаны соотношением

$$\lambda_{crit}^T [d_{11}^C - d_{11}^{CT}] + d_{11}^T \lambda_{crit}^C = 4\pi^2 d_{11}^T d_{11}^C \left(\frac{\mu_{22}}{a^2} + \frac{\mu_{11}}{b^2} \right). \quad (42)$$

Действительно, из (36)–(38) следует система

$$\mu\psi_{yy} + \psi_{xx} + (\theta + c)_x = 0, \quad (43)$$

$$(\theta + c)_{xx} + \mu(\theta + c)_{yy} - 4\omega^2\psi_x = 0, \quad (44)$$

где $4\omega^2 = \lambda_1(1 - d_3) + \lambda_2$. В результате замены $\tilde{\psi} = 2\omega\psi$, $\tilde{y} = y/\sqrt{\mu}$, $\tilde{x} = x$ из (43), (44) получается следующая задача:

$$\tilde{\Delta}\tilde{\psi} + 2\omega(\theta + c)_{\tilde{x}} = 0, \quad \tilde{\Delta} = \frac{\partial^2}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2}{\partial \tilde{y}^2}, \quad (45)$$

$$\tilde{\Delta}(\theta + c) - 2\omega\tilde{\psi}_{\tilde{x}} = 0, \quad \psi|_{\partial\tilde{D}} = (\theta + c)|_{\partial\tilde{D}} = 0. \quad (46)$$

Введением комплексной переменной $W = \tilde{\psi} + i(\theta + c)$ из (45), (46) выводится уравнение относительно комплекснозначной функции W :

$$\tilde{\Delta}W - 2i\omega W_x = 0. \quad (47)$$

При помощи подстановки $W(x, y) = \varphi(x, y) \exp(i\omega x)$ из (47) следует спектральная задача:

$$\Delta\varphi = -\omega^2\varphi, \quad \varphi|_{\partial\tilde{D}} = 0. \quad (48)$$

Собственные функции и собственные числа задачи (48) даются формулами

$$\varphi_{kj} = \sin\left(\frac{k\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{j\pi y}{b}\right), \quad \omega_{kj}^2 = \pi^2 \left(\frac{k^2}{a^2} + \frac{j^2}{b^2}\right). \quad (49)$$

Возникновению неустойчивости механического равновесия отвечает собственное значение ω_{11} . Следовательно, для критических чисел Рэлея λ^T и λ^C , отвечающих монотонной неустойчивости (переход спектральных величин в правую полуплоскость по вещественной оси), из (49) с учетом (35) получается соотношение (42).

Следствие 1. Для теплопроводной жидкости при ($C = 0$) критические значения числа Рэлея следуют из (41), (49) и даются явными выражениями

$$\lambda_{kj}^T = 4\pi^2\mu_{22} \left(\frac{d_{11}^T}{a^2} k^2 + \frac{d_{22}^T}{b^2} j^2 \right), \quad k, j = 1, 2, \dots \quad (50)$$

Следствие 2. В случае бинарной жидкости при отсутствии температурного градиента для критических значений числа Рэлея λ^C получаются явные выражения

$$\lambda_{kj}^C = 4\pi^2\mu_{22} \left(\frac{d_{11}^C}{a^2} k^2 + \frac{d_{22}^C}{b^2} j^2 \right), \quad k, j = 1, 2, \dots \quad (51)$$

Из (50) при $k = j = 1$ следует критическое значение λ^T , совпадающее с получаемым из (42) при $\lambda_{crit}^C = 0$ и $d_{11}^{CT} = 0$. Аналогично при $\lambda_{crit}^T = 0$ из (42) получается критическое значение λ^C , которое следует из (51) при $k = j = 1$.

Метод конечных разностей, сохраняющий косимметричность

Явные формулы для критических чисел Рэлея, отвечающих монотонной неустойчивости, получены только при существовании косимметрии задачи. Для вычисления спектра устойчивости и определения критических чисел Рэлея в общем случае необходимо решать задачу численно. Аппроксимация (31)–(34) производится методом сеток с использованием формул второго

порядка точности аналогично [Абделхафиз, Цибулин, 2017а; Абделхафиз, Цибулин, 2017b]. Вводятся равномерные сетки $x_i = ih$, $i = 0, 1, \dots, n+1$, $h = a/(n+1)$, $y_j = jg$, $j = 0, 1, \dots, m+1$, $g = b/(m+1)$ и в узлах (x_i, y_j) определяются функции тока ψ_i^j , температуры θ_i^j и концентрации примеси c_i^j .

Для аппроксимации уравнений (8)–(12), (14), (16) вводятся разностные операторы на двухточечном шаблоне:

$$\delta_x f = \frac{1}{h}(f_{i+1}^{j+1/2} - f_i^{j+1/2}), \quad \delta_y f = \frac{1}{g}(f_{i+1/2}^{j+1} - f_{i+1/2}^j), \quad (52)$$

$$\delta_0^x f = \frac{1}{2}(f_{i+1}^{j+1/2} + f_i^{j+1/2}), \quad \delta_0^y f = \frac{1}{2}(f_{i+1/2}^{j+1} + f_{i+1/2}^j); \quad (53)$$

по ним определяются разностные отношения на трехточечных шаблонах:

$$(D_x f)_i^j = (\delta_x \delta_0^x f)_i^j, \quad (D_y f)_i^j = (\delta_y \delta_0^y f)_i^j \quad (54)$$

и операторы на четырехточечном шаблоне:

$$d_0 f = \frac{1}{4}(f_{i+1}^{j+1} + f_i^{j+1} + f_i^j + f_{i+1}^j), \quad (55)$$

$$d_x f = \frac{1}{2h}(f_{i+1}^{j+1} - f_i^{j+1} - f_i^j + f_{i+1}^j), \quad (56)$$

$$d_y f = \frac{1}{2g}(f_{i+1}^{j+1} + f_i^{j+1} - f_i^j - f_{i+1}^j). \quad (57)$$

В результате дискретизации по пространственным координатам получается система дифференциально-алгебраических уравнений:

$$0 = [M_0^h \psi]_i^j + [D_x \theta]_i^j + [D_x c]_i^j, \quad (58)$$

$$\dot{\theta}_i^j = [L_h^T \theta - \lambda^T D_x \psi - \alpha J_D^T - (1 - \alpha) J_d^T]_i^j, \quad (59)$$

$$\dot{c}_i^j = [L_h^C c - \lambda^C D_x \psi + L^{CT} \theta - \alpha J_D^C - (1 - \alpha) J_d^C]_i^j; \quad (60)$$

здесь аналогично [Абделхафиз, Цибулин, 2017b] применяются разностные операторы, обеспечивающие сохранение свойства косимметричности задачи:

$$M_0^h = \mu_{11} \delta_y \delta_y - (\mu_{12} + \mu_{21}) D_x D_y + \mu_{22} \delta_x \delta_x, \quad (61)$$

$$L_h^T = d_{11} \delta_x \delta_x + (d_{12} + d_{21}) D_x D_y + d_{22} \delta_y \delta_y, \quad (62)$$

$$L_h^C = d_{11}^C \delta_x \delta_x + (d_{12}^C + d_{21}^C) D_x D_y + d_{22}^C \delta_y \delta_y, \quad (63)$$

$$L_h^{CT} = d_{11}^{CT} \delta_x \delta_x + (d_{12}^{CT} + d_{21}^{CT}) D_x D_y + d_{22}^{CT} \delta_y \delta_y. \quad (64)$$

В (59), (60) используются следующие аппроксимации якобиана:

$$J_D = D_x(\theta D_y \psi) - D_y(\theta D_x \psi), \quad (65)$$

$$J_d = d_x(d_0 \theta d_y \psi) - d_y(d_0 \theta d_x \psi). \quad (66)$$

Разностные аналоги краевых условий имеют вид

$$\begin{aligned} \psi_0^j = \psi_{n+1}^j = 0, \quad \theta_0^j = \theta_{n+1}^j = 0, \quad c_0^j = c_{n+1}^j = 0, \quad j = 0, \dots, m, \\ \psi_i^0 = \psi_i^{m+1} = 0, \quad \theta_i^0 = \theta_i^{m+1} = 0, \quad c_i^0 = c_i^{m+1} = 0, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (67)$$

Аналогично [Абделхафиз, Цибулин, 2017b] показывается, что данная дискретная задача сохраняет свойство косимметрии исходной системы. Начальные условия задаются для функции тока, температуры и концентрации:

$$\begin{aligned}\psi_i^j(0) &= \psi_0(x_i, y_j), & \theta_i^j(0) &= \theta_0(x_i, y_j), \\ c_i^j(0) &= c_0(x_i, y_j), & i &= 1, \dots, n, \quad j = 0, \dots, m.\end{aligned}\quad (68)$$

Неизвестными являются значения функции тока, температуры и концентрации примеси во внутренних узлах. Вводятся следующие векторы:

$$\Psi = (\psi_1^1, \psi_2^1, \dots, \psi_n^m), \quad \Theta = (\theta_1^1, \theta_2^1, \dots, \theta_n^m), \quad \mathbf{C} = (c_1^1, c_2^1, \dots, c_n^m).$$

Системе (32)–(34) соответствует следующая сеточная задача:

$$0 = A_1\Psi + B\Theta + BC, \quad (69)$$

$$\sigma\Theta = A_2\Theta - \lambda^T B\Psi, \quad (70)$$

$$\sigma\mathbf{C} = A_3\mathbf{C} - \lambda^C B\Psi + A_4\Theta, \quad (71)$$

где матрица A_0 аппроксимирует лапласиан, A_1 отвечает дискретному варианту оператора M_0 , матрицы A_2, A_3, A_4 являются аппроксимациями операторов L^T, L^C, L^{CT} соответственно, матрица B соответствует разностному аналогу производной по x .

Для определения критических чисел Рэля λ^T, λ^C используется система

$$0 = A_1\Psi + B\Theta + BC, \quad (72)$$

$$0 = A_2\Theta - \lambda^T B\Psi, \quad (73)$$

$$0 = A_3\mathbf{C} - \lambda^C B\Psi + A_4\Theta. \quad (74)$$

После исключения Θ и \mathbf{C} получается задача для Ψ :

$$[A_1 + \lambda^T A_5 + \lambda^C A_6]\Psi = 0, \quad (75)$$

$$A_5 = B[I - A_3^{-1}A_4]A_2^{-1}B, \quad A_6 = BA_3^{-1}B.$$

Для вычисления критического числа λ^T при фиксированном λ^C можно использовать спектральную задачу

$$A_7\Psi = -\lambda^T A_5\Psi, \quad A_7 = A_1 + \lambda^C A_6. \quad (76)$$

В случае жидкости с градиентом концентрации примеси для вычисления критического числа λ^C при фиксированном λ^T получается спектральная задача

$$[A_1 + \lambda^T A_5]\Psi = -\lambda^C A_6\Psi. \quad (77)$$

Можно также получить формулы для определения критических чисел Рэля, выразив векторы Ψ, \mathbf{C} через вектор Θ . Для вычисления критического числа λ^T при фиксированном λ^C можно использовать спектральную задачу

$$\begin{aligned}A_2\Theta &= -\lambda^T A_9\Theta, & A_8 &= BA_1^{-1}B, \\ A_9 &= A_8[I - (A_3 + \lambda^C A_8)^{-1}(A_4 + \lambda^C A_8)].\end{aligned}\quad (78)$$

Для определения спектра устойчивости механического равновесия находится решение системы (69)–(71).

Численные результаты

Вначале представлены результаты вычисления критических чисел Рэлея λ^T , отвечающих возникновению гравитационной конвекции теплопроводной жидкости. В работе [Абделхафиз, Цибулин, 2017а] для плоской задачи конвекции ортотропной жидкости в пористой среде и для параметров, удовлетворяющих условиям косимметричности задачи, были получены формулы, которые следуют из (42) при $\lambda^C = 0$ и $d_{11}^{CT} = 0$.

В таблице 1 приведены результаты расчета λ_{crit}^T для прямоугольника $\mathcal{D} = [0, a] \times [0, b]$, где $a = 1.5$, $b = 1$, на сетке 30×20 и дано сравнение с точными значениями, вычисленными по формуле (50) при $k = j = 1$. Рассматривался случай $\mu_{12} = \mu_{21} = d_{12}^T = d_{21}^T = d_{11}^{CT} = d_{22}^{CT} = d_{12}^{CT} = d_{21}^{CT} = 0$. Первая строка таблицы отвечает изотропной задаче, вторая — случаю косимметрии [Абделхафиз, Цибулин, 2017а]. Следующие три строки показывают, что условия косимметрии (23) существенно расширяют множество значений коэффициентов, для которых можно применять формулы вычисления критических чисел Рэлея, соответствующих монотонной потере устойчивости механического равновесия. Вычисления показали, что для обеспечения точности шаг по координате x следует брать меньше шага по y ; например, грубая дискретизация на сетке 24×12 (последняя строка таблицы 1) дает погрешность до 2%. Дискретизация на сетке 30×20 дает точность порядка 1%.

Таблица 1. Критические числа Рэлея λ_{crit}^T при отсутствии примеси ($C = 0$, $\lambda^C = 0$)

d_{11}^T	d_{22}^T	μ_{11}	μ_{22}	Расчет	(50)
1	1	1	1	57.7087	57.0244
1	1.5	1.5	1	77.9018	76.7636
1	1.1	1.21	1.1	67.9119	67.0694
1	1.1	1.43	1.3	80.2596	79.2639
1.3	1	0.9	1.17	73.6582	72.8772
1.3	1	0.9	1.17	73.9874	72.8772

Далее предполагается, что $d_{ii}^{CT} = \gamma d_{ii}^C$, $i = 1, 2$ ($\gamma \neq 1$), тогда условия (41) запишутся в виде $d_{22}^T/d_{11}^T = \mu_{11}/\mu_{22} = d_{22}^C/d_{11}^C$. При наличии примеси ($\lambda^C \neq 0$) формулы (50) позволяют проанализировать влияние коэффициентов диффузии d_{ij}^C и коэффициентов Сорэ d_{ij}^{CT} на величину критического числа Рэлея λ^T , отвечающего монотонной неустойчивости механического равновесия. Для значений параметров, удовлетворяющих условиям косимметрии, было проведено сравнение точного значения λ_{crit}^T при заданном λ^C и результатов расчета для различных сеток. Например, при $\lambda^C = -5$, $\mu_{11} = 1.43$, $\mu_{22} = 1.1$, $d_{11}^T = d_{11}^C = 1.0$, $d_{22}^T = d_{22}^C = 1.3$, $d_{11}^{CT} = 0.3$, $d_{22}^{CT} = 0.39$ формула (50) дает $\lambda_{crit}^T = 115.36$, а вычисления на сетках 24×12 и 36×18 дали следующие значения: 117.48 и 116.32.

В таблице 2 приведены результаты вычислений λ_{crit}^T для различных комбинаций физических параметров. Видно, что снижение d_{ii}^C приводит к уменьшению λ_{crit}^T , а рост параметров Сорэ дает увеличение числа Рэлея λ_{crit}^T . С ростом положительного градиента концентрации примеси ($\lambda^C > 0$) критические числа Рэлея снижаются. При отрицательных λ^C возможна колебательная потеря устойчивости механического равновесия.

На рис. 1 приведены нейтральные кривые устойчивости $\lambda_{crit}^T = F(\lambda^C)$, полученные для различных наборов диффузионных параметров d_{ij}^C , d_{ij}^{CT} . Коэффициенты проницаемости μ_{ij} и теплопроводности d_{ij}^T были фиксированы: $\mu_{11} = 1.3$, $\mu_{22} = 1$, $d_{11}^T = 1$, $d_{22}^T = 1.3$. Сплошной линией даны участки монотонной потери устойчивости и пунктиром — колебательной. Видно, что с уменьшением параметров d_{ij}^C потеря устойчивости механического равновесия в результате колебательной неустойчивостей наступает при меньших значениях λ^C .

Таблица 2. Критические числа Рэля при различных $d_{11}^C, d_{22}^C, d_{11}^{CT}, d_{22}^{CT}$; $\mu_{11} = 1.43, \mu_{22} = 1.1, d_{11}^T = 1.0, d_{22}^T = 1.3, \lambda^C = 2, a = 1.5, b = 1$

d_{11}^C	d_{22}^C	d_{11}^{CT}	d_{22}^{CT}	λ_{crit}^T
1.0	1.3	0.1	0.13	83.7291
1.0	1.3	0.2	0.26	94.1952
1.0	1.3	0.3	0.39	107.6517
1.0	1.3	0.4	0.52	125.5936
0.5	0.65	0.05	0.065	81.5069
0.5	0.65	0.1	0.13	91.6952
0.5	0.65	0.15	0.195	104.7945
0.5	0.65	0.2	0.26	122.2603

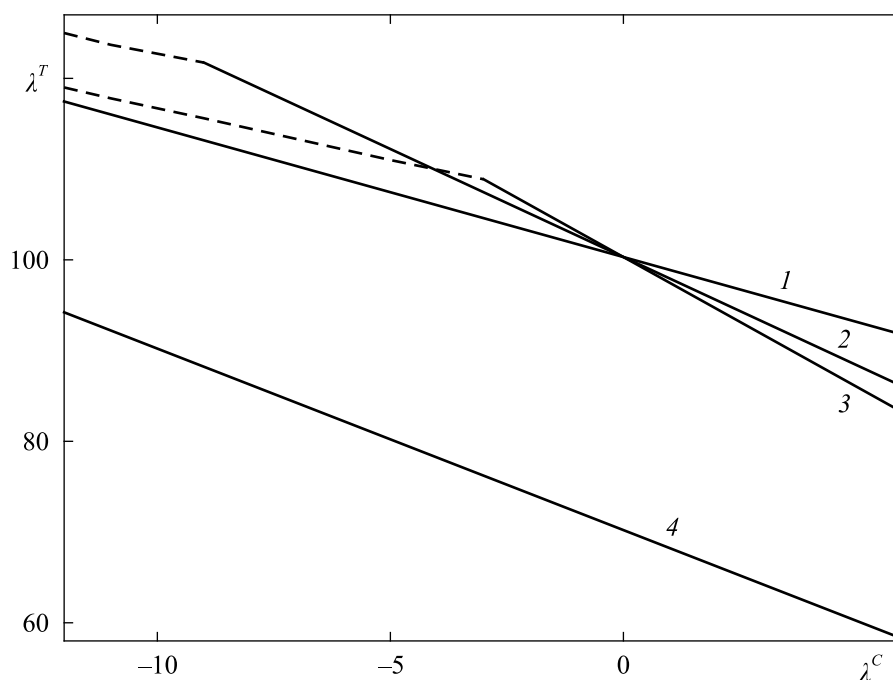


Рис. 1. Нейтральные кривые монотонной (сплошная линия) и колебательной (пунктир) неустойчивости при $\mu_{11} = 1.3, \mu_{22} = 1, d_{11}^T = 1, d_{22}^T = 1.3$: 1 – $d_{11}^C = 1.0, d_{22}^C = 1.3, d_{11}^{CT} = 0.3, d_{22}^{CT} = 0.39$; 2 – $d_{11}^C = 0.6, d_{22}^C = 0.78, d_{11}^{CT} = 0.18, d_{22}^{CT} = 0.234$; 3 – $d_{11}^C = 0.5, d_{22}^C = 0.65, d_{11}^{CT} = 0.15, d_{22}^{CT} = 0.195$; 4 – $d_{11}^C = 0.5, d_{22}^C = 0.65, d_{11}^{CT} = 0.0, d_{22}^{CT} = 0.0$

На рис. 2 представлена нейтральная кривая, состоящая из двух участков: колебательной (пунктир) и монотонной (сплошная) неустойчивости, рассчитанная для $\mu_{11} = 1.3, \mu_{22} = 1, d_{11}^T = 1, d_{22}^T = 1.3, d_{11}^C = 0.5, d_{22}^C = 0.65, d_{11}^{CT} = 0.1, d_{22}^{CT} = 0.13$. Буквами *A, B, C, D* обозначены комбинации параметров, для которых на рис. 3 приведены фрагменты распределений спектральных величин для задачи устойчивости механического равновесия. Случай *D* отвечает устойчивости, при этом наибольшие спектральные значения расположены на вещественной оси. При увеличении λ^T происходит переход двух наибольших значений в правую полуплоскость, при этом ответвляется однопараметрическое семейство стационарных конвективных режимов в результате монотонной неустойчивости (точка *B* на рис. 2). Отметим, что выбранные параметры отвечают условиям косимметрии. Поэтому в случае монотонной неустойчивости при критическом значении λ^T две спектральные величины равны нулю. Случай *C* отвечает паре сопряженных спектральных

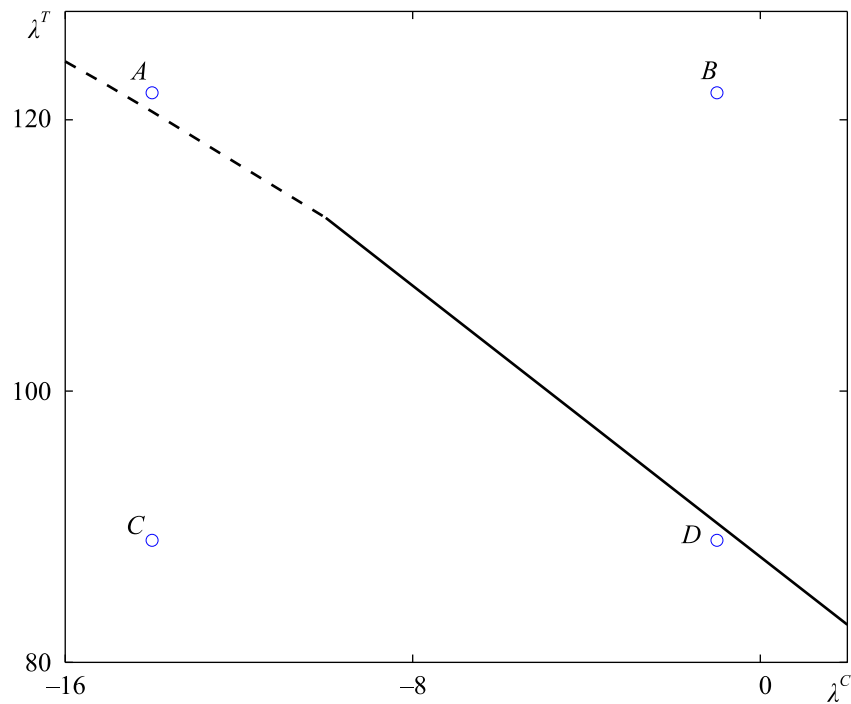


Рис. 2. Нейтральная кривая, границы монотонной (сплошная линия) и колебательной (пунктир) неустойчивостей; $d_{11}^C = 0.5$, $d_{22}^C = 0.65$, $d_{11}^{CT} = 0.1$, $d_{22}^{CT} = 0.13$, $\mu_{11} = 1.3$, $\mu_{22} = 1$, $d_{11}^T = 1$, $d_{22}^T = 1.3$

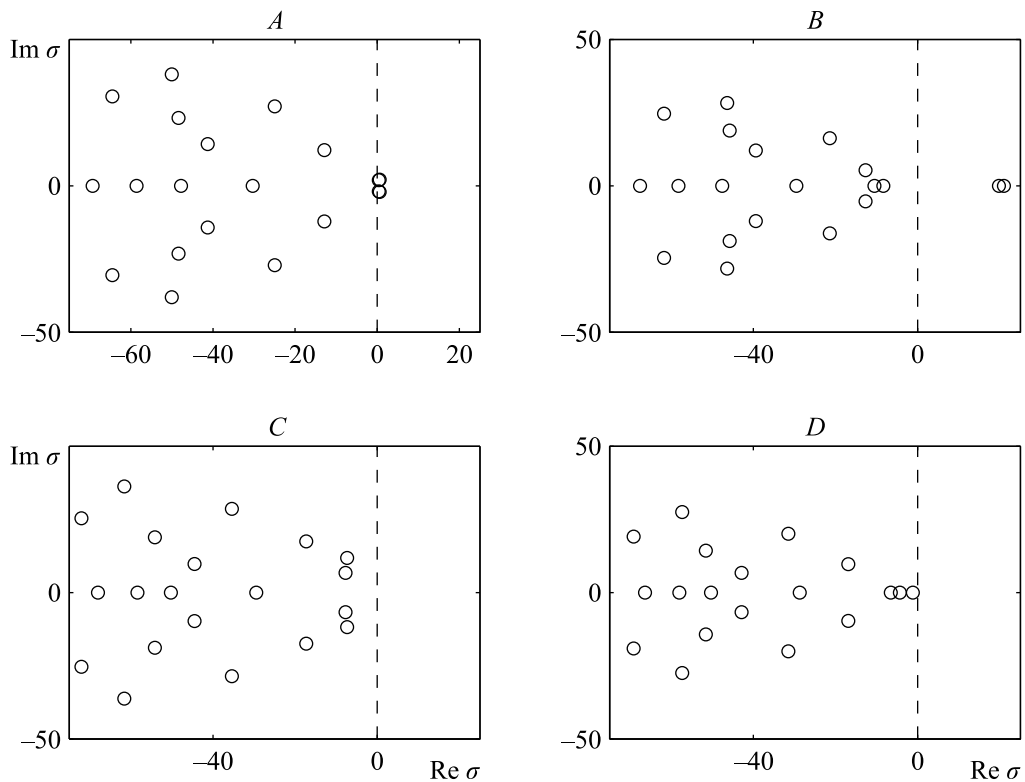


Рис. 3. Распределение спектра устойчивости механического равновесия: $A - \lambda^T = 122$, $\lambda^C = -14$; $B - \lambda^T = 122$, $\lambda^C = -1$; $C - \lambda^T = 89$, $\lambda^C = -14$; $D - \lambda^T = 89$, $\lambda^C = -1$, $d_{11}^C = 0.5$, $d_{22}^C = 0.65$, $d_{11}^{CT} = 0.1$, $d_{22}^{CT} = 0.13$; $\mu_{11} = 1.3$, $\mu_{22} = 1$, $d_{11}^T = 1$, $d_{22}^T = 1.3$

Таблица 3. Критические значения температурного числа Рэлея при различных μ_{11} ; $d_{11}^C = 0.5$, $d_{22}^C = 0.65$, $d_{11}^{CT} = 0.1$, $d_{22}^{CT} = 0.13$, $\mu_{22} = 1.0$, $d_{11}^T = 1.0$, $d_{22}^T = 1.3$, $\lambda^C = 5$, $a = 1.5$, $b = 1$

μ_{11}	Расчет	(42)
1.2	72.6609	–
1.3	75.2704	73.5849
1.4	77.7936	–

Таблица 4. Критические значения температурного числа Рэлея при различных λ^C и d_{22}^{CT} ; $\mu_{11} = 1.3$, $d_{11}^C = 0.5$, $d_{22}^C = 0.65$, $d_{11}^{CT} = 0.1$, $\mu_{22} = 1.0$, $d_{11}^T = 1.0$, $d_{22}^T = 1.3$, $a = 1.5$, $b = 1$

λ^C	d_{22}^{CT}	Расчет	(42)
5	0.1	73.6482	–
	0.13	75.2704	73.5849
	0.16	76.9339	–
–10	0.1	110.3366	–
	0.13	112.7704	111.0849
	0.16	115.2610	–

величин, наиболее приближенных к мнимой оси. При увеличении λ^T происходит переход комплексной пары в правую полуплоскость и возникает автоколебательный конвективный режим (точка А на рис. 2).

Результаты вычислений критических чисел при нарушении условий косимметрии и их сопоставление со значениями параметров, удовлетворяющих условиям (25), (26), представлены в таблицах 3 и 4. Расчеты проводились при зафиксированных значениях параметров $\mu_{22} = 1$, $d_{11}^T = 1$, $d_{22}^T = 1.3$, $d_{11}^C = 0.5$, $d_{22}^C = 0.65$, $d_{11}^{CT} = 0.1$ на сетке 24×12 .

В таблице 3 даны критические значения температурного числа Рэлея λ_{crit}^T при различных μ_{11} и $\lambda^C = 5$, $d_{11}^{CT} = 0.13$. Видно, что даже при заметных отклонениях от «косимметричного» значения $\mu_{11} = 1.3$ формула (42) дает неплохие оценки критических чисел.

В таблице 4 представлены результаты вычислений λ_{crit}^T при изменении λ^C и d_{22}^{CT} для $\mu_{11} = 1.3$. В этом случае нарушается условие косимметрии (26). Для $\lambda^C = 5$ механическое равновесие теряет устойчивость в результате монотонной неустойчивости, а для $\lambda^C = -10$ — вследствие колебательной неустойчивости. Полученные значения достаточно близки к вычислениям по формуле (42), дающей оценку критического числа λ^T в случае монотонной неустойчивости.

Заключение

Анализ неустойчивости механического равновесия теплопроводной многокомпонентной жидкости, насыщающей пористую среду, в случае анизотропных свойств среды обычно требует проведения большого числа вычислительных экспериментов. В данной работе для бинарной жидкости в пористом прямоугольнике показано, что задача при определенных ограничениях относится к классу косимметричных систем [Юдович, 1991], для которых характерно ответвление от механического равновесия непрерывного семейства стационарных режимов. Косимметричность задачи получается при дополнительных соотношениях на параметры системы и нулевых условиях для девиации концентрации примеси. В этом случае удалось вывести явные формулы для критических значений температурного и концентрационного чисел Рэлея, при которых наступает монотонная неустойчивость механического равновесия и возникает конвекция. Для удлиненных областей с нулевыми потоками концентраций на боковых границах данный подход может быть полезен для оценки критических значений чисел Рэлея в духе принципа Сен-Венана.

С помощью развитой численной схемы, сохраняющей свойства рассматриваемой начально-краевой задачи, найдены примеры колебательной неустойчивости механического равновесия. В вычислительном эксперименте установлено, что приведенные формулы для пороговых значений начала конвекции можно использовать для оценки критических значений чисел Рэлея и при нарушении условий косимметричности.

Авторы благодарны рецензентам за ценные предложения, улучшившие изложение результатов.

Список литературы (References)

- Абделхафиз М. А., Цибулин В. Г.* Влияние анизотропии на конвекцию теплопроводной жидкости в пористой среде и косимметрия задачи Дарси // Изв. РАН. МЖГ. — 2017а. — № 1. — С. 53–61.
Abdelhafez M. A., Tsybulin V. G. Anisotropy effect on the convection of a heat-conducting fluid in a porous medium and cosymmetry of the darcy problem // Fluid Dynamics. — 2017. — Vol. 52, No. 1. — P. 49–57.
- Абделхафиз М. А., Цибулин В. Г.* Численное моделирование конвективных движений в анизотропной пористой среде и сохранение косимметрии // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 2017б. — Т. 57, № 10. — С. 1734–1747.
Abdelhafez M. A., Tsybulin V. G. Numerical simulation of convective motion in an anisotropic porous medium and cosymmetry conservation // Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 2017. — Vol. 57, No. 10. — P. 1706–1719.
- Андреев В. К., Гапоненко Ю. А., Гончарова О. Н., Пухначев В. В.* Современные математические модели конвекции. — М.: Физматлит, 2008.
Andreev V. K., Gaponenko Yu. A., Goncharova O. N., Pukhnachev V. V. Sovremennyye matematicheskiye modeli konveksii [Modern Mathematical Models of Convection]. — Moscow: Fizmatlit, 2008 (in Russian).
- Будянский А. В., Цибулин В. Г.* Влияние направленной миграции на формирование пространственных популяционных структур // Биофизика. — 2015. — Т. 60, вып. 4. — С. 758–768.
Budyanskiy A. V., Tsybulin V. G. The Effect of Directed Migration on the Formation of Spatial Population Structures // Biophysics. — 2015. — Vol. 60, No. 4. — P. 622–631.
- де Гроот С., Мазур П.* Неравновесная термодинамика. — М.: Мир, 1964.
de Groot S., Mazur P. Neravnovesnaya termodinamika [Nonequilibrium thermodynamics]. — Moscow: Mir, 1964 (in Russian).
- Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М.* Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. — М.: Наука, 1972.
Gershuni G. Z., Zhukhovitskiy E. M. Konvektivnaya ustoychivost' neszhimayemoy zhidkosti [Convective stability of an incompressible fluid]. — Moscow: Nauka, 1972 (in Russian).
- Глухов А. Ф., Любимов Д. В., Путин Г. Ф.* Конвективные движения в пористой среде вблизи порога неустойчивости равновесия // Докл. АН СССР. — 1978. — Т. 238, № 3. — С. 549–551.
Glukhov A. F., Lyubimov D. V., Putin G. F. Convective motions in a porous medium near the instability threshold of equilibrium // Dokl. AN SSSR. — 1978. — Vol. 238, No. 3. — P. 549–551.
- Глухов А. Ф., Путин Г. Ф.* Экспериментальное исследование конвективных структур в насыщенной жидкостью пористой среде вблизи порога неустойчивости механического равновесия // Гидродинамика. — 1999. — Вып. 12. — С. 104–120.
Glukhov A. F., Putin G. F. Experimental study of convective structures in a liquid-saturated porous medium near the threshold of instability of mechanical equilibrium // Hydrodynamics. — 1999. — No. 12. — P. 104–120.
- Говорухин В. Н.* Анализ семейств вторичных стационарных режимов в задаче плоской фильтрационной конвекции в прямоугольном контейнере // Изв. РАН, МЖГ. — 1999. — № 5. — С. 53–62.
Govorukhin V. N. Analysis of the families of secondary stationary regimes in the problem of plane filtration convection in a rectangular container // Fluid Dynamics. — 1999. — Vol. 34, No. 5. — P. 342.
- Епифанов А. В., Цибулин В. Г.* О динамике косимметричных систем хищников и жертв // Компьютерные исследования и моделирование. — 2017. — Т. 9, № 5. — С. 799–813.
Epifanov A. V., Tsybulin V. G. Regarding the dynamics of cosymmetric predator–prey systems // Computer research and modeling. — 2017. — Vol. 9, No. 5. — P. 799–813.

- Кантур О. Ю., Цибулин В. Г.* Численное исследование плоской задачи конвекции многокомпонентной жидкости в пористой среде // Изв. РАН. МЖГ. — 2004. — № 3. — С. 123–134.
Kantur O. Yu., Tsibulin V. G. Numerical investigation of the plane problem of convection of a multicomponent fluid in a porous edium // Fluid Dynamics. — 2004. — Vol. 39, No. 3. — P. 464-473.
- Любимов Д. В.* О конвективных движениях в пористой среде, подогреваемой снизу // ПМТФ. — 1975. — № 2. — С. 131–137.
Lyubimov D. V. Convective motions in a porous medium heated from below // J. Appl. Mech. Techn. Phys. — 1975. — Vol. 16. — P. 257–261.
- Нигматулин Р. И.* Динамика многофазных сред. — М.: Наука, 1987.
Nigmatulin R. I. Dinamika mnogofaznykh sred [Dynamics of multiphase media]. — Moscow: Nauka, 1987 (in Russian).
- Юдович В. И.* Косимметрия, вырождение решений операторных уравнений, возникновение фильтрационной конвекции // Мат. заметки. — 1991. — Vol. 49, № 5. — С. 142–148.
Yudovich V.I. Cosymmetry, degeneration of solutions of operator equations, and onset of a filtration convection // Mathematical Notes of the Academy of Sciences of the USSR. — 1991. — Vol. 49, No. 5. — P. 540–545.
- Bratsun D. A., Lyubimov D. V., Roux B.* Co-symmetry breakdown in problems of thermal convection in porous medium // Physica D: Nonlinear Phenomena. — 1995. — Vol. 82, No. 4. — P. 398–417.
- Karasözen B., Tsybulin V. G.* Finite-difference approximation and cosymmetry conservation in filtration convection problem // Physics Letters A. — 1999. — Vol. 262. — P. 321–329.
- Yacine L., Mojtabi A., Bennacer R., Khouzam A.* Soret-driven convection and separation of binary mixtures in a horizontal porous cavity submitted to cross heat fluxes // International Journal of Thermal Sciences. — 2016. — Vol. 104. — P. 29–38.
- Maryshev B., Lyubimova T., Lyubimov D.* Two-dimensional thermal convection in porous enclosure subjected to the horizontal seepage and gravity modulation // Physics of Fluids. — 2013. — Vol. 25, No. 8. — P. 084105.
- Nield D. A., Bejan A.* Convection in Porous Media. — 4th edn. — New York: Springer, 2013.
- Nield D. A., Kuznetsov A. V.* The onset of double-diffusive convection in a nanofluid layer // Int. J. Heat and Fluid Flow. — 2011. — Vol. 32. — P. 771–776.
- Rebhi R., Mamou M., Vasseur P.* Bistability and hysteresis induced by form drag in nonlinear subcritical and supercritical double-diffusive Lapwood convection in shallow porous enclosures // J. Fluid Mech. — 2017. — Vol. 812. — P. 463–500.
- Storesletten L.* Effects of anisotropy on convection in horizontal and inclined porous layers // Emerging Technologies and Techniques in Porous Med. — 2004. — P. 285–306.
- Tyvand A. P., Storesletten L.* Onset of convection in an anisotropic porous layer with vertical principal axes // Transp Porous Med. — 2015. — No. 108. — P. 581–593.
- Umavathi J. C., Sheremet M. A., Ojjela O., Reddy G. J.* The onset of double-diffusive convection in a nanofluid saturated porous layer: Cross-diffusion effects // Eur. J. Mechanics, B/Fluids. — 2017. — No. 65. — P. 70–87.
- Yudovich V.I.* Secondary cycle of equilibria in a system with cosymmetry, its creation by bifurcation and impossibility of symmetric treatment of it // Chaos. — 1995. — Vol. 5, No. 2. — P. 402–411.