

УДК: 519.6, 551.435.13

О решении уравнения Экснера для дна, имеющего сложную морфологию

И. И. Потапов^a, К. С. Снигур^b

ВЦ ДВО РАН,
Россия, 680000, г. Хабаровск, ул. Ким Ю Чена, д. 65

E-mail: ^a potapov2i@gmail.com, ^b snigur.ks@ccfebras.ru

*Получено 11.11.2018, после доработки — 25.02.2019.
Принято к публикации 08.04.2019.*

Для математического моделирования несвязного речного дна широко используется уравнение Экснера совместно с феноменологическими моделями транспорта наносов. В случае моделирования эволюции дна простой геометрической формы такой подход позволяет получить точное решение без каких-либо затруднений. Однако в случае моделирования неустойчивого дна сложной геометрической формы в ряде случаев возникает численная неустойчивость, которую сложно отделить от естественной физической неустойчивости.

В настоящей работе выполнен анализ причин возникновения численной неустойчивости при моделировании эволюции дна сложной геометрической формы с помощью уравнения Экснера и феноменологических моделей расхода наносов. Показано, что при численном решении уравнения Экснера, замкнутого феноменологической моделью транспорта наносов, могут реализовываться два вида неопределенности. Первая неопределенность возникает при условии транзита наносов над областью дна, где деформаций не происходит. Вторая неопределенность возникает в точках экстремума донного профиля, когда расход наносов меняется, а дно остается неизменным. Авторами выполнено замыкание уравнения Экснера с помощью аналитической модели транспорта наносов, которое позволило преобразовать уравнение Экснера к уравнению параболического типа. Анализ полученного уравнения показал, что его численное решение не приводит к возникновению вышеуказанных неопределенностей. Параболический вид преобразованного уравнения Экснера позволяет применить для его решения эффективную и устойчивую неявную центрально-разностную схему.

Выполнено решение модельной задачи об эволюции дна при периодическом распределении придонного касательного напряжения. Для численного решения задачи использовалась явная центрально-разностная схема с применением и без применения метода фильтрации и неявная центрально-разностная схема. Показано, что явная центрально-разностная схема теряет устойчивость в области экстремума донного профиля. Использование метода фильтрации привело к повышенной диссипативности решения. Решение с помощью неявной центрально-разностной схемы соответствует закону распределения придонного касательного напряжения и является устойчивым во всей расчетной области.

Ключевые слова: математическое моделирование, численная неустойчивость, уравнение Экснера, речное дно, транспорт наносов, аналитическая модель

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках научных проектов 18-35-00139 и 18-05-00530.

UDC: 519.6, 551.435.13

Solving of the Exner equation for morphologically complex bed

I. I. Potapov^a, K. S. Snigur^b

CC FEB RAS,
65 Kim U Chena st., Khabarovsk, 680000, Russia

E-mail: ^a potapov2i@gmail.com, ^b snigur.ks@ccfebras.ru

Received 11.11.2018, after completion – 25.02.2019.

Accepted for publication 08.04.2019.

The Exner equation in conjunction phenomenological sediment transport models is widely used for mathematical modeling non-cohesive river bed. This approach allows to obtain an accurate solution without any difficulty if one models evolution of simple shape bed. However if one models evolution of complex shape bed with unstable soil the numerical instability occurs in some cases. It is difficult to detach this numerical instability from the natural physical instability of bed.

This paper analyses the causes of numerical instability occurring while modeling evolution of complex shape bed by using the Exner equation and phenomenological sediment rate models. The paper shows that two kinds of indeterminateness may occur while solving numerically the Exner equation closed by phenomenological model of sediment transport. The first indeterminateness occurs in the bed area where sediment transport is transit and bed is not changed. The second indeterminateness occurs at the extreme point of bed profile when the sediment rate varies and the bed remains the same. Authors performed the closure of the Exner equation by the analytical sediment transport model, which allowed to transform the Exner equation to parabolic type equation. Analysis of the obtained equation showed that it's numerical solving does not lead to occurring of the indeterminateness mentioned above. Parabolic form of the transformed Exner equation allows to apply the effective and stable implicit central difference scheme for this equation solving.

The model problem of bed evolution in presence of periodic distribution of the bed shear stress is carried out. The authors used the explicit central difference scheme with and without filtration method application and implicit central difference scheme for numerical solution of the problem. It is shown that the explicit central difference scheme is unstable in the area of the bed profile extremum. Using the filtration method resulted to increased dissipation of the solution. The solution obtained by using the implicit central difference scheme corresponds to the distribution law of bed shear stress and is stable throughout the calculation area.

Keywords: mathematical modeling, numerical instability, Exner equation, river bed, sediment transport, analytical model

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2019, vol. 11, no. 3, pp. 449–461 (Russian).

The reported study was funded by RFBR according to the research projects Nos. 18-35-00139 and 18-05-00530.

Введение

При движении речного потока по несвязному дну в весьма широких диапазонах скоростного режима потока дно рек теряет устойчивость [Bagnold, 1946; Kennedy, 1963; Richards, Taylor, 1981; Venditti et al., 2005; Fortunato, Oliveira, 2007; Coleman, Nikora, 2008], что приводит к появлению донных волн. Появление донных волн связано с характером гидродинамического потока и гидравлической шероховатостью донной поверхности. При математическом моделировании эволюции речного дна используется уравнение Экснера [Exner, 1925; Exner, 1928]:

$$(1 - \varepsilon) \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

замыкаемое уравнением расхода наносов [Bagnold, 1946; Kennedy, 1963; Richards, Taylor, 1981; Venditti et al., 2005; Fortunato, Oliveira, 2007; Coleman, Nikora, 2008]:

$$q = \begin{cases} 0, & T \leq T_*, \\ q(T(\zeta, x, t), \zeta(x, t), x, t), & T > T_*, \end{cases} \quad (2)$$

где x — пространственная координата, t — временная координата, ζ — уровень донной поверхности, q — объемный расход частиц грунта, движущихся в активном придонном слое, ε — пористость донного материала, $T = T(x, t)$ — придонное касательное напряжение, T_* — минимальное напряжение, требуемое для начала движения донных частиц.

Численное решение уравнений (1)–(2) для дна, имеющего сложную геометрию, часто приводит к возникновению численной неустойчивости, которую трудно отделить от физической неустойчивости дна [Richards, Taylor, 1981; Sanne, 2003; Leftheriotis, Dimas, 2015]. Многие авторы [Long et al., 2008; Johnson, Zyserman, 2002; Warming, Beam, 1975; Быстров и др., 2005; Leonard, 1979; Kawamura et al., 1986; Lax, Wendroff, 1960; MacCormack, 1969; Niemann et al., 2011; Jacobsen, Fredsoe, 2011; Shu, Osher, 1988; Jensen et al., 1999; Chinag, Hsiao, 2011; Li et al., 2014] предлагали различные подходы для преодоления численной неустойчивости при решении уравнений (1)–(2). Однако использование феноменологических моделей [Bagnold, 1946; Kennedy, 1963; Richards, Taylor, 1981; Venditti et al., 2005; Fortunato, Oliveira, 2007; Coleman, Nikora, 2008] для транспорта наносов (2) при замыкании уравнения (1) приводит к невозможности определения типа решаемой системы дифференциальных уравнений (1)–(2), что не позволяет выбрать и применить для ее решения эффективные устойчивые численные схемы.

В данной работе авторы выполняют замыкание уравнения Экснера с помощью аналитической дифференциальной модели транспорта наносов, что позволяет:

- определить тип получаемой системы дифференциальных уравнений,
- выбрать эффективный устойчивый метод для решения задачи об эволюции речного дна,
- выявить причины возникновения трудностей при численном решении уравнений (1)–(2) с использованием феноменологических моделей расхода наносов.

Традиционные методы решения уравнения Экснера

Уравнение Экснера (1), дополняемое феноменологическим уравнением транспорта наносов (2), обычно решается как задача Коши [Long et al., 2008]. Феноменологический характер уравнения движения наносов (2) вынуждает исследователей при рассмотрении численной устойчивости системы (1)–(2) ограничиваться изучением только уравнения Экснера (1).

Традиционно для решения уравнения (1) используют следующую разностную аппроксимацию (первого порядка по времени и второго по пространству) [Sanne, 2003; Chinag, Hsiao, 2011]:

$$\frac{\zeta_i^{n+1} - \zeta_i^n}{\Delta t} + \frac{1}{(1 - \varepsilon)} \frac{q_{i+1}^n - q_{i-1}^n}{2\Delta x} = 0, \quad (3)$$

где ζ_i^n и q_i^n – сеточные значения уровня донной поверхности и объемного расхода в i -м пространственном узле по x и в n -м слое по времени t ; Δx и Δt – шаги сетки по пространству и по времени соответственно.

Устойчивость уравнения (3) можно контролировать только с помощью условий Эйлера [Самарский, 1987]. Как показывает практика, этого недостаточно для получения корректного решения, поэтому, для получения условия численной устойчивости при решении уравнения (1), его преобразуют к уравнению гиперболического типа [Sanne, 2003; Johnson, Zyserman, 2002]:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + U \frac{\partial \zeta}{\partial x} = 0, \quad (4)$$

где

$$U = \frac{1}{(1 - \varepsilon)} \frac{\partial q}{\partial \zeta}. \quad (5)$$

При численном решении уравнения (4) основным критерием численной устойчивости является условие Куранта – Фридрихса – Леви [Курант и др., 1941]:

$$Cu = \left| \frac{U \Delta t}{\Delta x} \right| = \left| \frac{1}{(1 - \varepsilon)} \frac{\partial q}{\partial \zeta} \frac{\Delta t}{\Delta x} \right| < 1, \quad (6)$$

где Cu – число Куранта.

Недостатком представления (4)–(5) является необходимость численного определения производной $\frac{\partial q}{\partial \zeta} \approx \frac{\Delta q}{\Delta \zeta}$ для нахождения скорости U . Более того, расчеты, выполненные в работах [Sanne, 2003; Long et al., 2008; Johnson, Zyserman, 2002], показывают недостаточность выполнения условия (6) для получения устойчивого счета по схеме (3).

В работе [Johnson, Zyserman, 2002] был предложен метод стабилизации схемы (3), заключающийся в добавлении к ней слагаемого с искусственной диффузией,

$$\frac{\zeta_i^{n+1} - \zeta_i^n}{\Delta t} + \frac{1}{(1 - \varepsilon)} \frac{q_{i+1}^n - q_{i-1}^n}{2\Delta x} = \frac{1}{(1 - \varepsilon)} \frac{U_i^2 \Delta t}{\Delta x} \frac{(\zeta_{i+1}^n - 2\zeta_i^n + \zeta_{i-1}^n)}{\Delta x^2}. \quad (7)$$

Недостатком использования схемы (7) является сложность точного численного определения скорости U по формуле (5) в каждом i -м узле сетки. Завышение значений U_i в расчете приводит к излишнему сглаживанию решения, а занижение U_i – к возникновению численной неустойчивости решения.

Другим способом стабилизации счета и подавления численной неустойчивости при решении уравнения (1) является использование противопоточных схем, например [Warming, Beam, 1975]

$$\frac{\zeta_i^{n+1} - \zeta_i^n}{\Delta t} + \frac{1}{2(1 - \varepsilon)\Delta x} \left[(1 - \alpha)(q_{i+1}^n - q_i^n) + (1 + \alpha)(q_i^n - q_{i-1}^n) \right] = 0, \quad (8)$$

где $\alpha = \text{sign}(U_i)$.

Схема (8) имеет первый порядок точности по пространству и времени и является сильно диссипативной. Существуют противопоточные схемы более высоких порядков точности [Быстров и др., 2005; Leonard, 1979; Kawamura et al., 1986], но они явно используют скорость U для определения ζ и поэтому приобретают недостатки, свойственные схеме (7).

Известны попытки уйти от явного использования U при решении уравнения (1) путем использования двухшаговых схем Лакса–Вендроффа [Lax, Wendroff, 1960]:

$$\zeta_{i+1/2}^* = 0.5(\zeta_i^n + \zeta_{i+1}^n) - 0.5 \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{1}{(1-\varepsilon)} (q_{i+1}^n - q_i^n), \quad (9)$$

$$\zeta_i^{n+1} = \zeta_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{1}{(1-\varepsilon)} (q_{i+1/2}^* - q_{i-1/2}^*) \quad (10)$$

или МакКормака [MacCormack, 1969]:

$$\tilde{\zeta}_i = \zeta_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{1}{(1-\varepsilon)} (q_i^n - q_{i-1}^n), \quad (11)$$

$$\zeta_i^{n+1} = \frac{\zeta_i^n + \tilde{\zeta}_i}{2} - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \frac{1}{(1-\varepsilon)} (\bar{q}_{i+1} - \bar{q}_i), \quad (12)$$

где \bar{q} и q^* — расходы наносов, рассчитанные при $\tilde{\zeta}$ и ζ^* соответственно.

Схемы МакКормака и Лакса–Вендроффа обладают условием консервативности и не сглаживают решение излишне, как противопоточная схема (8). Основным недостатком схем (9)–(10) и (11)–(12) является дополнительный пересчет задачи гидродинамики для определения расхода на вспомогательном слое q^* и \bar{q} соответственно. Данный пересчет значительно увеличивает время расчета всей задачи.

Следует отметить, что во всех представленных схемах — (3), (7), (8), (9)–(10), (11)–(12) — для контроля их сходимости необходимо соблюдать условие устойчивости (5).

Альтернативным способом стабилизации счета и подавления численных осцилляций при решении уравнения (1) является использование схем высокого порядка аппроксимации производной по времени, например схемы Адамса–Бэшфорда [Niemann et al., 2011; Jacobsen, Fredsoe, 2011; Leftheriotis, Dimas, 2015]:

$$(1-\varepsilon) \frac{\zeta_i^{n+1} - \zeta_i^n}{\Delta t} = \frac{1}{12} \frac{1}{1-n} \left(23 \frac{\partial q}{\partial x} \Big|_i^n - 16 \frac{\partial q}{\partial x} \Big|_i^{n-1} - 5 \frac{\partial q}{\partial x} \Big|_i^{n-2} \right), \quad (13)$$

где n — индекс временного слоя, i — индекс пространственного узла.

Как видно из формулы (13), для применения схемы Адамса–Бэшфорда необходимо знать расход наносов q на текущем и двух предыдущих временных слоях. В начальный момент времени такие данные не всегда известны; более того, как показывают расчеты [Sanne, 2003], соблюдение условия (6) не гарантирует стабильность счета.

Другим примером схем высокого порядка точности по времени, применяющихся для решения уравнения (1), являются TVD-схемы. Они являются монотонными и не порождают численной неустойчивости. Приведем в качестве примера схему TVD–Рунге–Кутты [Shu, Osher, 1988]

$$\zeta^{(1)} = \zeta^n - \frac{1}{(1-\varepsilon)} \frac{\partial q(\zeta^n)}{\partial x}, \quad (14)$$

$$\zeta^{(2)} = \frac{3}{4} \zeta^n + \frac{1}{4} \zeta^{(1)} - \frac{1}{(1-\varepsilon)} \frac{\partial q(\zeta^{(1)})}{\partial x}, \quad (15)$$

$$\zeta^{n+1} = \frac{1}{3} \zeta^n + \frac{2}{3} \zeta^{(2)} - \frac{1}{(1-\varepsilon)} \frac{\partial q(\zeta^{(2)})}{\partial x}. \quad (16)$$

Из уравнений (14)–(16) видно, что для определения решения ζ^{n+1} необходимы дополнительный двукратный пересчет задачи гидродинамики и определение $q^{(1)}$ и $q^{(2)}$, что, как и в схемах (9)–(12), потребует значительных временных затрат.

В работе [Sanne, 2003] выполнен сравнительный анализ различных методов решения уравнения (1), в том числе явной схемы Эйлера с центрально-разностной дискретизацией по пространству [Sanne, 2003], схемы типа «чехарда» [Long et al., 2008; Johnson, Zyserman, 2002], метода Адамса–Бэшфорда [Leftheriotis, Dimas, 2015; Niemann et al., 2011; Jacobsen, Fredsoe, 2011]. В результате сравнительного анализа показано, что различие в графиках эволюции дна в зависимости от способа решения уравнения (1) минимально, но численно наиболее устойчивой оказалась схема Адамса–Бэшфорда [Leftheriotis, Dimas, 2015]. Однако автор [Sanne, 2003] отмечает, что использования схемы Адамса–Бэшфорда не достаточно для подавления численной неустойчивости решения уравнения (1).

Альтернативным способом борьбы с численной неустойчивостью является фильтрация расчетного поля искомой функции ζ_i через определенное количество итераций по времени. Фильтрация может применяться к любой из рассмотренных выше схем.

Существует несколько видов фильтрации, в качестве примера приведем алгоритм фильтрации, предложенный в работах [Richards, Taylor, 1981; Li et al., 2014] и используемый в работах [Leftheriotis, Dimas, 2015; Niemann et al., 2011; Chinag, Hsiao, 2011]:

$$\begin{aligned}\zeta_i^* &= \frac{1}{2}\zeta_i^+ + \frac{1}{4}(\zeta_{i-1}^+ + \zeta_{i+1}^+), \\ \zeta_i &= \frac{3}{2}\zeta_i^+ + \frac{1}{4}(\zeta_{i-1}^* + \zeta_{i+1}^*),\end{aligned}$$

где ζ_i^+ — нефильтованное дно, ζ_i — фильтрованное дно.

Дженсен и др. [Jensen et al., 1999] предложили альтернативный двухэтапный подход к процедуре фильтрации, который используется в работах [Johnson, Zyserman, 2002; Jacobsen, Fredsoe, 2011]:

$$\zeta_i^* = \frac{1}{2}\zeta_i^+ + \frac{1}{4}(\zeta_{i-1}^+ + \zeta_{i+1}^+), \quad \Delta\zeta_i = \zeta_i^+ - \zeta_i^*, \quad (17)$$

$$\Delta\zeta_i^* = \frac{3}{2}\Delta\zeta_i - \frac{1}{4}(\Delta\zeta_{i-1} + \Delta\zeta_{i+1}), \quad \zeta_i = \zeta_i^* + \Delta\zeta_i^*. \quad (18)$$

Несмотря на то что метод фильтрации данных при решении морфологических задач получил в последнее время широкое распространение [Sanne, 2003; Niemann et al., 2011; Jacobsen, Fredsoe, 2011; Chinag, Hsiao, 2011], применение фильтрации данных в морфологических расчетах должно применяться с большой осторожностью вне зависимости от выбранного типа фильтра [Sanne, 2003]. Влияние фильтрации на формирование донного профиля можно рассматривать как излишний размыв или намыв дна, который повлияет на поле течения и может привести к ошибочному пути развития донной поверхности и поля течения соответственно. Следовательно, чрезвычайно трудно судить о полном, абсолютном влиянии фильтрации данных в морфологических расчетах на точность полученного решения.

Выполненный обзор и анализ методов решения уравнения (1) выявили, что при использовании схем первого порядка точности требуется расчет скорости U по формуле (5) для условия (6), что вызывает описанные выше проблемы. При использовании схем более высокого порядка точности необходимо дополнительно пересчитывать задачу гидродинамики несколько раз, что приводит к значительным временным затратам. Все вышеперечисленные сложности связаны с использованием авторами [Long et al., 2008; Johnson, Zyserman, 2002; Warming, Beam, 1975; Быстров и др., 2005; Leonard, 1979; Kawamura et al., 1986; Lax, Wendroff, 1960; MacCormack, 1969; Niemann et al., 2011; Jacobsen, Fredsoe, 2011; Shu, Osher, 1988; Jensen et al., 1999; Chinag, Hsiao, 2011; Li et al., 2014] феноменологических моделей транспорта наносов (2) при замыкании уравнения (1), что приводит к невозможности определения типа получаемого

дифференциального уравнения (1) и не позволяет авторам данных работ выбрать и применить к его решению эффективные устойчивые численные схемы.

В настоящей работе уравнение Экснера (1) замыкается с помощью аналитической модели транспорта наносов [Петров, 1991; Петров, Потапов, 2014], в которой расход q явно зависит от ζ , что позволяет определить тип решаемой системы дифференциальных уравнений (1)–(2). Знание о структуре уравнения расхода q позволяет определить тип системы уравнений (1)–(2) и выявить причины возникновения численной неустойчивости при ее решении.

Замыкание уравнения Экснера

Для замыкания уравнения Экснера (1) воспользуемся аналитической моделью транспорта наносов [Петров, 1991]:

$$q = \begin{cases} 0, & |T| \leq T_*, \\ A - B \frac{\partial \zeta}{\partial x}, & |T| > T_*; \end{cases} \quad (19)$$

$$A = q_0 T (\sqrt{|T|} - \sqrt{T_0}), \quad (20)$$

$$B = \frac{q_0 |T|}{\operatorname{tg} \varphi} \left(\sqrt{|T|} - \frac{1}{2} \sqrt{T_0} \right), \quad (21)$$

$$q_0 = \frac{4}{3} \frac{1}{\kappa \sqrt{\rho_w} (\rho_s - \rho_w) g \operatorname{tg} \varphi}, \quad (22)$$

$$T_* = T_0 \left(1 + \frac{1}{\operatorname{tg} \varphi} \frac{T}{|T|} \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right), \quad T_0 = \frac{3 \kappa^2 d (\rho_s - \rho_w) g \operatorname{tg} \varphi}{8 c_x}, \quad (23)$$

где ρ_s и ρ_w — плотности частиц и воды соответственно, φ — угол внутреннего трения донных частиц, g — ускорение свободного падения, κ — коэффициент Кармана, c_x — лобовое сопротивление частиц, d — диаметр частиц.

Выполнив подстановку уравнения расхода (19) в уравнение Экснера (1), получим параболическое уравнение, определяющее эволюцию донной поверхности для областей, где деформации дна присутствуют:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{B}{1 - \varepsilon} \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) + \frac{R}{1 - \varepsilon} = 0, \quad |T| > T_*, \quad (24)$$

где

$$R = \frac{\partial A}{\partial x} = q_0 \frac{\partial}{\partial x} [T (\sqrt{|T|} - \sqrt{T_0})]. \quad (25)$$

В областях, где деформации дна отсутствуют ($|T| \leq T_*$), уровень дна $\zeta = \operatorname{const}$.

Для параболического уравнения (24) известны различные условно-устойчивые явные и безусловно-устойчивые неявные разностные схемы [Самарский, 1987; Петров, Лобанов, 2006]. Согласно работам [Самарский, 1987; Марчук, Агошков, 1981] явные схемы для параболического уравнения (24) являются устойчивыми при выполнении ограничивающего условия на шаг по времени:

$$\Delta t \leq C_* \frac{2\Delta x^2}{B_{\max}}, \quad C_* > 0, \quad (26)$$

где C_* — константа, $B_{\max} = \max(B(x))$.

Запись уравнения (24) в недивергентной форме

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + U \frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{B}{1 - \varepsilon} \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \right) + \frac{R}{1 - \varepsilon} = 0, \quad |T| > T_*,$$

позволяет получить явное выражение, определяющее функцию U :

$$U = \frac{1}{1 - \varepsilon} \frac{\partial B}{\partial x} = - \frac{q_0}{(1 - \varepsilon) \operatorname{tg} \varphi} \frac{T}{|T|} \frac{3\sqrt{|T|} - \sqrt{T_0}}{2} \frac{\partial T}{\partial x}. \quad (27)$$

Из анализа уравнения скорости (27) видно, что для любых непрерывных функций $T(x, t)$ мы получаем непрерывное и ограниченное значение функции U . Тогда как при численном определении U по зависимости (5) могут реализоваться такие комбинации функций q и ζ , значение которых может приводить к возникновению неопределенностей $\frac{0}{0}$ или $\frac{1}{0}$. Первая неопределенность возникает на ровном дне, когда для расхода наносов выполняется условие транзита $\Delta q = 0$ и деформации дна отсутствуют $\Delta \zeta = 0$. Данная проблема легко решается численно путем введения регуляризирующего коэффициента $\lambda \ll 1$ в знаменатель выражения (5). Вторая неопределенность возникает в точках экстремума донного профиля, имеющего физическую неустойчивость, когда $\Delta \zeta = 0$ при $\Delta q \neq 0$. Данная неопределенность неустраима, и ее реализация может привести к большим ошибкам при вычислении U по формуле (5) и, следовательно, к ошибкам при вычислении условия устойчивости (6).

Решение модельной задачи об эволюции дна

Рассмотрим численное решение задачи об изменении во времени донной поверхности под действием постоянного во времени придонного касательного напряжения T , заданного функцией

$$T = A \cos(kx), \quad k = 2\pi, \quad A = 16T_0. \quad (28)$$

Данную задачу будем решать тремя вариантами.

В **первом** варианте формулировка задачи об изменении во времени донной поверхности содержит в себе уравнение Экснера (1) и уравнение для расхода наносов (19):

$$(1 - \varepsilon) \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0, \quad x = \overline{0..1}, \quad (29)$$

$$q = \begin{cases} 0, & |T| \leq T_*, \\ A - B \frac{\partial \zeta}{\partial x}, & |T| > T_*. \end{cases} \quad (30)$$

Уравнения (29)–(30) замыкаются начальными и граничными условиями

$$\zeta(x, 0) = 0, \quad \zeta(0, t) = 0, \quad \zeta(1, t) = 0. \quad (31)$$

Гранулометрические и физико-механические параметры донного материала были взяты из экспериментальной работы [Newton, 1951]: $\rho_s = 2650 \text{ кг/м}^3$, $\rho_w = 1000 \text{ кг/м}^3$, $g = 9.8 \text{ м/с}^2$, $d = 6.9 \cdot 10^{-4} \text{ м}$, $c_x = 0.45$, $\varphi = 32^\circ$, $\varepsilon = 0.375$, $\kappa = 0.4$.

Для решения задачи (29)–(31) воспользуемся центрально-разностной схемой

$$\zeta_i^{n+1} = \zeta_i^n - \frac{\Delta t}{(1 - \varepsilon)} \frac{q_{i+1/2}^n - q_{i-1/2}^n}{\Delta x}, \quad (32)$$

где

$$q_{i+1/2}^n = A_{i+1/2} - B_{i+1/2} \frac{\zeta_{i+1}^n - \zeta_i^n}{\Delta x},$$

$$A_{i+1/2} = q_0 T_{i+1/2} \left(\sqrt{|T_{i+1/2}|} - \sqrt{T_0} \right), \quad B_{i+1/2} = \frac{q_0 |T_{i+1/2}|}{\operatorname{tg} \varphi} \left(\sqrt{|T_{i+1/2}|} - \frac{1}{2} \sqrt{T_0} \right),$$

для устойчивого решения по данной схеме необходимо соблюдать условие (26), которое в данном случае приобретает вид

$$\Delta t \leq \frac{C_* \operatorname{tg} \varphi \Delta x^2}{q_0 \max |T|^{3/2}}, \quad C_* \approx 0.5. \quad (33)$$

Второй вариант решения задачи отличается от первого тем, что после получения решения по первой схеме на каждом шаге по времени выполняется фильтрация (17)–(18).

В **третьем** варианте решения задачи об изменении во времени донной поверхности воспользуемся параболической формулировкой задачи (24)–(25) с начальными граничными условиями (31), решаемой с помощью неявной центрально-разностной схемы с нелинейностью на нижнем слое [Марчук, Агошков, 1981; Патанкар, 1984]:

$$(1 - \varepsilon) \frac{\zeta_i^{n+1} - \zeta_i^n}{\Delta t} = \frac{1}{2\Delta x} \left[B_{i+1/2}^n \frac{\zeta_{i+1}^{n+1} - \zeta_i^{n+1}}{\Delta x} - B_{i-1/2}^n \frac{\zeta_i^{n+1} - \zeta_{i-1}^{n+1}}{\Delta x} \right] - R_i^{n+1}, \quad (34)$$

где $B_{i+1/2}^n$ вычисляется по формуле

$$B_{i+1/2}^n = \frac{2B(\zeta_i^n)B(\zeta_{i+1}^n)}{B(\zeta_i^n) + B(\zeta_{i+1}^n)},$$

$$R_i^{n+1} = q_0 \left[\frac{T_{i+1/2}^{n+1} \left(\sqrt{|T_{i+1/2}^{n+1}|} - \sqrt{T_0} \right) - T_{i-1/2}^{n+1} \left(\sqrt{|T_{i-1/2}^{n+1}|} - \sqrt{T_0} \right)}{\Delta x} \right].$$

Решение по неявной схеме обеспечивает получение устойчивого решения даже в случае несоблюдения условий (6) и (33).

Шаг сетки по пространству ($\Delta x = 0.007$ м) и времени ($\Delta t = 0.005$ с) выбирался таким образом, чтобы удовлетворялось условие устойчивости (6) и не удовлетворялось условие устойчивости (33). Это типичный случай, с которым сталкиваются авторы, применяющие феноменологические модели транспорта наносов для замыкания уравнения Экснера [Richards, Taylor, 1981; Fortunato, Oliveira, 2007].

Формы донной поверхности ζ , полученные из решения задачи по 1-му, 2-му и 3-му вариантам через 0.25 с после начала численного эксперимента, представлены на рис. 1 кривыми 1, 2 и 3 соответственно.

Как и следовало ожидать, решение задачи по первому варианту является численно неустойчивым и при увеличении расчетного времени решение разрушается (становится нефизичным). Решения, полученные по второму и третьему вариантам, близки и имеют незначительное рассогласование в области, показанной в увеличенном фрагменте. Для определения зависимости данного рассогласования от времени были выполнены численные расчеты задачи по второму и третьему вариантам для более длительных временных промежутков. На рис. 2 и 3 показаны решения через 1.5 и 1.8 с после начала численного эксперимента соответственно, кривой 2 показано решение по второму варианту, кривой 3 — по третьему варианту. Сравнение графиков на рис. 2 показывает, что использование второго варианта решения задачи приводит сначала к увеличению искусственной вязкости в областях, где изменений дна не происходит ($|T| \leq T_*$). Из рис. 3 видно, что на 1.8 с расчета решение по второму варианту становится численно неустойчивым и разрушается. Во всех рассмотренных численных экспериментах решения, полученные по третьему варианту, являются устойчивыми во всей расчетной области и соответствуют заданному закону распределения напряжений (28).

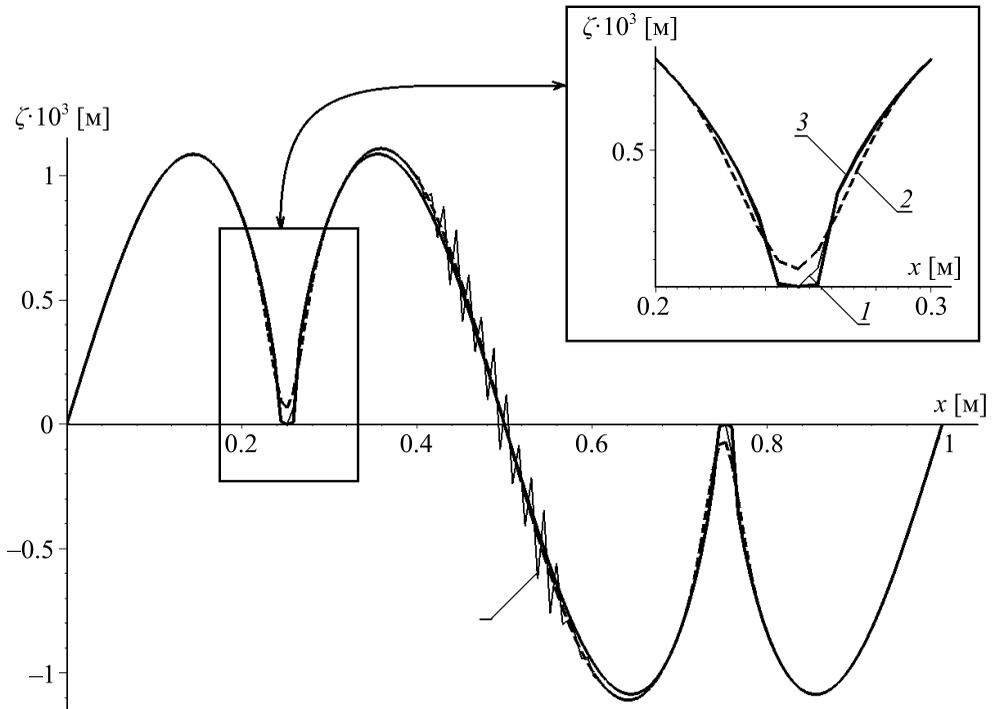


Рис. 1. Расчетные профили донной поверхности ζ через 0.25 с после начала численного эксперимента, полученные с применением различных схем решения уравнения Экснера (1 — явной центрально-разностной схемы, 2 — явной центрально-разностной схемы с фильтрацией, 3 — неявной центрально-разностной схемы)

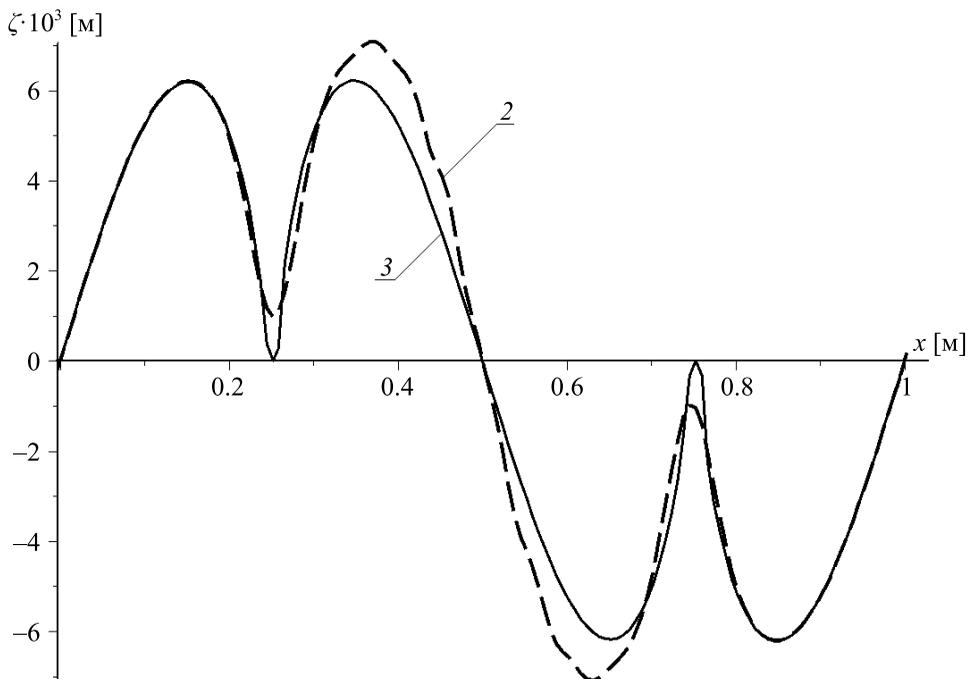


Рис. 2. Расчетные профили донной поверхности ζ через 1.5 с после начала численного эксперимента, полученные с применением различных схем решения уравнения Экснера (2 — явной центрально-разностной схемы с фильтрацией, 3 — неявной центрально-разностной схемы)

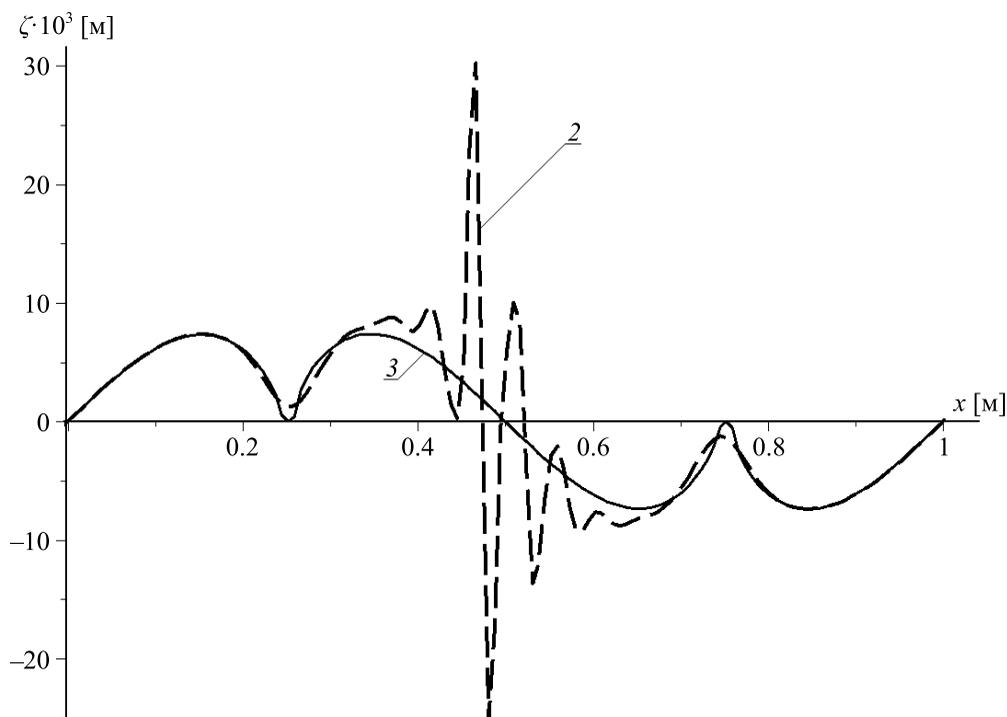


Рис. 3. Расчетные профили донной поверхности ζ через 1.8 с после начала численного эксперимента, полученные с применением различных схем решения уравнения Экснера (2 — явной центрально-разностной схемы с фильтрацией, 3 — неявной центрально-разностной схемы)

Заключение

В работе выполнены обзор и анализ методов решения уравнения Экснера. Показано, что использование феноменологических моделей транспорта наносов для замыкания уравнения Экснера и его численного решения может приводить к возникновению неопределенностей, а также не позволяет применить для решения уравнения Экснера эффективные и устойчивые численные схемы.

Использование аналитической модели транспорта наносов для замыкания уравнения Экснера приводит его к параболическому типу, что позволяет определить условие (26) для устойчивого решения задачи с использованием явной центрально-разностной схемы (32) или выбрать для его решения неявную безусловно устойчивую схему (34).

При решении модельной задачи об эволюции дна показано, что использование условия устойчивости (6) даже с применением фильтрации (17)–(18) не гарантирует устойчивого решения задачи по явной схеме (32), если не выполняется условие (26). Откуда следует вывод о том, что условие Куранта (6), традиционно применяемое при замыкании уравнения Экснера феноменологическими моделями транспорта наносов, не гарантирует устойчивости решения.

Для выполнения расчетов были использованы вычислительные ресурсы ЦКП «Центр данных ДВО РАН» [Сорокин и др., 2017].

Список литературы (References)

- Быстров Ю. А., Исаев С. А., Кудрявцев Н. А., Леонтьев А. И.* Численное моделирование вихревой интенсификации теплообмена в пакетах труб. — М.: Судостроение, 2005. — 389 с.
Bystrov Yu. A., Isaev S. A., Kudryavtsev N. A., Leont'yev A. I. Chislennoe modelirovanie vikhrevoi intensifikatsii teploobmena v paketakh trub [Numerical simulation of vortex intensification of heat transfer in stacks of pipes]. — Moscow: Sudostroenie, 2005. — 389 p. (in Russian).
- Курант Р., Фридрихс К., Леви Г.* О разностных уравнениях математической физики // Усп. матем. наук. — 1941. — № 8. — С. 125–160.
Curant R., Friedrichs K., Lewy G. O raznostnykh uravneniyakh matematicheskoy fiziki [On difference equations of mathematical physics] // Uspehi matematicheskikh nauk. — 1941. — No. 8. — P. 125–160 (in Russian).
- Марчук Г. И., Агошков В. И.* Введение в проекционно-сеточные методы. — М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1981. — 416 с.
Marchuk G. I., Agoshkov V. I. Vvedenie v proektionno-setochnye metody [Introduction to projection-grid methods]. — Moscow: Nauka. Glavnaia redaktsiya fiziko-matematicheskoy literatury, 1981. — 416 p. (in Russian).
- Патанкар С.* Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. — М.: Энергоатомиздат, 1984. — 152 с.
Patankar S. Numerical heat transfer and fluid flow. — USA: CRC Press, 1980. — 214 p.
- Петров П. Г.* Движение сыпучей среды в придонном слое жидкости // ПМТФ. — 1991. — Т. 32, № 5. — С. 72–75.
Petrov P. G. Motion of a bed load // J. Appl. Mech. Tech. Phys. — 1991. — Vol. 32, No. 5. — P. 717–721. — DOI: 10.1007/BF00851941
- Петров И. Б., Лобанов А. И.* Лекции по вычислительной математике: учебное пособие. — М.: Интернет-университет информационных технологий; БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006. — 523 с.
Petrov I. B., Lobanov A. I. Lektii po vychislitel'noy matematike: uchebnoe posobie [Lectures on Computational Mathematics: A Tutorial]. — Moscow: Internet-universitet informatcionnykh tekhnologiy; BINOM. Laboratoriya znaniy, 2006. — 523 p. (in Russian).
- Петров А. Г., Потапов И. И.* Перенос наносов под действием нормальных и касательных придонных напряжений с учетом уклона дна // ПМТФ. — 2014. — № 5. — С. 100–105.
Petrov A. G., Potapov I. I. Sediment Transport under Normal and Tangential Bottom Stresses with the Bottom Slope Taken into Account // J. Appl. Mech. Tech. Phys. — 2014. — Vol. 55, No. 5. — P. 812–817. — DOI: 10.1134/S0021894414050101.
- Самарский А. А.* Введение в численные методы. — М.: Наука, 1987. — 269 с.
SamarSKIY A. A. Vvedenie v chislennyye metody [Introduction to numerical methods]. — Moscow: Nauka, 1987. — 269 p. (in Russian).
- Сорокин А. А., Макогонов С. В., Королев С. П.* Информационная инфраструктура для коллективной работы ученых Дальнего Востока России // Научно-техническая информация. Сер. 1: Организация и методика информационной работы. — 2017. — № 12. — С. 14–16.
Sorokin A. A., Makogonov S. V., Korolev S. P. The Information Infrastructure for Collective Scientific Work in the Far East of Russia // Scientific and Technical Information Processing. — 2017. — Vol. 44, No. 4. — P. 302–304.
- Bagnold R. A.* Motion of waves in shallow water, interaction between waves and sand bottoms // Philosophical Transactions of the Royal Society of London. — 1946. — Vol. A187. — P. 1–15.
- Chinag Y.-Ch., Hsiao S.-Sh.* Coastal Morphological Modeling // Sediment Transport in Aquatic Environments / A. J. Manning (ed.). — 2011. — P. 203–230. — URL: <http://www.intechopen.com/books/sediment-transport-in-aquatic-environments/coastal-morphological-modeling> (request data: 04.09.2018).
- Coleman S. E., Nikora V. I.* Initiation and growth of fluvial dunes // Proceedings of Marine and River Dune Dynamics III / D. Parsons, T. Garlan, J. Best (eds.). — University of Leeds, UK, 2008. — P. 43–49.
- Exner F. M.* Uber die Wechselwirkung zwischen Wasser und Geschiebe in Flussen Sitzungsber // Akad. Wiss. Wien, Math. Naturwiss. Kl. Abt. 2A. — 1925. — Vol. 134. — P. 165–180.

- Exner F. M.* Uber Flussmaander Wogenwolken und Liklonen, die durch Retebungswalz enentstehen // Akad. Wiss. Wien, Math. Naturwiss. Kl. Abt. — 1928. — 11-a. — B137.
- Fortunato A. B., Oliveira A.* Improving the Stability of a Morphodynamic Modeling System // J. Coast. Res. — 2007. — No. 50. — P. 486–490.
- Jacobsen N. G., Fredsoe J.* A full hydrodynamic modelling of 2d breaker Bar development // The Proceedings of the Coastal Sediments. — 2011. — P. 846–858. — DOI: 10.1142/9789814355537_0064
- Jensen J. H., Madsen E. O., Fredsoe J.* Oblique flow over dredged channels. II: Sediment transport and morphology // J. Hydraul. Eng. — 1999. — Vol. 125, No. 11. — P. 1190–1198.
- Johnson H. K., Zyserman J. A.* Controlling spatial oscillations in bed level update schemes // Coast. Eng. J. — 2002. — Vol. 46. — P. 109–126.
- Kawamura T., Takami H., Kuwahara K.* Computation of high Reynolds number flow around a circular cylinder with surface roughness // Fluid Dyn. Res. — 1986. — Vol. 1, No. 2. — P. 145–162.
- Kennedy J. F.* The mechanics of dunes and antidunes in erodible-bed channels // J. Fluid Mech. — 1963. — Vol. 16. — P. 521–544.
- Lax P., Wendroff B.* Systems of conservation laws // Commun. Pure Appl. Math. — 1960. — Vol. 13, No. 2. — P. 217–237.
- Leftheriotis G. A., Dimas A. A.* Coupled simulation of flow, sediment transport and morphology evolution over ripples based on the immersed boundary method // E-proceedings of the 36th IAHR World Congress (28 June – 3 July 2015). The Hague, the Netherlands. — 13 p.
- Leonard B. P.* A stable and accurate convective modelling procedure based on quadratic interpolation // Comput. Methods Appl. Mech. Eng. — 1979. — Vol. 19. — P. 59–98.
- Li G., Caleffi V., Gao J. M.* High-order well-balanced central WENO scheme for pre-balanced shallow water equations // Comput. Fluids. — 2014. — Vol. 99. — P. 182–189.
- Long W., Kirby J. T., Shao Zh.* A numerical scheme for morphological bed level calculations // Coast. Eng. J. — 2008. — Vol. 55. — P. 167–180.
- MacCormack R. W.* The effect of viscosity in hypervelocity impact cratering // AIAA. — 1969. — P. 69–354.
- Newton C. T.* An experimental investigation of bed degradation in an open channel // Trans. Boston Soc. Civ. Engrs. — 1951. — P. 28–60.
- Niemann S. L., Fredsoe J., Jacobsen N. G.* Sand dunes in steady flow at low Froude numbers: Dune height evolution and flow resistance // J. Hydraul. Eng. — 2011. — Vol. 137, No. 1. — P. 5–14.
- Richards K. J., Taylor P. A.* A numerical model of flow over sand waves in water of finite depth // Geophys. J. Int. — 1981. — Vol. 65. — P. 103–128.
- Sanne L. N.* Modelling of sand dunes in steady and tidal flow // Ph.D. Thesis. Denmark: Technical University of Copenhagen, 2003. — 185 p.
- Shu C. W., Osher S.* Efficient implementation of essentially nonoscillatory shock-capturing schemes // J. Comput. Phys. — 1988. — Vol. 77. — P. 439–471.
- Venditti J. G., Church M. A., Bennett S. J.* Bed form initiation from a flat sand bed // J. Geophys. Res.: Earth Surface. — 2005. — Vol. 110. — F01009. — DOI: 10.1029/2004JF000149. — URL: <http://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1029/2004JF000149/pdf> (request data: 03.09.2018).
- Warming R., Beam R. M.* Upwind second-order difference schemes and applications in unsteady aerodynamic flows // AIAA Computational Fluid Dynamics Conference Proceedings. Hartford, Conn. — 1975. — P. 17–28.