

УДК: 519.8

Синхронизация и несимметрия в модели Курамото из трех неидентичных осцилляторов: особенности моделирования меридионального потока Солнца

Е. М. Блантер^{1,2,a}, М. С. Елаева^{1,b}, М. Г. Шнирман^{1,2,c}

¹Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»,
Россия, 101000, г. Москва, ул. Мясницкая, д. 20

²Институт теории прогноза землетрясений и математической геофизики РАН,
Россия, 117997, г. Москва, ул. Профсоюзная, д. 84/32

E-mail: ^a emblanter@mail.ru, ^b mselaeva@mail.ru, ^c shnir@mitp.ru

Получено 21.10.2019, после доработки — 22.11.2019.

Принято к публикации 28.11.2019.

Модели Курамото нелинейно связанных осцилляторов позволяют достаточно просто описывать фазовую синхронизацию в сложных системах. В данной работе мы рассматриваем частный случай модели Курамото с тремя осцилляторами, возникший в процессе исследования и моделирования меридионального потока в конвективной зоне Солнца. В рассматриваемой модели крайние осцилляторы связаны только со средним, а прямая связь между ними отсутствует. В отличие от классических моделей Курамото рассматриваемая система предполагает существенную асимметрию в связях каждого из осцилляторов с двумя другими. Мы исследуем, какое влияние на синхронизацию оказывает коэффициент связи, характеризующий асимметрию связей среднего осциллятора. Необходимое и достаточное условия синхронизации в этой работе выписываются аналитически и получаются отличными от достаточных условий синхронизации в классической (симметричной) модели. Мы формулируем обратную задачу восстановления коэффициентов связи из фазовой разницы крайних осцилляторов при известных естественных частотах. Восстановление проводится в предположении синхронизации. Получено, что коэффициенты связи с точностью до знака восстанавливаются для любого значения коэффициента несимметрии среднего осциллятора. Мы исследуем, как меняется график зависимости суммарной связи от коэффициента несимметрии при изменении разности фаз крайних осцилляторов, а также в особых случаях совпадающих или сильно отличающихся естественных частот. В случае общего положения, при разности фаз крайних осцилляторов, близких к π , суммарная связь, соответствующая сильной асимметрии связей среднего осциллятора, оказывается меньше, чем в симметричном случае. Мы рассматриваем значения естественных частот, пересчитанные из скоростей меридионального потока Солнца. В зависимости от интерпретации данных гелиосейсмологии мы получаем два случая: случай общего положения, соответствующий наблюдениям средней ячейки, и особый случай, соответствующий наблюдениям нижней ячейки. Однозначное (с точностью до знака) восстановление коэффициентов связи в случае слабой суммарной связи возможно только в случае общего положения. В заключении делаются выводы о возможности использования курамотовских моделей с асимметрией связей, относящихся к одному осциллятору, для моделирования слабо связанных систем, к которым, по всей видимости, относится солнечная меридиональная циркуляция.

Ключевые слова: синхронизация, нелинейные осцилляторы, модель Курамото, симметрия, меридиональный поток Солнца

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 17-11-01052).

UDC: 519.8

Synchronization of the asymmetrical system with three non-identical Kuramoto oscillators: models of solar meridional circulation

E. M. Blanter^{1,2,a}, M. S. Elaeva^{1,b}, M. G. Shnirman^{1,2,c}

¹National Research University Higher School of Economics,
20 Myasnitskaya st., Moscow, 101000, Russia

²Russian Academy of Science, Institute of Earthquake Prediction Theory and Mathematical Geophysics,
84/32 Profsoyuznaya st., Moscow, 117997, Russia

E-mail: ^a emblanter@mail.ru, ^b mselaeva@mail.ru, ^c shnir@mitp.ru

*Received 21.10.2019, after completion – 22.11.2019.
Accepted for publication 28.11.2019.*

Kuramoto model of non-linearly coupled oscillators provides a simple but effective approach to the study of the synchronization phenomenon in complex systems. In the present article we consider a particular Kuramoto model with three non-identical oscillators associated with a multi-cell radial profile of the solar meridional circulation. The top and the bottom oscillators are coupled through the middle one. The main difference of the present Kuramoto model from the previous ones consists in the non-identical coupling: coupling coefficients which tie the middle oscillator with the top and the bottom ones are different. We investigate how the value of the coupling asymmetry of the middle oscillator influences the synchronization. In the present model the synchronization conditions appear to be different the classical Kuramoto model allowing the synchronization to be reached with weaker coupling. We perform a reconstruction of coupling coefficients from the phase difference between the top and the bottom oscillators, assuming that the synchronization is reached and the natural frequencies are known. The absolute cumulative coupling is uniquely determined by the phase difference between the top and the bottom oscillators and the coupling asymmetry of the middle oscillator. In general case, higher values of the coupling asymmetry of the middle oscillator correspond to lower cumulative coupling. A unique coupling reconstruction with unknown coupling asymmetry is possible in general case only for the weak cumulative coupling. Deviations from the general case are discussed. We perform a model simulation with natural frequencies estimated from the velocities of the solar meridional flow. Helioseismological observations of the deep flow may be attributed either to the middle cell or to the deep one. We discuss the difference between these two cases in terms of the coupling reconstruction.

Keywords: synchronization, non-linear oscillator, Kuramoto model, symmetry, solar meridional circulation

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2020, vol. 12, no. 2, pp. 345–356 (Russian).

This work was supported by the Russian Science Foundation (project No. 17-11-01052).

Введение

Модели Курамото [Kuramoto, 1975] описывают фазовую эволюцию системы осцилляторов посредством системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + \sum_{j=1}^N k_{ij} \sin(\theta_i - \theta_j), \quad i = 1, \dots, N, \quad (1)$$

где ω_i ($i = 1, \dots, N$) обозначают естественные частоты осцилляторов, θ_i — фазы осцилляторов, а k_{ij} — связи между ними. Для простоты анализа в случае большого (бесконечного) количества осцилляторов все связи полагаются равными K/N . Основным свойством такой модели является асимптотический переход системы к синхронизации при достаточно больших K [Dörfler, Bullo, 2011]. Благодаря своей простоте модели Курамото получили широкое распространение в физике и медицине [Acebron et al., 2005; Pikovsky et al., 2003; Rodrigues et al., 2016; Bick et al., 2019]. В последнее десятилетие фокус исследований сместился от больших систем с бесконечным количеством осцилляторов в сторону моделей с конечным (в том числе малым) количеством осцилляторов. Такие модели позволяют рассматривать неидентичные осцилляторы, нетривиальные и зависящие от времени связи [Cumin, Unsworth, 2007; Hong, Strogatz, 2011; Hong, Strogatz, 2012; Petkoski, Stefanovska, 2012; Blanter et al., 2014; Blanter et al., 2016; DeVille, Ermentrout, 2016; Garlaschelli et al., 2019]. В последнее время исследования курамотовских моделей обратились к решению обратных задач. В частности, интерес представляет восстановление связи в системе с известными естественными частотами и наблюдаемыми фазами [Pikovsky, 2018].

Одним из интересных приложений курамотовских моделей с малым числом осцилляторов стал меридиональный поток, действующий в зоне конвекции Солнца [Blanter et al., 2014; Blanter et al., 2016; Blanter et al., 2017; Blanter et al., 2018]. Согласно последним результатам, полученным в гелиосейсмологии [Zhao et al., 2013; Chen, Zhao, 2017], меридиональный поток состоит из нескольких ячеек, синхронизация которых выражается в 11-летнем солнечном цикле. Результаты гелиосейсмологии [Zhao et al., 2013; Chen, Zhao, 2017] вызвали широкую дискуссию о количестве циркуляционных ячеек меридионального потока, выразившуюся в построении моделей солнечного динамо со сложным радиальным профилем меридиональной циркуляции [Charbonneau, 2014; Hazra et al., 2014]. Однако однозначного ответа получить не удалось в связи с вариативностью меридионального потока Солнца [Featherstone, Miesch, 2015]. Последние математические исследования указывают, что бóльшая определенность может быть достигнута при решении обратной задачи, чем в прямом моделировании солнечного динамо [Liang et al., 2018]. В своих работах мы применяем модель Курамото для решения обратной задачи и восстановления свойств меридионального потока Солнца. В нашей предыдущей работе [Blanter et al., 2018] мы восстанавливали ненаблюдаемые скорости меридионального потока на границе зоны конвекции при помощи модели Курамото с тремя осцилляторами, в которой крайние осцилляторы связаны со средним одинаковой связью. Впоследствии оказалось, что успешное решение обратной задачи определялось выбором естественной частоты среднего осциллятора, близкой к частоте синхронизации. При рассмотрении произвольных естественных частот среднего осциллятора приходится предполагать неидентичность коэффициентов связи. Поскольку наши знания о меридиональном потоке в зоне конвекции Солнца крайне ограничены как во времени (восемью годами наблюдений), так и по пространству (не затрагивают высокие широты и не доходят до границы зоны конвекции), то решение обратной задачи по восстановлению скоростей имеет слишком много свободных параметров. В частности, вопрос о величине, симметрии и постоянстве связи между циркуляционными ячейками никак не изучен. При отсутствии прямых наблюдений единственным доступным методом решения остается математическое моделирование.

В настоящей работе мы рассматриваем обобщение модели меридионального потока с тремя осцилляторами [Blanter et al., 2018] для неравных коэффициентов связи между осцилляторами, вводим величину, характеризующую различие в связи и исследуем ее влияние на синхронизацию.

Модель

Мы рассматриваем модель Курамото с тремя неидентичными осцилляторами. Связь между двумя осцилляторами одинаково влияет на оба осциллятора: $\kappa_{ij} = \kappa_{ji}$. Предполагается, что связь между крайними осцилляторами осуществляется только через средний ($\kappa_{13} = \kappa_{31} = 0$). Эволюция фазы во времени задается следующими дифференциальными уравнениями:

$$\dot{\theta}_1 = \omega_1 + \kappa_{12} \sin(\theta_2 - \theta_1), \quad (2)$$

$$\dot{\theta}_2 = \omega_2 + \kappa_{12} \sin(\theta_1 - \theta_2) + \kappa_{23} \sin(\theta_3 - \theta_2), \quad (3)$$

$$\dot{\theta}_3 = \omega_3 + \kappa_{23} \sin(\theta_2 - \theta_3), \quad (4)$$

где ω_i , $i = 1, 2, 3$ обозначают естественные частоты, а θ_i — фазы осцилляторов. Понятно, что в случае нулевой связи со средним осциллятором — $\kappa_{12} = 0$ или $\kappa_{23} = 0$ — мы получим уравнение свободного колебания, определяемого естественной частотой $\dot{\theta}_1 = \omega_1$ или $\dot{\theta}_3 = \omega_3$ соответствующего осциллятора.

Равенство коэффициентов связи в уравнениях (2)–(4) определяет сохранение средней частоты осцилляторов:

$$\frac{\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3}{3} = \frac{\omega_1 + \omega_2 + \omega_3}{3} = \Omega. \quad (5)$$

Определение 1. Будем называть осцилляторы i и j синхронизированными, если их фазовая разница асимптотически постоянна: $\lim_{t \rightarrow \infty} (\theta_i(t) - \theta_j(t)) = \theta_{ij} = \text{const}$. Предельное значение разности фаз θ_{ij} будем называть точкой синхронизации осцилляторов i и j .

Определение 2. Будем называть систему осцилляторов синхронизированной, если в ней любые два осциллятора синхронизированы.

В терминах фазовых разниц $\alpha = (\theta_1 - \theta_3)/2$ и $\beta = \theta_2 - (\theta_1 + \theta_3)/2$ уравнения (2)–(4) с учетом (5) перепишутся как

$$\dot{\alpha} = \frac{\Delta\omega}{2} - k \sin \alpha \cos \beta + \Delta k \sin \beta \cos \alpha, \quad (6)$$

$$\dot{\beta} = \frac{3(\omega_2 - \Omega)}{2} - 3k \sin \beta \cos \alpha + 3\Delta k \sin \alpha \cos \beta, \quad (7)$$

где коэффициенты связи обозначены как $k = (\kappa_{12} + \kappa_{23})/2$ и $\Delta k = (\kappa_{12} - \kappa_{23})/2$, а $\Delta\omega$ обозначает разницу фаз крайних осцилляторов: $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_3$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Заметим, что когда коэффициенты связи со средним осциллятором равны ($\kappa_{12} = \kappa_{23}$), то $\Delta k = 0$, а когда они равны по модулю, но имеют обратные знаки ($\kappa_{12} = -\kappa_{23}$), тогда $k = 0$. Таким образом, соотношение величин k и Δk определяет несимметрию связи крайних осцилляторов со средним.

Определение 3. Будем называть $r = \Delta k/k$ коэффициентом несимметрии среднего осциллятора.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Синхронизация системы трех осцилляторов (2)–(4) эквивалентна существованию устойчивого стационарного решения системы дифференциальных уравнений (6)–(7).

Теорема 1. *Соотношение фазовых разниц в точке синхронизации определяется естественными частотами и коэффициентом несимметрии среднего осциллятора.*

Доказательство. Рассмотрим уравнения (6)–(7) в предположении синхронизации и перейдем к пределу при $t \rightarrow \infty$. Получим

$$\frac{\Delta\omega}{2} = k \sin \alpha \cos \beta - \Delta k \sin \beta \cos \alpha, \quad (8)$$

$$\frac{\Omega - \omega_2}{2} = \Delta k \sin \alpha \cos \beta - k \sin \beta \cos \alpha. \quad (9)$$

После несложных преобразований получим

$$\sin(\alpha - \beta) = \frac{\Omega - \omega_2 + \Delta\omega}{2(k + \Delta k)}, \quad (10)$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{\Omega - \omega_2 - \Delta\omega}{2(k - \Delta k)}. \quad (11)$$

Раскладываем синусы в левой части, берем сумму и разность получившихся уравнений:

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{(\Omega - \omega_2)k - \Delta k \Delta\omega}{2(k^2 - \Delta k^2)}, \quad (12)$$

$$\cos \alpha \sin \beta = \frac{(\Omega - \omega_2)\Delta k - k \Delta\omega}{2(k^2 - \Delta k^2)}. \quad (13)$$

Отношение полученных уравнений дает

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta} = \frac{(\Omega - \omega_2)k - \Delta k \Delta\omega}{(\Omega - \omega_2)\Delta k - k \Delta\omega} = \frac{(\Omega - \omega_2) - r \Delta\omega}{(\Omega - \omega_2)r - \Delta\omega}. \quad (14)$$

□

Следствие 1. *В частном случае $\omega_2 = \Omega$ из формулы (14) следует*

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{1}{r} \operatorname{tg} \alpha. \quad (15)$$

Следствие 2. *В частном случае $\Delta\omega = 0$ из формулы (14) следует*

$$\operatorname{tg} \beta = r \operatorname{tg} \alpha. \quad (16)$$

Условия синхронизации

Заметим, что существование решения уравнений (10)–(11) требует, чтобы их правая часть по модулю не превосходила единицы:

$$\left| \frac{\Omega - \omega_2 + \Delta\omega}{2(k + \Delta k)} \right| \leq 1, \quad (17)$$

$$\left| \frac{\Omega - \omega_2 - \Delta\omega}{2(k - \Delta k)} \right| \leq 1. \quad (18)$$

Путем несложных подстановок неравенства (17)–(18) преобразуются к виду

$$|\kappa_{12}| \geq |\omega_1 - \Omega|, \quad (19)$$

$$|\kappa_{23}| \geq |\omega_3 - \Omega|. \quad (20)$$

Уравнения (17)–(18) или (19)–(20) определяют необходимое условие синхронизации.

Теорема 2. *Неравенства*

$$|\kappa_{12}| > |\omega_1 - \Omega|, \quad (21)$$

$$|\kappa_{23}| > |\omega_3 - \Omega| \quad (22)$$

являются достаточным условием синхронизации при ненулевых коэффициентах связи.

Доказательство. Пусть α и β — стационарное решение системы (6)–(7), определяющееся уравнениями (8)–(9). Рассмотрим характеристическое уравнение системы (6)–(7):

$$\lambda^2 + 4(k \cos \alpha \cos \beta - \Delta k \sin \alpha \sin \beta)\lambda + 3(k^2 - \Delta k^2)(\cos^2 \alpha \cos^2 \beta - \sin^2 \alpha \sin^2 \beta) = 0.$$

Его корни равны

$$\lambda_{1,2} = -2(k \cos \alpha \cos \beta - \Delta k \sin \alpha \sin \beta) \pm \sqrt{(k \cos \alpha \cos \beta - \Delta k \sin \alpha \sin \beta)^2 + 3(k \sin \alpha \sin \beta - \Delta k \cos \alpha \cos \beta)^2}. \quad (23)$$

Действительные части $\lambda_{1,2}$ отрицательны, когда

$$k \cos \alpha \cos \beta - \Delta k \sin \alpha \sin \beta > 0, \quad (24)$$

$$\frac{k^2 - \Delta k^2}{2}(\cos 2\alpha + \cos 2\beta) > 0. \quad (25)$$

Неравенства (24)–(25) перепишем в следующем виде:

$$(k - \Delta k) \cos(\alpha + \beta) + (k + \Delta k) \cos(\alpha - \beta) > 0, \quad (26)$$

$$(k - \Delta k)(k + \Delta k) \cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) > 0. \quad (27)$$

Таким образом, система (6)–(7) имеет устойчивое стационарное решение (α, β) , определяемое (10)–(11), если выполняются неравенства (26)–(27). Поскольку уравнения (10)–(11) определяют синусы, а неравенства (26)–(27) налагаются на косинусы, то в общем случае ($|k| \neq |\Delta k|$, $\cos(\alpha + \beta) \neq 0$, $\cos(\alpha - \beta) \neq 0$) можно выбрать α и β так, что $(k - \Delta k) \cos(\alpha + \beta) > 0$ и $(k + \Delta k) \cos(\alpha - \beta) > 0$ обеспечат выполнение неравенств (26)–(27).

Особые случаи возникают при $\kappa_{12} = 0$, $\kappa_{23} = 0$ $|\kappa_{12}| = |\omega_1 - \Omega|$ или $|\kappa_{23}| = |\omega_3 - \Omega|$ и приводят к нарушению неравенства (27) и неустойчивости стационарного решения. \square

Следствие 3. *В случае идентичных частот $\omega_i = \Omega$ синхронизация возникает при сколь угодно малой, но ненулевой связи.*

Оценка коэффициента несимметрии среднего осциллятора

Рассмотрим теперь решение обратной задачи: пусть нам известны естественные частоты и фазы крайних осцилляторов. Наша цель — восстановить связь между осцилляторами в предположении близости к точке синхронизации.

Теорема 3. *Если фиксированная разность фаз крайних осцилляторов нетривиальна ($\alpha \neq 0$, $\alpha \neq \pi/2$), то с ростом модуля связи k модуль коэффициента несимметрии среднего осциллятора r стремится к 1.*

Доказательство. Выразим синус и косинус β из уравнений (12)–(13):

$$\cos \beta = \frac{k(\Omega - \omega_2) - \Delta k \Delta \omega}{2(k^2 - \Delta k^2) \sin \alpha}, \quad (28)$$

$$\sin \beta = \frac{\Delta k(\Omega - \omega_2) - k \Delta \omega}{2(k^2 - \Delta k^2) \cos \alpha}. \quad (29)$$

Суммируя квадраты синуса и косинуса, получаем уравнение на коэффициенты связи:

$$\frac{(k(\Omega - \omega_2) - \Delta k \Delta \omega)^2}{4(k^2 - \Delta k^2)^2 \sin^2 \alpha} + \frac{(\Delta k(\Omega - \omega_2) - k \Delta \omega)^2}{4(k^2 - \Delta k^2)^2 \cos^2 \alpha} = 1, \quad (30)$$

которое в терминах переменных k и r примет вид

$$\frac{((\Omega - \omega_2) - r \Delta \omega)^2}{4k^2(1 - r^2)^2 \sin^2 \alpha} + \frac{(r(\Omega - \omega_2) - \Delta \omega)^2}{4k^2(1 - r^2)^2 \cos^2 \alpha} = 1. \quad (31)$$

Нетрудно заметить, что уравнение (31) выполняется при $k \rightarrow \infty$, только если $(1 - r^2) \rightarrow 0$. \square

Уравнение (31) определяет для каждого α кривую возможных значений суммарной связи k в зависимости от коэффициента несимметрии r :

$$k^2 = \frac{((\Omega - \omega_2) - r \Delta \omega)^2}{4(1 - r^2)^2 \sin^2 \alpha} + \frac{(r(\Omega - \omega_2) - \Delta \omega)^2}{4(1 - r^2)^2 \cos^2 \alpha}. \quad (32)$$

Уравнение (32) имеет две особые точки $r = \pm 1$ (рис. 1, а), соответствующие обращению в ноль одного из коэффициентов, κ_{12} или κ_{23} . Заметим, что полученная в общем случае кривая зависимости r от k позволяет, с точностью до знака, восстановить коэффициенты связи по коэффициенту

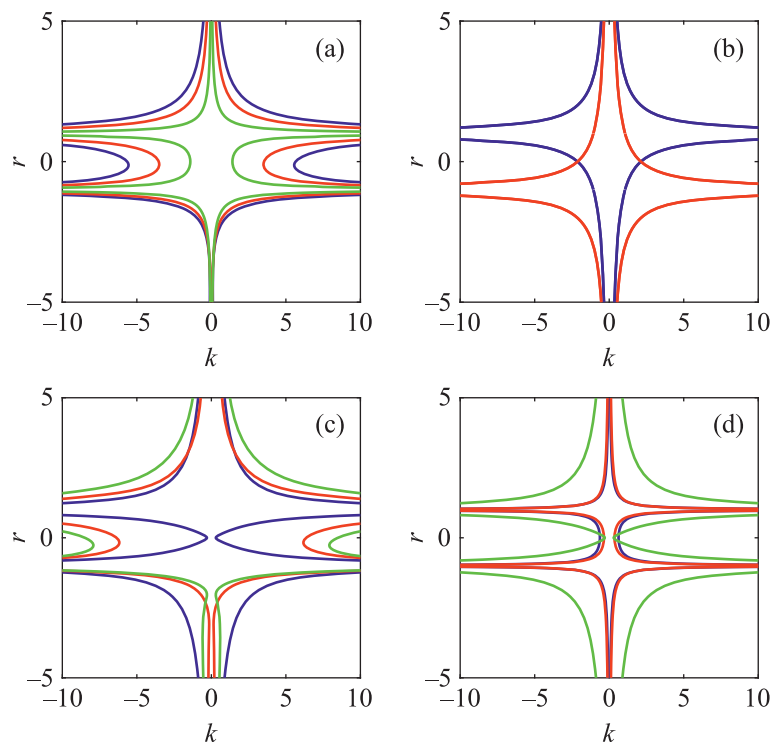


Рис. 1. Зависимость между суммарной связью и коэффициентом несимметрии среднего осциллятора при фиксированном значении $\alpha = 1.5$ радиана (а–с), при фиксированных естественных частотах $\omega_1 = 0.9$, $\omega_2 = 0$, $\omega_3 = 0.9$ (d). Параметры: (а) случай общего положения: $\omega_1 = 0.9$, $\omega_2 = 0.8$, $\omega_3 = 0.1$ (синий), $\omega_1 = 0.8$, $\omega_2 = 0.7$, $\omega_3 = 0.3$ (красный), $\omega_1 = 0.7$, $\omega_2 = 0.6$, $\omega_3 = 0.5$ (зеленый); (б) вырожденный случай: $\omega_1 = 0.6$, $\omega_2 = 0.9$, $\omega_3 = 0.3$ (синий), $\omega_1 = 0.9$, $\omega_2 = 0.3$, $\omega_3 = 0.6$ (красный); (с) при нулевой естественной скорости одного из осцилляторов: $\omega_1 = 0.9$, $\omega_2 = 0$, $\omega_3 = 0.9$ (синий), $\omega_1 = 0.9$, $\omega_2 = 0.9$, $\omega_3 = 0$ (красный), $\omega_1 = 0.3$, $\omega_2 = 0$, $\omega_3 = 1.5$ (зеленый); (d) при разных значениях α : $\alpha = 0.5$ (синий), $\alpha = 1$ радиан (красный), $\alpha = 1.5$ радиана (зеленый)

несимметрии r . Восстановление же коэффициентов по их суммарной связи для произвольного k , в принципе, неоднозначно. Однако если мы заранее имеем представление о знаке r , то в области малых величин k коэффициент несимметрии все же может быть определен. Так, например, в области положительных коэффициентов несимметрии малым k соответствует единственное значение r (рис. 1, *a*).

В частном случае $\Omega - \omega_2 = \Delta\omega$ уравнение (32) упрощается к виду

$$k^2 = \frac{\Delta\omega^2}{(1+r)^2 \sin^2 2\alpha}, \quad (33)$$

а в случае $\Omega - \omega_2 = -\Delta\omega$ — к виду

$$k^2 = \frac{\Delta\omega^2}{(1-r)^2 \sin^2 2\alpha}. \quad (34)$$

Одна из двух особых точек $r = \pm 1$ в этом случае пропадает (рис. 1, *b*). Заметим, однако, что, даже если синхронизированное решение, соответствующее $r = \pm 1$, существует (рис. 1, *b*), оно неустойчиво согласно доказательству теоремы 2.

На рис. 1, *c* показаны случаи, когда естественная частота одного из осцилляторов равна нулю. Восстановление суммарной связи k при известном r не отличается от случая общего положения. Напротив, при восстановлении коэффициента несимметрии при известной суммарной связи, в отличие от случая общего положения, r неоднозначно восстанавливается даже в условиях малых значений k . Например, при $\omega_1 = \omega_2 = 0.9$, $\omega_2 = 0$ (в области отрицательных коэффициентов несимметрии) одному и тому же значению k соответствуют значения r как вблизи нуля, так и большие по модулю (рис. 1, *c*, синяя кривая).

Рис. 1, *a-c* выполнены при разности фаз крайних осцилляторов, близких к антисинхронизации ($2\alpha = 3$). Уменьшение α приводит к расширению интервала допустимых значений r в районе нуля (рис. 1, *d*), допуская, таким образом, синхронизированные решения для почти симметричной слабой связи.

Моделирование солнечного меридионального потока

В этом разделе мы рассмотрим приложение вышеописанной модели к меридиональному потоку Солнца. Мы предполагаем, что меридиональный поток Солнца образует в каждой полусфере цепочку из трех циркуляционных ячеек, из которых верхняя расположена вблизи поверхности, а нижняя — на границе зоны конвекции. В соответствии с моделью мы предполагаем, что взаимосвязь верхней и нижней ячеек происходит только через среднюю, прямая связь между ними отсутствует. Уравнение (32) описывает зависимость суммарной связи k от коэффициента несимметрии среднего осциллятора r при известных естественных частотах и разнице фаз крайних осцилляторов. Следуя нашей предыдущей работе [Blanter et al., 2018], в качестве разности фаз между крайними осцилляторами мы используем разность фаз между индексом $F_T(t)$ площадей солнечных пятен (provided for 1875-2016 by RGO/NOAA/NASA, <https://solarscience.msfc.nasa.gov/greenwch/>) и индексом $F_P(t)$ интенсивности полярного поля ([Muñoz-Jaramillo et al., 2012], <http://www.soldardynamo.org/data.htm>). Для оценки фаз мы используем преобразование Фурье на интервале времени длительностью в один солнечный цикл с 2002 по 2012 год. Поскольку процедура восстановления скоростей в гелиосейсмологии [Zhao et al., 2013; Chen, Zhao, 2017] позволяет нам оценить скорости меридионального потока только после 2007 года, а доступные данные интенсивности полярного поля заканчиваются в 2012 году, интервалы наблюдений пересекаются, но не совпадают. Однако мы предполагаем, что все изменения происходят достаточно медленно, чтобы полученная оценка имела смысл для восстановления качественных свойств связи.

Куда большая неоднозначность возникает при переводе скоростей меридионального потока, определяемых в гелиосейсмологии, в естественные частоты осцилляторов. Первая неопределенность связана с размером циркуляционных ячеек. Поскольку гелиосейсмологические наблюдения заканчиваются на 60 градусах и не покрывают высоких широт, мы вынуждены делать предположения о размере ячейки по широте, в зависимости от которых естественная частота может измениться в полтора раза. В данной работе для определенности мы будем считать, что ячейки простираются от экватора до полюса. Тогда скорости в 10 м/с примерно соответствует естественная частота, равная единице, а средняя частота, определяемая средним солнечным циклом (10.75 лет), равна 0.57. Вторая неопределенность в использовании гелиосейсмологических данных состоит в их интерпретации по отношению к модели с тремя ячейками. В наблюдении мы имеем только три потока: два из них направлены в сторону полюса, один — в сторону экватора. В терминах трех ячеек глубинный поток, направленный к полюсу, может интерпретироваться или как нижняя граница средней ячейки (в этом случае нижняя ячейка оказывается ненаблюдаемой), или как верхняя граница нижней ячейки, и тогда средняя ячейка не наблюдается ввиду своей низкой скорости. Не имея возможности определить, какая из интерпретаций вернее, мы рассматриваем их обе. Скорость ненаблюдаемой ячейки определяется из уравнения (5). Третья неопределенность связана с существенной разницей оценок скоростей двух глубинных потоков, представленных в работах [Zhao et al., 2013; Chen, Zhao, 2017]: их скорости отличаются втрое. Мы рассматриваем оценки в более поздней работе [Chen, Zhao, 2017] как более надежные, поскольку они относятся к 8-летнему, а не к двухлетнему интервалу времени. Таким образом, мы считаем, что скорость меридионального потока на поверхности равна 10 м/с, а в глубине — 5 м/с. Из этого получаем два набора естественных частот, в которых естественная частота верхней ячейки равна единице: $\omega_1 = 1$, а скорости средней и нижней ячеек равны $\omega_2 = 0.5$, $\omega_3 = 0.21$ или $\omega_2 = 0.21$, $\omega_3 = 0.5$.

Рис. 2 показывает, что гипотеза о ненаблюдаемой нижней ячейке (синяя кривая) соответствует случаю общего положения (рис. 1, а), при котором слабая суммарная связь k реализуется только при сильной асимметрии среднего осциллятора r . Напротив, в предположении ненаблюда-

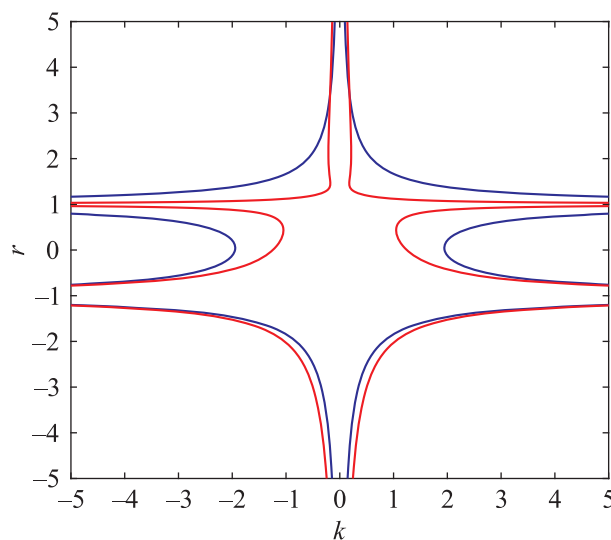


Рис. 2. Зависимость между суммарной связью и коэффициентом несимметрии среднего осциллятора для меридионального потока Солнца. Сравниваются две модели: модель с ненаблюдаемой нижней ячейкой: $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 0.5$, $\omega_3 = 0.21$ (синий); модель с ненаблюдаемой средней ячейкой: $\omega_2 = 0.21$, $\omega_3 = 0.5$ (красный). В вычислениях взяты наблюдаемые величины $\alpha = 1.77$ радиана, но общий вид кривых устойчив к изменениям α от 1.7 до 1.9

даемой средней ячейки (рис. 2, красная кривая) появляется решение, при котором слабая суммарная связь возникает уже при значениях коэффициента несимметрии, по модулю близких к единице, подобно тому, как это происходит в особом случае нулевой естественной частоты среднего осциллятора (рис. 1, *c*, зеленая кривая). Заметим, что в этом случае оценка коэффициента несимметрии по значению слабой суммарной связи принципиально невозможна, поскольку все $r > 1$ дают близкие значения k .

Заключение

Мы исследовали модель Курамото с тремя неидентичными осцилляторами, был рассмотрен особый случай модели с тремя осцилляторами, в котором крайние осцилляторы связаны через средний. Мы определили необходимые и достаточные условия синхронизации, установили связь несимметрии среднего осциллятора с синхронизацией. В отличие от модели Курамото с тремя симметричными осцилляторами общего вида, где синхронизация наступает при связи, превышающей критическое значение $K = \max(\omega_i - \omega_j)$ [Dörfler, Bullo, 2014], мы получили меньшие значения критической связи (21)–(22). С точки зрения условий возникновения синхронизации рассмотренная модель представляет собой объединение двух систем из двух осцилляторов.

Мы исследовали возможность восстановления связи при известных естественных частотах из разницы фаз крайних осцилляторов α при условии синхронизации. Полученная формула позволяет с точностью до знака определить суммарную связь k , если известен коэффициент несимметрии среднего осциллятора r . В случае общего положения, при фиксированной разнице фаз α вблизи антисинхронизации, сильная несимметрия среднего осциллятора $|r| \gg 1$ определяет меньшие значения суммарной связи k , чем симметричная конфигурация связей $r = 0$ (рис. 1, *a*). Восстановление же коэффициента несимметрии r по суммарной связи k , при известном знаке r , становится однозначным для слабой связи в случае общего положения и остается неоднозначным в особых случаях. Это согласуется с результатами Пиковского [Pikovsky, 2018], который указывал на неоднозначность восстановления связей в области синхронизации и на увеличение точности восстановления с уменьшением связи. Отметим, что Пиковский рассматривал большое количество осцилляторов и распределение их естественных частот, соответствующее случаю общего положения в нашей модели.

В применении модели к меридиональному потоку Солнца мы обнаружили существенную зависимость возможности восстановления несимметрии связей среднего осциллятора от интерпретации гелиосейсмологических данных. Предположение о ненаблюдаемой нижней ячейке, на котором базировалась наша предыдущая работа [Blanter et al., 2018], соответствует случаю общего положения (синяя кривая на рис. 2 соответствует рис. 1, *a*), в то время как альтернативное предположение о ненаблюдаемой средней ячейке (рис. 2, красная кривая) соответствует специальному случаю нулевой естественной частоты средней ячейки (рис. 1, *c*, зеленая кривая). Таким образом, выбор модели и ее связи с гелиосейсмологическими данными определяет возможность решения обратной задачи и восстановления коэффициента несимметрии связи средней ячейки.

Наши результаты могут быть использованы для восстановления скоростей меридионального потока, в модели которого коэффициенты связи между циркуляционными ячейками до сих пор оставались неизвестными. Учитывая нарушение синхронизации, произошедшее в середине 1960-х годов в течение 20-го аномального солнечного цикла [Blanter et al., 2018], мы можем предположить, что связи между осцилляторами близки к пороговым значениям синхронизации (21)–(22), которые не достигаются в симметричной конфигурации $r = 0$. Таким образом, можно сделать предположение о существенной несимметрии связей центральной циркуляционной ячейки. Этот результат меняет наше представление о симметрии связи между ячейками меридионального потока и открывает новое направление для исследований.

Список литературы (References)

- Acebrón J. A., Bonilla L. L., Pérez Vicente C. J., Ritort F., Spigler R.* The kuramoto model: A simple paradigm for synchronization phenomena // *Rev. Mod. Phys.* — 2005. — Vol. 77. — P. 137.
- Bick C., Goodfellow M., Laing C. R., Martens E. A.* Understanding the dynamics of biological and neural oscillator networks through mean-field reductions: a review // *arXiv e-prints, [nlin.AO]*, 1902.05307v2. — 2019.
- Blanter E. M., Le Mouél J.-L., Shnirman M. G., Courtillot V.* Kuramoto model of nonlinear coupled oscillators as a way for understanding phase synchronization: application to solar and geomagnetic indices // *Solar Physics.* — 2014. — Vol. 289. — P. 4309–4333.
- Blanter E. M., Le Mouél J.-L., Shnirman M. G., Courtillot V.* Kuramoto model with non-symmetric coupling reconstructs variations of the solar-cycle period // *Solar Physics.* — 2016. — Vol. 291, No. 3. — P. 1003–1023.
- Blanter E. M., Le Mouél J.-L., Shnirman M. G., Courtillot V.* Reconstruction of the north–south solar asymmetry with a kuramoto model // *Solar Physics.* — 2016. — Vol. 292, No. 4. — P. 54.
- Blanter E. M., Le Mouél J.-L., Shnirman M. G., Courtillot V.* *Solar Physics.* — 2018. — Vol. 293, No. 3. — P. 134.
- Charbonneau P.* Solar Dynamo Theory // *Annual Review of Astronomy and Astrophysics.* — 2014. — Vol. 52, No. 3. — P. 251–290. — <https://doi.org/10.1146/annurev-astro-081913-040012>
- Chen R., Zhao Z.* A comprehensive method to measure solar meridional circulation and the center-to-limb effect using time–distance helioseismology // *Astrophysical Journal.* — 2017. — Vol. 849, No. 2. — P. 144.
- Cumin D., Unsworth C. P.* Generalising the kuramoto model for the study of neuronal synchronisation in the brain // *Physica D: Nonlinear Phenomena.* — 2007. — Vol. 226, No. 2. — P. 181–196.
- DeVille L., Ermentrout B.* Phase-locked patterns of the Kuramoto model on 3-regular graphs // *Chaos.* — 2016. — Vol. 26, No. 9. — P. 094820. — <https://doi.org/10.1063/1.4961064>
- Dörfler F., Bullo F.* On the critical coupling of Kuramoto oscillators // *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.* — 2011. — Vol. 10, No. 3. — P. 1070–1099. — <https://doi.org/10.1137/10081530X>
- Dörfler F., Bullo F.* Synchronization in complex networks of phase oscillators: A survey // *Automatica.* — 2014. — Vol. 50, No. 6. — P. 1539–1564. — <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2014.04.012>
- Featherstone N. A., Miesch M. S.* Meridional circulation in solar and stellar convection zones // *The Astrophysical Journal.* — 2015. — Vol. 804, No. 1. — P. 67.
- Garlaschelli D., den Hollander F., Meylahn J. M., Zeegers B.* Synchronization of phase oscillators on the hierarchical lattice // *Journal of Statistical Physics.* — 2019. — Vol. 174, No. 1. — P. 188–218. — <https://doi.org/10.1007/s10955-018-2208-5>
- Hazra G., Karak B. B., Choudhuri A. R.* Is a deep one-cell meridional circulation essential for the flux transport solar dynamo? // *The Astrophysical Journal.* — 2014. — Vol. 782, No. 21. — P. 93.
- Hong H., Strogatz S. H.* Kuramoto model of coupled oscillators with positive and negative coupling parameters: an example of conformist and contrarian oscillators // *Physical Review Letters.* — 2011. — Vol. 106, No. 5. — P. 054102.
- Hong H., Strogatz S. H.* Mean-field behavior in coupled oscillators with attractive and repulsive interactions // *Physical Review E.* — 2012. — Vol. 85, No. 5. — P. 056210.

- Kuramoto Y.* Self-entrainment of a population of coupled non-linear oscillators // Int. Symposium on Mathematical Problems in Theoretical Physics, Lecture Notes in Physics. — 1975. — Vol. 39. — P. 420–422.
- Liang Z.-C., Gizon L., Birch A. C., Duvall T. L., Rajaguru S. P.* Solar meridional circulation from twenty-one years of SOHO/MDI and SDO/HMI observations. Helioseismic travel times and forward modeling in the ray approximation // Astronomy and Astrophysics. — 2018. — Vol. 619. — P. A99. — <https://doi.org/10.1051/0004-6361/201833673>
- Muñoz-Jaramillo A., Sheeley Jr. N. R., Zhang J., DeLuca E. E.* Calibrating 100 Years of Polar Faculae Measurements: Implications for the Evolution of the Heliospheric Magnetic Field // Astrophysical Journal. — 2012. — Vol. 753, No. 2. — P. 146. — <https://doi.org/10.1088/0004-637X/753/2/146>
- Petkoski S., Stefanovska A.* Kuramoto model with time-varying parameters // Physical Review E. — 2012. — Vol. 86, No. 4. — P. 046212.
- Pikovsky A.* Reconstruction of a random phase dynamics network from observations // Physics Letters A. — 2018. — Vol. 382, No. 4. — P. 147–152.
- Pikovsky A., Rosenblum M., Kurths J.* Synchronization: a universal concept in nonlinear sciences. — Cambridge: Cambridge University Press, 2003. — Vol. 12.
- Rodrigues F. A., Peron T. K., Ji P., Kurths J.* The kuramoto model in complex networks // Physics Reports. — 2016. — Vol. 610. — P. 1–98.
- Zhao J., Bogart R. S., Kosovichev A. G., Duvall T. L. Jr., Hartlep T.* Detection of Equatorward Meridional Flow and Evidence of Double-Cell Meridional Circulation inside the Sun // The Astrophysical Journal Letters. — 2013. — Vol. 774, No. 2. — P. L29. — <https://doi.org/10.1088/2041-8205/774/2/L29>