

УДК: 519.8

Разностная схема для решения задач гидродинамики при больших сеточных числах Пекле

А. И. Сухинов^{1,a}, А. Е. Чистяков^{1,b}, Е. А. Проценко^{2,c}

¹Донской государственной технической университет,
344000, ЮФО, Ростовская область, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, д. 1

²Таганрогский институт имени А. П. Чехова (филиал) РГЭУ (РИНХ),
347936, Ростовская область, г. Таганрог, ул. Инициативная, д. 48

E-mail: ^a sukhinov@gmail.com, ^b cheese_05@mail.ru, ^c eapros@rambler.ru

Получено 14.07.2019, после доработки — 11.08.2019.

Принято к публикации 26.08.2019.

В работе рассматриваются развитие и применение метода учета заполненности прямоугольных ячеек материальной средой, в частности жидкостью для повышения гладкости и точности конечно-разностного решения задач гидродинамики со сложной формой граничной поверхности. Для исследования возможностей предлагаемых разностных схем рассмотрены две задачи вычислительной гидродинамики — пространственно-двумерного течения вязкой жидкости между двумя соосными полуцилиндрами и переноса веществ между соосными полуцилиндрами. Аппроксимация задач по времени выполнена на основе схем расщепления по физическим процессам. Дискретизация операторов диффузии и конвекции выполнена на основе интегроинтерполяционного метода с учетом заполненности ячеек и без ее учета. Для решения задачи диффузии – конвекции при больших сеточных числах Пекле предложено использовать разностную схему, учитывающую функцию заполненности ячеек, и схему, построенную на основе линейной комбинации разностных схем «кабаре» и «крест» с весовыми коэффициентами, полученными в результате минимизации погрешности аппроксимации при малых числах Куранта. Для оценки точности численного решения в качестве эталона используется аналитическое решение, описывающее течение Куэтта – Тейлора. В случае непосредственного использования прямоугольных сеток (ступенчатой аппроксимации границ) относительная погрешность расчетов достигает 70 %, при тех же условиях использование предлагаемого метода позволяет уменьшить погрешность до 6 %. Показано, что дробление прямоугольной сетки в 2–8 раз по каждому из пространственных направлений не приводит к такому же повышению точности, которой обладают численные решения, полученные с учетом заполненности ячеек. Предложенные разностные схемы, построенные на основе линейной комбинации разностных схем «кабаре» и «крест» с весовыми коэффициентами $2/3$ и $1/3$ соответственно, полученные в результате минимизации порядка погрешности аппроксимации, для задачи диффузии – конвекции обладают меньшей сеточной вязкостью и, как следствие, точнее описывают поведение решения в случае больших сеточных чисел Пекле.

Ключевые слова: учет заполненности ячеек, разностная схема «кабаре», сеточные числа Пекле

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 19-07-00623).

UDC: 519.8

Difference scheme for solving problems of hydrodynamics for large grid Peclet numbers

A. I. Sukhinov^{1,a}, A. E. Chistyakov^{1,b}, E. A. Protsenko^{2,c}

¹Don State Technical University,
1 Gagarin Square, Rostov-on-Don, 344000, Russia

²Taganrog Institute, named after A. P. Chekhov — branch of Rostov State University of Economics,
48 Initiative st., Taganrog, 347936, Russia

E-mail: ^a sukhinov@gmail.com, ^b cheese_05@mail.ru, ^c eapros@rambler.ru

Received 14.07.2019, after completion — 11.08.2019.

Accepted for publication 26.08.2019.

The paper discusses the development and application of the accounting rectangular cell fullness method with material substance, in particular, a liquid, to increase the smoothness and accuracy of a finite-difference solution of hydrodynamic problems with a complex shape of the boundary surface. Two problems of computational hydrodynamics are considered to study the possibilities of the proposed difference schemes: the spatial-two-dimensional flow of a viscous fluid between two coaxial semi-cylinders and the transfer of substances between coaxial semi-cylinders. Discretization of diffusion and convection operators was performed on the basis of the integro-interpolation method, taking into account taking into account the fullness of cells and without it. It is proposed to use a difference scheme, for solving the problem of diffusion–convection at large grid Peclet numbers, that takes into account the cell population function, and a scheme on the basis of linear combination of the Upwind and Standard Leapfrog difference schemes with weight coefficients obtained by minimizing the approximation error at small Courant numbers. As a reference, an analytical solution describing the Couette–Taylor flow is used to estimate the accuracy of the numerical solution. The relative error of calculations reaches 70% in the case of the direct use of rectangular grids (stepwise approximation of the boundaries), under the same conditions using the proposed method allows to reduce the error to 6%. It is shown that the fragmentation of a rectangular grid by 2–8 times in each of the spatial directions does not lead to the same increase in the accuracy that numerical solutions have, obtained taking into account the fullness of the cells. The proposed difference schemes on the basis of linear combination of the Upwind and Standard Leapfrog difference schemes with weighting factors of $2/3$ and $1/3$, respectively, obtained by minimizing the order of approximation error, for the diffusion–convection problem have a lower grid viscosity and, as a corollary, more precisely, describe the behavior of the solution in the case of large grid Peclet numbers.

Keywords: accounting of cell fullness, Upwind Leapfrog difference scheme, grid Peclet numbers

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2019, vol. 11, no. 5, pp. 833–848 (Russian).

This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project No. 19-07-00623).

1. Введение

В работе [Sukhinov et al., 2013] предложены разностные схемы, учитывающие функцию заполненности ячеек, для решения двумерных задач волновой гидродинамики с динамически перестраиваемой геометрией расчетной области. Показано, что решения, полученные на основе данных схем, лишены дефектов, связанных со ступенчатой аппроксимацией границы. Позже на основе данных схем разработана трехмерная математическая модель движения водной среды в Азовском море [Никитина и др., 2015; Сухинов и др., 2018]. При максимальной глубине водоема 14.2 метра ветровые нагоны могут достигать 4 метров и более. В качестве механизма перестроения геометрии водного объекта использован динамический пересчет заполненности ячеек. Данная модель показала достаточно высокую точность и большой запас устойчивости. Так, при расчете штормового нагона, который произошел в сентябре 2014 года (скорость ветра достигала 40 м/с и более), ошибка моделирования функции возвышения уровня составила 20 см при подъеме уровня более чем на 4 метра. Результаты моделирования отставали по времени на 15 минут на временном интервале штормовых явлений порядка 1000 минут. Традиционно при моделировании гидродинамики мелководных водоемов используют σ -координатную систему [Монин, 1973; Шокин и др., 1989; Ezer, Mellor, 2000]. Решения, полученные на данных сетках, обладают большой погрешностью и плохо описывают влияние рельефа дна на структуру течений. В качестве альтернативы прямоугольным сеткам, которые обладают низкой точностью в случае ступенчатой аппроксимации границы, сейчас используют неструктурированные адаптивные сетки, которые достаточно точно аппроксимируют границу [Четверушкин, Якобовский, 2018]. Методы построения трехмерных неструктурированных сеток для решения задач с разрывными коэффициентами подробно описаны в работах [Милюкова, Тишкин, 2015; Гасилов и др., 2015; Краснов и др., 2017]. В работах [Петров и др., 2016; Петров и др., 2017; Голубев и др., 2018] для решения подобного класса задач предложено использовать сеточно-характеристический метод.

При численном решении задач транспорта примеси в мелководных водоемах [Сухинов и др., 2011; Alekseenko et al., 2013; Никитина и др., 2016] на основе центрально-разностных схем возникает проблема, связанная с падением точности для больших значений сеточного числа Пекле. Одним из вариантов решения данной проблемы является измельчение шага по пространственной сетке, что влечет за собой увеличение трудоемкости. Например, при решении трехмерной задачи диффузии – конвекции для уменьшения числа Пекле в два раза необходимо уменьшить шаги по пространству в два раза, а по времени – в четыре раза. Таким образом, трудоемкость возрастает в 32 раза. Другим подходом к решению данного класса задач является применение других разностных схем, например схемы «кабаре». Схемы «кабаре» были разработаны для решения задач аэроакустики [Thomas, Roe, 1993; Chang et al., 1994]. В работе [Глотов и др., 2014] для решения задачи переноса предложено использовать схему, построенную на основе линейной комбинации разностных схем «кабаре» и «крест» с весовыми коэффициентами. В работе [Сухинов и др., 2019] предложено использовать весовые коэффициенты, полученные в результате минимизации погрешности аппроксимации. Целью данной работы является исследование возможностей предлагаемой разностной схемы, построенной на основе линейной комбинации разностных схем «кабаре» и «крест» с весовыми коэффициентами, полученными в результате минимизации погрешности аппроксимации, и учитывающей функцию заполненности ячеек для решения задач вычислительной гидродинамики при больших сеточных числах Пекле.

2. Постановка задачи

Рассматривается движение вязкой несжимаемой жидкости в двумерной области между двумя бесконечно длинными соосными круговыми цилиндрами. Введем систему координат xOy перпендикулярно оси цилиндров. Начало системы координат совпадает с осью цилиндров.

В сечении цилиндра плоскостью $x = 0$ задается поле скорости. Требуется определить движение жидкости. Для математического описания задачи динамики жидкости исходными уравнениями являются:

– уравнение Навье–Стокса:

$$u'_t + uu'_x + vv'_y = -P'_x/\rho + (\mu u'_x)'_x + (\mu v'_y)'_y, \quad (1)$$

$$v'_t + uv'_x + vv'_y = -P'_y/\rho + (\mu v'_x)'_x + (\mu v'_y)'_y; \quad (2)$$

– уравнение неразрывности для несжимаемой жидкости:

$$u'_x + v'_y = 0. \quad (3)$$

Уравнения (1)–(3) рассматриваются при следующих граничных условиях:

– на входной и выходной границе задается поток:

$$u = U, v = V, P'_n = 0, \quad (4)$$

– на боковых поверхностях задаются условие непроницаемости и скольжения (в случае $|\tau| = 0$, то есть без трения):

$$P'_n = 0, \quad \vec{V}_n = 0, \quad \rho\mu(\vec{V}_\tau)'_n = -\vec{\tau} \quad (5)$$

или условие прилипания:

$$P'_n = 0, \quad u = 0, \quad v = 0, \quad (6)$$

где $\vec{V} = \{u, v\}$ – вектор скорости движения водной среды, \vec{V}_n, \vec{V}_τ – нормальная и тангенциальная составляющая вектора скорости, x, y – пространственные переменные, t – время, P – давление, μ – коэффициент турбулентного обмена, ρ – плотность жидкости, n – вектор нормали, $\vec{\tau} = \{\tau_x, \tau_y\}$ – составляющие тангенциального напряжения на дне жидкости.

Тангенциальное напряжение, вызванное донным трением, согласно закону Ван-Дорна, рассчитывается по формулам

$$\vec{\tau} \equiv \{\tau_x, \tau_y\} = \rho C_p \vec{V} |\vec{V}|, \quad (7)$$

где C_p – безразмерный коэффициент.

3. Метод поправки к давлению для решения задач гидродинамики

Расчетная область вписана в прямоугольник. Для численной реализации дискретной математической модели поставленной задачи гидродинамики вводится равномерная сетка по временной переменной: $w_h = \{t^n = n\tau, n = 0, \dots, N_t, N_t\tau = T\}$, где τ – шаг по времени, n – индекс, N_t – количество шагов по времени.

Воспользуемся схемами расщепления по физическим процессам. При этом решение исходной задачи (1)–(3) сводится к решению следующих уравнений [Белоцерковский и др., 1975; Sukhinov et al., 2013]:

– системы уравнений для расчета поля вектора скорости без учета давления:

$$\frac{u^{n+\sigma} - u^n}{\tau} + uu'_x + vv'_y = (\mu u'_x)'_x + (\mu v'_y)'_y, \quad (8)$$

$$\frac{v^{n+\sigma} - v^n}{\tau} + uv'_x + vv'_y = (\mu v'_x)'_x + (\mu v'_y)'_y, \quad (9)$$

– уравнения Пуассона для расчета давления:

$$P''_{xx} + P''_{yy} = \frac{\rho}{\tau} \left((u^{n+\sigma})'_x + (v^{n+\sigma})'_y \right), \quad (10)$$

– системы уравнений для пересчета поля вектора скорости с учетом давления:

$$\frac{u^{n+1} - u^{n+\sigma}}{\tau} = -\frac{P'_x}{\rho}, \quad \frac{v^{n+1} - v^{n+\sigma}}{\tau} = -\frac{P'_y}{\rho}. \quad (11)$$

Здесь $u^{n+\sigma}$, $v^{n+\sigma}$ – компоненты вектора скорости на промежуточном временном слое.

4. Модифицированная схема «кабаре»

Рассмотрим уравнение переноса

$$c'_t + uc'_x = 0, \quad (12)$$

где $t \in [0, T]$, $x \in [0, L]$, $c(0, x) = c^0(x)$, $c(t, 0) = 0$, $u = \text{const}$.

Введем равномерную расчетную сетку $\omega = \bar{\omega}_h \times \omega_\tau$, где $\bar{\omega}_h = \{x_i | x_i = ih, i = 0, 1, \dots, N, Nh = L\}$, $\omega_\tau = \{t^n | n = 0, 1, \dots, T\}$, $\tau = t^{n+1} - t^n = \text{const}$.

Для численного решения поставленной задачи можно использовать следующие конечно-разностные схемы:

– схема «кабаре» [Головизнин, Самарский, 1998]:

$$\begin{aligned} \frac{c_i^{n+1} - c_i^n}{2\tau} + \frac{c_{i-1}^n - c_{i-1}^{n-1}}{2\tau} + u \frac{c_i^n - c_{i-1}^n}{h} &= 0, \quad u \geq 0; \\ \frac{c_i^{n+1} - c_i^n}{2\tau} + \frac{c_{i+1}^n - c_{i+1}^{n-1}}{2\tau} + u \frac{c_{i+1}^n - c_i^n}{h} &= 0, \quad u < 0; \end{aligned} \quad (13)$$

– схема «крест» («чехарда»):

$$\frac{c_i^{n+1} - c_i^{n-1}}{2\tau} + u \frac{c_{i+1}^n - c_{i-1}^n}{2h} = 0. \quad (14)$$

Рассмотрим линейную комбинацию разностных схем «кабаре» и «крест» с весовыми коэффициентами $2/3$ и $1/3$ соответственно, полученными в результате минимизации порядка погрешности аппроксимации [Сухинов и др., 2019]:

$$\begin{aligned} \frac{c_i^{n+1} - c_i^n}{\tau} + \frac{4}{3} \left(\frac{c_{i-1}^n - c_{i-1}^{n-1}}{2\tau} + u \frac{c_i^n - c_{i-1}^n}{h} \right) + \frac{c_i^n - c_i^{n-1}}{3\tau} + u \frac{c_{i+1}^n - c_{i-1}^n}{3h} &= 0, \quad u \geq 0; \\ \frac{c_i^{n+1} - c_i^n}{\tau} + \frac{4}{3} \left(\frac{c_{i+1}^n - c_{i+1}^{n-1}}{2\tau} + u \frac{c_{i+1}^n - c_i^n}{h} \right) + \frac{c_i^n - c_i^{n-1}}{3\tau} + u \frac{c_{i+1}^n - c_{i-1}^n}{3h} &= 0, \quad u < 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Модельная задача I. Требуется найти решение уравнения

$$c'_t + uc'_x = 0, \quad u = 0.5 \text{ м/с}, \quad 0 \leq t \leq T, \quad 0 \leq x \leq L, \quad c(t, 0) = 0,$$

с начальными условиями $q^0(x) = h(20 - x) - h(10 - x)$, где $h(x)$ – функция Хэвисайда.

На рис. 1 представлены решения модельной задачи I (1 – точное решение, 2 – численное) на основе схемы (15). Расчетные интервалы по времени T составили 100 с и 900 с.

Рассмотрим уравнение конвекции – диффузии:

$$c'_t + uc'_x = (\mu c'_x)'_x, \quad t \in [0, T], \quad x \in [0, L], \quad (16)$$

с граничными и начальными условиями

$$c(0, x) = c^0(x), \quad c(t, 0) = c(t, L) = 0, \quad u = \text{const}.$$

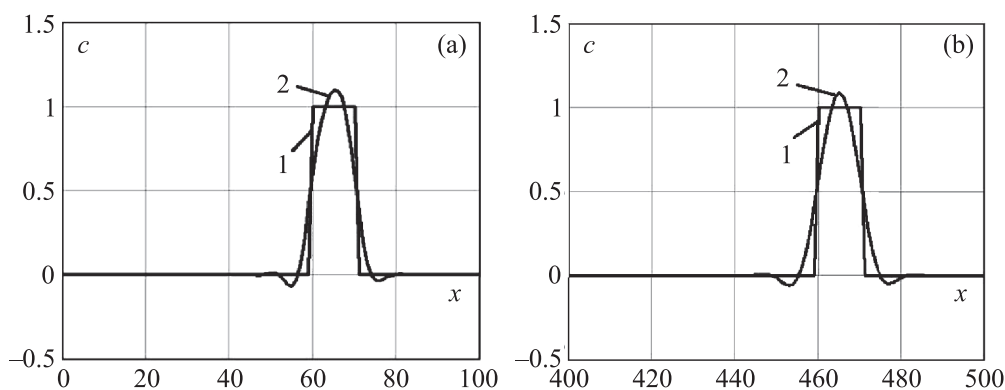


Рис. 1. Решения модельной задачи I: (а) расчетный интервал 100 с; (б) 900 с

Для аппроксимации оператора конвекции будем использовать разностный оператор схемы, полученной как результат линейной комбинации схем «кабаре» и «крест»:

$$\begin{aligned} \frac{c_i^{n+1} - c_i^n}{\tau} + \frac{4}{3} \left(\frac{c_{i-1}^n - c_{i-1}^{n-1}}{2\tau} + u \frac{c_i^n - c_{i-1}^n}{h} \right) + \frac{c_i^n - c_i^{n-1}}{3\tau} + u \frac{c_{i+1}^n - c_{i-1}^n}{3h} &= \\ &= 2\mu \frac{c_{i+1}^n - 2c_i^n + c_{i-1}^n}{h^2}, \quad u \geq 0; \\ \frac{c_i^{n+1} - c_i^n}{\tau} + \frac{4}{3} \left(\frac{c_{i+1}^n - c_{i+1}^{n-1}}{2\tau} + u \frac{c_{i+1}^n - c_i^n}{h} \right) + \frac{c_i^n - c_i^{n-1}}{3\tau} + u \frac{c_{i+1}^n - c_{i-1}^n}{3h} &= \\ &= 2\mu \frac{c_{i+1}^n - 2c_i^n + c_{i-1}^n}{h^2}, \quad u < 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Модельная задача II. Требуется найти решение уравнения

$$c'_t + uc'_x = (\mu c'_x)'_x, \quad u = 0.5 \text{ м/с}, \quad \mu = \text{const}, \quad 0 \leq t \leq T, \quad 0 \leq x \leq L, \quad c(t, 0) = c(t, L) = 0,$$

с начальными условиями $c^0(x) = h(20 - x) - h(10 - x)$.

Решение модельной задачи II может быть представлено в виде

$$c(t, x) = \sum_{m=1}^{N-1} C_m^0 e^{-\mu\omega^2 m^2 t} \sin(\omega m x), \quad C_m^0 = \frac{2}{L} \int_0^l c^0(x + ut) \sin(\omega m x) dx, \quad \omega = \frac{\pi}{L}.$$

На рис. 2 представлены решения модельной задачи II (1 – аналитическое решение, 2 – численное на основе схемы (17)). Параметр μ равен $0.025 \text{ м}^2/\text{с}$ (а) и $0.0025 \text{ м}^2/\text{с}$ (б). При этом сеточные числа Пекле ($Pe = uh/\mu$) равны 20 и 200 соответственно.

Рис. 2 иллюстрирует, что разностная схема (17) для решения задачи (16) имеет незначительную погрешность в широком диапазоне сеточных чисел Пекле.

5. Аппроксимация операторов диффузионного и конвективного переноса

Рассмотрим двумерное уравнение конвекции – диффузии:

$$c'_t + uc'_x + vc'_y = (\mu c'_x)'_x + (\mu c'_y)'_y + f \quad (18)$$

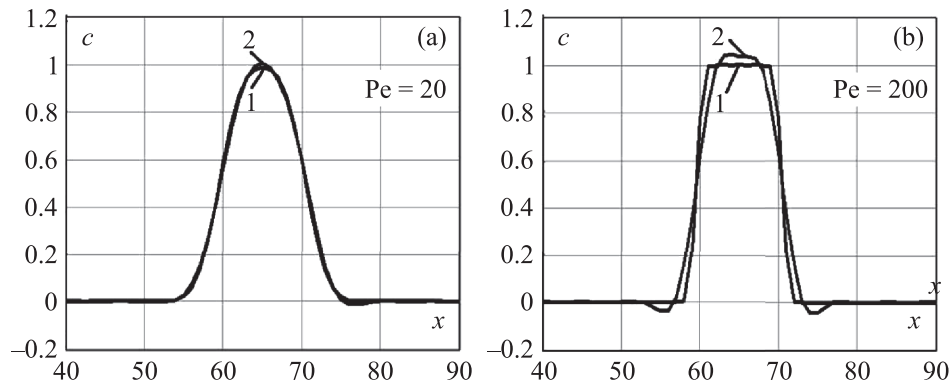


Рис. 2. Решения модельной задачи II: (а) сеточное число Пекле равно 20; (б) 200

с граничными условиями

$$c'_n(x, y, t) = \alpha_n c + \beta_n, \tag{19}$$

где u, v — компоненты вектора скорости, μ — коэффициент турбулентного обмена, f — функция, описывающая интенсивность и распределение источников.

Расчетная область вписана в прямоугольник. Для численной реализации дискретной математической модели поставленной задачи вводится равномерная сетка:

$$w_h = \left\{ t^n = n\tau, x_i = ih_x, y_j = jh_y; n = 0, \dots, N_t, i = 0, \dots, N_x, j = 0, \dots, N_y; N_t\tau = T, N_x h_x = l_x, N_y h_y = l_y \right\},$$

где τ — шаг по времени, h_x, h_y — шаги по пространству, N_t — верхняя граница по времени, N_x, N_y — границы по пространству.

Для аппроксимации уравнения (18) по временной координате используем схемы с весами:

$$\frac{c^{n+1} - c^n}{\tau} + u(c^{n+\sigma})'_x + v(c^{n+\sigma})'_y = \left(\mu(c^{n+\sigma})'_x \right)'_x + \left(\mu(c^{n+\sigma})'_y \right)'_y + f, \tag{20}$$

здесь $c^{n+\sigma} = \sigma c^{n+1} + (1 - \sigma)c^n$, $\sigma \in [0, 1]$ — вес схемы.

Ячейки представляют собой прямоугольники, они могут быть заполненными, частично заполненными или пустыми. Центры ячеек и узлы разнесены на $h_x/2$ и $h_y/2$ по координатам x и y соответственно. Обозначим через $o_{i,j}$ заполненность ячейки (i, j) . В окрестности узла (i, j) лежат ячейки $(i, j), (i + 1, j), (i, j + 1), (i + 1, j + 1)$.

Вводятся коэффициенты q_0, q_1, q_2, q_3, q_4 , описывающие заполненность контрольных областей, находящихся в окрестности ячейки. Значение q_0 характеризует заполненность области $D_0: x \in (x_{i-1/2}, x_{i+1/2}), y \in (y_{j-1/2}, y_{j+1/2})$; $q_1 - D_1: x \in (x_i, x_{i+1/2}), y \in (y_{j-1/2}, y_{j+1/2})$; $q_2 - D_2: x \in (x_{i-1/2}, x_i), y \in (y_{j-1/2}, y_{j+1/2})$; $q_3 - D_3: x \in (x_{i-1/2}, x_{i+1/2}), y \in (y_j, y_{j+1/2})$; $q_4 - D_4: x \in (x_{i-1/2}, x_{i+1/2}), y \in (y_{j-1/2}, y_j)$. Заполненные части областей D_m будем называть Ω_m , где $m = 0, \dots, 4$. В соответствии с этим коэффициенты q_m можно вычислить по формулам

$$(q_m)_{i,j} = \frac{S_{\Omega_m}}{S_{D_m}}, \quad (q_0)_{i,j} = \frac{o_{i,j} + o_{i+1,j} + o_{i+1,j+1} + o_{i,j+1}}{4}, \quad (q_1)_{i,j} = \frac{o_{i+1,j} + o_{i+1,j+1}}{2},$$

$$(q_2)_{i,j} = \frac{o_{i,j} + o_{i,j+1}}{2}, \quad (q_3)_{i,j} = \frac{o_{i+1,j+1} + o_{i,j+1}}{2}, \quad (q_4)_{i,j} = \frac{o_{i,j} + o_{i+1,j}}{2}.$$

Дискретный аналог уравнения диффузии – конвекции – реакции (19) с граничными условиями третьего рода (20) запишется в виде [Sukhinov et al., 2013]

$$\begin{aligned}
 & (q_0)_{i,j} \frac{c_{i,j}^{n+1} - c_{i,j}^n}{\tau} + (q_1)_{i,j} u_{i+1/2,j} \frac{c_{i+1,j}^{n+\sigma} - c_{i,j}^{n+\sigma}}{2h_x} + (q_2)_{i,j} u_{i-1/2,j} \frac{c_{i,j}^{n+\sigma} - c_{i-1,j}^{n+\sigma}}{2h_x} + \\
 & + (q_3)_{i,j} v_{i,j+1/2} \frac{c_{i,j+1}^{n+\sigma} - c_{i,j}^{n+\sigma}}{2h_y} + (q_4)_{i,j} v_{i,j-1/2} \frac{c_{i,j}^{n+\sigma} - c_{i,j-1}^{n+\sigma}}{2h_y} = (q_1)_{i,j} \mu_{i+1/2,j} \frac{c_{i+1,j}^{n+\sigma} - c_{i,j}^{n+\sigma}}{h_x^2} - \\
 & - (q_2)_{i,j} \mu_{i-1/2,j} \frac{c_{i,j}^{n+\sigma} - c_{i-1,j}^{n+\sigma}}{h_x^2} - |(q_1)_{i,j} - (q_2)_{i,j}| \mu_{i,j} \frac{\alpha_x c_{i,j}^{n+\sigma} + \beta_x}{h_x} + \\
 & + (q_3)_{i,j} \mu_{i,j+1/2} \frac{c_{i,j+1}^{n+\sigma} - c_{i,j}^{n+\sigma}}{h_y^2} - (q_4)_{i,j} \mu_{i,j-1/2} \frac{c_{i,j}^{n+\sigma} - c_{i,j-1}^{n+\sigma}}{h_y^2} - \\
 & - |(q_3)_{i,j} - (q_4)_{i,j}| \mu_{i,j} \frac{\alpha_y c_{i,j}^{n+\sigma} + \beta_y}{h_y} + (q_0)_{i,j} f_{i,j}.
 \end{aligned} \tag{21}$$

Таким образом, получили дискретные аналоги операторов конвективного и диффузионного переноса в случае учета частичной заполненности ячеек. Дискретные аналоги операторов конвективного uc'_x и диффузионного $(\mu c'_x)_x$ переноса в случае частичной заполненности ячеек могут быть записаны в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 & (q_0)_{i,j} uc'_x \simeq (q_1)_{i,j} u_{i+1/2,j} \frac{c_{i+1,j} - c_{i,j}}{2h_x} + (q_2)_{i,j} u_{i-1/2,j} \frac{c_{i,j} - c_{i-1,j}}{2h_x}, \\
 & (q_0)_{i,j} (\mu c'_x)_x \simeq (q_1)_{i,j} \mu_{i+1/2,j} \frac{c_{i+1,j} - c_{i,j}}{h_x^2} - (q_2)_{i,j} \mu_{i-1/2,j} \frac{c_{i,j} - c_{i-1,j}}{h_x^2} - |(q_1)_{i,j} - (q_2)_{i,j}| \mu_{i,j} \frac{\alpha_x c_{i,j} + \beta_x}{h_x}.
 \end{aligned}$$

Погрешность аппроксимации для данной схемы есть величина $O(\tau + h_x^2 + h_y^2)$ во внутренних узлах сетки и $O(\tau + h_x + h_y)$ – в граничных узлах. Достаточное условие устойчивости схемы для метода поправки к давлению определяется на основе принципа максимума при ограничениях на шаг по пространству [Самарский, 1967; Вабищевич, Самарский, 2000]: $h_x < |2\mu/u|$, $h_y < |2\mu/v|$ или $Re \leq 2N$, где $Re = u \cdot l/\mu$ – число Рейнольдса [Ландау, Лифшиц, 1986], u – скорость движения водной среды, l – характерный размер области, μ – коэффициент турбулентного обмена.

В случае невыполнения условия устойчивости разностной схемы можно поступить следующим образом: или увеличить размеры расчетной сетки, что влечет за собой рост вычислительных затрат, или поменять разностную схему. Переход к схемам «против потока» [Четверушкин, 2012] не рекомендуется, так как они обладают сеточной вязкостью. В тестовых расчетах при решении системы уравнений (8), (9) на основе разностной схемы (21) в случае невыполнения условия устойчивости $h_x < |2\mu/u|$ коэффициент турбулентного обмена по направлению Ox будем брать равным $uh_x/2$, по направлению Oy – равным $vh_y/2$. Также следует отметить, что в случае применения схем «против потока» коэффициент турбулентного обмена по направлению Ox становится равным $\mu + uh_x/2$, по направлению Oy – равным $\mu + vh_y/2$, что вносит больший вклад в погрешность решения по сравнению с описанным выше подходом.

Для аппроксимации однородного уравнения (18) при больших сеточных числах Пекле будем использовать схемы расщепления по пространству:

$$\frac{c^{n+1/2} - c^n}{\tau} + u(c^n)'_x = (\mu(c^n)'_x)'_x, \tag{22}$$

$$\frac{c^{n+1} - c^{n+1/2}}{\tau} + v(c^{n+1/2})'_y = (\mu(c^{n+1/2})'_y)'_y. \tag{23}$$

Для аппроксимации системы уравнений (22), (23) будем использовать схему (17), полученную как результат линейной комбинации схем «кабаре» и «крест», при этом будем учитывать функцию заполненности ячеек:

– разностная схема для уравнения (22), описывающего перенос вдоль направления Ox , запишется в виде

$$\begin{aligned} & \frac{2q_{2,i,j} + q_{0,i,j}}{3} \frac{c_{i,j}^{n+1/2} - c_{i,j}^n}{\tau} + 5u_{i-1/2,j} q_{2,i,j} \frac{c_{i,j}^n - c_{i-1,j}^n}{3h_x} + u_{i+1/2,j} \min(q_{1,i,j}, q_{2,i,j}) \frac{c_{i+1,j}^n - c_{i,j}^n}{3h_x} + \\ & + \frac{2\Delta_x c_{i-1,j}^n q_{2,i,j} + \Delta_x c_{i,j}^n q_{0,i,j}}{3} = 2\mu_{i+1/2,j} q_{1,i,j} \frac{c_{i+1,j}^n - c_{i,j}^n}{h_x^2} - 2\mu_{i-1/2,j} q_{2,i,j} \frac{c_{i,j}^n - c_{i-1,j}^n}{h_x^2} - \\ & - |q_{1,i,j} - q_{2,i,j}| \mu_{i,j} \frac{\alpha_x c_{i,j}^n + \beta_x}{h_x}, \quad u_{i,j} \geq 0; \\ & \frac{2q_{1,i,j} + q_{0,i,j}}{3} \frac{c_{i,j}^{n+1/2} - c_{i,j}^n}{\tau} + 5u_{i+1/2,j} q_{1,i,j} \frac{c_{i+1,j}^n - c_{i,j}^n}{3h_x} + u_{i-1/2,j} \min(q_{1,i,j}, q_{2,i,j}) \frac{c_{i,j}^n - c_{i-1,j}^n}{3h_x} + \\ & + \frac{2\Delta_x c_{i+1,j}^n q_{1,i,j} + \Delta_x c_{i,j}^n q_{0,i,j}}{3} = 2\mu_{i+1/2,j} q_{1,i,j} \frac{c_{i+1,j}^n - c_{i,j}^n}{h_x^2} - 2\mu_{i-1/2,j} q_{2,i,j} \frac{c_{i,j}^n - c_{i-1,j}^n}{h_x^2} - \\ & - |q_{1,i,j} - q_{2,i,j}| \mu_{i,j} \frac{\alpha_x c_{i,j}^n + \beta_x}{h_x}, \quad u_{i,j} < 0, \quad \text{где } \Delta_x c_{i,j}^n = \frac{c_{i,j}^{n-1/2} - c_{i,j}^{n-1}}{\tau}; \end{aligned} \quad (24)$$

– разностная схема для уравнения (23), описывающего перенос вдоль направления Oy , запишется в виде

$$\begin{aligned} & \frac{2q_{4,i,j} + q_{0,i,j}}{3} \frac{c_{i,j}^{n+1} - c_{i,j}^{n+1/2}}{\tau} + 5v_{i,j-1/2} q_{4,i,j} \frac{c_{i,j}^{n+1/2} - c_{i,j-1}^{n+1/2}}{3h_y} + v_{i,j+1/2} \min(q_{3,i,j}, q_{4,i,j}) \frac{c_{i,j+1}^{n+1/2} - c_{i,j}^{n+1/2}}{3h_y} + \\ & + \frac{2\Delta_y c_{i,j-1}^{n+1/2} q_{4,i,j} + \Delta_y c_{i,j}^{n+1/2} q_{0,i,j}}{3} = 2\mu_{i,j+1/2} q_{3,i,j} \frac{c_{i,j+1}^{n+1/2} - c_{i,j}^{n+1/2}}{h_y^2} - 2\mu_{i,j-1/2} q_{4,i,j} \frac{c_{i,j}^{n+1/2} - c_{i,j-1}^{n+1/2}}{h_y^2} - \\ & - |q_{3,i,j} - q_{4,i,j}| \mu_{i,j} \frac{\alpha_y c_{i,j}^{n+1/2} + \beta_y}{h_y}, \quad v_{i,j} \geq 0; \\ & \frac{2q_{3,i,j} + q_{0,i,j}}{3} \frac{c_{i,j}^{n+1} - c_{i,j}^{n+1/2}}{\tau} + 5v_{i,j+1/2} q_{3,i,j} \frac{c_{i,j+1}^{n+1/2} - c_{i,j}^{n+1/2}}{3h_y} + v_{i,j-1/2} \min(q_{3,i,j}, q_{4,i,j}) \frac{c_{i,j}^{n+1/2} - c_{i,j-1}^{n+1/2}}{3h_y} + \\ & + \frac{2\Delta_y c_{i,j+1}^{n+1/2} q_{3,i,j} + \Delta_y c_{i,j}^{n+1/2} q_{0,i,j}}{3} = 2\mu_{i,j+1/2} q_{3,i,j} \frac{c_{i,j+1}^{n+1/2} - c_{i,j}^{n+1/2}}{h_y^2} - 2\mu_{i,j-1/2} q_{4,i,j} \frac{c_{i,j}^{n+1/2} - c_{i,j-1}^{n+1/2}}{h_y^2} - \\ & - |q_{3,i,j} - q_{4,i,j}| \mu_{i,j} \frac{\alpha_y c_{i,j}^{n+1/2} + \beta_y}{h_y}, \quad v_{i,j} < 0, \quad \text{где } \Delta_y c_{i,j}^{n+1/2} = \frac{c_{i,j}^n - c_{i,j}^{n-1/2}}{\tau}. \end{aligned} \quad (25)$$

6. Решение тестовых задач гидродинамики

Рассмотрим стационарное течение жидкости между двумя бесконечно длинными соосными круговыми цилиндрами [Валландер, 1978]:

$$u'x + v'y = -\rho^{-1} P'_x + \mu \Delta u, \quad u'x + v'y = -\rho^{-1} P'_y + \mu \Delta v, \quad r_1 \leq r \leq r_2, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (26)$$

Модельная задача III. Рассматривается задача нахождения численного течения вязкой жидкости между двумя соосными полуцилиндрами ($x \geq 0$). Радиус внутреннего цилиндра $r_1 = 5$ м.

Радиус внешнего цилиндра $r_2 = 10$ м. Расчетная область вписана в прямоугольник размером 10×20 м ($0 \leq x \leq 10, -10 \leq y \leq 10$). В сечении цилиндра плоскостью $x = 0$ задается поле скорости $u(0, y) = -5/y$ м/с, $v(0, y) = 0$ м/с. Во всех остальных узлах сетки поле скорости рассчитывается. На внутренней и внешней стенках цилиндра задаются условия скольжения и непротекания.

Аналитическое решение задачи III в декартовой системе координат примет вид

$$u(x, y) = -\frac{5y}{x^2 + y^2}, \quad v(x, y) = \frac{5x}{x^2 + y^2}, \quad P(x, y) = P(r_1) - \frac{12.5\rho}{x^2 + y^2} + \rho/2. \quad (27)$$

Погрешности численных решений наиболее отчетливо видны на грубых сетках. Опишем параметры грубой сетки. Шаги по пространственным направлениям равны 1 м, шаг по времени — 0.1 с, размеры сетки — 21×11 узлов, длина расчетного интервала — 10 с, плотность среды $\rho = 1000$ кг/м³, коэффициент турбулентного обмена $\mu = 1$ м²/с.

В таблице 1 представлено содержимое массива, описывающего функцию заполненности ячеек в случае использования расчетной сетки 21×11 .

Таблица 1. Функция заполненности ячеек для сетки 21×11 узлов

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0.983	0.882	0.677	0.362	0.030	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	0.894	0.344	0	0	0	0
2	1	1	1	1	1	1	0.589	0.010	0	0
3	1	1	1	1	1	1	1	0.589	0	0
4	1	1	1	1	1	1	1	1	0.344	0
5	0.033	0.239	0.682	1	1	1	1	1	0.894	0.030
6	0	0	0	0.452	1	1	1	1	1	0.362
7	0	0	0	0	0.682	1	1	1	1	0.677
8	0	0	0	0	0.239	1	1	1	1	0.882
9	0	0	0	0	0.033	1	1	1	1	0.983
10	0	0	0	0	0.033	1	1	1	1	0.983
11	0	0	0	0	0.239	1	1	1	1	0.882
12	0	0	0	0	0.682	1	1	1	1	0.677
13	0	0	0	0.452	1	1	1	1	1	0.362
14	0.033	0.239	0.682	1	1	1	1	1	0.894	0.030
15	1	1	1	1	1	1	1	1	0.344	0
16	1	1	1	1	1	1	1	0.589	0	0
17	1	1	1	1	1	1	0.589	0.010	0	0
18	1	1	1	1	0.894	0.344	0	0	0	0
19	0.983	0.882	0.677	0.362	0.030	0	0	0	0	0

Численное решение задачи течения жидкости между двумя соосными цилиндрами представлено на рис. 3. Цветом показаны потоки движения жидкости $|k_0 u|$.

Рис. 3, *a* демонстрирует, что решение задачи течения жидкости между двумя соосными цилиндрами, полученное на сетках, учитывающих заполненность ячеек, является достаточно гладким. Решение, представленное на рис. 3, *b*, имеет существенные неточности в определении направления векторов скорости, связанные со ступенчатой аппроксимацией границы раздела двух сред.

Рис. 4 иллюстрирует погрешности численного решения задачи течения жидкости между двумя соосными цилиндрами на сетках, учитывающих заполненность ячеек (случай гладкой границы), и на сетках со ступенчатой аппроксимацией границы.

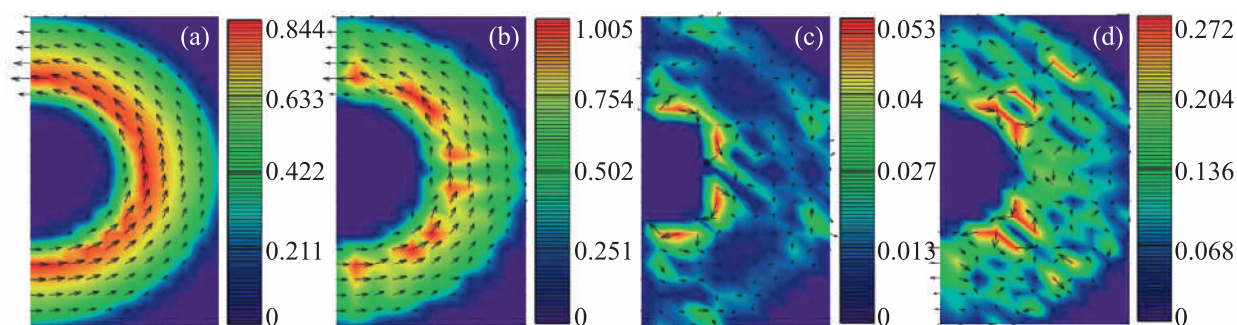


Рис. 3. Численное решение задачи: (а) случай использования частичной заполненности ячеек; (б) случай ступенчатой границы раздела двух сред; (с) поле, полученное как разность между численным и аналитическим решениями задачи в случае гладкой границы; (д) в случае ступенчатой границы

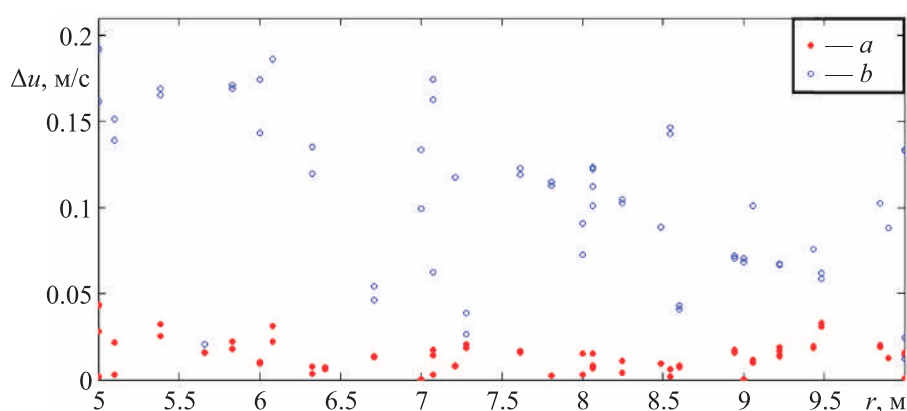


Рис. 4. Зависимости погрешности решения задачи течения жидкости между двумя цилиндрами от радиуса: a — с использованием метода учета заполненности ячеек, b — без учета заполненности ячеек

Таблица 2. Погрешности решения задачи течения жидкости между двумя цилиндрами

Размеры сетки	11 × 21	21 × 41	41 × 81	81 × 161
Максимальное значение погрешности в случае гладкой границы, м/с	0.053	0.052	0.058	0.056
Среднее значение погрешности в случае гладкой границы, м/с	0.023	0.012	0.006	0.003
Максимальное значение погрешности в случае ступенчатой границы, м/с	0.272	0.731	0.717	0.75
Среднее значение погрешности в случае ступенчатой границы, м/с	0.165	0.132	0.069	0.056

Для численного исследования точности предложенных схем найдено решение на последовательности сгущающихся сеток. В таблице 2 представлены значения погрешностей численного решения задачи течения жидкости между двумя соосными полуцилиндрами, полученные на последовательности сгущающихся расчетных сеток размерами 11×21 , 21×41 , 41×81 и 81×161 узлов в случаях гладкой и ступенчатой границы.

Анализ результатов расчетов погрешности численного решения задачи течения жидкости между двумя цилиндрами на последовательности сгущающихся сеток, представленных в таблице 2, позволяет сделать вывод об эффективности использования разностных схем, учитывающих

заполненность ячеек. При решении модельной задачи дробление сетки в 8 раз по каждому из пространственных направлений не приводит к повышению точности, которой обладают решения, полученные на сетках, учитывающих заполненность ячеек.

На рис. 5 представлено численное решение задачи (26): в случае (а) система уравнений диффузии – конвекции (8), (9) решалась на основе разностной схемы (21); в случае (б) система уравнений (8), (9) решалась на основе разностных схем (24), (25). На рис. 5, с приведена разность полей вектора скорости, рассчитанных на основе разностной схемы (21) и разностных схем (24), (25).

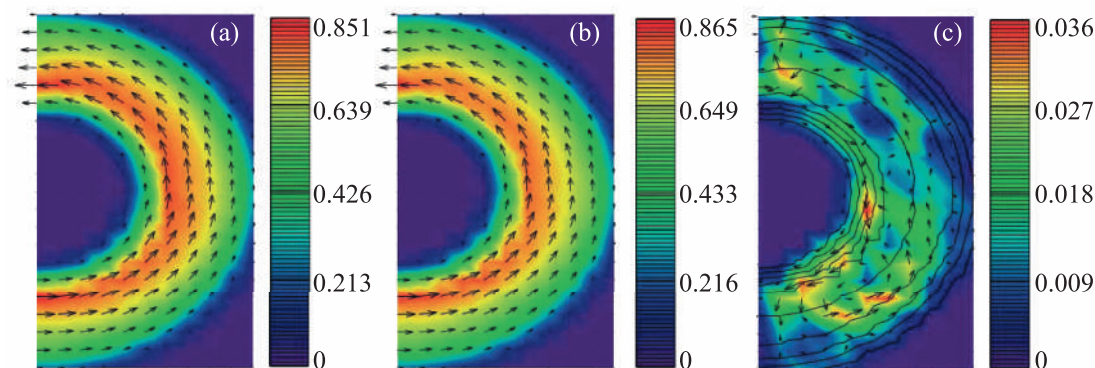


Рис. 5. Численное решение задачи (26) на основе разностной схемы (21) и разностных схем (24), (25)

Модельная задача IV. Требуется найти решение задачи транспорта веществ (18) между двумя соосными цилиндрами на основе разностной схемы (21) и схем (24), (25), при этом поле течения задавалось функцией (27) с начальным распределением:

$$c^0(x, y) = (\theta(1 - x) - \theta(0.5 - x)) (\theta(-8.5 - y) - \theta(-9 - y)).$$

На рис. 6 приведено численное решение задачи переноса веществ IV при малых сеточных числах Пекле. Рассмотрен случай выполнения условия устойчивости разностной схемы (21). Коэффициент турбулентного обмена взят равным $0.5 \text{ м}^2/\text{с}$. Расчетный интервал равен 20 с. На рис. 7 приведен расчет задачи переноса веществ IV при больших сеточных числах Пекле. Коэффициент турбулентного обмена взят равным $0.01 \text{ м}^2/\text{с}$. В этом случае диффузионный обмен практически отсутствует. На рис. 6, 7 обозначено: (а) начальное распределение поля концентрации; (б) результат расчета поля концентрации на основе разностной схемы (21); (с) результат расчета поля концентрации на основе разностных схем (24), (25).

Рис. 6, 7 демонстрируют, что предложенные разностные схемы, построенные на основе линейной комбинации разностных схем «кабаре» и «крест» с весовыми коэффициентами $2/3$ и $1/3$ соответственно, полученными в результате минимизации порядка погрешности аппроксимации, для задачи диффузии – конвекции обладают меньшей сеточной вязкостью и, как следствие, точнее описывают поведение решения в случае больших сеточных чисел Пекле.

Заключение

Рассматривается движение вязкой несжимаемой жидкости в двумерной области между двумя бесконечно длинными соосными круговыми цилиндрами. Для решения поставленной задачи использован метод поправки к давлению. Согласно данному методу задача решается в три этапа. На первом этапе решается система уравнений вида диффузии – конвекции для расчета поля

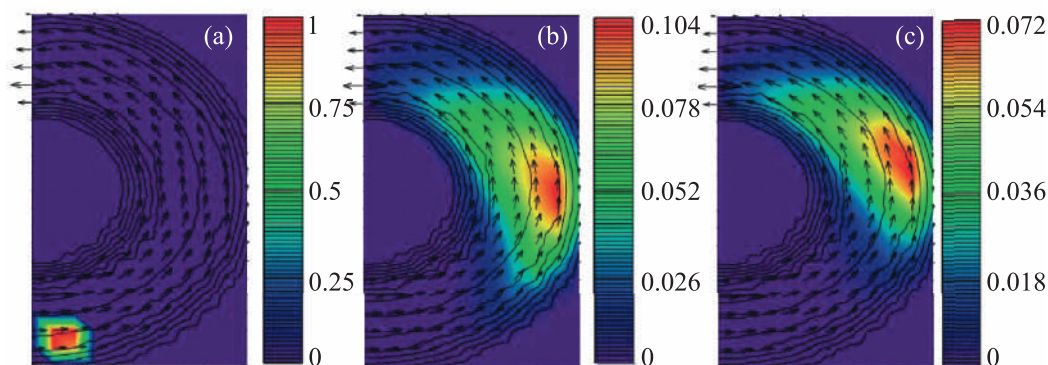


Рис. 6. Численное решение задачи переноса веществ между двумя соосными цилиндрами при малых сеточных числах Пекле

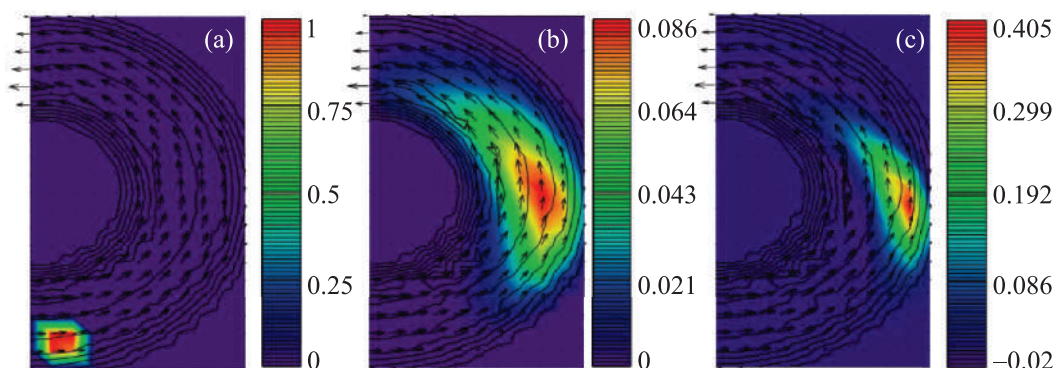


Рис. 7. Численное решение задачи переноса веществ между двумя соосными цилиндрами при больших сеточных числах Пекле

скорости без учета давления. На втором этапе решается уравнение Пуассона для расчета давления. На третьем этапе пересчитывается скорость с учетом давления. Данный метод гарантирует выполнение условия неразрывности (сохранение потока) на дискретном уровне. При решении уравнений диффузии – конвекции возникает ограничение на шаг по пространству. Для того чтобы центральная-разностная схема была устойчива, необходимо уменьшать шаг по пространству, что ведет к большим вычислительным трудозатратам, либо повышать вязкость, что влечет за собой падение точности. В работе для решения данной задачи предложено использовать схему, построенную в результате линейной комбинации схем «кабаре» и «крест» с оптимальными весовыми коэффициентами $2/3$ и $1/3$, полученными в результате минимизации погрешности аппроксимации. Другой актуальной задачей вычислительной гидродинамики является аппроксимация границы расчетной области. В работе для дискретизации операторов первой и второй производной использован метод учета функции заполненности ячеек. Предложена разностная схема, полученная в результате линейной комбинации схем «кабаре» и «крест» с оптимальными весовыми коэффициентами и учитывающая функцию заполненности ячеек. Для тестовых расчетов на основе предложенной схемы использовано течение Куэтта–Тейлора, для которого известно аналитическое решение. Показано, что предложенная схема сохраняет гладкость решения на границе расчетной области и применима в большом диапазоне сеточных чисел Пекле.

Список литературы (References)

- Белоцерковский О. М., Гуцин В. А., Щенников В. В. Метод расщепления в применении к решению задач динамики вязкой несжимаемой жидкости // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 1975. — Т. 15, № 1. — С. 197–207.
- Belotserkovskii O. M., Gushchin V. A., Shchennikov V. V.* Use of the splitting method to solve problems of the dynamics of a viscous incompressible fluid // USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 1975. — Vol. 15, Iss. 1. — P. 190–200. (Original Russian paper: *Belotserkovskii O. M., Gushchin V. A., Shchennikov V. V.* Metod rasshchepeniya v primenenii k resheniyu zadach dinamiki vyazkoi neshzhimaemoi zhidkosti // Zh. vychisl. matem. i matem. fiz. — 1975. — Vol. 15, No. 1. — P. 197–207.)
- Вабищевиц П. Н., Самарский А. А. Разностные схемы для задач конвекции–диффузии на нерегулярных сетках // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 2000. — Т. 40, № 5. — С. 726–739.
- Vabischevich P. N., Samarskii A. A.* Raznostnye skhemy dlya zadach konveksii–diffuzii na neregulyarnykh setkakh [Numerical methods for solving convection–diffusion problems] // Zh. vychisl. matem. i matem. fiz. [Comput. Math. Math. Phys.]. — 2000. — Vol. 40, No. 5. — P. 726–739 (in Russian).
- Валландер С. В. Лекции по гидроаэромеханике: учеб. пособие. — Л.: Изд-во ЛГУ, 1978. — 296 с.
- Vallander S. V.* Lektsii po gidroaeromekhanike: ucheb. posobiye [Lectures on hydroaeromechanics: textbook]. — Leningrad: Izd-vo LGU, 1978. — 296 p. (in Russian).
- Гасилов В. А., Гасилова И. В., Клочкова Л. В., Повещенко Ю. А., Тишкин В. Ф. Разностные схемы на основе метода опорных операторов для задач динамики флюидов в коллекторе, содержащем газогидраты // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 2015. — Т. 55, № 8. — С. 1341–1355.
- Gasilov V. A., Gasilova I. V., Klochkova L. V., Poveshchenko Yu. A., Tishkin V. F.* Difference schemes based on the support operator method for fluids dynamics problems in a collector containing gas hydrates // Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 2015. — Vol. 55, Iss. 8. — P. 1310–1323. (Original Russian paper: *Gasilov V. A., Gasilova I. V., Klochkova L. V., Poveshchenko Yu. A., Tishkin V. F.* Raznostnye skhemy na osnove metoda opornykh operatorov dlya zadach dinamiki flyuidov v kollektore, soderzhashchem gazogidraty // Zh. vychisl. matem. i matem. fiz. — 2015. — Vol. 55, No. 8. — P. 1341–1355.)
- Глотов В. Ю., Головизнин В. М., Карабасов С. А., Маркештейн А. П. Новая схема «двухслойный крест» для моделирования стохастических уравнений Ландау–Лифшица // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 2014. — Т. 54, № 2. — С. 298–317.
- Glotov V. Yu., Goloviznin V. M., Karabasov S. A., Markeshtejn A. P.* Novaya skhema “dvukhsloinyi krest” dlya modelirovaniya stokhasticheskikh uravnenii Landau–Lifshitsa [New two-level leapfrog scheme for modeling the stochastic Landau–Lifshitz equations] // Zh. vychisl. matem. i matem. fiz. [Computational Mathematics and Mathematical Physics]. — 2014. — Vol. 54, Iss. 2. — P. 298–317 (in Russian).
- Головизнин В. М., Самарский А. А. Разностная аппроксимация конвективного переноса с пространственным расщеплением временной производной // Матем. моделирование. — 1998. — Т. 10, № 1. — С. 86–100.
- Goloviznin V. M., Samarskii A. A.* Raznostnaya approksimatsiya konvektivnogo perenosa s prostranstvennym rasshchepleniem vremennoi proizvodnoi [Finite difference approximation of convective transport equation with space splitting time derivative] // Matem. modelirovanie [Mathematical modeling]. — 1998. — Vol. 10, No. 1. — P. 86–100 (in Russian).
- Голубев В. И., Войнов О. Я., Петров И. Б. Сейсмическая миграция в трещиноватых упругих средах на основе сеточно-характеристического метода // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 2018. — Т. 58, № 8. — С. 113–119.
- Golubev V. I., Voinov O. Ya., Petrov I. B.* Seismic imaging of fractured elastic media on the basis of the grid-characteristic method // Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 2018. — Vol. 58, Iss. 8. — P. 1309–1315. (Original Russian paper: *Golubev V. I., Voinov O. Ya., Petrov I. B.* Seismicheskaya migratsiya v treshchinovatykh uprugikh sredakh na osnove setochno-kharakteristicheskogo metoda // Zh. vychisl. matem. i matem. fiz. — 2018. — Vol. 58, No. 8. — P. 113–119.)
- Краснов М. М., Кучугов П. А., Ладонкина М. Е., Тишкин В. Ф. Разрывный метод Галёркина на трехмерных тетраэдральных сетках. Использование операторного метода программирования // Математическое моделирование. — 2017. — Т. 29, № 2. — С. 3–22.
- Krasnov M. M., Kuchugov P. A., Ladonkina M. E., Tishkin V. F.* Discontinuous Galerkin method on three-dimensional tetrahedral grids: Using the operator programming method // Mathematical Models and Computer Simulations. — 2017. — Vol. 9, Iss. 5. — P. 529–543. (Original Russian paper: *Krasnov M. M., Kuchugov P. A., Ladonkina M. E., Tishkin V. F.* Razryvnyi metod Galr'kina na trekhmernykh tetraedral'nykh setkakh. Ispol'zovanie operatornogo metoda programmirovaniya // Matematicheskoe modelirovanie. — 2017. — Vol. 29, No. 2. — P. 3–22.)

- Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика. — М.: Наука, Гл. ред. физ-мат. лит. — 1986. — 736 с.
Landau L. D., Lifshits Ye. M. Gidrodinamika [Hydrodynamics]. — Moscow: Nauka, Gl. red. fiz-mat. lit. — 1986. — 736 p. (in Russian).
- Милокова О. Ю., Тишкин В. Ф. Многосеточный метод для уравнения теплопроводности с разрывным коэффициентом со специальным выбором сеток // Математическое моделирование. — 2015. — Т. 27, № 9. — С. 17–32.
Milyukova O. Yu., Tishkin V. F. A multigrid method for a heat equation with discontinuous coefficients with a special choice of grids // Mathematical Models and Computer Simulations. — 2016. — Vol. 8, Iss. 2. — P. 118–128. (Original Russian paper: Milyukova O. Yu., Tishkin V. F. Mnogosetochnyi metod dlya uravneniya teploprovodnosti s razryvnyy koeffitsientom so spetsial'nyy vyborom setok // Matematicheskoe modelirovanie. — 2015. — Vol. 27, No. 9. — P. 17–32.)
- Монин А. С. Турбулентность и микроструктура в океане // Успехи физических наук. — 1973. — Т. 109, № 2. — С. 333–354.
Monin A. S. Turbulentnost' i mikrostruktura v okeane [Ocean Turbulence and Microstructure] // Uspekhi fizicheskikh nauk. — 1973. — Vol. 109, No. 2. — P. 333–354 (in Russian).
- Никитина А. В., Пучкин М. В. и др. Дифференциально-игровая модель предотвращения заморов в мелководных водоемах // Управление большими системами: сборник трудов. — 2015. — № 55. — С. 343–361.
Nikitina A. V., Puchkin M. V. et al. Differentsial'no-igrovaya model' predotvrashcheniya zamorov v melkovodnykh vodoemakh [A differential-game model of preventing fish suffocation in shallow reservoirs] // Upravlenie bolshimi sistemami [Control of Large-Scale Systems]. — 2015. — No. 55. — P. 343–361 (in Russian).
- Никитина А. В., Сухинов А. И., Угольницкий Г. А., Усов А. Б., Чистяков А. Е., Пучкин М. В., Семенов И. С. Оптимальное управление устойчивым развитием при биологической реабилитации Азовского моря // Матем. моделирование. — 2016. — Т. 28, № 7. — С. 96–106.
Nikitina A. V., Sukhinov A. I., Ugolnitskiy G. A., Usov A. B., Chistyakov A. E., Puchkin M. V., Semenov I. S. Optimal control of sustainable development in biological rehabilitation of the Azov Sea // Math. Models Comput. Simul. — 2017. — Vol. 9, No. 1. — P. 101–107. (Original Russian paper: Nikitina A. V., Sukhinov A. I., Ugol'nitskii G. A., Usov A. B., Chistyakov A. E., Puchkin M. V., Semenov I. S. Optimal'noe upravlenie ustoichivym razvitiem pri biologicheskoi reabilitatsii Azovskogo morya // Matem. modelirovanie. — 2016. — Vol. 28, No. 7. — P. 96–106.)
- Петров Д. И., Петров И. Б., Фаворская А. В., Хохлов Н. И. Численное решение задач сейсморазведки в условиях Арктики сеточно-характеристическим методом // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 2016. — Т. 56, № 6. — С. 1149–1163.
Petrov D. I., Petrov I. B., Favorskaya A. V., Khokhlov N. I. Numerical solution of seismic exploration problems in the Arctic region by applying the grid-characteristic method // Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 2016. — Vol. 56, Iss. 6. — P. 1128–1141. (Original Russian paper: Petrov D. I., Petrov I. B., Favorskaya A. V., Khokhlov N. I. Chislennoe reshenie zadach seismo- razvedki v usloviyakh Arktiki setochno-kharakteristicheskim metodom // Zh. vychisl. matem. i matem. fiz. — 2016. — Vol. 56, No. 6. — P. 1149–1163.)
- Петров И. Б., Фаворская А. В., Хохлов Н. И. Сеточно-характеристический метод на системах вложенных иерархических сеток и его применение для исследования сейсмических волн // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 2017. — Т. 57, № 11 — С. 1804–1811.
Petrov I. B., Favorskaya A. V., Khokhlov N. I. Grid-characteristic method on embedded hierarchical grids and its application in the study of seismic waves // Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 2017. — Vol. 57, Iss. 11. — P. 1771–1777. (Original Russian paper: Petrov I. B., Favorskaya A. V., Khokhlov N. I. Setochno-kharakteristicheskii metod na sistemakh vlozhennykh ierarkhicheskikh setok i ego primeneniye dlya issledovaniya seismicheskikh voln // Zh. vychisl. matem. i matem. fiz. — 2017. — Vol. 57, No. 11. — P. 1804–1811.)
- Самарский А. А. Классы устойчивых схем // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 1967. — Т. 7, № 5. — С. 1096–1133.
Samarskii A. A. Klassy ustoichivykh skhem [Classes of stable schemes] // Zh. vychisl. matem. i matem. fiz. [U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys.]. — 1967. — Vol. 7, No. 5. — P. 1096–1133 (in Russian).
- Сухинов А. И., Чистяков А. Е., Алексеенко Е. В. Численная реализация трехмерной модели гидродинамики для мелководных водоемов на супервычислительной системе // Математическое моделирование. — 2011. — Т. 23, № 3. — С. 3–21.
Sukhinov A. I., Chistyakov A. E., Alekseenko E. V. Chislennaya realizatsiya trekhmernoii modeli gidrodinamiki dlya melkovodnykh vodoemov na supervychislitel'noi sisteme [Numerical Realization of the Three-Dimensional Model of Hydrodynamics for Shallow Water Basins on a High-Performance System] // Matematicheskoe modelirovanie [Mathematical Models and Computer Simulations]. — 2011. — Vol. 23, No. 3. — P. 3–21 (in Russian).

- Сухинов А. И., Чистяков А. Е., Проценко Е. А. О разностных схемах каbare и крест // Вычислительные методы и программирование. — 2019. — Т. 20. — С. 170–181.
Sukhinov A. I., Chistyakov A. E., Protsenko E. A. O raznostnykh skhemakh kabare i krest [Upwind and standard leapfrog difference schemes] // Vychislitelnye metody i programmirovaniye [Numerical Methods and Programming]. — 2019. — Vol. 20, No. 2. — P. 170–181 (in Russian).
- Сухинов А. И., Чистяков А. Е., Шишениа А. В., Тимофеева Е. Ф. Предсказательное моделирование прибрежных гидрофизических процессов на многопроцессорной системе с использованием явных схем // Матем. моделирование. — 2018. — Т. 30, № 3. — С. 83–100.
Sukhinov A. I., Chistyakov A. E., Shishenya A. V., Timofeeva E. F. Predictive Modeling of Coastal Hydrophysical Processes in Multiple-Processor Systems Based on Explicit Schemes // Mathematical Models and Computer Simulations. — 2018. — Vol. 10, No. 5. — P. 648–658. (Original Russian paper: Sukhinov A. I., Chistyakov A. E., Shishenya A. V., Timofeeva E. F. Predskazatel'noe modelirovaniye pribrezhnykh gidrofizicheskikh protsessov na mnogoprotsessornoi sisteme s ispol'zovaniem yavnykh skhem // Matem. modelirovaniye. — 2018. — Vol. 30, No. 3. — P. 83–100.)
- Четверушкин Б. Н. Пределы детализации и формулировка моделей уравнений сплошных сред // Матем. моделирование. — 2012. — Т. 24, № 11. — С. 33–52.
Chetverushkin B. N. Predely detalizatsii i formulirovka modelei uravnenii sploshnykh sred [Resolution limits of continuous media models and their mathematical formulations] // Matem. modelirovaniye [Math. Models Comput. Simul.]. — 2012. — Vol. 24, No. 11. — P. 33–52 (in Russian).
- Четверушкин Б. Н., Якововский М. В. Вычислительные алгоритмы и архитектура систем высокой производительности // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. — 2018. — 052. — 12 с.
Chetverushkin B. N., Yakobovskiy M. V. Vychislitel'nyye algoritmy i arkhitektura sistem vysokoy proizvoditel'nosti [Computational algorithms and architecture of high performance systems] // Preprinty IPM im. M. V. Keldysha [Keldysh Institute Preprints]. — 2018. — 052. — 12 p. (in Russian).
- Шокин Ю. И., Чубаров Л. Б., Марчук Ан. Г., Симонов К. В. Вычислительный эксперимент в проблеме цунами. — Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1989. — 164 с.
Shokin Yu. I., Chubarov L. B., Marchuk An. G., Simonov K. V. Vychislitel'nyy eksperiment v probleme tsunami [Computational experiment in the tsunami problem]. — Novosibirsk: Nauka. Sib. otd-niye, 1989. — 164 p. (in Russian).
- Alekseenko E., Roux B., Sukhinov A., Kotarba R., Fougere D. Coastal hydrodynamics in a windy lagoon // Computers and Fluids. — 2013. — Vol. 77. — P. 24–35.
- Chang S. C., Wang X. Y., Chow C. Y. New developments in the method of space-time conservation element and solution element—applications to two-dimensional time-marching problems, NASA TM 106758 (NASA, December 1994).
- Ezer T., Mellor G. L. Sensitivity studies with the North Atlantic sigma coordinate Princeton // Ocean Model Dynamics of Atmospheres and Oceans. — 2000. — Vol. 32, Iss. 3–4. — P. 185–208. — DOI: 10.1016/S0377-0265(00)00047-6
- Sukhinov A. I., Chistyakov A. E., Timofeeva E. F., Shishenya A. V. Mathematical model for calculating coastal wave processes // Mathematical Models and Computer Simulations. — 2013. — Vol. 5, No. 2. — P. 122–129. — DOI: 10.1134/S2070048213020087
- Thomas J. P., Roe P. L. Development of Non-Dissipative Numerical Schemes for Computational Aeroacoustics // AIAA paper 93-3382-CP, presented at the 11th AIAA Computational Fluid Dynamics Conference, Orlando, Florida, July 6–9. — 1993.