

УДК: 577.38:574.62

## Оптимальный промысел и эволюция путей миграции рыбных популяций

В. Г. Ильичев<sup>а</sup>, Л. В. Дашкевич

Федеральный исследовательский центр Южный научный центр Российской академии наук,  
Россия, 344006, г. Ростов-на-Дону, пр. Чехова, д. 41

E-mail: <sup>а</sup> vitaly369@yandex.ru

*Получено 13.08.2019, после доработки — 11.09.2019.*

*Принято к публикации 11.09.2019.*

Представлена новая дискретная эколого-эволюционная математическая модель, в которой реализованы механизмы поиска эволюционно устойчивых маршрутов миграции рыбных популяций. Предложенные адаптивные конструкции имеют малую размерность и поэтому обладают высоким быстродействием, что позволяет проводить компьютерные расчеты на длительный срок за приемлемое машинное время. При исследовании устойчивости использованы как геометрические подходы нелинейного анализа, так и компьютерные асимптотические методы. Динамика миграции рыбной популяции описывается некоторой марковской матрицей, которая может изменяться в процессе эволюции. В семействе марковских матриц (фиксированной размерности) выделены базисные матрицы, которые используются для генерации маршрутов миграции мутантов. В результате конкуренции исходной популяции с мутантами выявляется перспективное направление эволюции пространственного поведения рыбы при заданном промысле и кормовой базе. Данная модель была применена к решению проблемы оптимального вылова на долгосрочную перспективу, при условии, что водоем разделен на две части, у каждой из которых свой собственник. При решении оптимизационных задач используется динамическое программирование, основанное на построении функции Беллмана. Обнаружена парадоксальная стратегия заманивания, когда один из участников промысла на своей акватории временно сокращает вылов. В этом случае мигрирующая рыба больше времени проводит в этом районе (при условии равной кормовой базы). Такой маршрут эволюционно закрепляется и не изменяется даже после возобновления промысла в этом районе. Второй участник промысла может восстановить статус-кво, применив заманивание на своей части акватории. Возникает бесконечная последовательность заманиваний — своеобразная игра в поддавки. Введено новое эффективное понятие — внутренняя цена рыбной популяции, зависящая от района водоема. По сути, эти цены представляют собой частные производные функции Беллмана и могут быть использованы в качестве налога на выловленную рыбу. В этом случае проблема многолетнего промысла сводится к решению задачи одногодичной оптимизации.

Ключевые слова: многолетний промысел, оптимизация, пространственная адаптация, стратегия заманивания, внутренние цены

Публикация подготовлена в рамках реализации ГЗ ЮНЦ РАН, проект № АААА-А18-118122790121-5, а также гранта РФФИ (№ 18-01-00453).

UDC: 577.38:574.62

## Optimal fishing and evolution of fish migration routes

V. G. Il'ichev<sup>a</sup>, L. V. Dashkevich

<sup>1</sup> Federal Research Centre The Southern Scientific Centre of the Russian Academy of Sciences,  
41 Chekhov st., Rostov-on-Don, 344006, Russia

E-mail: <sup>a</sup> vitaly369@yandex.ru

*Received 13.08.2019, after completion — 11.09.2019.  
Accepted for publication 11.09.2019.*

A new discrete ecological-evolutionary mathematical model is presented, in which the search mechanisms for evolutionarily stable migration routes of fish populations are implemented. The proposed adaptive designs have a small dimension, and therefore have high speed. This allows carrying out calculations on long-term perspective for an acceptable machine time. Both geometric approaches of nonlinear analysis and computer “asymptotic” methods were used in the study of stability. The migration dynamics of the fish population is described by a certain Markov matrix, which can change during evolution. The “basis” matrices are selected in the family of Markov matrices (of fixed dimension), which are used to generate migration routes of mutant. A promising direction of the evolution of the spatial behavior of fish is revealed for a given fishery and food supply, as a result of competition of the initial population with mutants. This model was applied to solve the problem of optimal catch for the long term, provided that the reservoir is divided into two parts, each of which has its own owner. Dynamic programming is used, based on the construction of the Bellman function, when solving optimization problems. A paradoxical strategy of “luring” was discovered, when one of the participants in the fishery temporarily reduces the catch in its water area. In this case, the migrating fish spends more time in this area (on condition of equal food supply). This route is evolutionarily fixed and does not change even after the resumption of fishing in the area. The second participant in the fishery can restore the status quo by applying “luring” to its part of the water area. Endless sequence of “luring” arises as a kind of game “giveaway”. A new effective concept has been introduced — the internal price of the fish population, depending on the zone of the reservoir. In fact, these prices are Bellman's private derivatives, and can be used as a tax on caught fish. In this case, the problem of long-term fishing is reduced to solving the problem of one-year optimization.

Keywords: long-term fishing, optimization, spatial adaptation, strategy of luring, internal prices

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2019, vol. 11, no. 5, pp. 879–893 (Russian).

The research is carried out in the frame of government task of SSC RAS under project (state registration No. AAAA-A18-118122790121-5) and grant RFBR No. 18-01-00453.

## 1. Введение

Разработка стратегий оптимального промысла и анализ сопутствующих явлений весьма популярны в теоретических и прикладных компьютерных исследованиях ([Скалецкая и др., 1979; Clark, 2010] и т. д.). В основном здесь обсуждаются или вопросы максимизации многолетнего вылова, или проблемы устойчивости равновесий в рамках жестких математических моделей. Так, в работе [Ильичев и др., 2000] была показана возможность стабилизации хаотической динамики [Якобсон, 1976] в модели Риккера [Ricker, 1954] при действии оптимального промысла, в [Абакумов, Израильский, 2017] продемонстрировано сглаживающее действие промысла при случайных воздействиях среды, в статье [Тютюнов и др., 2019] показано преобладающее влияние факторов среды над промыслом (более или менее выраженное в зависимости от толерантности вида).

Ниже ключевым элементом модели будет формализация процесса миграции. Известно много различных схем, укажем свежие примеры: дискретный ареал [Сенашова, Садовский, 2014], непрерывный ареал [Будянский, Цибулин, 2011] и другие.

Отметим, что в зарубежных работах рассматривается примерно тот же круг вопросов о влиянии на промысел стохастической среды и видового разнообразия [Mendelssohn, 1980], сезонности и пространственной неоднородности [Hilborn, Walters, 1986]. Большое количество соответствующих примеров приведено в современной монографии [Anderson, Seijo, 2010]. В ряде перечисленных работ модельный механизм миграции основан на физико-химическом законе Фика (о перемещении распределения эксплуатируемой популяции пропорционально пространственному градиенту). Это не всегда соответствует натурным наблюдениям. Более приемлемым для описания движения популяции является использование марковской матрицы [Tuck, Passingham, 1994].

Наряду с динамическими моделями при обсуждении проблем промысла используются и теоретико-игровые методы [Mazalov, Rettieva, 2004]. Весьма экзотические способы промысла и их последствия упомянуты в обзоре [Фрисман и др., 2019]: вылов рыб определенного возраста, размера или пола.

В традиционных моделях оптимального вылова, как правило, не учитывается эволюционный ответ рыбной популяции на промысел. Так, характер вылова может вызвать изменения в маршрутах миграции. Требование учета механизма адаптации при моделировании позволяет по-новому взглянуть на привычную задачу оптимизации промысла.

## 2. Постановка задачи, основные обозначения

Следует выделить две основные проблемы.

Первая трудность заключается в эффективной реализации эволюционного процесса. Напомним, что в известных работах, например в [Свирижев, Пасеков, 1982], предлагается прямое копирование биологических факторов. А именно: сначала задается достаточно большой набор близких субпопуляций (мутантов) с несколько различающимися параметрами, а затем, в результате конкуренции, выявляется победитель — субпопуляция с «наилучшим» набором параметров. Такой пассивный подход требует задания тысячи и более переменных и при компьютерной реализации вызывает значительные затраты машинного времени. Напротив, в работе [Ильичев, Ильичева, 2014] был предложен активный метод адаптации, когда задается малое число мутантов, а параметры исходной популяции медленно изменяются.

Вторая трудность связана с неоднозначностью исходов эволюционного процесса в моделях [Фрисман и др., 2019]. Так, в работе [Ильичев, Ильичева, 2018] при поиске маршрутов (или матриц) миграции в зависимости от пространственного распределения кормовых ресурсов было обнаружено, что финальная матрица сильно зависит от выбора начальной. При этом неожиданно оказалось, что все такие финальные матрицы имеют практически один и тот же положительный собственный вектор  $\pi$ . Этот (*перроновский*) вектор оказывается единственным

[Робертс, 1986]. Каждая его компонента  $\pi_i$  является относительным временем пребывания популяции в  $i$ -м районе. Поэтому всякое адаптивное поведение сводится, по сути, к перестройке времен пребывания. Следовательно, матрица является лишь одной из многих *форм* конкретной миграции, а истинным *содержанием* миграции оказывается перроновский вектор. Такая «однозначность» будет ниже использована для «адекватной» трактовки результатов процесса миграции в зависимости от той или иной стратегии вылова.

Далее, задачу оптимального промысла можно дополнить экономической начинкой, основанной на идее внутренних цен рыбной популяции для различных районов. Это позволяет задать эффективные экономические механизмы: налогообложение, торговые обмены и др.

В данной статье приведена иллюстрация указанных подходов.

### 3. Миграция и адаптация рыбных популяций

Пусть водоем (например, Азовское море) разбит на два района —  $R$  и  $U$ , в каждом из которых производится вылов. Предполагается, что рыбная популяция мигрирует между этими районами. Формально пусть  $x_t$  и  $y_t$  — текущие численности данной популяции в районах  $R$  и  $U$  соответственно. Тогда ее перемещение за единицу времени задается линейной моделью

$$\begin{pmatrix} x_{t+1} \\ y_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где  $m_{ij} \geq 0$ . Поскольку общая численность популяции при чистой миграции не меняется, сумма элементов по каждому столбцу равна 1. Такие матрицы называют марковскими. Удобно представлять двумерные марковские матрицы в следующей форме:

$$M = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \beta \\ \alpha & 1-\beta \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где  $0 \leq \alpha \leq 1$  и  $0 \leq \beta \leq 1$ . Внедиагональные элементы  $\alpha$  и  $\beta$  характеризуют интенсивность перемещения популяции. Так,  $\beta$  — это доля популяции, которая может перейти из  $U$ -района в  $R$ -район; аналогично:  $\alpha$  определяет долю популяции, переходящую из  $R$ -района в  $U$ -район.

Ниже воспользуемся представлением матриц вида (2) как некоторых точек плоскости:

$$M \rightarrow (\alpha, \beta). \quad (3)$$

В совокупности они заполняют квадрат  $Q = [0,1] \times [0,1]$  с вершинами  $(0,0)$ ,  $(0,1)$ ,  $(1,1)$ ,  $(1,0)$ . Каждая точка  $Q$  является выпуклой комбинацией этих вершин. По сути, они составляют своеобразный выпуклый базис в  $Q$ . Построим соответствующие базисные матрицы:

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Считаем, что исходная популяция с матрицей миграции  $M_0$  может породить мутантов с маршрутами  $(\mu)$ , близкими к  $M_0$ , а именно:

$$\mu = (1-\varepsilon)M_0 + \varepsilon E_i, \quad (4)$$

где  $\varepsilon > 0$  и мало,  $E_i$  — одна из базисных матриц. Для полноты картины можно выбирать малый параметр  $\varepsilon$  и порядок генерации базисных матриц случайным образом.

В процессе конкуренции исходной популяции с семейством таких мутантов может выявиться сильный мутант, численность которого превосходит численность исходной популяции

в 10 и более раз. Если сильных мутантов несколько, то выбираем самого сильного (для всякого более слабого мутанта порождаем новый маршрут (4) с другими  $\varepsilon$  и  $E_i$ ). Тогда считаем, что такой мутант задает направление естественного отбора. А именно, пусть  $\mu^*$  — матрица миграции сильного мутанта. Тогда деформируем матрицу исходной популяции следующим образом:

$$M_0 \rightarrow (1 - \xi)M_0 + \xi\mu^*, \quad (5)$$

где  $\xi > 0$  и мало. Параметр  $\xi$  задает скорость адаптации.

Пусть  $M_0$  и  $M_1$  — две марковские матрицы. Показано, что к  $M_1$  можно сколь угодно близко подойти с помощью композиции формул вида (4) и (5) при подходящем выборе базисных матриц [Ильичев, 2012]. Содержательно это означает практическую достижимость любой марковской матрицы с помощью композиции формул вида (4) и (5) из любой начальной  $M_0$ .

Далее, введем параметр  $\lambda \in (0, 1)$ , который характеризует долю  $R$ -зоны. Так, обозначим через  $K$  общую величину кормовой базы в водоеме. В этом случае  $K_1 = \lambda K$  — это величина корма в  $R$ -зоне и  $K_2 = (1 - \lambda)K$  — количество корма в  $U$ -зоне. Ниже будем обсуждать простейший случай, когда запасы корма фиксированы и не изменяются в каждом районе.

В оптимизационном блоке модели рассматривается промысел в обеих зонах на многолетний период. Обозначим через  $B_T(x, y)$  оптимальный доход за  $(T + 1)$  лет, когда начальные запасы рыбы равны  $x$  (в  $R$ -зоне) и  $y$  (в  $U$ -зоне).

Разумеется, в процессе эксплуатации численность рыбы изменяется. Соответствующую траекторию обозначим через  $\{x_t, y_t\}$ . Согласно методу динамического программирования [Беллман, 1960] полагаем

$$B_T(x, y) = \sum_{t=0}^T \gamma^t [p(u_t) + q(v_t)] \rightarrow \max \quad (6)$$

по всем допустимым выловам  $\{u_t\}$  и  $\{v_t\}$  в первом и во втором районах, т. е.  $0 \leq u_t \leq x_t$  и  $0 \leq v_t \leq y_t$  для каждого  $t$ . Здесь  $\gamma$  — коэффициент дисконтирования (полагаем  $\gamma = 0.9$ ),  $p, q$  — вогнутые и монотонно возрастающие функции полезности с  $p(0) = q(0) = 0$ . Ниже для расчетов возьмем  $p(w) = q(w) = 10 \cdot \frac{w}{1+w}$ . Разумеется,  $p'(0) = q'(0) = 10$ . Отметим, что выбор равных функций полезности не имеет большого значения.

Динамику численности ( $z_t$ ) немигрирующей популяции формально представим в виде  $z_{t+1} = f(z_t, K)$ . Ниже будет использован простейший вариант нелинейного роста  $f$ , когда она является гладкой, строго возрастающей и вогнутой функцией  $x$ ;  $f(0, K) = 0$  и  $f'_z(0, K) > 1$ . Последнее неравенство гарантирует положительную численность популяции для всех  $t$ . Следует также установить *ограниченность роста* ее численности, например, в следующей форме: при некотором  $\omega < 1$  имеет место  $f(z, K) < \omega \cdot z$  для каждого  $K$  и для всех достаточно больших  $z$ . В частности, ниже будет использована зависимость Контуа [Contois, 1959]:

$$f(z, K) = z \left( d + r \frac{K}{K + z} \right),$$

где  $d = 0.25$  и  $r = 3$  — скорости смертности и роста. Разумеется, данная функция удовлетворяет оговоренным выше условиям. Отметим, что данная скорость роста относится к популярному классу дробно-рациональных трофических функций [Arditi, Ginzburg, 2012] и, по мнению биологов, является вполне адекватной для высокопродуктивных водоемов.

Обозначим для краткости  $f_1(z) = f(z, K_1)$  и  $f_2(z) = f(z, K_2)$ . При заданной матрице миграции и последовательности ежегодных выловов динамика фазовых переменных в водоеме задается системой

$$\begin{aligned}x_{t+1} &= (1 - \alpha)f_1(x_t - u_t) + \beta f_2(y_t - v_t), \\y_{t+1} &= \alpha f_1(x_t - u_t) + (1 - \beta)f_2(y_t - v_t).\end{aligned}\quad (7)$$

Компьютерные расчеты показали, что траектория (7) при оптимальных стратегиях вылова стремится к некоторому универсальному равновесию.

Пусть маршрут исходной популяция задается матрицей  $M_0$ . Назовем  $M_0$  эволюционно устойчивой (*ЭУ-матрицей*), если данная популяция не вытесняется своими мутантами с близкими к  $M_0$  маршрутами. Поэтому в природе могут реализоваться только ЭУ-матрицы миграции. В наиболее сильном варианте этого понятия количество мутантов может быть любым. В простейшем варианте компьютерной реализации можно ограничиться и одним мутантом. В приведенных ниже расчетах использовались два мутанта, для которых перебор базисных матриц происходил в противоположных направлениях (т. е. по часовой стрелке и против часовой стрелки).

Актуальная задача: насколько зависят получаемые результаты от количества генерируемых мутантов? Предварительные расчеты показали, что найденные здесь закономерности слабо обусловлены числом мутантов. Но, строго говоря, это пока открытый вопрос.

Для краткости запишем модель (7) в форме

$$\tilde{x} = P(x - u, y - v), \quad \tilde{y} = Q(x - u, y - v).\quad (8)$$

Очевидно, все функции в (8) являются строго возрастающими и вогнутыми по каждой переменной. Теперь согласно известной схеме динамического программирования при построении  $B_T(x, y)$  целесообразно воспользоваться рекурсией Беллмана:

$$B_{T+1}(x, y) = \max[p(u) + q(v) + \gamma B_T(\tilde{x}, \tilde{y})]\quad (9)$$

по всем  $0 \leq u \leq x$ ,  $0 \leq v \leq y$ . Разумеется,  $B_0(x, y) = p(x) + q(y)$ . Каждая  $B_T(x, y)$  является непрерывной функцией.

**Утверждение 1.** *Рекурсия (9) сходится к некоторой предельной непрерывной функции  $B(x, y)$  (обоснование см. в приложении 1).*

Отметим, что при бесконечном горизонте планирования промысла оптимальный вылов зависит только от значений фазовых переменных. Напротив, при конечном горизонте планирования оптимальные выловы  $u_t(x, y)$  и  $v_t(x, y)$  существенно определяются моментом времени  $t$ . Поэтому исследование бесконечномерной версии данной задачи удобнее и проще.

Следует сказать, что  $B(x, y)$  наследует свойства своих функций полезности, поэтому и сама функция Беллмана строго возрастает и вогнута по обоим переменным. Отметим, что достаточно общая схема локальных свойств глобальным отображением предложена в работе [Ильичев, 2003]. Некоторые ее идеи используются и в современном системном программировании [Непейвода, 2016].

Согласно известной теореме Лебега [Колмогоров, Фомин, 1972] всякая монотонная функция почти всюду дифференцируема. Отметим, что возможные точки недифференцируемости вогнутой функции устроены просто. Так, например, всегда существуют  $B'_x(x - 0, y)$  и  $B'_x(x + 0, y)$ , при этом выполняется неравенство  $B'_x(x - 0, y) > B'_x(x + 0, y)$ . Имеются веские основания полагать, что здесь добавка «почти» является лишней (сравните с [Рохлин, 2000]). Ниже для краткости также будем опускать эту добавку. Например, из вогнутости  $B(x, y)$  по переменной  $x$  следует, что  $B'_x(x, y)$  убывает по  $x$ . Отметим, что из строгой вогнутости и непрерывности функции Беллмана вытекает непрерывность управления [Ланкастер, 1972].

Математическую функцию  $B(x, y)$  можно трактовать и как большую экономическую функцию полезности, когда начальные запасы рыбной популяции по районам равны  $x$  и  $y$ . Поэтому частные производные  $B'_x(x, y)$  и  $B'_y(x, y)$  можно трактовать как внутренние цены рыбы в первом и во втором районах соответственно.

Большое значение имеют два утверждения, приведенных ниже.

**Утверждение 2.** Пусть в точке  $(x, y)$  оптимальный вылов  $u = u(x, y)$  положителен, тогда существует  $B'_x(x, y)$  и выполняется соотношение

$$B'_x(x, y) = p'(u). \quad (10)$$

**Утверждение 3.** Пусть в точке  $(x, y)$  оптимальный вылов  $v = v(x, y)$  положителен, тогда существует  $B'_y(x, y)$  и выполняется соотношение

$$B'_y(x, y) = q'(v).$$

Обоснование данных утверждений о полезности приведено в приложении 2.

Величину, например,  $c = B'_x(x, y)$  можно использовать в качестве единицы налога на выловленную рыбу в первом районе. Так, обсудим решение следующей простой задачи оптимизации рыболовства в первом районе:

$$[p(u) - c \cdot u] \rightarrow \max \text{ по всем } u \in [0, x]. \quad (11)$$

Выясним, насколько сильно отличается управление при (11) и в (6). Для задачи (11) рассмотрим два случая.

1. Пусть  $c \geq p'(0) = 10$ , тогда целевая функция

$$H(u) = p(u) - c \cdot u \quad (12)$$

является строго убывающей, поскольку ее производная отрицательна:

$$H'(u) = p'(u) - c < 0.$$

Поэтому здесь решение  $u^* = 0$  оказывается оптимальным.

2. Пусть теперь  $c < 10$ . В силу строгой вогнутости  $H$  искомое управление должно удовлетворять уравнению  $H'(u^*) = 0$ , т. е.  $c = p'(u^*)$ . Очевидно, данное соотношение совпадает с выражением (10).

Аналогично: величину  $B'_y(x, y)$  можно использовать в качестве эффективного налога на вылов во втором районе.

Таким образом, решение проблемы многошаговой оптимизации (6) свелось к решению двух задач одношаговой оптимизации (11).

Любопытно изобрести некоторые глобальные экономические характеристики промысла. Например, вычислить средние значения внутренних цен  $B'_x(x, y)$  или  $B'_y(x, y)$  по всем  $(x, y)$ .

Однако оказалось, что такие значения не очень чувствительны к изменению параметров водоема. Гораздо более эффективными показали себя следующие характеристики:  $\bar{c}_1 = B'_x(\bar{x}, \bar{y})$  и  $\bar{c}_2 = B'_y(\bar{x}, \bar{y})$ , где  $(\bar{x}, \bar{y})$  — среднее значение асимптотик достаточно представительного пучка траекторий модели (7).

#### 4. Коадаптация промысла и миграции

Поиск стратегии оптимального вылова и построение ЭУ-матриц миграции включает в себя два последовательных этапа (блока).

1. Блок «Оптимизация». При заданной матрице миграции ( $M$ ) на основе метода динамического программирования производится поиск оптимальных выловов (функций  $u, v$ ). Пусть  $x$  и  $y$  — соответствующие численности популяции в двух районах, тогда здесь строим отображение

$$M \rightarrow \langle u(x, y), v(x, y) \rangle.$$

2. Блок «Эволюция». При фиксированных функциях вылова  $u(x, y), v(x, y)$  реализуется конкурентное взаимодействие исходной популяции (с матрицей миграции  $M$ ) с несколькими мутантами, матрицы которых близки к  $M$ . Когда в результате отбора выявляется сильный мутант, производим некоторую деформацию  $M$ . Так, численно реализуется отображение

$$\langle u(x, y), v(x, y) \rangle \rightarrow M_1.$$

Если в результате многократного повторения этапов 1 и 2 этот процесс сходится, то определяются эволюционно устойчивая матрица  $M^*$  и выловы  $u^*, v^*$  при заданном значении корма в районах  $R$  (первом) и  $U$  (втором). В каждом случае произведены соответствующие расчеты при вариации начальных значений  $(x, y)$  на некоторой сетке. В качестве итоговых значений определялись средние значения  $\bar{x}, \bar{y}$  и  $\bar{u} = \overline{u(x, y)}, \bar{v} = \overline{v(x, y)}$ .

Пусть кормовой ресурс  $R$ -зоны характеризуется параметром  $\lambda$ , который принимает дискретные значения от 0.1 до 0.9. Этот коэффициент является долей  $R$ -зоны в общей акватории водоема. Представляет интерес анализ поведения экологических элементов при вариации  $\lambda$ . Основные результаты компьютерных расчетов представлены на рис. 1.

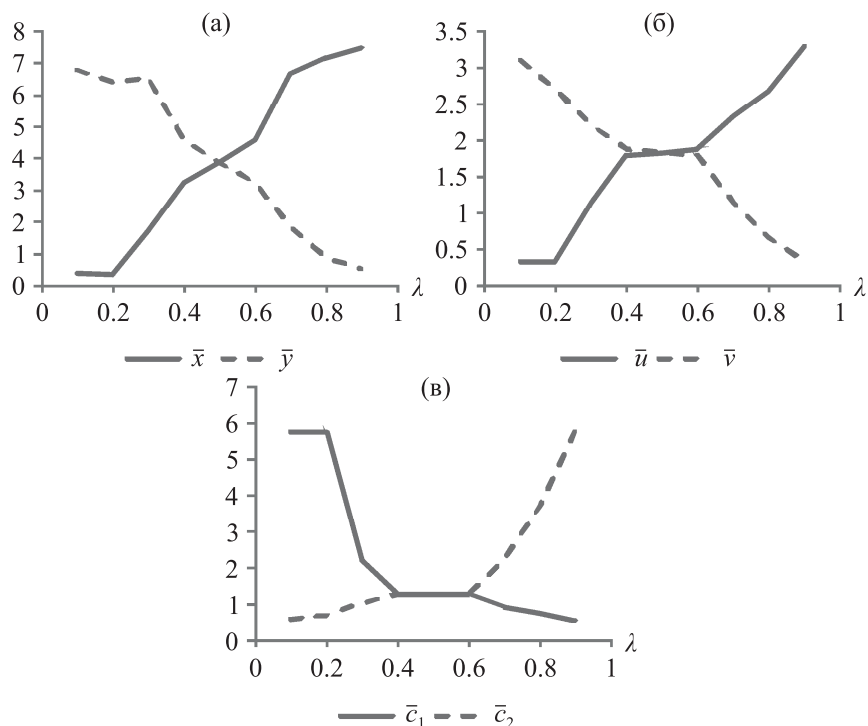


Рис. 1. Средние значения переменных (а), управлений (б) и цен (в) в модели (7) в зависимости от кормового ресурса  $\lambda$  (в долях от общей кормовой базы). Здесь  $\bar{x}$  и  $\bar{y}$  — запасы рыбы (у. е.),  $\bar{u}$  и  $\bar{v}$  — выловы (у. е.),  $\bar{c}_1$  и  $\bar{c}_2$  — цены на рыбу (у. е.) в районах  $R$  и  $U$  соответственно

Теперь обсудим динамику основных переменных в модели (7) в свете роста параметра  $\lambda$  от 0.1 до 0.9. Так, естественным образом средняя численность и средний вылов рыбы возрастают в первом районе из-за увеличения там кормового ресурса. Противоположным образом из-



меняются численность и вылов во втором районе. Разумеется, чем меньше рыбы, тем выше ее цена. Например, при  $c_1 > c_2$  возможна выгодная продажа дешевой рыбы (собственника второго района) собственнику первого района.

Отметим, что вектор  $\pi$  пробегает значения

$$\begin{pmatrix} 0.06 \\ 0.94 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.06 \\ 0.94 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.21 \\ 0.79 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.41 \\ 0.59 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.59 \\ 0.41 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.78 \\ 0.22 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.89 \\ 0.11 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.94 \\ 0.06 \end{pmatrix}.$$

Здесь наиболее существенные изменения компонент перроновского вектора происходят при  $\lambda \approx 1/3$  и  $\lambda \approx 2/3$ .

## 5. Промысел как эволюционная игра в поддавки

В рамках предыдущей проблематики о конкурентном промысле двух собственников акватории обсудим возможность увеличения дохода, например, участника промысла  $R$  путем *временного добровольного* уменьшения своей величины вылова.

Будем действовать в духе иерархического управления, при этом несколько уточним прежние соглашения о стратегиях вылова. Считаем, что Центр на основе решения задачи (6) выдает рекомендации собственникам районов акватории о квоте вылова, которая не должна превышать величин  $u$  и  $v$ , зависящих от состояния рыбных запасов  $(x, y)$ . Разумеется, можно в какие-то годы вылавливать и меньше (реализуя либеральную стратегию вылова).

Рассмотрим следующую симметричную ситуацию. Пусть в начальный момент времени матрица миграции имеет вид

$$M_0 = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$$

и кормовые ресурсы районов акватории данных собственников одинаковы, т. е.  $\lambda = 0.5$ . Ниже удобно использовать популярную шахматную терминологию (рис. 2).

Этап 1 (*равновесная, безобидная ситуация*). Если участники промысла действуют согласно рекомендациям Центра (с учетом вида  $M_0$  и решения задачи (6)), то матрица миграции сохраняется и устанавливаются следующие значения:  $\bar{u} = \bar{v} = 1.85$ ,  $\bar{x} = \bar{y} = 3.89$ ,  $\bar{c}_1 = \bar{c}_2 = 1.28$ . Разумеется, для  $M_0$  имеет место  $\pi = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}$ .

Этап 2 (*R проигрывает материал, но получает позиционное преимущество*). Пусть теперь собственник  $R$  вылавливает рыбу на 75 % от рекомендуемого уровня, а собственник  $U$  ведет промысел в 100 % от положенного. Тогда  $R$ -акватория становится более привлекательной для рыб. Происходит «заманивание» рыбной популяции в  $R$ -акваторию. В результате эволюции матрица миграции преобразуется к виду

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0.54 & 0.54 \\ 0.46 & 0.46 \end{pmatrix}$$

и достигаются новые значения:  $\bar{u} = 1.48$  и  $\bar{v} = 2.12$ ,  $\bar{x} = 4.68$  и  $\bar{y} = 3.96$ ,  $\bar{c}_1 = \bar{c}_2 = 1.04$ .

Очевидно, для  $M_1$  имеет место  $\pi = \begin{pmatrix} 0.54 \\ 0.46 \end{pmatrix}$ , а поскольку  $\pi_1 = 0.54 > \pi_2 = 0.46$ , то  $R$ -зона стала предпочтительнее  $U$ -зоны. По-сути,  $R$  сыграл в поддавки с  $U$ , но получил позиционное преимущество в форме более выгодной матрицы миграции.

Этап 3 (*R* реализует позиционное преимущество и получает больший материал). С учетом вида матрицы  $M_1$ . Центр выдает новые рекомендации оптимального вылова, которые теперь на 100 % реализуются обоими участниками:  $\bar{u} = 2.03$  и  $\bar{v} = 1.7$ ,  $\bar{x} = 4.21$  и  $\bar{y} = 3.56$ ,  $\bar{c}_1 = 1.14$  и  $\bar{c}_2 = 1.45$ .

Если теперь участники промысла *R* и *U* придерживаются данного вылова, то матрица  $M_1$  уже не изменяется. Следовательно,  $M_1$  является эволюционно устойчивой при указанных управлениях. Самое главное, что после процедуры «заманивания» вылов в акватории *R* всегда будет больше, чем в районе *U*. А поскольку  $\bar{c}_1 < \bar{c}_2$ , то у участника *R* возникает возможность дополнительной торговой выгоды.

Вероятно, чтобы восстановить прежний статус-кво, участник промысла *U* должен, в свою очередь, применить процедуру заманивания. Проверим, так ли это?

Этап 4 (*U* проигрывает материал, но получает позиционное преимущество). При заданной матрице миграции  $M_1$ . Центр выдает рекомендации по вылову, которые *R* выполняет на 100 %, а *U* реализует лишь на 75 %. В результате преобразуется матрица миграции до

$$M_2 = \begin{pmatrix} 0.47 & 0.47 \\ 0.53 & 0.53 \end{pmatrix},$$

характеризующей предпочтение рыбой акватории *U*. Окончательно устанавливаются следующие значения переменных:  $\bar{u} = 2.07$  и  $\bar{v} = 1.6$ ,  $\bar{x} = 4.0$  и  $\bar{y} = 4.57$ ,  $\bar{c}_1 = 1.04$  и  $\bar{c}_2 = 1.04$ . Разумеется, для  $M_2$  имеет место  $\pi = \begin{pmatrix} 0.47 \\ 0.53 \end{pmatrix}$ .

Здесь участник промысла *U* фактически применил стратегию игры в поддавки с *R*, поскольку вылов *U* уменьшился. Но зато возросла численность рыбы на *U*-акватории.

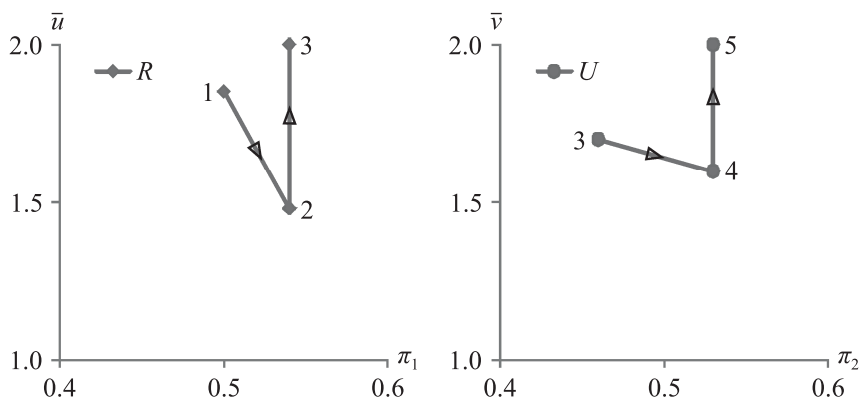


Рис. 2. Дорожная карта *R*- и *U*-заманиваний. *R*) отрезок 1 → 2 соответствует снижению *R*-вылова и порождает увеличение времени пребывания рыбной популяции в первом районе ( $\pi_1$ ) + отрезок 2 → 3 означает увеличение *R*-вылова при сохранении  $\pi_1$ ; *U*) отрезок 3 → 4 соответствует снижению *U*-вылова и порождает увеличение времени пребывания рыбной популяции во втором районе ( $\pi_2$ ) + отрезок 4 → 5 означает увеличение *U*-вылова при сохранении  $\pi_2$

Этап 5 (*U* реализует позиционное преимущество, добываясь большего материала). Теперь Центр, располагая матрицей  $M_2$ , выдает новые рекомендации вылова участникам совместного промысла. При их 100 % реализации получают следующие значения переменных:  $\bar{u} = 1.65$  и  $\bar{v} = 2$ ,  $\bar{x} = 3.5$  и  $\bar{y} = 4.05$ ,  $\bar{c}_1 = 1.45$  и  $\bar{c}_2 = 1.14$ . В выигрыше (в смысле вылова) оказывается *U*; более того, в результате применения данных стратегий вылова матрица  $M_2$  не изменяется.

Возникает ситуация, когда вполне вероятным для оптимизации промысла оказывается бесконечная череда  $R$ - и  $U$ -заманиваний. Все это порождается влиянием эволюционного процесса.

Разумеется, трудно рекомендовать стратегию заманивания к практическому применению, поскольку процесс изменения маршрута миграции может занимать годы. Поэтому вынужденная смена стратегий заманивания представляет скорее теоретический интерес. Она показывает, что в промысловой конкуренции всегда неявно присутствует дополнительный игрок — эволюция. Смягчение проявления такого сорта парадоксальных ситуаций требует разработки специальных межгосударственных договоренностей и методов их контроля.

## 6. Заключение

Перечислим основные результаты, полученные в данной статье.

1. Сравнительные расчеты показали, что с учетом поведенческой адаптации рыб их вылов снижается. По сути, данный процесс адаптации — это поиск компромисса между наличием корма и выловом.

2. Введено естественное понятие внутренних цен для рыбных запасов в том или ином районе. Внутренние цены могут быть использованы в качестве налога на единицу выловленной рыбы. В этом случае проблема многолетней оптимизации сводится к решению задач максимизации одногодичного вылова. Пространственная неоднородность внутренних цен позволяет конструировать разнообразные торговые механизмы обмена потребляемыми ресурсами.

3. Пусть в водоеме имеются две промысловые зоны, каждая из которых облавливается своим собственником ( $R$  и  $U$ ). Возможна следующая парадоксальная эффективная стратегия долгосрочного вылова. Так, участник промысла  $R$  может на некоторое время существенно сократить свой вылов. Это приведет к эволюционной деформации маршрута миграции рыб с предпочтением первой зоны ( $R$ -заманивание). После этого первый участник промысла организует оптимальный вылов, который всегда будет превышать оптимальный вылов второго участника. Далее, может происходить периодическая смена  $R$ - и  $U$ -заманиваний.

Такая странная стратегия конкурентного промысла обусловлена действием процессов эволюции, и здесь возникает новая проблема поиска согласованного оптимума.

## ПРИЛОЖЕНИЯ

### Приложение 1

Ниже для обоснования утверждения 1 будет использована лемма. При достаточно большом  $S$  на границе прямоугольника  $\Pi = \{(x, y): 0 \leq x \leq \beta S, 0 \leq y \leq \alpha S\}$  векторное поле (7) не направлено наружу.

Обоснование леммы. Обозначим через  $A = (0, 0)$  и  $B = (\beta S, \alpha S)$  две точки из  $\Pi$ . С помощью конуса  $K$  — первого квадранта плоскости — определим следующее отношение частичного порядка: положим  $Z \prec \mathcal{J}$ , если  $(Z - \mathcal{J}) \in K$ . В частности, имеет место  $A \prec B$ .

Обозначим вспомогательную модель с  $u = v = 0$  через (7<sup>0</sup>). Положим отображение  $P: (x_t, y_t) \rightarrow (x_{t+1}, y_{t+1})$ , индуцируемое моделью (7<sup>0</sup>). Легко убедиться:  $P$  — монотонно, т. е. из  $Z \prec \mathcal{J}$  следует  $P(Z) \prec P(\mathcal{J})$ .

Разумеется, теперь  $\Pi$  можно трактовать как промежуточное семейство точек между точками  $A$  и  $B$ . Поэтому достаточно установить, что точки  $\pi(A)$  и  $\pi(B)$  не покидают  $\Pi$ . Так, очевидно, имеет место  $\pi(A) = A$ .

Далее, для  $x$ -компоненты точки  $\pi(B)$  из условия ограниченности роста популяций получаем оценку  $P_x(B) = (1 - \alpha)f_1(\beta S) + \beta f_2(\alpha S) \leq \omega S[(1 - \alpha)\beta + \beta\alpha] < \beta S$ .

Аналогично: для  $y$ -компоненты точки  $\pi(B)$  получаем оценку

$$P_y(B) = \alpha f_1(\beta S) + (1 - \beta) f_2(\alpha S) \leq \omega S[\alpha\beta + (1 - \beta)\alpha] < \alpha S.$$

Последнее. В силу монотонного роста правых частей модели (7) на границе  $\Pi$  векторное поле не будет направлено наружу при всех допустимых неотрицательных  $u$ ,  $v$ . Лемма доказана.

Обозначим через  $C(\Pi)$  семейство всех непрерывных функций от двух переменных с метрикой Чебышёва  $\|w - v\| = \max |w(x, y) - v(x, y)|$  по всем  $(x, y)$  из  $\Pi$ .

Известно, что данное пространство является полным [Колмогоров, Фомин, 1972]. С учетом обозначений (8) на  $C(\Pi)$  зададим оператор  $\Omega$ :

$$\hat{H}(x, y) = \Omega[H] = \max[p(u) + q(v) + \gamma H(\tilde{x}, \tilde{y})]$$

по всем допустимым  $u$ ,  $v$ . Согласно [Ланкастер, 1972] и лемме функция  $\hat{H}(x, y)$  непрерывна, и поэтому  $\Omega$  отображает  $C(\Pi)$  в себя.

Покажем, что  $\Omega$  — сжатие. Так, пусть  $H_1$  и  $H_2$  — две функции из данного пространства. Формально имеем  $\hat{H}_1(x, y) = p(u_1) + q(v_1) + \gamma H_1(\tilde{x}, \tilde{y})$  при своих оптимальных управлениях  $u_1 = u_1(x, y)$  и  $v_1 = v_1(x, y)$ . В рамках предыдущих обозначений справедлива оценка

$$\hat{H}_2(x, y) \geq p(u_1) + q(v_1) + \gamma H_2(\tilde{x}, \tilde{y}).$$

После вычитания последних соотношений находим

$$\hat{H}_1(x, y) - \hat{H}_2(x, y) \leq \gamma[H_1(\tilde{x}, \tilde{y}) - H_2(\tilde{x}, \tilde{y})] \leq \gamma\|H_1 - H_2\|.$$

Подобным образом, используя соответствующие управления  $u_2$  и  $v_2$ , устанавливаем:

$$\hat{H}_2(x, y) - \hat{H}_1(x, y) \leq \gamma\|H_2 - H_1\|.$$

Окончательно находим  $\|\hat{H}_1 - \hat{H}_2\| \leq \gamma\|H_2 - H_1\|$ , и поскольку  $0 < \gamma < 1$ , то оператор  $\Omega$  является сжатием. И значит, для него существует единственная неподвижная точка (непрерывная функция двух переменных). Она и является решением уравнения Беллмана с бесконечным горизонтом управления.

## Приложение 2

В качестве примера приведем обоснование утверждения 2. Так, в данной точке  $(x, y)$  согласно обозначениям (8) и (9) имеет место соотношение

$$B(x, y) = p(u) + q(v) + \gamma B(\tilde{x}, \tilde{y}). \quad (\text{П.1})$$

Пусть  $\varepsilon$  — достаточно малое число, тогда в точке  $(x + \varepsilon, y)$  вылов  $u + \varepsilon$  является допустимым независимо от знака  $\varepsilon$ . Поскольку он не может быть лучше оптимального, то справедливо неравенство

$$B(x + \varepsilon, y) \geq p(u + \varepsilon) + q(v) + \gamma B(\tilde{x}, \tilde{y}). \quad (\text{П.2})$$

Вычитая из (П.2) равенство (П.1), находим  $B(x + \varepsilon, y) - B(x, y) \geq p(u + \varepsilon) - p(u)$ .

Отсюда при  $\varepsilon > 0$  и  $\varepsilon \rightarrow 0$  имеет место

$$B'_x(x + 0, y) \geq p'(u). \quad (\text{П.3})$$

А при  $\varepsilon < 0$  и  $\varepsilon \rightarrow 0$  получаем

$$B'_x(x-0, y) \leq p'(u). \quad (\text{П.4})$$

Согласно вогнутости по переменной  $x$  всегда имеет место неравенство  $B'_x(x-0, y) \geq B'_x(x+0, y)$ , и, следовательно, существует  $B'_x(x, y)$ . С учетом (П.3) и (П.4) выполняется требуемое равенство:

$$B'_x(x, y) = p'(u).$$

## Список литературы (References)

- Абакумов А. И., Израильский Ю. Г.* Стабилизирующая роль структуры рыбной популяции в условиях промысла при случайных воздействиях среды обитания // Компьютерные исследования и моделирование. — 2017. — Т. 9, № 4. — С. 609–620.  
*Abakumov A. I., Izrail'skiy Yu. G.* Stabiliziruyushchaya rol' struktury rybnoy populyatsii v us-loviyakh promysla pri sluchaynykh vozdeystviyakh sredy obitaniya [The stabilizing role of the structure of the fish population in fishing conditions under random environmental influences] // Computer Research and Modeling. — 2017. — Vol. 9, No. 4. — P. 609–620 (in Russian).
- Беллман Р.* Динамическое программирование. — М.: Изд-во иностр. лит., 1960.  
*Bellman R.* Dynamic Programming, 1957. (Russ. ed.: *Bellman R.* Dinamicheskoye programmirovaniye — Moscow: Izd-vo inostr. lit., 1960).
- Будянский А. В., Цибулин В. Г.* Моделирование пространственно-временной миграции близкородственных популяций // Компьютерные исследования и моделирование. — 2011. — Т. 3, № 4. — С. 477–488.  
*Budyanski A. V., Tsybulin V. G.* Modelirovanie prostranstvenno-vremennoj migracii blizkorodstvennykh populjacij [Modeling of spatial-temporal migration for closely related species] // Computer Research and Modeling. — 2011. — Vol. 3, No. 4. — P. 477–488 (in Russian).
- Ильичев В. Г.* Локальные и глобальные свойства неавтономных динамических систем и их приложения в моделях конкуренции // Сибирский математический журнал. — 2003. — Т. 44, № 3. — С. 677–684.  
*Il'ichev V. G.* Lokal'nyye i global'nyye svoystva neavtonomnykh dinamicheskikh sistem i ikh prilozheniya v modelyakh konkurentсии [Local and global properties of non-autonomous dynamical systems and their applications in competition models] // Siberian Mathematical Journal. — 2003. — Vol. 44, No. 3. — P. 677–684 (in Russian).
- Ильичев В. Г.* Гипотезы о закономерностях биологической адаптации. Компьютерные эксперименты // Математ. моделирование. — 2012. — Т. 24, № 10. — С. 15–32.  
*Il'ichev V. G.* Gipotezy o zakonomernostyakh biologicheskoy adaptatsii. Komp'yuternyye eksperimenty [Hypotheses about laws of biological adaptation. Computer experiments] // Matem. Mod. — 2012. — Vol. 24, No. 10. — P. 15–32 (in Russian).
- Ильичев В. Г., Ильичева В. В.* Пространственная адаптация и оптимальный промысел рыбных популяций // Экономика и математические методы. — 2014. — Т. 50, № 3. — С. 119–129.  
*Il'ichev V. G., Il'icheva V. V.* Prostranstvennaya adaptatsiya i optimal'nyy promysel rybnykh populyatsiy [Spatial adaptation and optimal harvesting of fish population] // Economics and mathematical methods. — 2014. — Vol. 50, No 3. — P. 119–129 (in Russian).
- Ильичев В. Г., Ильичева О. А.* Пространственная адаптация популяций в моделях экологии // Биофизика. — 2018. — Т. 63, вып. 2. — С. 373–381.  
*Il'ichev V. G., Il'icheva O. A.* Prostranstvennaya adaptatsiya populyatsiy v modelyakh ekologii [Spatial adaptation of populations in ecology models] // Biophysics. — 2018. — Vol. 63, Iss. 2. — P. 373–381 (in Russian).
- Ильичев В. Г., Рохлин Д. Б., Угольницкий Г. А.* Об экономических механизмах управления биоресурсами // Изв. РАН. Теория и системы управления. — 2000. — № 4. — С. 104–110.  
*Il'ichev V. G., Rokhlin D. B., Ugol'nitskiy G. A.* Ob ekonomicheskikh mekhanizmakh upravleniya biore-sursami [On the economic mechanisms of bioresource management] // Journal of Computer and Systems Sciences International. — 2000. — No. 4. — P. 104–110 (in Russian).

- Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1972.  
*Kolmogorov A. N., Fomin S. V.* Elementy teorii funktsiy i funktsional'nogo analiza [Elements of function theory and functional analysis]. — Moscow: Nauka, 1972 (in Russian).
- Ланкастер К.* Математическая экономика. — М.: Советское радио, 1972.  
*Lancaster K.* Matematicheskaya ekonomika [Mathematical Economics]. — Moscow: Sovetskoe radio, 1972 (in Russian).
- Непейвода Н. Н.* О некоторых возможностях локальных вычислений в теории систем и базах данных // Программные системы, теория и приложения. — 2016. — Т. 7, вып. 4. — С. 145–160.  
*Nepeyvoda N. N.* O nekotorykh vozmozhnostyakh lokal'nykh vychisleniy v teorii sistem i bazakh dannykh [About some possibilities of local computing in the theory of systems and databases] // Program systems, theory and applications. — 2016. — Vol. 7, Iss. 4. — P. 145–160 (in Russian).
- Робертс Ф. С.* Дискретные математические модели с приложением к социальным, биологическим и экологическим задачам. — М.: Наука, 1986.  
*Roberts F. S.* Discrete mathematical models with application to social, biological and environmental problems. — Rutgers University Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey, 1976. (Russ. ed.: *Roberts F. S.* Diskretnyye matematicheskiye modeli s prilozheniyem k sotsial'nyim, biologicheskim i ekologicheskim zadacham. — Moscow: Nauka, 1986.)
- Рохлин Д. Б.* Производная решения функционального уравнения Беллмана и цена биоресурсов // Сибирский журнал индустриальной математики. — 2000 — Т. 3, № 1. — С. 169–181.  
*Rokhlin D. B.* Proizvodnaya resheniya funktsional'nogo uravneniya Bellmana i tsena bioresursov [The derivative of the solution of the Bellman functional equation and the price of bioresources] // Siberian Journal of Industrial Mathematics. — 2000 — Vol. 3, No. 1. — P. 169–181 (in Russian).
- Свирижев Ю. М., Пасеков В. П.* Основы математической генетики. — М.: Наука, 1982.  
*Svirezhev Yu. M., Pasekov V. P.* Osnovy matematicheskoy genetiki [Fundamentals of Mathematical Genetics]. — Moscow: Nauka, 1982 (in Russian).
- Сенашова М. Ю., Садовский М. Г.* Существование и устойчивость стационарной динамики популяции двухвидового сообщества при оптимизационной миграции // Фундаментальные исследования. — 2014. — № 11. — С. 1546–1551.  
*Senashova M. Yu., Sadovskiy M. G.* Sushhestvovanie i ustojchivost' stacionarnoj dinamiki populjatsii dvuhvidovogo soobshhestva pri optimizacionnoj migracii [Existence and stability of a steady dynamics of a two-species community with optimal migration] // Fundamental research. — 2014. — No. 11. — P. 1546–1551 (in Russian).
- Скалецкая Е. И., Фрисман Е. Я., Шапиро А. П.* Дискретные модели динамики численности популяций и оптимизация промысла. — М.: Наука, 1979.  
*Skaletskaya E. I., Frisman E. Ya., Shapiro A. P.* Diskretnyye modeli dinamiki chislennosti populyatsiy i optimizatsiya promysla [Discrete models of population dynamics and fishing optimization]. — Moscow: Nauka, 1979 (in Russian).
- Тютюнов Ю. В., Титова Л. И., Сенина И. Н., Дашкевич Л. В.* Падение запасов и полный запрет промысла Азовского судака подтверждают долгосрочный модельный прогноз // Экология. Экономика. Информатика. Сер.: Системный анализ и моделирование экономических и экологических систем. — 2019. — Т. 1, вып. 4. — С. 271–276.  
*Tyutyunov Yu. V., Titova L. I., Senina I. N., Dashkevich L. V.* Padeniye zapasov i polnyy zapret promysla Azovskogo sudaka podtverzhdayut dolgosrochnyy model'nyy prognoz [The decline in stocks and a complete ban on the fishing of Azov pike perch confirm a long-term model forecast] // Ecology. Economy. Informatics. System analysis and mathematical modeling of ecological and economic systems. — 2019. — Vol. 1, Iss. 4. — P. 271–276 (in Russian).
- Фрисман Е. Я., Кулакова М. П., Левуцкая О. А., Жданова О. А., Неверова Г. П.* Основные направления и обзор современного состояния исследований структурированных и взаимодействующих популяций // Компьютерные исследования и моделирование. — 2019. — Т. 11, вып. 1 — С. 119–151.  
*Frisman E. Ya., Kulakova M. P., Levutskaya O. A., Zhdanova O. A., Neverova G. P.* Osnovnyye napravleniya i obzor sovremennogo sostoyaniya issledovaniy strukturirovannykh i vzaimodeystvuyushchikh populyatsiy [The main directions and review of the current state of research on structured and interacting populations] // Computer Research and Modeling. — 2019. — Vol. 11, No. 1. — P. 119–151 (in Russian).
- Якобсон М. В.* О свойствах однопараметрического семейства динамических систем  $x \mapsto A \cdot x \cdot e^{-x}$  // УМН. — 1976. — 31, 2 (188) — С. 239–240.

- Yakobson M. V.* O svoystvakh odnoperametriceskogo semeystva dinamicheskikh system  $x \mapsto A \cdot x \cdot e^{-x}$  [On the properties of a one-parameter family of dynamical systems  $x \mapsto A \cdot x \cdot e^{-x}$ ] // UMN. — 1976. — 31, 2 (188). — P. 239–240 (in Russian).
- Anderson Lee G., Seijo J. C.* Bioeconomics of fishtrng management. — 1-st Edition. — Ebook Free Down Load: Wiley–Blackwell, 2010.
- Arditi R., Ginzburg L. R.* How Species Interact. — Oxford: University Press, 2012.
- Clark C. W.* Mathematical Bioeconomics / The Mathematics of conservation. — Third Edition. — New Jersey: J. Wiley and Sons Publ., 2010.
- Contois D. E.* Kinetics of bacterial growth relationship between population density and specific growth rate of continuous culture // J. Gen. Microbiol. — 1959. — No. 1–2. — P. 40–50.
- Hilborn R., Walters C. J.* A General Model for Simulation of Stock and Fleet Dynamics in Spatially Heterogeneous Fisheries // Can. J. Fish. Aquat. Sci. — 1987. — No. 44. — P. 1366–1369.
- Mazalov V. V., Rettieva A. N.* A fishery game model with migration reserved territory approach // Game Theory and Applications. — 2004. — Vol. 10. — P. 97–108.
- Mendelssohn R.* Managing Stochastic Multispecies Models // Mathematical Biosciences. — 1980. — No. 49. — P. 249–261.
- Ricker W. E.* Stock and recruitment // J. Fish. Res. Board of Canada. — 1954. — Vol. 11, No. 5. — P. 569–623.
- Tuck G. N., Possingham H. P.* Optimal Harvesting strategies for a metapopulation // Bulletin of Mathematical Biology. — 1994. — Vol. 56, No. 1. — P. 109–127.

