

УДК: 519.876.2

Математические модели боевых и военных действий

В. В. Шумов^{1,a}, В. О. Корепанов^{2,b}

¹ Отделение погранологии Международной академии информатизации,
Россия, 125040, г. Москва, Ленинградский проспект, д. 3/5

² Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН,
Россия, 117342, г. Москва, ул. Профсоюзная, д. 65

E-mail: ^a v.v.shumov@yandex.ru, ^b kvsevolodo@mail.ru

Получено 19.06.2019, после доработки — 04.09.2019.

Принято к публикации 18.10.2019.

Моделирование боевых и военных действий является важнейшей научной и практической задачей, направленной на предоставление командованию количественных оснований для принятия решений. Первые модели боя были разработаны в годы первой мировой войны (М. Осипов, Ф. Ланчестер), а в настоящее время они получили широкое распространение в связи с массовым внедрением средств автоматизации. Вместе с тем в моделях боя и войны не в полной мере учитывается моральный потенциал участников конфликта, что побуждает и мотивирует дальнейшее развитие моделей боя и войны. Рассмотрена вероятностная модель боя, в которой параметр боевого превосходства определен через параметр морального (отношение процентов выдерживаемых потерь сторон) и параметр технологического превосходства. Для оценки последнего учитываются: опыт командования (способность организовать согласованные действия), разведывательные, огневые и маневренные возможности сторон и возможности оперативного (боевого) обеспечения. Разработана теоретико-игровая модель «наступление–оборона», учитывающая действия первых и вторых эшелонов (резервов) сторон. Целевой функцией наступающих в модели является произведение вероятности прорыва первым эшелоном одного из пунктов обороны на вероятность отражения вторым эшелоном контратаки резерва обороняющихся. Решена частная задача управления прорывом пунктов обороны и найдено оптимальное распределение боевых единиц между эшелонами. Доля войск, выделяемая сторонами во второй эшелон (резерв), растет с увеличением значения агрегированного параметра боевого превосходства наступающих и уменьшается с увеличением значения параметра боевого превосходства при отражении контратаки. При планировании боя (сражения, операции) и распределении своих войск между эшелонами важно знать не точное количество войск противника, а свои и его возможности, а также степень подготовленности обороны, что не противоречит опыту ведения боевых действий. В зависимости от условий обстановки целью наступления может являться разгром противника, скорейший захват важного района в глубине обороны противника, минимизация своих потерь и т. д. Для масштабирования модели «наступление–оборона» по целям найдены зависимости потерь и темпа наступления от начального соотношения боевых потенциалов сторон. Выполнен учет влияния общественных издержек на ход и исход войн. Дано теоретическое объяснение проигрыша в военной кампании со слабым в технологическом отношении противником и при неясной для общества цели войны. Для учета влияния психологических операций и информационных войн на моральный потенциал индивидов использована модель социально-информационного влияния.

Ключевые слова: математическая модель, бой, наступление, оборона, война, моральный фактор, уравнения Осипова–Ланчестера, вероятностная модель, теоретико-игровая модель

UDC: 519.876.2

Mathematical models of combat and military operations

V. V. Shumov^{1,a}, V. O. Korepanov^{2,b}

¹ Department borderlogy of International Informatizational Academy,
3/5 Leningradskij pr., Moscow, 125040, Russia

² V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences,
65 Profsoyuznaya st., Moscow, 117342, Russia

E-mail: ^a v.v.shumov@yandex.ru, ^b kvsevolodo@mail.ru

Received 19.06.2019, after completion — 04.09.2019.

Accepted for publication 18.10.2019.

Simulation of combat and military operations is the most important scientific and practical task aimed at providing the command of quantitative bases for decision-making. The first models of combat were developed during the First World War (M. Osipov, F. Lanchester), and now they are widely used in connection with the massive introduction of automation tools. At the same time, the models of combat and war do not fully take into account the moral potentials of the parties to the conflict, which motivates and motivates the further development of models of battle and war. A probabilistic model of combat is considered, in which the parameter of combat superiority is determined through the parameter of moral (the ratio of the percentages of the losses sustained by the parties) and the parameter of technological superiority. To assess the latter, the following is taken into account: command experience (ability to organize coordinated actions), reconnaissance, fire and maneuverability capabilities of the parties and operational (combat) support capabilities. A game-based offensive-defense model has been developed, taking into account the actions of the first and second echelons (reserves) of the parties. The target function of the attackers in the model is the product of the probability of a breakthrough by the first echelon of one of the defense points by the probability of the second echelon of the counterattack repelling the reserve of the defenders. Solved the private task of managing the breakthrough of defense points and found the optimal distribution of combat units between the trains. The share of troops allocated by the parties to the second echelon (reserve) increases with an increase in the value of the aggregate combat superiority parameter of those advancing and decreases with an increase in the value of the combat superiority parameter when repelling a counterattack. When planning a battle (battles, operations) and the distribution of its troops between echelons, it is important to know not the exact number of enemy troops, but their capabilities and capabilities, as well as the degree of preparedness of the defense, which does not contradict the experience of warfare. Depending on the conditions of the situation, the goal of an offensive may be to defeat the enemy, quickly capture an important area in the depth of the enemy's defense, minimize their losses, etc. For scaling the offensive-defense model for targets, the dependencies of the losses and the onset rate on the initial ratio of the combat potentials of the parties were found. The influence of social costs on the course and outcome of wars is taken into account. A theoretical explanation is given of a loss in a military company with a technologically weak adversary and with a goal of war that is unclear to society. To account for the influence of psychological operations and information wars on the moral potential of individuals, a model of social and information influence was used.

Keywords: mathematical model, battle, offensive, defense, war, moral factor, Osipov–Lanchester equations, probabilistic model, game-theoretic model

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2020, vol. 12, no. 1, pp. 217–242 (Russian).

© 2020 Vladislav V. Shumov, Vsevolod O. Korepanov

This work is licensed under the Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Unported License.

To view a copy of this license, visit <http://creativecommons.org/licenses/by-nd/3.0/>
or send a letter to Creative Commons, PO Box 1866, Mountain View, CA 94042, USA.

1. Введение

Моделирование боевых действий началось во время Первой мировой войны [Осипов, 1915; Lanchester, 1916]. В годы Второй мировой войны возник научный метод «исследование операций», дающий в распоряжение военного командования или другого исполнительного органа количественные основания для принятия решений по действию войск или других организаций, находящихся под их управлением [Morse, Kimball, 1951]. Большой вклад в развитие моделей боя внесен специалистами Вычислительного центра им. А. А. Дородницына. В частности, П. С. Краснощеков и А. А. Петров описали динамику боя в пространстве, представив модель перемещения линии фронта [Краснощеков, Петров, 1983]. Ю. Н. Павловским предложен способ учета морального фактора в уравнении равенства сил квадратичной модели боя [Павловский, 1993].

В настоящее время для моделирования боевых действий используются имитационные системы, в основу которых положены смешанные разнородные дискретные уравнения Ланчестера [Медин, 2010]. В частности, имитационная система JTLS (Joint Theater Level Simulation) применяется вооруженными силами США и НАТО в различных областях военного строительства и подготовки войск, что позволяет решать следующие задачи:

- исследование, развитие и оценка планов применения группировок вооруженных сил;
- сравнительная оценка альтернативных вариантов боевого применения войск (сил);
- анализ структуры и состава боевых и обеспечивающих формирований, имеющих на вооружении различные образцы вооружений;
- проведение командно-штабных учений, военных игр и других мероприятий в системе оперативной подготовки объединенных и коалиционных (многонациональных) штабов и пр.

Поскольку всякий бой, сражение есть взаимодействие с разумным противником, преследующим противоположные цели, то модели принятия решений обычно основаны на использовании методов теории игр. К теоретико-игровым моделям боя можно отнести модель «нападение–оборона» Ю. Б. Гермейера [Гермейер, 1971], являющуюся модификацией модели О. Гросса [Карлин, 1964]. В работах [Перевозчиков, Лесик, 2013; Перевозчиков и др., 2017; Решетов и др., 2015] рассмотрена многоуровневая система обороны при условии, что обороняющиеся располагаются на стационарных пунктах. В органах управления объединений, соединений и частей выполняются оперативно-тактические расчеты, основанные на учете боевого опыта и данных военной статистики [Цыгичко, Стоили, 1997; Костяев, Кучаров, 2011].

Передовые страны мира тратят значительные финансовые средства на создание технологических систем коммуникаций, разведки и вычислений на поле боя, повышая ситуационную осведомленность командования и эффективность боевых подразделений. С. Бондер, анализируя 40-летний опыт моделирования боевых действий [Bonder, 2002], пришел к выводу, что государство тратит слишком много ресурсов на разработку технических решений в ущерб повышению квалификации военных специалистов по анализу исследования операций.

Целью настоящей работы является анализ содержательных вопросов боевых и военных действий и их отражения в соответствующих математических моделях боя и войны, а также развитие ранее полученных авторами результатов [Корепанов, Новиков, 2011; Шумов, 2014; Шумов, 2016; Шумов, 2019]. Стиль изложения материала ориентирован как на специалистов по исследованию операций, так и на специалистов в области военной науки и искусства.

2. О принципах моделирования боевых и военных действий

Основоположителем моделирования боевых действий по праву считается российский генерал Михаил Павлович Осипов. В своей работе «Влияние численности сражающихся сторон на их потери» [Осипов, 1915] на основе анализа результатов 38 сражений регулярных войск XIX и XX веков (табл. 1) им сформулирована модель динамики боя, найдено решение и оценены параметры модели.

Таблица 1. Характеристики сражений (фрагмент таблицы)

№	Сражение	Сильнейшая численно сторона			Слабейшая численно сторона				
		Название	x_0	$x_{ур}$	$x_{пл}$	Название	y_0	$y_{ур}$	$y_{пл}$
1	Аустерлиц, 1805	Союзники	83	27	–	Французы	75	12	–
4	Прейсиш Эйлау, 1807	Французы	80	25	–	Русские	64	26	–
8	Бородино, 1812	Французы	130	35	–	Русские	103	40	–
9	Березина, 1812	Русские	75	6	–	Французы	45	15	20
33	Седан, 1870	Германцы	245	9	–	Французы	124	17	107
36	Ляоян, 1904	Русские	150	18	–	Японцы	120	24	–
38	Мукден, 1905	Русские	330	59	31	Японцы	280	70	

Примечание. x_0 и y_0 — численность сражавшихся сторон, тыс. чел.; $x_{ур}$ и $y_{ур}$ — потери убитыми и ранеными, тыс. чел.; $x_{пл}$ и $y_{пл}$ — численности плененных, тыс. чел.

Источник: [Осипов, 1915; № 6, С. 62].

Пусть имеются две стороны, участвующие в боевых действиях. Обозначим через $x(t)$ ($y(t)$) численность войск первой (второй) стороны в момент времени $t > 0$, численность в нулевой момент времени — x_0 и y_0 соответственно. Исключив из рассмотрения операционные потери (пропорциональная численность своих войск) и ввод (вывод) резервов, получим следующую систему дифференциальных уравнений (модель боя М. Осипова, в англоязычной литературе известная как модель Ф. Ланчестера):

$$\frac{dx(t)}{dt} = -a_y y(t), \quad \frac{dy(t)}{dt} = -a_x x(t),$$

где a_x и a_y — коэффициенты поражающей скорострельности боевых единиц первой и второй стороны.

Аналитическим решением системы дифференциальных уравнений является так называемая квадратичная модель боя:

$$a_y (y^2(t) - y_0^2) = a_x (x^2(t) - x_0^2)$$

(для борьбы с противником, численность которого в два раза больше нужно в четыре раза более мощное оружие, при трехкратном численном превосходстве — в девять раз более мощное и т. д.).

В действительности коэффициенты a_x и a_y могут не быть константами, а каким-то образом (обычно неизвестным) зависеть от текущих численностей войск и других условий. Однако в математике разработаны методы, позволяющие сделать выводы качественного характера без точного знания явного вида функций a_x и a_y . Доказано [Арнольд, 2004], что модель М. Осипова является *структурно устойчивой*: изменение функций a_x и a_y не затрагивает основного качественного вывода (хода во времени и исхода сражения).

Кратко отметим вклад М. П. Осипова в теорию моделирования боевых действий.

1. Разработаны принципы моделирования боевых действий:

- неразрывная связь военной статистики, военного искусства и математического моделирования («военная история может дать исходные числа, а объяснение их относится к области математики» [Осипов, 1915]);
- более предпочтительны аналитические модели, основанные на тактических принципах и физических законах, чем статистические, основанные на «подгонке» результатов под ограниченный набор статистических данных. Аналитические модели в сравнении с эмпирическими более понятны и допускают расширение для учета новых факторов (ввод в бой резервов, операционные потери, возможности боевого обеспечения, искусство полководца, моральный фактор и др.);

- свидетельством «правильности» моделей является соответствие результатов моделирования принципам военного искусства («правило “бить врага по частям” служит несомненным подтверждением основного положения нашей теории, что потери сильнейшего числом должны быть меньше, чем у слабейшего» [Осипов, 1915]);
 - практическое предназначение моделей боя («теория потерь не отвергает никаких воинских уставов или правил, а наоборот, требует исполнения их, напоминая, что всякое упущение в этом отношении изменяет среднее, законное соотношение потерь в другое, клонящее в пользу противника, т. е. влечет за собою излишние потери у нас, которых можно было бы избежать. Единственная практическая цель теории потерь — это более сознательное управление численностью войск для уменьшения своих потерь и для увеличения потерь противника» [Осипов, 1915]).
2. Заложены основы теории боевых потенциалов:
- обосновано требование разделения списочного состава частей и соединений на боевой («активный») и обеспечивающий;
 - оценен боевой потенциал активных боевых единиц, имеющих на вооружении винтовки (ружья), пулеметы и орудия (орудийный расчет эквивалентен 50–150 бойцам с ружьями);
 - для оценки вклада различного оружия рекомендовано учитывать его количество и потери пехоты в результате применения этого оружия;
 - показано, что вклад различных боевых единиц в исход боя не линеен;
 - при расчете боевых потенциалов необходимо учитывать степень инженерного и других видов обеспечения.
3. Определены основные факторы, подлежащие учету в моделях боя:
- искусство полководца (заключается «в умении выставить на поле битвы и ввести в бой наибольшее число активных бойцов, поддержать их моральное настроение, в удачном маневрировании и вообще в умении пользоваться всякою случайностью» [Осипов, 1915]). На примере Аустерлицкого сражения показано, что вклад полководца (Наполеона) в победу эквивалентен увеличению боевой численности его стороны на 25–30 %;
 - моральное настроение войск. Моральный упадок войск заключается в увеличении доли бойцов, уклоняющихся от ведения боя. По М. Осипову, «победа зависит не от продолжительности боя, а главным образом от понесенных сторонами потерь; поэтому вернее будет считать, что бой длится до тех пор, пока потери одной из сторон не достигнут некоторого определенного %. Таким % в среднем можно считать 20 %...» [Осипов, 1915]);
 - качество («достоинство») оружия, воспитание, организация и обучение войска;
 - местность, укрепления и образ действий.

В силу сложности предмета моделирования и необходимости учета разнообразных факторов, влияющих на ход и исход боя, сражения, операции, военной кампании обычно используют не одну модель, а комплекс моделей, объединенных как по вертикали (результаты моделирования модели нижнего уровня являются исходными данными для моделей верхнего уровня), так и по горизонтали (цепочки моделей, отражающих отдельные этапы некоторого цикла действий) [Новиков, 2012] (см. рис. 1). Основание классификации моделей по вертикали — специфика и масштаб исследуемых систем.

Примерами моделей первого уровня являются: карта местности и инженерных сооружений, модели вооружения, описывающие их физические, информационные и технические характеристики, и др.

В операционных моделях выполняется переход от технических, информационных и физических (психофизических) характеристик к тактическим.

Основанием для объединения тактических, оперативных и стратегических моделей в одну группу является анализ опыта Великой Отечественной войны. Несмотря на существенные различия боя полка или дивизии, сражения (совокупности боев) корпуса или армии, фронтовой операции, в них можно выделить много общего. Г. К. Жуков, анализируя опыт Великой Отече-

ственной войны, выделил шесть вопросов (факторов), определяющих успех любого боя, сражения и операции [Речь, 1985].

Первое — это отличное знание противника, правильная оценка его плана действий, точная оценка сил, средств и возможности противника.

Второй вопрос — это знание своих войск, тщательная и целеустремленная подготовка их к предстоящему бою и операции.

Третий вопрос и крупнейший фактор, влияющий на успешность проведения операции, есть достижение оперативной и тактической внезапности.

Четвертый вопрос — это точный расчет сил и средств для проведения операции.

Пятый вопрос (самый сложный вопрос подготовки операции) — это материальное обеспечение и подготовка тыла к обеспечению операции.

Шестой вопрос — об артиллерии. Искусство замаскировать начало атаки является основным фактором всей боевой деятельности в умении осуществить первый бросок на противника.

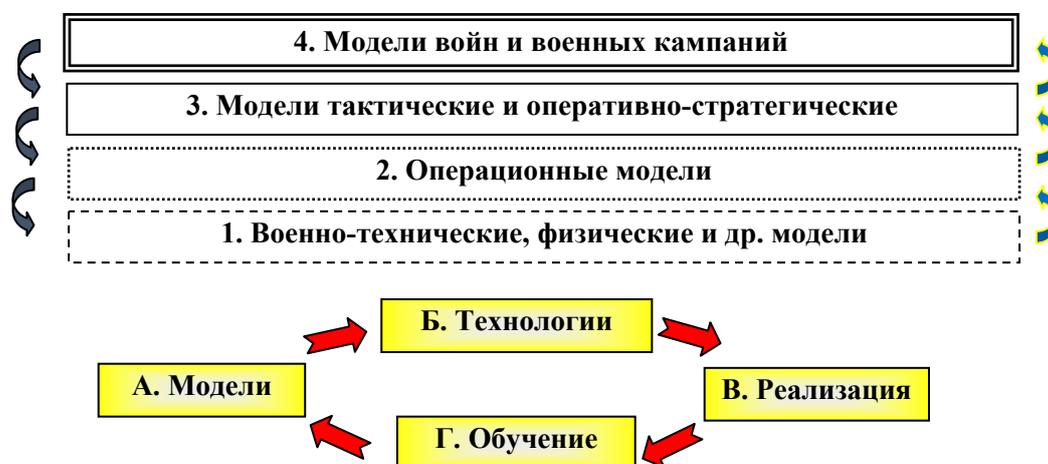


Рис. 1. Комплекс моделей боевых и военных действий. Модели 1–4 различаются масштабом и спецификой. Стрелки-дуги слева — нормы, критерии, ресурсы; стрелки-дуги справа — возможности и результаты. В нижней части рисунка показан цикл развития моделей С. Бондера, состоящий из четырех этапов

В моделях войн и военных кампаний учитываются людские, морально-политические, технологические, экономические и другие факторы.

Модели боя интегрируются как по вертикали, так и по горизонтали, с использованием циклов деятельности и управления (пример цикла: марш – разведка – поражение – перемещение).

3. Вероятностная модель боя

Пусть имеются две противостоящие друг другу боевые группы. Боевая численность первой группы равна x , численность второй — y . Обозначим параметр боевого превосходства первой стороны над второй как β . Допустим, что исход боя определяется результатами боестолкновений отдельных боевых единиц сторон, а сами боевые единицы с точки зрения их боевых возможностей однородны (т. е. каждая боевая единица в равной степени пользуется результатами обеспечения боя, разведки, наведения и т. д.). Тогда, учитывая классическое определение вероятности, определим вероятность победы в бою первой стороны по формуле [Шумов, 2016]

$$p_x(x, y) = \frac{\beta x}{\beta x + y} = \frac{q}{q + 1}, \quad q = \frac{\beta x}{y}, \quad p_x(0, 0) = \frac{\beta}{\beta + 1}, \quad (1)$$

где q есть соотношение сил сторон (превосходство первой стороны).

Для оценки параметра боевого превосходства β по результатам боевых действий можно воспользоваться функцией правдоподобия L :

$$L = \prod_{i=1}^m (p_i)^s (1-p_i)^{1-s} = \prod_{i=1}^m \left(\frac{\beta x_i}{\beta x_i + y_i} \right)^s \left(\frac{y_i}{\beta x_i + y_i} \right)^{1-s},$$

где m — количество наблюдений за ходом и результатами боев (объем выборки); p_i — вероятность победы первой стороны в i -м бою (неизвестная величина); s — доля боев, в которых победила первая сторона; $x_i > 0$ — количество боевых единиц первой стороны, участвовавших в i -м бою; $y_i > 0$ — количество боевых единиц второй стороны, участвовавших в i -м бою.

Максимизируя логарифмическую функцию правдоподобия, получим следующее выражение для вычисления параметра β [Шумов, 2019]:

$$\frac{ms}{\beta} - \sum_{i=1}^m \frac{x_i}{\beta x_i + y_i} = 0.$$

Данная модель может быть применена не только для оценки эффективности боевых действий на суше, но и в задачах борьбы с силовыми актами в морском пространстве. В работе [Шумов, Цезарь, 2019] по данным международной базы инцидентов на море¹ вычислен параметр боевого превосходства нападающих, пытающихся захватить военные и гражданские суда. Получено значение $\beta \approx 5.2$.

Столь высокое значение параметра боевого превосходства нападающих можно объяснить следующими факторами: 1) превосходством отдельной боевой единицы нападающих над членом экипажа обороняющихся в вооружении и психологической устойчивости; 2) внезапностью действий.

Исходя из взглядов военных теоретиков и практиков, можно выделить два важнейших фактора, определяющих боевую эффективность соединений, частей и подразделений: моральный фактор и его количественный показатель (проценты выдерживаемых кровавых потерь) и технологический фактор (боевой потенциал есть совокупность постоянно готовых к применению материальных и духовных сил и средств).

Поскольку боевое превосходство определяется двумя перечисленными факторами, то параметр боевого превосходства вычисляется по формуле

$$\beta = \alpha \rho, \quad \rho = \lambda_x / \lambda_y, \quad (2)$$

где $\alpha > 0$ — параметр технологического превосходства первой стороны; ρ — отношение моральных потенциалов сторон; $0 < \lambda_x < 1$ — доля потерь, выдерживаемая первой стороной, $0 < \lambda_y < 1$ — доля потерь, выдерживаемая второй стороной.

3.1. Оценка морального потенциала участников боя

По Клаузевицу, война есть акт насилия, имеющий целью заставить противника выполнить нашу волю [Clausewitz, 1832]. Моральный фактор является важнейшим показателем, определяющим исход войны, сражения, боя. Термин «моральная упругость» войск впервые введен Н. Н. Головиным [Головин, 1938]. По Н. Головину, «бой кончается отказом от него одной из сражающихся сторон, т. е. чисто психологическим актом» [Головин, 1995, с. 182].

В «Науке о войне» Н. Н. Головин выполнил блестящее исследование о влиянии потерь на исход боя. Важнейшим фактором победы войска в бою является процент кровавых потерь (потери ранеными и убитыми), при котором войско все еще не утрачивает боеспособность (моральный дух). «...Можно установить, что для сражений второй половины XVIII и всего XIX века пределом наибольшей моральной упругости войск, после которого они не способны

¹ GISIS: Piracy and Armed Robbery. — URL: <https://gisis.imo.org/Public/PAR/Default.aspx> (дата обращения: 23.08.2019).

уже к победе, являются кровавые потери в 25 %. ...Моральный эффект равного процента потерь для каждого из сражающихся далеко не одинаков. Те же размеры потерь подавляют дух одного и вызывают более быстрый процесс морального разложения, нежели у другого, а тогда, этот другой и становится победителем...» [Головин, 1938, с. 164–165]. По мнению О. Берндта, «психические свойства народа, массы которого составляют толщу армии, тоже обуславливают размеры потерь, которые эта армия способна выдерживать. И здесь встречается некоторое разнообразие. Так, например, большинство сражений, в которых русские дрались против равноценного врага, являются очень для них кровопролитными: Цорндорф — 43 %, Кунерсдорф — 43 %, Аустерлиц — 15 %, (Прейсиш) Эйлау — 28 %, Фридланд — 24 %, Бородино — 31 %, Варшава — 18 %, Инкерман — 24 %, Первая Плевна — 28 %, Вторая Плевна — 28 %, Третья Плевна — 17 % и т. д. Напротив, везде, где дерутся итальянцы, мы всегда встречаем небольшие потери. Они проиграли сражение у Санта-Лючии, потеряв 2 %, у Кустоццы — 1.2 %, у Мортары — 2.2 %, у Новарры — 5 %... Можно найти некоторое объяснение этому явлению в особенностях театра военных действий, однако видеть в этом последнем исчерпывающее объяснение нельзя» [Головин, 1938, с. 168].

Пусть x_i есть количество активного боевого состава в i -м бою, чел., ξ_i — потери убитыми и ранеными в этом бою, чел., при которых часть (подразделение) по команде или самостоятельно перестает выполнять боевую задачу (отходит с обороняемых позиций, прекращает наступательные действия). Тогда статистическая оценка морального потенциала (процент выдерживаемых кровавых потерь) может быть вычислена по формуле среднего арифметического:

$$\lambda = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\xi_i}{x_i}, \quad (3)$$

где n есть количество боев (объем статистической выборки). Полученная оценка является верхней оценкой морального потенциала, так как зачастую невозможно определить момент, когда потери уже являются следствием паники. Более предпочтительной (неманипулируемой) оценкой морального потенциала является медиана вариационного ряда (значение центрального элемента отсортированных по возрастанию значений x_i / ξ_i).

3.2. Оценка технологического потенциала подразделения, части, соединения

Технологический фактор определяется следующими показателями (вытекают из определения боя — совокупности согласованных по цели, месту и времени ударов, огня и маневра войск для уничтожения (разгрома) противника, отражения его ударов и выполнения других задач [Война, 2004]):

- опыт и искусство командиров, их способность организовать всестороннее обеспечение боя и согласованные действия подчиненных и приданных сил и средств;
- возможности по разведке противника, своевременному целеуказанию, скрытной, оперативной и устойчивой связи и навигации;
- маневренность сил и средств;
- огневые и ударные возможности сил и средств.

Параметр технологического превосходства определим с использованием среднего геометрического:

$$\alpha = \sqrt[4]{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4}, \quad (4)$$

где $\alpha_1 > 0$ — параметр превосходства первой стороны в опыте командования и всестороннем обеспечении; $\alpha_2 > 0$ — параметр ее превосходства в средствах разведки, связи и навигации; $\alpha_3 > 0$ — параметр превосходства в маневренности; $\alpha_4 > 0$ — параметр превосходства в огневых возможностях.

Частные коэффициенты $\alpha_1, \dots, \alpha_4$ вычисляются как отношение количественных характеристик боевых единиц сторон с учетом противодействия противника. Например, дальность эф-

эффективного поражения противника следует вычислять с учетом имеющихся у него средств индивидуальной и коллективной защиты; дальность обнаружения — с учетом возможностей по маскировке (задымлению) и т. д. Поскольку коэффициенты $\alpha_1, \dots, \alpha_4$ определены через отношение величин, то в качестве допустимого среднего используется среднее геометрическое.

Среднее геометрическое более чувствительно к малым значениям одного из коэффициентов, например скорости боевого перемещения или дальности обнаружения противника в сложных метеоусловиях, и отражает искусство командиров (командующих) по формированию оптимального состава и вооружения штурмовых, батальонных, ротных групп, способных эффективно решать поставленные боевые задачи. Так, в начале 1942 г. Г. К. Жуков для захвата опорных пунктов противника требовал создавать ударные отряды, вооруженные автоматическим оружием, минометами, отдельными орудиями, и включать в их состав саперов, огнеметчиков и танки [Исаев, 2006]. Применение штурмовых групп и ударных отрядов позволяет выровнять значения частных коэффициентов, повышая значение параметра технологического превосходства.

Тогда выражение (1) можно переписать в виде

$$p_x(x, y) = \frac{\alpha \lambda_x x}{\alpha \lambda_x x + \lambda_y y}. \quad (5)$$

Таким образом, нами получена простейшая вероятностная модель боя, учитывающая численность сторон и их моральные и технологические характеристики.

Пример 1. Террористическая группа численностью $y = 100$ человек занимает на господствующей высоте круговую оборону на подготовленных в инженерном отношении позициях. Моральный потенциал террористов характеризуется показателем $\lambda_y = 0.6$ (высока доля смертников). Они имеют на вооружении стрелковое оружие с дальностью эффективного поражения $D_y = 200$ м в обороне, с помощью приборов наблюдения ведут круговую разведку на дальность $D_{ry} = 500$ м. В случае применения террористами БПЛА дальность почти непрерывной разведки увеличивается до значения $D_{ry} = 2500$ м. Весь командный состав террористов имеет боевой опыт ($s_y = 1$). Для борьбы с террористами привлекается пехотная бригада, имеющая на вооружении стрелковое оружие с дальностью эффективного поражения $D_y = 50$ м в наступлении, артиллерию (способна уничтожить в ходе огневого налета 15 % террористов и подавлять разведанные огневые точки), средства разведки с дальностью обнаружения противника $D_{rx} = 1500$ м. Половина командного состава имеет опыт борьбы с подразделениями террористов ($s_x = 0.5$). Моральный потенциал личного состава характеризуется показателем $\lambda_x = 0.3$. Оценить потребный боевой состав для уничтожения группы террористов.

Решение. Для уничтожения террористической группы необходимо назначить вероятность победы p_x (поражения цели) не ниже 0.7.² Из выражения (1) при $p_x = 0.7$ находим (учитывая, что 15 % противника поражается огнем артиллерии)

$$x = \frac{p_x(y - 0.15y)}{(1 - p_x)\beta} = \frac{7 \cdot 0.85y}{3\beta}.$$

Вычислим параметр боевого превосходства (выражения (2) и (4)), полагая маневренность сторон одинаковой:

$$\beta = \frac{\lambda_x}{\lambda_y} \sqrt[4]{\frac{s_x D_{rx}}{s_y D_{ry}} \alpha_3 \frac{D_x}{D_y}} = 0.5 \sqrt[4]{\frac{0.5 \cdot 1500}{1 \cdot 2500} \cdot 1 \frac{(50 + 1500) / 2}{200}} \approx 0.52.$$

² В зависимости от величины ущерба, нанесенного составным объектам, достигается различная степень поражения. Обычно для качественно различимой степени поражения объектов устанавливаются следующие значения ущербов: до 0.2 — слабое поражение; 0.2–0.3 — подавление; 0.5–0.6 (0.6–0.9) — сильное поражение целей, не содержащих (содержащих) средства ядерного нападения; более 0.7 (0.9) — уничтожение целей, не содержащих (содержащих) средства ядерного нападения. См. *Поражение объекта* (цели). — URL: <https://encyclopedia.mil.ru/encyclopedia/dictionary/details.htm?id=14640@morfDictionary> (дата обращения: 24.08.2019).

Следовательно, для уничтожения террористов и зачистки опорного пункта необходимо привлечь не менее 382 бойцов. Это количество можно уменьшить, если, например, подавить БПЛА террористов (при этом значение параметра β увеличится с 0.52 до 0.78) и увеличить долю их поражения в огневом налете с 15 % до 30 %. Тогда потребуется не менее 210 бойцов.

3.3. Масштабирование вероятностной модели боя

Личный состав объединений, соединений и частей подразделяется на боевой состав и обеспечивающий. Боевой состав предназначен для непосредственного ведения боевых действий. Расчетными единицами боевого состава являются: для тактических расчетов — солдат, пулемет, орудие, танк, самолет, а также организационные подразделения более или менее одинакового состава во всех армиях — пехотный (стрелковый, мотострелковый) батальон, танковый батальон, батарея, эскадрилья, саперная (инженерно-техническая) рота; для оперативно-стратегических расчетов — стрелковые (пехотные), моторизованные, танковые, авиационные дивизии, отдельные артиллерийские полки и инженерно-саперные батальоны; однако и в этом случае учитываются общий численный состав людей и количество орудий, танков и самолетов [Краткий, 1958].

В таблице 2 указаны силы и средства советских войск к началу операции «Багратион» и их возможности [История, 1978, с. 47; Цыгичко, Стоили, 1997; Цена, 2019].

Таблица 2. Состав и возможности советских войск (операция «Багратион»)

Боевой состав	Единиц, тыс.	Боевой потенциал	Произведение (2)×(3)	Образец	Стоимость образца, тыс. руб.	Произведение (2)×(6)
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
Личный состав	2 400	0.1	240	ППШ	0.148	355.2
Орудия и минометы	36.4	8	291.2	45-мм пушка	14	509.6
Танки и САУ	5.2	50	260	Т-34	135	702
Боевые самолеты	5.3	60	318	Ил-2	140	742

Источники: 1) [История..., 1978; с. 47]; 2) [Цыгичко, Стоили, 1997; с. 23–28]; 3) [Цена Победы...].

Заметим, что, несмотря на качественную разнородность элементов боевого состава, суммарный боевой потенциал (столбец 4) и суммарная стоимость (столбец 7) этих элементов примерно одинаковы (одного порядка).

Тогда количество боевых единиц сторон в выражении (1) может быть определено по формулам

$$x = \varphi_x J \min_{j=1, \dots, J} c_{xj} n_{xj} k_{xj} + (1 - \varphi_x) \sum_{j=1}^J c_{xj} n_{xj} k_{xj}, \quad (6)$$

$$y = \varphi_y J \min_{j=1, \dots, J} c_{yj} n_{yj} k_{yj} + (1 - \varphi_y) \sum_{j=1}^J c_{yj} n_{yj} k_{yj}, \quad (7)$$

где c_{xj} (c_{yj}) — боевой потенциал (стоимость) боевой единицы j -го типа первой (второй) стороны; n_{xj} (n_{yj}) — количество боевых единиц j -го типа первой (второй) стороны; k_{xj} (k_{yj}) — коэффициенты технической готовности и материальной обеспеченности боевых единиц j -го типа первой (второй) стороны; J — количество типов боевых единиц; $0 \leq \varphi_x \leq 1$ ($0 \leq \varphi_y \leq 1$) — показатель, обеспечивающий использование в бою (сражении) всех типов боевых единиц и учитывающий особенности боя (театра военных действий).

При $\varphi_x = 1$ ($\varphi_y = 1$) обеспечивается «гармоничный» состав группировок, что подтверждается опытом советских стратегических операций 1944–1945 гг. В. И. Цыгичко и Ф. Стоили в ходе

статистического исследования выявили важную особенность структур группировок войск сторон. Оказалось, что в среднем по анализируемым операциям пехота, танки, артиллерия и авиация вносили примерно одинаковый вклад в потери сторон, т. е. произведения численностей различных типов оружия на их боевой потенциал практически равны [Цыгичко, Стоили, 1997].

Обеспечение боя, сражения, операции подразделяется на оперативное (боевое) обеспечение, техническое обеспечение и тыловое обеспечение. Боевое обеспечение представляет собой совокупность мероприятий, которые позволяют исключить внезапность нападения противника, снизить эффективность его ударов и создать подразделениям и частям благоприятные условия для организованного и своевременного вступления в бой и успешного его ведения [Тактика, 1987].

Основными видами оперативного обеспечения являются: оперативная разведка, оперативная маскировка, психологическая борьба, радиоэлектронная борьба, радиационная, химическая и биологическая защита, защита от высокоточного оружия, инженерное, топогеодезическое, навигационное, гидрометеорологическое (метеорологическое) обеспечение [Война, 2004]. Видами боевого обеспечения в батальоне являются: разведка, защита от оружия массового поражения, маскировка, инженерное обеспечение, химическое обеспечение и охранение [Тактика, 1987]. Психологическая борьба оказывает влияние на значение моральных потенциалов сторон и учитывается в моделях социально-информационного влияния [Шумов, 2016].

Перечисленные виды оперативного (боевого) обеспечения оказывают прямое влияние на возможности боевых единиц в согласованных действиях, маневре и огневом поражении противника и учитываются в параметрах боевого (2) и технологического превосходства (4).

4. Теоретико-игровая модель «наступление–оборона»

Основными видами военных (боевых) действий являются наступление и оборона. На стратегическом и оперативном уровнях наступление применяется для разгрома противника и овладения важными районами, рубежами и объектами на его территории (акватории). Оборона применяется, как правило, в неблагоприятно складывающейся обстановке для срыва или отражения наступления (ударов) численно превосходящего противника, уничтожения его сил и средств, удержания важных районов, рубежей и объектов на своей территории (акватории), выигрыша времени и с другими целями [Война..., 2004].

Наступательная операция планируется и ведется по ближайшей и дальнейшей задачам. При этом основное содержание ближайшей задачи обычно заключается в прорыве оперативной обороны противника, разгроме войск его первого оперативного эшелона, ближайших оперативных резервов, овладении районами и рубежами на назначенную глубину. Дальнейшая задача может состоять в разгроме последующих эшелонов и оперативно-стратегических резервов противника, овладении его последующими оборонительными рубежами и достижении конечной цели операции. Ближайшая задача обычно выполняется войсками первого эшелона, дальнейшая — с вводом в сражение второго эшелона и резервов [Война..., 2004].

Основной формой тактических действий является бой. Наступательный бой применяется в целях разгрома противостоящей тактической группировки войск противника и овладения важным районом (рубежом, объектом) на его территории. Разновидностями наступательного боя являются прорыв, встречный бой и преследование. Оборонительный бой применяется для срыва или отражения наступления превосходящих сил противника, удержания занимаемых позиций (рубежей), предотвращения прорыва противника к прикрываемым объектам и создания условий для перехода в наступление [Война..., 2004].

Управление действиями наступающих и обороняющихся подразделений в общем случае может сводиться к отысканию:

- 1) распределения средств по пунктам обороны;
- 2) количества (доли) средств, выделяемых во второй эшелон (резерв);
- 3) темпов перемещения подразделений в бою и их потерь;
- 4) размеров по фронту и в глубину районов обороны, направлений маневра;

- 5) способов действий, направленных на разгром противника, или его окружение, или занятие важного рубежа (объекта) в глубине обороны;
- 6) способов действий в обороне, при отходе и в окружении;
- 7) способов маскировки и введения противника в заблуждение и др.

Задачи управления боем, в которых определялись бы все указанные элементы законов управления, в литературе не описаны. Далее с использованием вероятностной модели боя рассмотрим частные решения первых трех задач.

Пусть имеется n обороняемых пунктов (районов, участков, направлений) с номерами $i = 1, \dots, n$, где возможен прорыв средствами наступающих. Обозначим через R_x и R_y количество боевых средств в распоряжении наступающих и обороняющихся. Ресурсы R_x и R_y полагаются бесконечно делимыми, что позволит учесть действия своих, приданных и поддерживающих единиц, когда их усилия попеременно направлены на различные пункты и задачи.

Наступающая сторона состоит из войск первого эшелона, имеющего задачу прорыва обороны хотя бы на одном из обороняемых пунктов, и войск второго эшелона, которые вводятся в прорыв с задачей разгрома второго эшелона (резервов) обороны и выхода на назначенный рубеж в глубине обороны. Вектор средств наступления:

$$x = (x_1, \dots, x_n, u) \in X = \left\{ x \mid \sum_{i=1}^n x_i + u = R_x \right\}, \quad x_i, u \in \mathfrak{R},$$

где $x_i \geq 0$ — количество средств первого эшелона, имеющих задачу прорыва пункта i ; $u \geq 0$ — количество средств второго эшелона.

Обороняющаяся сторона состоит из войск первого эшелона и резерва (или второго эшелона). Задача первого эшелона заключается в недопущении прорыва пунктов обороны, задача резерва (второго эшелона) — в нанесении контрудара в случае прорыва обороны или удержании второй линии обороны. Вектор средств обороны:

$$y = (y_1, \dots, y_n, w) \in Y = \left\{ y \mid \sum_{i=1}^n y_i + w = R_y \right\}, \quad y_i, w \in \mathfrak{R},$$

где $y_i \geq 0$ — количество средств первого эшелона, имеющих задачу обороны пункта i ; $w \geq 0$ — количество средств резерва, предназначенных для нанесения контрудара в случае прорыва пункта i .

4.1. Задача управления прорывом пунктов обороны (действия первых эшелонов сторон)

Рассмотрим решение частной теоретико-игровой задачи управления прорывом (удержанием) пунктов обороны в условиях, когда стороны принимают решения одновременно (продолжительности тактических циклов действий сторон примерно одинаковы) и для нахождения решения достаточно вычислить равновесие Нэша.

Определим целевую функцию первого эшелона наступающих в виде

$$f(x, y) = \max_{i=1, \dots, n} \left(\frac{\beta_i x_i}{\beta_i x_i + y_i} \right), \quad (8)$$

где β_i — параметр боевого превосходства наступающих на i -м пункте обороны; $x_i \geq 0$ — количество средств наступающих, выделенных для прорыва пункта i ; $y_i \geq 0$ — количество средств, имеющих задачу обороны пункта i .

Функция $f(x, y)$ выпукла по y и вогнута по x (максимум выпуклых функций является выпуклой функцией). Для того чтобы функция $f(x, y)$ имела седловую точку, необходимо и достаточно [Васин, Морозов, 2005]

$$\max_{x \in X \setminus u} \min_{y \in Y \setminus w} f(x, y) = \min_{y \in Y \setminus w} \max_{x \in X \setminus u} f(x, y),$$

причем в силу выпуклости функции по y цена игры равна верхней цене игры и минимаксная стратегия обороны оптимальна.

Без потери общности положим, что $\beta_1 \geq \beta_2 \geq \dots \geq \beta_n$ (первый пункт для обороны является слабейшим), чего легко добиться перенумерацией пунктов обороны. Введем обозначения:

$$r_x = R_x - u, \quad r_y = R_y - w.$$

Доказано [Шумов, 2019], что в задаче прорыва пунктов обороны существует решение в смешанных стратегиях вида $(\varphi^0, y^0, \bar{v})$, где \bar{v} — верхняя цена игры, y^0 — чистая минимаксная стратегия обороны:

$$y^0 : y_i^0 = \frac{\beta_i}{\sum_{j=1}^n \beta_j} r_y, \quad i = 1, \dots, n,$$

а оптимальная смешанная стратегия наступающих имеет вид

$$\varphi^0 = \sum_{i=1}^n \pi_i^0 I_{x^{(i)}}, \quad \pi_i^0 = \frac{\beta_i}{B}, \quad B = \sum_{j=1}^n \beta_j, \quad i = 1, \dots, n, \quad (9)$$

где $I_{x^{(i)}}$ — вероятностная мера, сосредоточенная в точке $x^{(i)} = \{0, \dots, \underbrace{r_x}_i, 0, \dots, 0\}$ — стратегии наступающих, заключающейся в нанесении всеми силами удара по i -му объекту обороны.

Цена игры при прорыве первого эшелона обороны равна [Шумов, 2019]

$$v = \frac{r_x B}{r_x B + r_y} = \frac{r_x \sum_{j=1}^n \beta_j}{r_x \sum_{j=1}^n \beta_j + r_y}. \quad (10)$$

Если пункты обороны однородны ($\beta = \beta_1 = \dots = \beta_n$), то цена игры равна

$$v = \frac{n\beta r_x}{n\beta r_x + r_y}. \quad (11)$$

Вынужденность обороны непосредственно следует из последнего выражения — с ростом количества пунктов обороны возможности наступающих существенно возрастают. На практике количество пунктов не превышает трех–пяти.

4.2. Задача распределения сил наступления и обороны между эшелонами

Определим целевую функцию наступающих в виде

$$F(u, w) = \frac{B(R_x - u)}{B(R_x - u) + R_y - w} \times \frac{\delta u}{\delta u + w}, \quad B = \sum_{j=1}^n \beta_j, \quad (12)$$

$$0 < u_1 \leq u \leq u_2 < R_x, \quad 0 < w_1 \leq w \leq w_2 < R_y, \quad (13)$$

где B — агрегированный параметр боевого превосходства первого эшелона наступающих над подразделениями первого эшелона обороняющихся; δ — параметр боевого превосходства второго эшелона наступающих над резервом обороны; $u_1 > 0$, $u_2 > 0$, $w_1 > 0$, $w_2 > 0$ — малые величины.

Содержательно целевая функция $F(u, w)$ наступающих заключается в максимизации вероятности прорыва первого эшелона и отражении контратаки второго эшелона (резерва) обороняющихся. Целевая функция обороняющихся, соответственно, равна $1 - F(u, w)$, т. е. мы имеем антагонистическую игру. Ограничения (13) характеризуют невырожденность двухэшелонного (одноэшелонного плюс резерв) построения боевых порядков наступающих и обороняющихся.

Считая, что стороны рациональны (максимизируют свои целевые функции), находятся в равных условиях и знают информацию друг о друге, логично моделировать данную ситуацию как теоретико-игровую и выбрать в качестве модели игру с нулевой суммой в нормальной форме, т. е. что стороны выбирают свои действия одновременно и независимо. Тогда в качестве разумных действий сторон можно выбрать равновесную по Нэшу точку.

Набор действий (u, w) является равновесием Нэша в игре G с нулевой (постоянной) суммой, если

$$\forall u' \in S_1: F(u, w) \geq F(u', w) \text{ и } \forall w' \in S_2: F(u, w) \leq F(u, w'),$$

$$S_1 = (u_1, R_x - u_2), \quad S_2 = (w_1, R_y - w_2).$$

Известна теорема Дебрю–Гликсберга–Фана [Dasgupta, 1986]: если пространства действий игроков S_1, S_2 — непустые компактные и выпуклые подмножества евклидова пространства, а целевые функции непрерывны и квазивогнуты по u и w , то в игре существует равновесие Нэша.

Остается доказать квазивогнутость (унимодальность) целевых функций игроков и найти равновесие Нэша.

Заметим, что

$$F(0, w) = F(R_x, w) = 0 \text{ и } F(u, w) > 0 \text{ при } u \in (0, R_x). \quad (14)$$

Из (14) следует, что максимум функции $F(u, w)$ по u существует на интервале $(0, R_x)$, а также

$$\exists \varepsilon > 0: \forall u \in [0, \varepsilon]: \frac{\partial F(u, w)}{\partial u} > 0,$$

$$\text{и } \forall u \in [R_x - \varepsilon, R_x]: \frac{\partial F(u, w)}{\partial u} < 0.$$

Частная производная $\partial F(u, w)/\partial u$ целевой функции $F(u, w)$ по u равна

$$\frac{((B + \delta)w - \delta R_y)u^2 - (2(R_y + BR_x)u + R_x(R_y + BR_x) + (2u - R_x)w)w}{(\delta u + w)^2 (BR_x - Bu + R_y - w)^2 / B\delta}.$$

Видим, что знаменатель производной строго положителен, а числитель является полиномом второй степени по u . Следовательно, производная $\partial F(u, w)/\partial u$ будет равна нулю максимум в двух точках по u . При этом для выполнения (14) необходимо, чтобы число нулей производной на $(0, R_x)$ было нечетным; из этого следует, что на $(0, R_x)$ будет только один ноль производной. Следовательно, функция $F(u, w)$ на $u \in (0, R_x)$ имеет только один максимум, слева от которого она растет, а справа убывает, т. е. функция унимодальна по первому аргументу.

Частная производная $\partial F(u, w)/\partial w$ целевой функции $F(u, w)$ по w равна

$$\frac{B\delta u(R_x - u)[B(R_x - u) - \delta u + R_y - 2w]}{(\delta u + w)^2 [B(R_x - u) + R_y - w]^2}.$$

Производная $\partial F(u, w)/\partial w$ равна 0 только в точке

$$w = \frac{BR_x + R_y - (B + \delta)u}{2}. \quad (15)$$

Получаем, что по w у целевой функции $F(u, w)$ только один минимум на $(0, R_y)$, так как слева от (15) производная отрицательна, а справа положительна. Получаем, что целевая функция $F(u, w)$ по w также унимодальна.

Условия теоремы Дебрю–Гликсберга–Фана выполнены, следовательно, равновесие Нэша существует. Пусть (u^*, w^*) — равновесие Нэша, тогда эта точка должна удовлетворять системе

$$\frac{\partial F(u, w)}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial F(u, w)}{\partial w} = 0. \quad (16)$$

Сервис WolframAlpha дает два решения (16), в одном из которых w отрицательно, т. е. допустимое решение одно:

$$u^* = R_x D, \quad w^* = R_y D, \quad (17)$$

$$D = \frac{R_y + BR_x}{2R_y + (B + \delta)R_x} = 1 - \frac{R_y + \delta R_x}{2R_y + (B + \delta)R_x}. \quad (18)$$

Содержательно значение параметра D есть доля войск, выделенных во второй эшелон (резерв). Эта доля растет с увеличением параметра B (рис. 2) и уменьшается с увеличением параметра δ (рис. 3).

Агрегированный параметр боевого превосходства B увеличивается, если, например, оборона не подготовлена (слабо подготовлена) или обороняющиеся вынуждены удерживать первым эшелоном достаточно большое количество пунктов. В этом случае обороняющимся выгоднее значительную часть войск иметь в резерве для нанесения контратак по прорвавшемуся противнику с целью срыва его планов. Разумеется, наступающие на такое поведение обороняющихся ответят увеличением доли войск своего второго эшелона.

Вместе с тем доля D войск во втором эшелоне (резерве) мало меняется при изменении численностей боевых единиц сторон (рис. 4, расчеты выполнены при $B = 1.5$ и $\delta = 1$).

Следовательно, при планировании боя (сражения, операции) и распределении своих войск между эшелонами важно знать не точное количество войск противника, а свои и его возможности, а также степень подготовленности обороны, которая зависит от времени с момента занятия войсками позиций до начала наступления. Полученные результаты не противоречат опыту ведения боевых действий. В частности, до начала операции «Кольцо» К. К. Рокоссовский оценил численность окруженной армии Паулюса в 86 тыс. чел, т. е. занижил более чем в два раза. Тем



Рис. 2. Зависимость доли войск во втором эшелоне от значения агрегированного параметра боевого превосходства первого эшелона. Оптимальная доля войск, выделяемая наступающими и обороняющимися во второй эшелон (резерв), увеличивается с ростом значения агрегированного параметра боевого превосходства первого эшелона наступающих (зависящего от количества пунктов обороны и степени их подготовки)



Рис. 3. Зависимость доли войск во втором эшелоне от значения параметра боевого превосходства второго эшелона. Оптимальная доля войск, выделяемая наступающими и обороняющимися во второй эшелон (резерв), уменьшается с ростом значения параметра боевого превосходства второго эшелона наступающих над резервом обороняющихся (зависящего от возможностей войск сторон, характера местности и степени ее оборудованности в инженерном отношении)

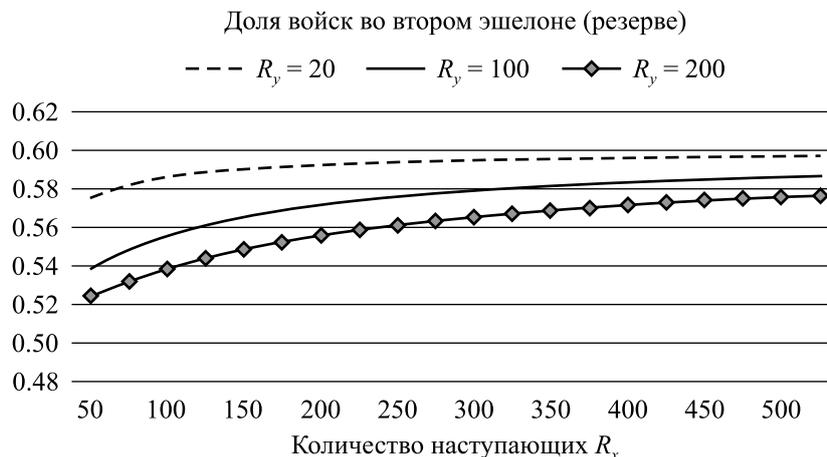


Рис. 4. Зависимость доли войск во втором эшелоне от численности боевых единиц сторон. R_x — имеющееся количество боевых единиц у наступающих; R_y — имеющееся количество боевых единиц у обороняющихся

не менее операция прошла успешно, было пленено свыше 91 тыс. солдат и офицеров вермахта [Исаев, 2008].

Пример 2. Пусть $R_x = 500$, $R_y = 100$. Имеется $n = 3$ однородных пункта обороны с $\beta = 0.5$ и $B = n\beta = 1.5$, $\delta = 1$. Найти оптимальное распределение сторон между эшелонами. По формулам (17) и (18) находим: $D \approx 0.58$, $u^* \approx 174$, $w^* \approx 58$. Если стороны отклонятся от оптимального решения, то их шансы на выполнение задачи снизятся.

На рис. 5 показана зависимость вероятности победы наступающих от количества боевых единиц их второго эшелона (при условии, что обороняющиеся придерживаются своей оптимальной стратегии, т. е. выделяют в резерв $w^* \approx 58$ единиц).

Соответственно, на рис. 6 показана зависимость вероятности успеха в обороне от численности резерва обороняющихся (при условии, что наступающие придерживаются своей оптимальной стратегии).

Из рисунков видно, что нахождение оптимального распределения войск между эшелонами является важнейшей практической и научной задачей как командиров и штабов, так и исследователей боя.

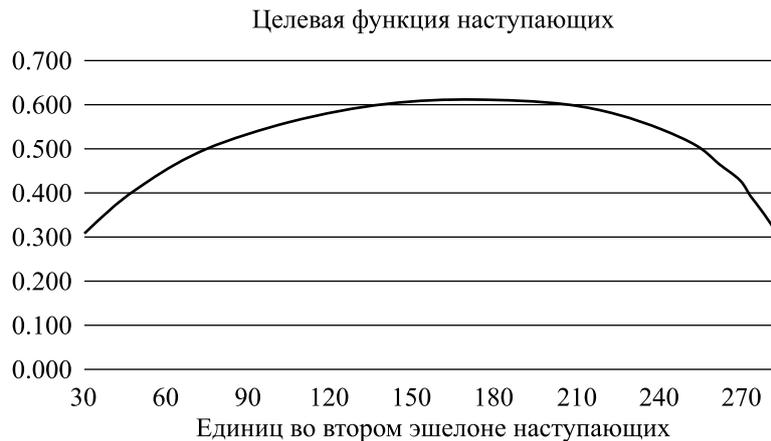


Рис. 5. Зависимость вероятности победы наступающих от численности их второго эшелона. Оптимальное количество боевых единиц наступающих во втором эшелоне равно 174. В случае отклонения количества единиц от оптимального значение целевой функции наступающих (вероятность прорыва первого эшелона обороны и отражения контратаки резервов) уменьшается



Рис. 6. Зависимость вероятности успеха в обороне от численности резерва обороняющихся. Оптимальное количество боевых единиц обороняющихся в резерве равно 58. В случае отклонения количества единиц от оптимального значение целевой функции обороняющихся уменьшается

4.3. Масштабирование модели «наступление–оборона»

Выше целевая функция наступающих была определена как произведение вероятности прорыва первого эшелона обороняющихся и вероятности отражения контратаки резерва обороны. Вместе с тем целью боя может быть разгром противника или захват важного района к определенному сроку (до подхода свежих резервов противника). Для масштабирования модели по целям достаточно найти зависимость между соотношением сил сторон (определяющим вероятность победы, см. формулу (1)), темпом наступления и потерями сторон.

В таблице 3 и на рис. 7 показана зависимость темпов наступления в тактической глубине от соотношения сил сторон и степени подготовленности обороны противника [Цыгичко, Стоили, 1997].

В общем случае темп наступления при прорыве обороны зависит от характера местности, ее инженерного оборудования, тактических характеристик имеющегося вооружения и т. д. Названные факторы могут быть учтены в модели боя через показатель технологического превосходства α наступающих (инженерное оборудование местности обычно снижает его значение). Увеличение темпов наступления по сравнению с темпами, характерными для операций Великой

Таблица 3. Зависимость темпов осуществления маневра советских войск в наступательном бою в годы Великой Отечественной войны от соотношения в силах и средствах степени подготовленности обороны противника

Соотношение сил и средств по пехоте, артиллерии, танкам (среднее)	Темпы осуществления маневра при различной степени готовности обороны противника, км/ч			
	Оборона не подготовлена	Оборона слабо подготовлена	Оборона подготовлена	Оборона подготовлена полностью
3:1	0.4	0.3	0.2	0.15
4:1	0.55	0.4	0.3	0.2
5:1	0.7	0.5	0.35	0.25
6:1	0.85	0.6	0.4	0.3
7:1		0.75	0.5	0.33

Источник: [Цыгичко, Стоили, 1997, с. 23–28].

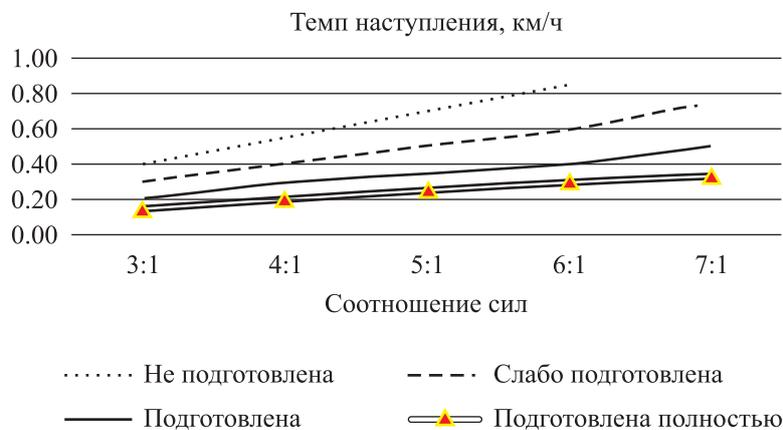


Рис. 7. Зависимость темпа наступления от соотношения сил и подготовки обороны. Графики построены по данным таблицы 3

Отечественной войны, может быть достигнуто за счет применения БТР и БМП, способных вести эффективный огонь на ходу, разведывательно-огневых комплексов, механических средств разминирования и т. д.

Примем следующие допущения: 1) при вероятности победы $p_x(x, y) \leq 0.5$ темп наступления равен нулю; 2) с увеличением вероятности победы темп наступления приближается к скорости группы в походном порядке с учетом характера местности и препятствий на ней. Наиболее простым выражением для расчета темпа наступления является формула

$$W = 2^k W_0 \left(\frac{q}{q+1} - 0.5 \right)^k = W_0 \left(\frac{q-1}{q+1} \right)^k, \quad q \geq 1, \quad (19)$$

где W_0 — скорость перемещения наступающих в развернутом порядке (зависит от характера местности и степени подготовки обороны), q — соотношение сил сторон, k — параметр формы.

Данные из таблицы 3 достаточно хорошо аппроксимируются моделью (21) при $k = 3$. На рис. 8 при различных значениях W_0 показана зависимость темпов наступления от соотношения сил.

Из рисунка видно, что неподготовленной обороне соответствует значение параметра $W_0 = 2.5$ км/ч, а полностью подготовленной — значение $W_0 = 0.1$ км/ч.

В таблице 4 представлена зависимость суточных потерь наступающей стороны от начального соотношения сил [Цыгичко, Стоили, 1997].

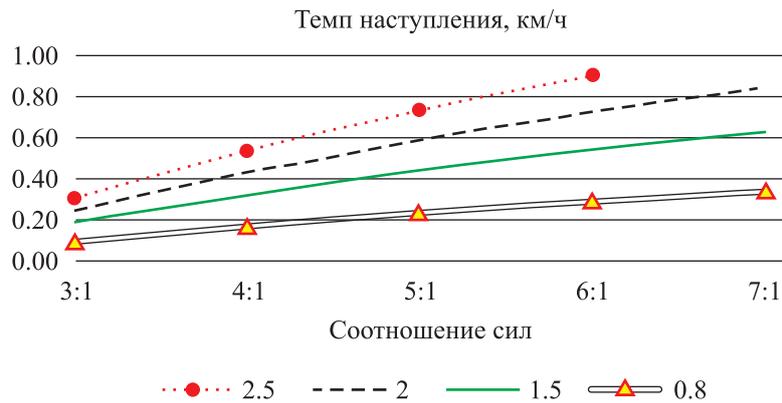


Рис. 8. Зависимость темпа наступления от соотношения сил при различных значениях скорости перемещения в развернутом порядке. Горизонтальная ось — соотношение сил сторон (степень боевого превосходства наступающих над обороняющимися), вертикальная ось — средний темп наступления, км/ч. 2.5, 2, 1.5 и 0.8 — скорости перемещения наступающих в развернутом порядке (зависят от характера местности и степени подготовки обороны), км/ч

Таблица 4. Зависимость суточных потерь наступающей стороны от начального соотношения сил

Начальное соотношение сил	5:1	3:1	1:1
Суточные потери, %	3.5	7	10

Представленные в таблице данные достаточно хорошо аппроксимируются следующим выражением:

$$L_x = a_x q^{-c}, \quad a_x = 10, \quad c = 0.5, \tag{20}$$

где L_x — среднесуточные потери наступающих в ходе операции, a_x — коэффициент потерь наступающих, c — параметр формы функции потерь.

Соответственно, потери L_y обороняющихся можно описать следующим выражением:

$$L_y = a_y q^{-c}, \tag{21}$$

где a_y есть коэффициент потерь обороняющихся.

Имея выражения для расчета темпа наступления и ожидаемых потерь, можно назначать различные критерии боевых действий, отражающих цели сторон и особенности обстановки.

5. Влияние общественных издержек на ход и исход войн

Победа в войнах не всегда определяется соотношением военных потенциалов государств-участников, чему в истории имеется множество подтверждений (война США во Вьетнаме, война СССР в Афганистане и др.). Для анализа и прогноза исхода войн необходимо учитывать отношение народов к войне.

В таблице 5 представлены данные по потерям вооруженных сил (ВС) США в крупных войнах [Кузнецов, 2010].

Проценты потерь (убитыми и ранеными) в Корее и Вьетнаме: 2.4 % от общей численности вооруженных сил (ВС) США и, соответственно, 0.09 % и 0.11 % от численности населения. Существенное отличие между двумя войнами заключается в масштабах антивоенных выступлений, дезертирства и отказа от призыва. В годы войны во Вьетнаме антивоенное движение оказалось более мощным и превзошло антивоенные выступления в годы Корейской войны по всем показателям: общее количество участников, размах, количество акций протеста, формы и их распространение [Кузнецов, 2010].

Таблица 5. Потери США в ходе войн

	Убито, тыс. чел.	Ранено, тыс. чел.	Общая численность ВС, тыс. чел.*	% потерь ВС	% потерь населения
Вторая мировая война, 1939–1945 гг.	407.3	671.8	14903.2	7.2	0.8
Корейская война, 1950–1953 гг.	36.6	103.3	5764.1	2.4	0.09
Вьетнамская война, 1964–1973 гг.	58.2	153.4	8752.0	2.4	0.11
Война в Персидском заливе	0.383	0.467	665.5	0.1	0.0003

* Общее количество военнослужащих, принимавших участие в военной операции.
Источник: [Кузнецов, 2010].

Таблица 6. Потери США в годы Вьетнамской войны и протесты

Год	Потери ВС США	Средний % поддержки	Количество протестующих
1965	1 000	62.50	50 000
1966	6 000	51.75	100 000
1967	16 000	48.00	400 000
1968	30 000	39.00	625 000
1969	40 000	35.50	850 000
1970	44 000	33.75	925 000
1971	45 000	29.50	1 000 000

Источник: [Шумов, 2014, с. 167–184].

В таблице 6 представлены данные по годам о потерях вооруженных сил и количестве протестующих [Шумов, 2014].

Из таблицы видно, что с ростом боевых потерь (убитыми) росло количество протестующих против войны и снижалась поддержка правительства со стороны общества. Переломным моментом в сломе поддержки войны со стороны СМИ считается 27 февраля 1968 г. (передача телеведущего У. Кронкайта, который военный успех армии США представил как «ничью», «тупик», «мертвую точку») [Кузнецов, 2010].

Пусть имеются две стороны, участвующие в конфликте. Обозначим через $x(t)$ ($y(t)$) численность участников первой (второй) стороны в момент времени $t > 0$; численность в нулевой момент времени — x_0 и y_0 соответственно. Пусть первая сторона имеет решающее превосходство в силах и средствах над второй стороной и вместе с тем является агрессором, тогда как вторая сторона считает конфликт справедливым, а победу в нем — крайне важной. Обозначим через X_0 и Y_0 численность населения первой и второй страны в момент начала конфликта. Положим, что за время конфликта естественным приростом (убылью) населения можно пренебречь. Обозначим через Λ_x и Λ_y выдерживаемую обществом первой и второй страны долю потерь. Рассмотрим модель с вводом резервов: стороны поддерживают численность своих войск на одном уровне, компенсируя потери. Из уравнений Осипова–Ланчестера (модель с переносом огня) и условия постоянства численности войск получим

$$x_R(t) - \beta_y y(t) = 0, \quad y_R(t) - \beta_x x(t) = 0, \quad x_R(t) = x_0 - x(t), \quad y_R(t) = y_0 - y(t), \quad (22)$$

где β_x и β_y — коэффициенты боевой эффективности первой и второй стороны; $x_R(t)$ и $y_R(t)$ — количество введенного в сражение резерва (равного потерям в ходе боев).

Решение уравнений (22):

$$x_R(t) = x_0 - x(t) = \beta_y \frac{y_0 - \beta_x x_0}{1 - \beta_x \beta_y}, \quad y_R(t) = y_0 - y(t) = \beta_x \frac{x_0 - \beta_y y_0}{1 - \beta_x \beta_y}. \quad (23)$$

Пример 3. Пусть численность населения воюющих государств равна $X_0 = 200\,000\,000$ чел., $Y_0 = 40\,000\,000$ чел.; численность их войск — $x_0 = 500\,000$ чел., $y_0 = 2\,500\,000$ чел.; военные потери за $t = 9$ лет: $x_R(t) = 60\,000$ чел., $y_R(t) = 1\,000\,000$ чел.

Из (22) при $t = 9$ находим

$$\beta_x = \frac{y_R(t)/9}{x_0 - x_R(t)/9} \approx 0.225, \quad \beta_y = \frac{x_R(t)/9}{y_0 - y_R(t)/9} \approx 0.003$$

(коэффициент боевой эффективности боевой единицы первой стороны в 80 раз выше соответствующего коэффициента второй стороны).

Нижние оценки потерь стран (без учета раненых) равны

$$\Lambda_x = 0.03 \%, \quad \Lambda_y = 2.5 \%$$

Несмотря на значительное технологическое превосходство первой страны (США) над второй (Вьетнамом), первая страна проиграла войну, что можно объяснить неспособностью и неготовностью американского общества нести высокие социальные издержки в войне, цели которой народу не близки.

6. Учет психологических операций и социально-информационных воздействий в моделях боя

В соответствии с концепцией Д. Бойда [Ивлев, 2008] войны в современную информационную эпоху состоят из трех элементов: *Moral warfare* (разрушение воли противника к достижению победы); *Mental warfare* (искажение восприятия противником реальности) и *Physical warfare* (традиционные военные действия). По оценке В. Т. Третьякова, во всех современных демократических обществах существуют и эффективно действуют механизмы мобилизации свободной прессы для выполнения задач, которые ставит перед страной (нацией) официальная власть, в том числе и задач военных [Третьяков, 2004].

Психологические операции и социально-информационные воздействия направлены на повышение морального потенциала своих войск и своего населения и на снижение морального потенциала противника (параметры λ_x, λ_y модели боя).

Рассмотрим модель социально-информационного влияния, позволяющую оценить эффективность социально-информационных воздействий. Пусть $0 \leq \theta \leq 1$ есть показатель, характеризующий моральный потенциал индивидов. Для учета социально-информационных воздействий на индивидов определим функцию представления $B(y_+, y_-, \theta) = B(\theta)$ о показателе $\theta \in [0, 1]$ в условиях воздействий $y_+ \geq 0$ ($y_- \geq 0$), направленных на увеличение (уменьшение) представления о значении показателя, как функцию вида

$$B(\cdot): [0, 1] \rightarrow [0, 1]. \quad (24)$$

В условиях разнонаправленных воздействий определим функцию представления в виде

$$B(y_+, y_-, \theta) = \alpha B_+(y_+, \theta) + (1 - \alpha) B_-(y_-, \theta), \quad (25)$$

где $0 < \alpha < 1$ — параметр, позволяющий учесть степень усвоения индивидами воздействий определенной направленности. Применительно к военным конфликтам параметр α может отражать долю «милитаристов» в обществе.

Сформулируем *гипотезу*. Предположим, что изменение представления подчиняется основному психофизическому закону в форме С. Стивенса и стремится к нулю при $\theta = 0$ и $\theta = 1$. Иными словами, достоверное (невозможное) событие остается таковым в условиях социально-информационных воздействий. Тогда получим следующие дифференциальные уравнения:

$$\frac{d}{dy_+} B_+(\cdot) = \alpha k_{y_+} (y_+)^{\nu} B_+(\cdot)(1 - B_+(\cdot)), \quad \frac{d}{dy_-} B_-(\cdot) = -(1 - \alpha) k_{y_-} (y_-)^{\nu} B_-(\cdot)(1 - B_-(\cdot)), \quad (26)$$

где $k_{y_+} \geq 0$ ($k_{y_-} \geq 0$) — параметр размерности воздействий, направленных на увеличение (уменьшение) представления; $\nu \geq 0$ ($\nu \geq 0$) характеризует модальность воздействия.

Параметры размерности k_{y_+} и k_{y_-} характеризуют среднюю долю суточного времени, затрачиваемого индивидами на удовлетворение той или иной базовой потребности.

Решениями уравнений (26) являются следующие выражения:

$$B_+(y_+, \theta) = \frac{\theta \exp(z_{y_+})}{1 - \theta + \theta \exp(z_{y_+})}, \quad z_{y_+} = \frac{k_{y_+}}{\nu + 1} (y_+)^{\nu+1}, \quad (27)$$

$$B_-(y_-, \theta) = \frac{\theta \exp(-z_{y_-})}{1 - \theta + \theta \exp(-z_{y_-})}, \quad z_{y_-} = \frac{k_{y_-}}{\nu + 1} (y_-)^{\nu+1}. \quad (28)$$

Для оценки параметра модальности можно использовать выражение [Крылов, 2005]

$$\nu = \frac{\ln R_{\max} - \ln R_{\min}}{\ln S_{\max} - \ln S_{\min}}, \quad (29)$$

где S_{\max} (S_{\min}) — максимальное (минимальное) значение интенсивности раздражителя, R_{\max} (R_{\min}) — максимальное (минимальное) значение стимула.

Применительно к реакции американского общества на войну в Корее и войну во Вьетнаме получено [Шумов, 2014] $\nu = \nu = 1.3$.

Имея модель социально-информационного влияния, можно ставить и решать задачи социально-информационного управления и противоборства.

Пример 3. Допустим, что в обществе имеется консенсус о важности военной кампании, характеризуемый показателем $\theta = 0.6$. Доля «милитаристов» и доля «пацифистов» в обществе одинаковы, т. е. $\alpha = 0.5$. Под воздействием военных потерь формируются социальные действия размером $y_- = 5$ с параметром модальности $\nu = 1.3$. При $k_{y_+} = k_{y_-} = 0.1$ и параметре модальности $\nu = 0.8$ найти количество социально-информационных воздействий, направленных на увеличение представления о параметре θ , при котором значение функции представления $B(\theta)$ будет не ниже 0.6.

Из выражения (28) находим $B_-(y_-, \theta) = 0.21$. Из условия (25) получаем

$$0.5B_+(y_+, \theta) + 0.5 \cdot 0.21 = 0.6 \quad \text{или} \quad B_+(y_+, \theta) = 0.99, \quad \exp(z_{y_+}) = 0.219.$$

Решая последнее уравнение, получим $y_+ = 11.04$. Таким образом, в условиях примера для компенсации воздействий $y_- = 5$, направленных на снижение представлений о параметре θ , необходимо сформировать воздействия противоположной направленности размером $y_+ > 11$.

Отметим, что наряду с рассмотренной моделью социально-информационного влияния известно множество других моделей, обзор которых можно найти в работе [Новиков, Чхартишвили, 2013].

7. Заключение

Моделирование боевых и военных действий является важнейшей научной и практической задачей, направленной на предоставление командованию количественных оснований для принятия решений.

В работе обобщены принципы моделирования боевых действий, рассмотрена вероятностная модель боя, учитывающая моральные и технологические характеристики участников боевых действий. Предложено ее расширение, позволяющее масштабировать модель с уровня подразделения до уровня части и соединения за счет учета в модели разнородных боевых единиц, основных видов боевого, технического и материального обеспечения.

Разработана теоретико-игровая модель «наступление–оборона», учитывающая действия первых и вторых эшелонов (резервов) сторон, предназначенных для прорыва (удержания)

пунктов обороны и овладения назначенным районом в глубине обороны (отражения контратаки). При прорыве пунктов обороны первому эшелону наступающих целесообразно всеми силами прорывать слабейший пункт обороны, а обороняющимся — распределить имеющиеся средства между пунктами пропорционально значению параметра боевого превосходства. Вынужденность обороны непосредственно следует из того факта, что с увеличением количества пунктов (районов) обороны обороняющимся необходимо распределять ограниченные силы первого эшелона между ними, тогда как наступающие наносят удар по одному из них. Показателем вынужденности обороны является агрегированный параметр боевого превосходства, являющийся суммой параметров превосходства по всем пунктам обороны.

Целевой функцией наступающих в модели «наступление–оборона» является произведение вероятности прорыва первым эшелоном одного из пунктов обороны и вероятности отражения вторым эшелоном контратаки резерва обороняющихся. С использованием равновесия Нэша найдено оптимальное распределение войск (боевых единиц) между эшелонами. Доля войск, выделяемая сторонами во второй эшелон (резерв), растет с увеличением значения агрегированного параметра боевого превосходства наступающих и уменьшается с увеличением значения параметра боевого превосходства при отражении контратаки. При планировании боя (сражения, операции) и распределении своих войск между эшелонами важно знать не точное количество войск противника, а свои и его возможности, а также степень подготовленности обороны, что не противоречит опыту ведения боевых действий.

В зависимости от условий обстановки целью наступления может являться разгром противника, скорейший захват важного района в глубине обороны противника, минимизация своих потерь и т. д. Для масштабирования модели «наступление–оборона» по целям найдены зависимости потерь и темпа наступления от начального соотношения боевых потенциалов сторон.

Выполнен учет влияния общественных издержек на ход и исход войн. Дано теоретическое объяснение проигрыша в военной кампании со слабым в технологическом отношении противником и при неясной для общества цели войны.

Для учета влияния психологических операций и информационных войн на моральный потенциал индивидов использована модель социально-информационного влияния.

Авторы признательны за конструктивные и ценные замечания рецензентов, позволившие существенно улучшить содержание и качество изложения материала.

Список литературы (References)

- Арнольд В. И. «Жесткие» и «мягкие» математические модели. — М.: МЦНМО, 2004. — 32 с.
Arnol'd V. I. «Zhestkie» i «myagkie» matematicheskie modeli [«Hard» and «soft» mathematical models]. — Moscow: MTcNMO, 2004. — 32 p. (in Russian).
- Васин А. А., Морозов В. В. Теория игр и модели математической экономики: учеб. пособие. — М.: Макс-Пресс, 2005. — 278 с.
Vasin A. A., Morozov V. V. Teoriya igr i modeli matematicheskoy ehkonomiki: uchebnoe posobie [Game Theory and Models of Mathematical Economics: A Study Guide]. — Moscow: Maks-Press, 2005. — 278 p. (in Russian).
- Война и мир в терминах и определениях: военно-политический словарь / под общ. ред. Д. Рогозина. — М.: ПоРог, 2004. — 334 с.
Voina i mir v terminakh i opredeleniyakh: voenno-politicheskii slovar' [War and Peace in Terms and Definitions: Political-Military Dictionary] / pod obshch. red. D. Rogozina. — Moscow: PoRog, 2004. — 334 p. (in Russian).
- Гермейер Ю. Б. Введение в теорию исследования операций. — М.: Гл. ред. физ.-мат. лит. изд-ва «Наука», 1971. — 384 с.
Germeier Yu. B. Vvedenie v teoriyu issledovaniya operatsii [Introduction to Operations Research Theory]. — Moscow: Gl. red. fiz.-mat. lit. izd-va «Nauka», 1971. — 384 p. (in Russian).
- Головин Н. Н. Наука о войне. О социологическом изучении войны. — Париж: Издательство газеты «Сигнал», 1938. — 242 с.
Golovin N. N. Nauka o voine. O sotsiologicheskom izuchenii voyny [On the sociological study of war]. — Parizh: Izdatel'stvo gazety «Signal», 1938. — 242 p. (in Russian).

- Головин Н. Н.* Исследование боя. Исследование деятельности и свойств человека как бойца. Книга 2. Статьи и письма. — М.: ВАГШ, 1995. — 303 с.
Golovin N. N. Issledovanie boya. Issledovanie deyatelnosti i svoistv cheloveka kak boitsa. Kniga 2. Stat'i i pis'ma [Battle research. The study of the activities and properties of man as a fighter. Book 2. Articles and letters]. — Moscow: VAGSh, 1995. — 303 p. (in Russian).
- Ивлев А. А.* Основы теории Бойда. Направления развития, применения и реализации: монография. — М.: 2008. В рукописи. — 64 с.
Ivlev A. A. Osnovy teorii Boida. Napravleniya razvitiya, primeneniya i realizatsii [Fundamentals of Boyd's theory. Directions of development, application and implementation]: monografiya. — Moscow: 2008. V rukopisi. — 64 p. (in Russian).
- Исаев А.* Георгий Жуков. Последний довод короля. — М.: Яуза, Эксмо, 2006. — 480 с.
Isaev A. Georgii Zhukov. Poslednii dovod korolya [King's last argument]. — Moscow: Yauza, Eksmo, 2006. — 480 p. (in Russian).
- Исаев А. В.* Сталинград. За Волгой для нас земли нет. — М.: Яуза, Эксмо, 2008. — 448 с.
Isaev A. V. Stalingrad. Za Volgoi dlya nas zemli net [Stalingrad. Beyond the Volga there is no land for us]. — Moscow: Yauza, Eksmo, 2008. — 448 p. (in Russian).
- История Второй мировой войны 1939–1945. — Т. 9. — М.: Воениздат, 1978. — 574 с.
Istoriya Vtoroi mirovoi voiny 1939–1945 [History of World War II 1939–1945]. — Vol. 9. — Moscow: Voenizdat, 1978. — 574 p. (in Russian).
- Карлин С.* Математические методы в теории игр, программировании и экономике. — М.: Мир, 1964. — 835 с.
Karlin S. Matematicheskie metody v teorii igr, programmirovaniy i ekonomike [Mathematical methods in game theory, programming and economics]. — Moscow: Mir, 1964. — 835 p. (in Russian).
- Корепанов В. О., Новиков Д. А.* Задача о диффузной бомбе // Проблемы управления. — 2011. — № 5. — С. 66–73.
Korepanov V. O., Novikov D. A. Zadacha o diffuznoi bombe [The diffuse bomb problem] // Control Sciences. — 2011. — No. 5. — P. 66–73 (in Russian).
- Костяев Н. И., Кучаров В. Н.* Единая система управления в тактическом звене // Армейский сборник. — 2011. — № 3 (202). — С. 18–23.
Kostyaev N. I., Kucharov V. N. Edinaya sistema upravleniya v takticheskom zvene [Unified tactical management system] // Armeiskii sbornik. — 2011. — No. 3 (202). — P. 18–23 (in Russian).
- Краснощеков П. С., Петров А. А.* Принципы построения моделей. — М.: МГУ, 1983. — 264 с.
Krasnoshchekov P. S., Petrov A. A. Printsipy postroeniya modelei [Principles of model building]. — Moscow: MGU, 1983. — 264 p. (in Russian).
- Краткий словарь оперативно-тактических и общевоенных слов (терминов). — М.: Воениздат, 1958. — 323 с.
Kratkii slovar' operativno-takticheskikh i obshchevoennykh slov (terminov) [Brief dictionary of operational tactical and general words (terms)]. — Moscow: Voenizdat, 1958. — 323 p. (in Russian).
- Крылов А. А.* Психология: учебник. — М.: Проспект, 2005. — 744 с.
Krylov A. A. Psikhologiya: uchebnik [Psychology: textbook]. — Moscow: Prospekt, 2005. — 744 p. (in Russian).
- Кузнецов Д. В.* Использование военной силы во внешней политике США: учеб. пособие. — Благовещенск: Изд-во БГПУ, 2010. — 430 с.
Kuznetsov D. V. Ispol'zovanie voennoi sily vo vneshnei politike SShA: ucheb. posobie [The Use of Military Force in US Foreign Policy: A Training Manual]. — Blagoveshchensk: Izd-vo BGPU, 2010. — 430 p. (in Russian).
- Медин А.* Имитационная система JTLS // Зарубежное военное обозрение. — 2010. — № 2. — С. 31–34; № 3. — С. 26–31; № 4. — С. 35–37.
Medin A. Imitatsionnaya sistema JTLS [JTLS Simulation System] // Zarubezhnoe voennoe obozrenie. — 2010. — No. 2. — P. 31–34; No. 3. — P. 26–31; No. 4. — P. 35–37 (in Russian).
- Новиков Д. А.* Иерархические модели военных действий // Управление большими системами. — 2012. — Вып. 37. — С. 25–62.
Novikov D. A. Ierarkhicheskie modeli voennykh deistvii [Hierarchical models of warfare] // Large-Scale Systems Control. — 2012. — Vyp. 37. — P. 25–62 (in Russian).
- Новиков Д. А., Чхартушвили А. Г.* Рефлексия и управление: математические модели. — М.: Изд-во физико-математической литературы, 2013. — 412 с.

- Novikov D. A., Chkhartishvili A. G.* Refleksiya i upravlenie: matematicheskie modeli [Reflection and control: mathematical models]. — Moscow: Izd-vo fiziko-matematicheskoi literatury, 2013. — 412 p. (in Russian).
- Осинов М. П.* Влияние численности сражающихся сторон на их потери // Военный сборник. — 1915. — № 6. — С. 59–74; № 7. — С. 25–36; № 8. — С. 31–40; № 9. — С. 25–37.
- Osipov M. P.* Vliyaniye chislennosti srazhayushchikhsya storon na ikh poteri [The influence of the number of parties fighting on their losses] // Voennyi sbornik. — 1915. — No. 6. — P. 59–74; No. 7. — P. 25–36; No. 8. — P. 31–40; No. 9. — P. 25–37 (in Russian).
- Павловский Ю. Н.* О факторе Л. Н. Толстого в вооруженной борьбе // Математическое моделирование. — 1993. — Т. 5, № 1. — С. 3–15.
- Pavlovskii Yu. N.* O faktore L. N. Tolstogo v vooruzhennoi bor'be [About the factor of L. N. Tolstoy in the armed struggle] // Matematicheskoe modelirovanie. — 1993. — Vol. 5, No. 1. — P. 3–15 (in Russian).
- Перевозчиков А. Г., Лесик И. А.* Простейшая модель системы эшелонированной противоздушной обороны // Вестник ТвГУ. Сер. Прикладная математика. — 2013. — № 3 (30). — С. 83–95.
- Perevozchikov A. G., Lesik I. A.* Prosteishaya model' sistemy eshelonirovannoi protivovozdushnoi oborony [The simplest model of a layered air defense system] // Vestnik TvGU. Ser. Prikladnaya matematika. — 2013. — № 3 (30). — P. 83–95 (in Russian).
- Перевозчиков А. Г., Решетов В. Ю., Шаповалов Т. Г.* Многоуровневое обобщение модели «нападение–оборона» // Вестник ТвГУ. Сер. Прикладная математика. — 2017. — № 1. — С. 57–69.
- Perevozchikov A. G., Reshetov V. Yu., Shapovalov T. G.* Mnogourovnevoe obobshchenie modeli “napadenie–oborona” [Multilevel generalization of the attack-defense model] // Vestnik TvGU. Ser. Prikladnaya matematika. — 2017. — No. 1. — P. 57–69 (in Russian).
- Речь Г. К. Жукова на военно-научной конференции, декабрь 1945 г.* // Военная мысль. — 1985. — Специальный выпуск (февраль). — С. 3, 17–33.
- Rech' G. K. Zhukova na voenno-nauchnoi konferentsii, dekabr' 1945 g.* [Speech by G. K. Zhukov at a military scientific conference, December 1945] // Voennaya mysl'. — 1985. — Spetsial'nyi vypusk (fevral'). — P. 3, 17–33 (in Russian).
- Решетов В. Ю., Перевозчиков А. Г., Лесик И. А.* Модель преодоления многоуровневой системы защиты нападением // Прикладная математика и информатика. — 2015. — № 49. — С. 80–96.
- Reshetov V. Yu., Perevozchikov A. G., Lesik I. A.* Model' preodoleniya mnogourovnevoi sistemy zashchity napadeniem [A model for overcoming a multi-level attack defense system] // Prikladnaya matematika i informatika. — 2015. — No. 49. — P. 80–96 (in Russian).
- Тактика / под ред. В. Г. Резниченко. — 2-е изд., перераб. и доп. — М.: Воениздат. 1987. — 496 с.
- Taktika [Tactics] / pod red. V. G. Reznichenko. — 2-e izd., pererab. i dop. — Moscow: Voenizdat, 1987. — 496 p. (in Russian).
- Третьяков В. Т.* Как стать знаменитым журналистом: курс лекций по теории и практике современной русской журналистики. — М.: Ладомир, 2004. — 623 с.
- Tret'yakov V. T.* Kak stat' znamenitym zhurnalistom: kurs lektzii po teorii i praktike sovremennoi russkoi zhurnalistiki [How to become a famous journalist: a course of lectures on the theory and practice of modern Russian journalism]. — Moscow: Ladomir, 2004. — 623 p. (in Russian).
- Цена Победы: сколько стоил Т-34, Ил-4 и автомат ППШ. — URL: <https://militaryarms.ru/novosti/cena-pobedy/> (дата обращения: 14.06.2019).
- Tsena Pobedy: skol'ko stoil T-34, Il-4 i avtomat PPSH [Victory Price: how much T-34, IL-4 and PPSH machine cost]. — URL: <https://militaryarms.ru/novosti/cena-pobedy/> (accessed: 14.06.2019) (in Russian).
- Цыгичко В. И., Стоили Ф.* Метод боевых потенциалов: история и настоящее // Военная мысль. — 1997. — № 4. — С. 23–28.
- Tsygichko V. I., Stoili F.* Metod boevykh potentsialov: istoriya i nastoyashchee [The method of combat potentials: history and present] // Voennaya mysl'. — 1997. — No. 4. — P. 23–28 (in Russian).
- Шумов В. В.* Анализ социально-информационного влияния на примере войн США в Корее, Вьетнаме и Ираке // Компьютерные исследования и моделирование. — 2014. — Т. 6, № 1. — С. 167–184.

- Shumov V. V.* Analiz sotsial'no-informatsionnogo vliyaniya na primere voyn SShA v Koree, V'etname i Irake [Analysis of the socio-informational impact on the example of US wars in Korea, Vietnam and Iraq] // Computer Research and Modeling. — 2014. — Vol. 6, No. 1. — P. 167–184 (in Russian).
- Шумов В. В.* Учет психологических факторов в моделях боя (конфликта) // Компьютерные исследования и моделирование. — 2016. — Т. 8, № 6. — С. 951–964.
- Shumov V. V.* Uchet psikhologicheskikh faktorov v modelyakh boya (konflikta) [Consideration of psychological factors in battle (conflict) models] // Computer Research and Modeling. — 2016. — Vol. 8, No. 6. — P. 951–964 (in Russian).
- Шумов В. В.* Теоретико-игровая модель обороны стационарных объектов // Системы управления и информационные технологии. — 2019. — № 2 (76). — С. 18–21.
- Shumov V. V.* Teoretiko-igrovaya model' oborony statsionarnykh ob'ektov [Game-theoretic model of defense of stationary objects] // Sistemy upravleniya i informatsionnye tekhnologii. — 2019. — No. 2 (76). — P. 18–21 (in Russian).
- Шумов В. В., Цезарь Д. А.* Вероятностная модель борьбы с пиратскими и террористическими актами в морском пространстве // Системы управления и информационные технологии. — 2019. — № 1 (75). — С. 97–100.
- Shumov V. V., Tsezar' D. A.* Veroyatnostnaya model' bor'by s piratskimi i terroristicheski-mi aktami v morskoy prostranstve [A probabilistic model for combating pirate and terrorist acts in the sea] // Sistemy upravleniya i informatsionnye tekhnologii. — 2019. — No. 1 (75). — P. 97–100 (in Russian).
- Bonder S.* Army operations research — historical perspectives and lessons learned // Operation Research. — 2002. — Vol. 50, No. 1. — P. 25–34.
- Clausewitz K.* Vom Krieg. 1832/34.
- Dasgupta P. et al.* The existence of equilibrium in discontinuous economic games, I: Theory // Review of Economic Studies. — 1986. — Vol. 53, No. 1. — P. 1–26.
- Lanchester F. W.* Aircraft in Warfare: The Dawn of the Fourth Arm. — London: Constable and Co, Ltd., 1916. — 243 p.
- Morse P. M., Kimball G. E.* Methods of Operations Research. — Cambridge, MA: Technology Press of MIT / New York: John Wiley & Sons, 1951. — 158 p.