

УДК: 502.2 : 631.4

Задачи численного моделирования динамики системы «почва–растение»

В. А. Четырбоцкий¹, А. Н. Четырбоцкий^{2,а}

¹ Акционерное общество «Апатит», Центр инновации,
Россия, 119333, г. Москва, Ленинский проспект, д. 55/1, стр. 1

² Дальневосточный геологический институт ДВО РАН,
Россия, 690022, г. Владивосток, пр-т 100 лет Владивостоку, д. 159

E-mail: ^а Chetyrbotsky@yandex.ru

*Получено 07.10.2019, после доработки — 02.12.2019.
Принято к публикации 25.12.2019.*

Рассмотрены современные математические модели динамики системы «почва–растение», составляющими которых выступают: растение сельскохозяйственного назначения, микроорганизмы ризосферы (прикорневой зоны растений), элементы минерального питания растений их подвижной и неподвижной форм. На основании анализа принятых положений разработана модель, в которой учитываются взаимосвязи и определенный согласованный характер совместных изменений ее составляющих. В частности, динамика содержащихся в растениях элементов их минерального питания и динамика биомассы растений определяются текущим содержанием в ризосфере внесенных сюда удобрений и отмершими продуктами жизнедеятельности ризосферных элементов (отмершие корни растений, опавшие листья (опад) и т. д.). Полагаются пространственная неподвижность растений и пространственная подвижность микроорганизмов, механизм которой определяется здесь диффузией. Предлагаются формальные соотношения влияния суммарного воздействия на динамику растений сорняков (они характеризуют отдельный вид растений) и вредителей (они характеризуют отдельный вид микроорганизмов), где учитываются взаимные переходы элементов минерального питания из подвижной их формы в неподвижную. Для системы, где каждая из составляющих представлена только одним видом (удобрение, ассоциация микроорганизмов и растения представлены только одним видом), выполнено аналитическое исследование. Для однолетних культур сельскохозяйственного назначения разработана адаптация модели распространения волны в системе «ресурс–потребитель» (волны Колмогорова–Петровского–Пискунова). Реализация модели выполнена на примере динамики роста яровой пшеницы Красноуфимская-100 на торфяной низинной почве, куда предварительно были внесены фосфорные и калийные удобрения. Цифровой материал представлен массивом экспериментальных распределений биомассы растений и элементов минерального питания. Специфика экспериментального материала обусловила переход к модели, которая является редукцией сформулированной общей модели. Ее составляющими выступают распределение биомассы растений и содержание в них элементов минерального питания. Оценка адекватности модельных и экспериментальных распределений показала хорошую степень их соответствия.

Ключевые слова: модели динамики биомассы, динамика биофильных элементов ризосферы, параметрическая идентификация математической модели

UDC: 502.2 : 631.4

Problems of numerical simulation in the dynamics system “soil–plant”

V. A. Chetyrbotskiy¹, A. N. Chetyrbotskiy^{2,a}

¹ Joint stock company «Apatit», Innovation center,
55/1 p. 1 Leninsky pr., Moscow, 119333, Russia

² Far-Eastern Geological Institute, Far East Branch, Russian Academy of Sciences,
159 pr. 100 years Vladivostok, Vladivostok, 690022, Russia

E-mail: ^a Chetyrbotskiy@yandex.ru

*Received 07.10.2019, after completion — 02.12.2019.
Accepted for publication 25.12.2019.*

Modern mathematical models in the dynamics system “soil–plant” are considered. The components of this system are: agricultural plant, microorganisms of the rhizosphere (root zone of plants), the mineral nutrition elements of plants in their mobile and immobile forms. The model of submitted system based on the analysis of the adopted provisions was developed. The construction of system elements allows to display the coordinated dynamics of these elements among themselves. In particular, the dynamics of mineral nutrition elements in plants and the dynamics of their biomass are determined by the current contents in the rhizosphere of mineral fertilizers and organic origin substances (plant roots, leaves, etc.). The immobility of plants spatial distribution and the mobile spatial nature of microorganisms are assumed. This mechanism is determined by diffusion. Mutual relationships between weeds and pests are suggested. The dynamics of the mineral nutrition elements is determined by the peculiarity of sorption in the soil solution, environmental conditions, organic decomposition and fertilizer application. An analytical study for a system where each of the components is represented by only one species (fertilizer, the association of microorganisms and plants) was performed. An adaptation of the wave propagation model in the “resource–consumer” system (Kolmogorov–Petrovsky–Piskunov waves) has been developed for annual agricultural crops. The developed model has been adapted for the growth of Krasnoufimskaya-100 spring wheat in a vessel on peat lowland soil, where nitrogen, phosphorus, and potassium fertilizers were added variably. Sample distributions are plants biomass and the content of mineral nutrition elements in them. The parametric identification of the model and its adequacy was performed. An assessment of the model adequacy showed a good agreement between the model and experimental data.

Keywords: models of biomass dynamics, dynamics of rhizosphere biophilic elements, parametric identification of a mathematical model

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2020, vol. 12, no. 2, pp. 445–465 (Russian).

1. Введение

Основными составляющими системы «почва–растение» выступают почва и содержащиеся в ней вещества органического и неорганического происхождения, а также растения сельскохозяйственного назначения и микроорганизмы. В свою очередь каждая из них также представляет собой иерархически упорядоченную динамическую систему. В частности, почва — это открытая динамическая полидисперсная гетерогенная многокомпонентная система, состав которой характеризуют три абиотические и одна биотическая фазы [Кауричев и др., 1989]. К числу этих фаз относятся: твердая фаза (минеральные, органические и органоминеральные компоненты), жидкая фаза (почвенный раствор), газообразная фаза (почвенный воздух) и находящаяся в непрерывном взаимодействии с окружающей средой биотическая фаза (почвенные организмы).

Многофакторность и многокомпонентность процесса обуславливают изучение совместной динамики, как правило, только отдельных фаз почвы. Так, динамика биотической фазы детально рассмотрена в Торнли [Торнли, 1987], где приводятся выраженные в количественных формах различные аспекты жизненного цикла растений: их рост, фотосинтез, дыхание. В работе [Ризниченко, Рубин, 1983] представлены математические модели биологических продукционных процессов в ассоциациях организмов, исследуется динамика популяций микроорганизмов. В работе [Франс, Торнли, 1987] приводится модель динамики пастбищной травы, где отсутствует влияние органического питания растений (в том числе и почвенной влаги), а определяющим фактором роста выступает фотосинтез. Динамика роста единичной культуры рассмотрена в работе [Tack et al., 2015]. Модели логистического роста растения с линейной зависимостью коэффициентов от температуры также приведены в преобладающем большинстве пионерских работ [Margalef, 1968; Roose et al., 1987; Ризниченко, Рубин, 1983; Свиричев, 1987; Алексеев и др., 1992; Полуэктов и др., 2006; Михайленко, 2007; Колпак, Столбовая, 2013; Darrah et al., 2006].

Изучение взаимодействий функциональных связей динамики растительности с ее абиотическим окружением (в первую очередь с почвой) было впервые выполнено Клементсом [Clements, 1916]. Концепция Клементса является классическим примером теоретического обобщения типа «что бы происходило, если бы ничто не мешало». Таков первый закон Ньютона в физике, закон Мальтуса в популяционной биологии и др. [Комаров и др., 2012].

Модели динамики углерода почвы приведены в работах Л. А. Хворовой [Хворова, 1992], И. М. Рыжовой [Рыжова, 1987, 2006], Бондо [Bondeau et al., 2007] и О. Д. Сиротенко [Сиротенко и др., 2005]. В работах последних авторов явным образом вводится дополнительная динамическая переменная, посредством которой учитываются внесенные в почву минеральные удобрения. Составляющими процессов выступают углерод гумуса в почве и углерод мортмассы (ткани животных, отмершие органы и ткани растений).

Рассмотрение способов количественного представления распределения почвенного азота выполнено в [Hogh-Jensen et al., 2004; Liu et al., 2011; Daly et al., 2016]. Приводятся соотношения для оценки содержания в ризосфере минерального азота.

Модель динамики кальция в почве приведена в работе [Комаров и др., 2015]. Рассматриваются подходы к моделированию почвенных процессов. Температура и влажность почвы рассчитывались посредством приведенной в [Быховец, Комаров, 2002] модели, где временной шаг составляет один месяц.

Модели динамики органического вещества почвы (ОВП) приведены в работах О. Д. Сиротенко и В. А. Романенкова [Сиротенко и др., 2005; Сиротенко и др. 2009]. Составляющими моделей выступают запасы углерода в пахотном слое, его содержание в растительных остатках и поступивших в почву органических удобрений, а также урожай сельскохозяйственной культуры.

В перечисленных классах моделей элементами минерального питания обычно выступают элементы газовой фазы почвы (азот или углерод) или кальций, тогда как типичный набор со-

держит элементы подвижной формы минерального питания, а также накапливаемые в ризосфере и в растениях тяжелые металлы (ТМ). Среди них следует выделить кадмий, который является одним из наиболее токсичных для живых организмов элементов (в том числе и растений) [Smith, 1993]. Вне области рассмотрения представленных моделей оказываются проблемы согласования совместной динамики ассоциации микроорганизмов ризосферы, растений сельскохозяйственного назначения (допускается также динамика сорняков) и элементов ризосферы их минерального питания. Открытыми остаются вопросы выбора и проведения процедуры параметрической идентификации моделей, суть которой состоит в оценке параметров моделей и оценки адекватности модельных и репрезентативных выборочных распределений.

Значимость решения перечисленных проблем определяет актуальность построения модели системы, компонентами которой выступают микроорганизмы ризосферы, растение и элементы его минерального питания. Термин «динамика минерального питания» определяет процесс поглощения, перемещения и усвоение растением химических элементов, получаемых им из почвы в форме ионов минеральных солей [Минеев, 2004]. К элементам его питания относят минералы ризосферы, удобрения и составляющие ризосферы органического происхождения (навоз, торф, компост, солома и др.).

При решении поставленных здесь вопросов принимается разделение совокупности элементов минерального питания на подвижную и неподвижную формы. Подвижные формы определяются способностью переходить из твердых фаз либо почвы, либо привносимых извне минеральных и органических удобрений в почвенный раствор, тогда как неподвижные формы либо туда не переходят, либо переходят в сравнительно меньшем количестве [Орлов, 1992]. Подобное разделение обусловлено тем, что элементы первого набора усваиваются растениями, а второго — ими не усваиваются. В принятой модели учитываются взаимные переходы элементов из одной формы подвижности в другую.

Цель работы состоит в анализе подходов, на основании которых выполняются математическая формализация временных изменений отдельных составляющих системы «почва–растение», разработка модели совместной динамики составляющих ризосферу элементов минерального питания растений сельскохозяйственного назначения, ассоциации микроорганизмов ризосферы и самих растений. Для простоты и общности записей принимается разделение совокупности элементов минерального питания на группы близких по свойствам их воздействия на растения веществ (на основании азота, фосфора, калия и т. д.).

Структура работы следующая. Сначала формулируются модели динамики отдельных составляющих системы. Далее выполнено аналитическое исследование ряда частных случаев, рассмотрение которых позволяет выявить качественное поведение решений общего случая. Высокая фрагментация результатов лабораторных экспериментов пространственно-временных распределений динамики микроорганизмов и динамики биомассы растений обусловила рассмотрение численной реализации модели только для отдельного доступного выборочного репрезентативного материала. Здесь численная реализация модели была выполнена на фактическом материале роста яровой пшеницы Красноуфимская-100 на торфяной низинной почве [Ефремова, Дричко, 2010; Ефремова и др., 2013; Сладкова, 2016], куда предварительно были внесены азотные, фосфорные и калийные удобрения. Материал представлен пространственно-однородной (отсутствуют градиенты температуры и влажности) выборкой временных наблюдений содержаний элементов питания подвижной формы (К, Р, N) в надземной части растений и их биомассой. Для представленного случая выполнена параметрическая идентификация модели.

2. Математическая модель

Почва представляет собой гетерогенную многофазную среду с неравномерными пространственно-временными распределениями микроорганизмов и питательных субстратов, связи между которыми крайне сложны. Такие связи, например, включают в себя систему обмена хими-

ческими сигнальными веществами [Евдокимов, 2018]. Ризосфера же представляет собой динамическую область, в которой происходит огромное число взаимодействующих между собой процессов в корнях и окружающей среде почвы [Dargah et al., 2006]. В свою очередь, каждая фаза почвы представляет собой многокомпонентную систему.

На современном этапе развития широкого круга научных дисциплин математическое моделирование трансформировалось в важнейший инструмент изучения сельскохозяйственных систем [Jones et al., 2016]. Посредством его применения имеется возможность проведения ряда вычислительных экспериментов вместо некоторых весьма дорогостоящих и трудоемких натуральных исследований. При построении моделей принимались обозначения: весовое содержание элементов минерального питания в растениях определяются функциями $\{C_{i,j}, i = 1 \div N_C, j = 1 \div N_B\}$ содержания i -го элемента питания в j -м растении, где N_C и N_B — число различных элементов питания (в том числе и тяжелые металлы ТМ) и число видов растений. Функции $\{C_i^{(a)}, C_i^{(p)}, i = 1 \div N_C\}$, $\{C_i^{(p)}, i = 1 \div N_C\}$ определяют весовое содержание в ризосфере i -го вида элемента питания подвижной и неподвижной форм. Функции $\{Y_k, k = 1 \div N_Y\}$ определяют биомассы ассоциации микроорганизмов ризосферы k -го вида; биомассы растений (в том числе и сорняки) определяются функциями $\{B_j, j = 1 \div N_B\}$, где j — вид растения, S — содержание в ризосфере биомассы продуктов органического происхождения (опада, отмершей органики), которая трансформируется в питательный ресурс для почвенных микроорганизмов. На его основе затем формируются питательный раствор для элементов питания растений подвижной формы, а также элементы неподвижной формы.

Количественное выражение взаимодействий динамических составляющих рассматриваемой системы следует основному постулату химической кинетики, или закону действующих масс, согласно которому скорость реакции прямо пропорциональна произведению концентраций каждого из реагентов, возведенных в степень, равную степени реакции по данному веществу [Романовский, 2006]. Применительно к рассматриваемому в данной работе случаю термину «реагент» отвечает отдельная составляющая системы, а реакция — изменение ее содержания в единицу времени (обыкновенная производная по времени). Исследуются только парные взаимодействия с единичной степенью реакции.

В общем случае динамические переменные являются функциями пространственно-временных координат (t, x, y, z) . В целях общности почвенная микробиота, биофильные бактерии и грибы объединены общим выражением — микроорганизмы.

2.1. Питание растений подвижными элементами минеральной фракции

Ресурс питания растений определяется содержанием минеральных элементов подвижной формы, продуктами переработки микроорганизмами опада, прямыми и обратными переходами элементов из одной формы в другую, весом внесенных в почву удобрений, подвижностью элементов в ризосфере. Здесь принимается следующая запись текущего весового содержания в ризосфере элементов питания:

$$\begin{cases} C_i^{(a)} = A_i^{(C)}(1) + A_i^{(S)}(1) + A_i^{(f)}(1, t_{i,k}), \\ C_i^{(p)} = A_i^{(C)}(0) + A_i^{(S)}(0) + A_i^{(f)}(0, t_{i,k}), \end{cases} \quad (1)$$

где индекс i указывает конкретный элемент питания; первый аргумент функций в правой части выделяет элементы подвижной ($v=1$) и неподвижной ($v=0$) форм. Таким образом, выражение

$C_i^{(a)} - \sum_{k=1}^{N_B} C_{i,k}$ отвечает текущему содержанию элементов подвижной формы в ризосфере. Дета-

лизацию членов правой части можно выполнить соотношениями

$$\left\{ \begin{array}{l} A_i^{(C)}(v) = \begin{cases} -q_i^{(1,1)}C_i^{(a)} + q_i^{(1,2)}C_i^{(p)}, & v = 1, \\ q_i^{(2,1)}C_i^{(a)} - q_i^{(2,2)}C_i^{(p)}, & v = 0, \end{cases} \\ A_i^{(S)}(v) = S \sum_{j=1}^{N_Y} [v \cdot p_j^{(a)} + (1-v)p_j^{(p)}] Y_j, \\ A_i^{(f)}(v, t_{i,k}) = \sum_{k=1}^{N_f} \delta(t - t_{i,k}) [v \cdot r_i^{(a)} + (1-v) \cdot r_i^{(p)}] C_{i,k}^*, \end{array} \right. \quad (2)$$

где $\delta(t - t_{i,k})$ — дельта-функция Дирака, $t_{i,k}$ — моменты времени внесения N_f видов удобрений, $C_{i,k}^*$ — объемы внесенных удобрений.

Коэффициенты соотношений рассчитываются на основании выборочных экспериментальных распределений динамических переменных.

При записи соотношений (2) и модели динамики элементов питания растений принимались следующие допущения.

1. Первый член правой части $A_i^{(C)}(v)$ характеризует прямые и обратные переходы элементов из одной формы подвижности в другую, где переходы задаются матрицей коэффициентов $\{q_i^{(m,k)}, m, k = 1 \div 2\}$.

2. Для ассоциации микроорганизмов опад (отмершие органы, ткани растений и животных) выступает одним из ресурсов их питания, что определяет отношения между ними как «ресурс–потребитель». Поскольку приведенные отношения формализуются произведением соответствующих переменных [Ризниченко, Рубин, 1983; Свирежев, 1987], то $A_i^{(S)}(v)$ пропорционально S как ресурсу микроорганизмов, так и их биомассе. Коэффициенты $\{p_j^{(a)}, p_j^{(p)}, j = 1 \div N_Y\}$ характеризуют доли массы опада, которые после переработки ассоциацией микроорганизмов приходятся на элементы подвижной ($v = 1$) и неподвижной ($v = 0$) форм.

3. Внесение в почву удобрений в моменты времени $t_{i,k}$ характеризуется $A_i^{(f)}$, где коэффициенты $\{r_i^{(a)}, r_i^{(p)}, i = 1 \div N_f\}$ определяют те доли масс удобрений, которые приходятся на элементы подвижной ($v = 1$) и неподвижной ($v = 0$) форм.

4. Удельный рост потребления j -го элемента в растении i -го вида $\frac{1}{B_i} \frac{\partial C_{i,j}}{\partial t}$ пропорционален их текущему содержанию в ризосфере $a_{i,1} \left(C_i^{(a)} - \sum_{k=1}^{N_B} C_{i,k} \right)$ и содержанию в растении элементов питания $\sum_{m \neq i}^{N_C} a_{i,m} C_{i,m}$. Знак $a_{i,m}$ отражает характер влияния, который оказывает содержание в растении m -го элемента на присутствие в нем i -го элемента. Наличие подобной связи обусловлено их связями как объектов химической природы. Удельный рост потребления i -го вида элемента пропорционален выражению $a_{i,1} \left(C_i^{(a)} - \sum_{k=1}^{N_B} C_{i,k} \right) - \sum_{m \neq i}^{N_C} a_{i,m} C_{i,m}$.

5. Поскольку для питания микроорганизмов требуется определенный набор химических элементов, то они (микроорганизмы) являются потребителями элементов минерального питания растений (основное питательное вещество — азот). Таким образом, отношение между текущим содержанием в ризосфере элементов питания растений $C_i^{(a)} - \sum_{k=1}^{N_B} C_{i,k}$ и микроорга-

низмами Y_j имеет характер «ресурс–потребитель». Количественное выражение представленных отношений следует основному постулату химической кинетики: скорость реакции прямо пропорциональна произведению концентраций каждого из реагентов. Тогда динамика убывания содержания в ризосфере i -го элемента за счет его потребления микроорганизмами j -го вида определяется выражением $w_{ij} \left(C_i^{(a)} - \sum_{k=1}^{N_B} C_{i,k} \right) Y_j$.

6. Пространственное перераспределение элементов ризосферы определяется их диффузией [Daly et al., 2017].

7. Удельный рост содержаний зависит от внешних факторов среды (текущее состояние ризосферы и атмосферы).

При выполнении указанных допущений динамика элементов питания следует уравнениям

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial C_{i,j}}{\partial t} = f_C(T, W) \left[a_{i,1} \left(C_i^{(a)} - \sum_{k=1}^{N_B} C_{i,k} \right) - \sum_{m \neq i}^{N_C} a_{i,m} C_{i,m} \right] B_i, \\ \frac{\partial C_i^{(a)}}{\partial t} = - \sum_{j=1}^{N_Y} w_{ij} \left(C_i^{(a)} - \sum_{k=1}^{N_B} C_{i,k} \right) Y_j + D_i^{(a)} \nabla^2 C_i^{(a)}, \\ \frac{\partial C_i^{(p)}}{\partial t} = D_i^{(p)} \nabla^2 C_i^{(p)}, \\ C_{i,j}(t_0, x, y, z) = C_{i,j,0}(x, y, z), \\ C_i^{(a)}(t_0, x, y, z) = C_{i,0}^{(a)}(x, y, z), \\ C_i^{(p)}(t_0, x, y, z) = C_{i,0}^{(p)}(x, y, z), \end{array} \right. \quad (3)$$

где $j = 1 \div N_B$; t_0 — начальный момент рассмотрения системы; $\{w_{ij}, i = 1 \div N_C, j = 1 \div N_Y\}$ характеризуют динамику потребления i -го элемента питания растений микроорганизмами j -го вида; $D_i^{(a)}$, $D_i^{(p)}$ — коэффициенты диффузии элементов подвижной и неподвижной форм; $C_{i,j,0}(x, y, z)$ — начальное содержание элементов подвижной формы j -го вида в i -м растении; $C_{i,0}^{(a)}(x, y, z)$ и $C_{i,0}^{(p)}(x, y, z)$ — начальные содержания элементов подвижной и неподвижной форм в ризосфере. Индексы i, j указывают элемент и вид растения; $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ — оператор Лапласа.

Блок-схема модели питания растений изображена на рис. 1.

2.2. Динамика микроорганизмов

Растение, элементы его питания и колонизирующие растения ассоциации микроорганизмов составляют единую систему взаимодействующих между собой динамических объектов, в которой рамки отношений между растением и отдельными микроорганизмами лежат в широком диапазоне: от роли азотфиксирующих бактерий и микоризных грибов до развития микробного патогенеза [Клоергер, 1993]. В подобной системе элементы питания играют значимую роль во взаимодействиях растений и микроорганизмов. Например, внесение азотнокислого аммония создает мощный стимул для колонизации прикорневого пространства и поверхности корня почвенными грибами, а также способствует некоторому возрастанию биомассы/численности прокариотных микроорганизмов в ризоплане ячменя [Бурканова, 2007]. Каждый из компонентов системы стимулирует развитие другого компонента и в результате — свое собственное. В процессе

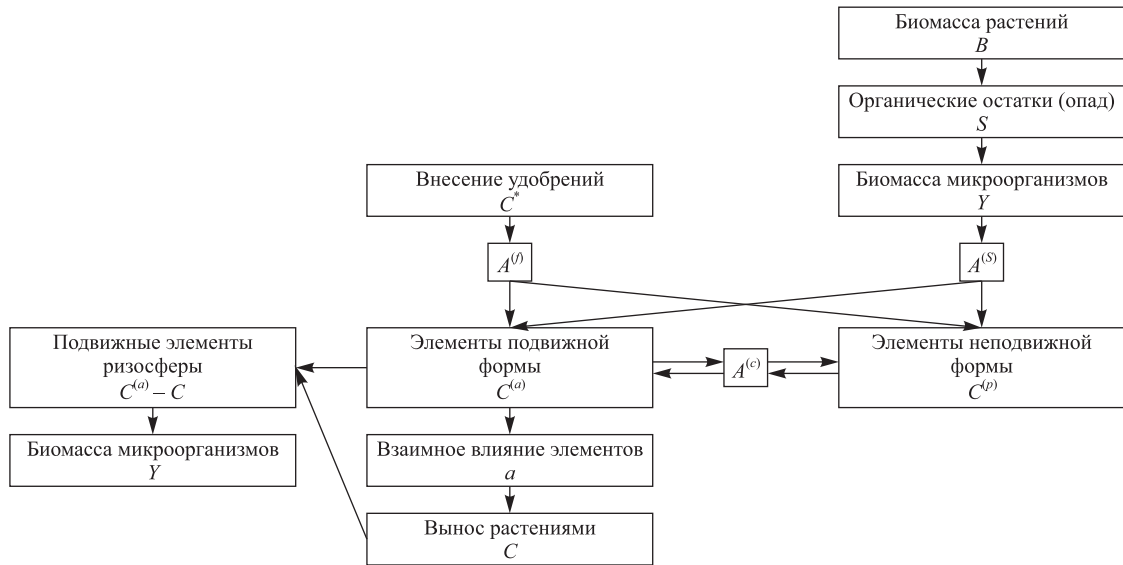


Рис. 1. Блок-схема модели питания растений

формирования биогеоценоза с ростом продуктивности увеличивается количество поступающих в почву растительных остатков, служащих источником образования гумуса. Гумус же оптимизирует среду обитания растений и способствует росту продуктивности растительного покрова. Нелинейный характер приведенной зависимости проявляется при низком содержании гумуса в почве и ослабевает с ростом его содержания по мере оптимизации среды обитания растений.

Микроорганизмы конкурируют между собой за выделяемый растениями питательный для них субстрат (стебли, листья и корни которого выделяют углеводы и органические кислоты). Эти выделения обеспечивают питательными веществами почвенные микроорганизмы, тем самым создавая благоприятные условия для их существования в зонах ризосферы и ризоплана [Феоктистова и др., 2016].

Удельный рост биомассы микроорганизмов k -го вида в единицу времени φ_k определяется их естественным приростом, текущим содержанием в ризосфере элементов питания подвижной формы, внутри и межвидовыми отношениями микроорганизмов и биомассой растений. На основании принятых допущений модель динамики микроорганизмов можно записать следующими балансовыми соотношениями:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial Y_k}{\partial t} = f_Y(T, W) \varphi_k Y_k + \nabla \cdot \left(D_k^{(Y)} \nabla Y_k + \sum_{i=1}^{N_B} d_i^{(Y,B)} \nabla B_i \right), \\ \varphi_k = d_k + \sum_{i=1}^{N_C} d_{i,k}^{(R)} \left(C_i^{(a)} - \sum_{j=1}^{N_B} C_{i,j} \right) + \sum_{j=1}^{N_Y} d_{j,k}^{(Y)} Y_j + \sum_{m=1}^{N_B} d_{m,k}^{(B)} B_m, \\ Y_k(t_0, x, y, z) = Y_{k,0}(x, y, z), \\ \frac{\partial Y_k}{\partial \vec{n}} \Big|_{\Gamma} = 0, \end{array} \right. \quad (4)$$

где $k = 1 \div N_B$; $Y_{k,0}(x, y, z)$ — начальное распределение микроорганизмов k -го вида; Γ — граница области рассмотрения, \vec{n} — нормаль к границе.

При записи уравнений модели динамики микроорганизмов (4) полагаются следующие допущения.

1. Принимается мультипликативная зависимость локальной динамики биомассы от температурного и влажного режимов ризосферы.

2. Удельный рост биомассы микроорганизмов k -го вида в единицу времени φ_k определяется ее естественным приростом d_k , содержанием в ризосфере элементов питания подвижной формы $\sum_{i=1}^{N_C} d_{i,k}^{(R)} C_i^{(a)}$, внутри и межвидовыми отношениями в ассоциации микроорганизмов $\sum_{j=1}^{N_Y} d_{j,k}^{(Y)} Y_j$ и биомассой растений $\sum_{m=1}^{N_B} d_{m,k}^{(B)} B_m$. Потребление микроорганизмами элементов питания определяется положением модели «ресурс–потребитель», где ресурсом выступают элементы питания, а потребителем — микроорганизмы. Коэффициенты $\{d_{i,k}^{(R)}, i=1 \div N_C, k=1 \div N_Y\}$ характеризуют селективность питания микроорганизмов: положительные или отрицательные на них воздействия определяются знаком коэффициента. В ассоциации микроорганизмов принимается внутривидовая конкуренция, согласно которой коэффициент $d_{k,k}^{(Y)}$ отрицательный. Остальные коэффициенты приведенного набора $\{d_{j,k}^{(Y)}, k \neq j\}$ отражают характерные межвидовые отношения растений (конкуренция, симбиоз и т. д.). Знаки коэффициентов при остальных членах отражают межвидовые отношения в ассоциации микроорганизмов. Между микроорганизмами и растениями отмечается широкий диапазон их отношений: для одних растения выступают кормовой базой, для других имеются кооперативные отношения, для третьих — отношение «паразит–хозяин». Коэффициенты $\{d_{m,k}^{(B)}, m=1 \div N_B, k=1 \div N_Y\}$ характеризуют эти отношения. Как правило, положительный знак указывает на кооперативные отношения, отрицательный — на антагонистические.

3. Дивергенция выражения в круглых скобках характеризует пространственный механизм распределения микроорганизмов. Допускаются их диффузия (она определяется коэффициентом $D_k^{(Y)}$) и следование микроорганизмов по градиенту плотности распределения растений (коэффициент $d_i^{(Y,B)}$ характеризует эффективность поиска растения).

4. Предполагается отсутствие потоков микроорганизмов на границе области рассмотрения. В работе [Scott et al., 1995] это условие формулируется посредством снижения массы микроорганизмов с глубиной ризосферы.

2.3. Динамика биомассы растений и органики

Согласованность между собой отдельных составляющих системы «почва–растение» обуславливает определенную зависимость динамики биомассы растений от элементов их питания, ассоциации микроорганизмов, функции жизненного цикла самих растений (продуктивности, особенностей их процессов массопереноса и т. д.), внутри- и межвидовых отношений, распределения продуктов органического происхождения, гидрометеорологического режима среды и т. д. Кроме того, следует учитывать потери биомассы растений на формирование опада. Модель динамики биомассы растений можно записать следующими балансовыми соотношениями:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial B_m}{\partial t} = f_B(T, W) \left[b_m + \sum_{j=1}^{N_B} b_{m,j}^{(B)} B_j + \sum_{i=1}^{N_C} b_{m,i}^{(R)} \left(C_i^{(a)} - \sum_{k=1}^{N_B} C_{i,k} \right) + \sum_{j=1}^{N_Y} b_{ij}^{(Y)} Y_j \right] B_m, \\ \frac{\partial S}{\partial t} = f_B(T, W) \sum_{m=1}^{N_B} b_m^{(S)}(t) B_m, \\ B_m(t_0, x, y, z) = B_{m,0}(x, y, z) \quad \text{и} \quad S(t_0, x, y, z) = S_0(x, y, z), \end{array} \right. \quad (5)$$

где $m=1 \div N_B$, $B_{m,0}(x, y, z)$ и $S_0(x, y, z)$ — начальные распределения биомассы растений и опада.

При записи динамики биомассы растений и опада полагаются следующие допущения.

1. Принимается мультипликативная зависимость локальной динамики биомассы от температурного и влажного режимов ризосферы.

2. Удельный рост биомассы определяется ее естественным приростом b_m (посредством приведенного коэффициента также учитывается доля отмирающей биомассы, которая затем составляет прирост массы опада), внутри- и межвидовыми отношениями растений $\sum_{j=1}^{N_B} b_{m,j}^{(B)} B_j$, содержанием в ризосфере элементов питания подвижной формы $\sum_{i=1}^{N_C} b_{m,i}^{(R)} \left(C_i^{(a)} - \sum_{k=1}^{N_B} C_{i,k} \right)$

и отношением «микроорганизмы–растение» $\sum_{i=1}^{N_Y} b_{i,j}^{(Y)} Y_j$. Коэффициент $b_{m,m}^{(B)}$ отрицательный, поскольку в модельных популяциях обычно принимается внутривидовая конкуренция. Остальные коэффициенты представленного набора $\{b_{m,j}^{(B)}, m \neq j\}$ отражают характерные межвидовые отношения растений (конкуренция, симбиоз и т. д.). Знаки коэффициентов при остальных членах отражают отношения «растение – элементы питания» и «растение–микроорганизмы».

3. В ризосфере отмершие части растений трансформируются в элементы органики, где интенсивность отмирания определяется функцией возраста растения (чем оно старше, тем выше интенсивность отмирания его частей) и текущего временного сезона года (весна, лето или осень). Полагается, что отмирание растений пропорционально их биомассе $b_m^{(S)}(t)B_m$.

4. Принимается мультипликативная зависимость локальной динамики опада от температурного и влажного режимов ризосферы.

2.4. Функция состояния внешней среды

При построении модели (3)–(5) полагается, что воздействие внешней среды на динамические переменные системы задается функциями $f_C(T, W)$, $f_Y(T, W)$, $f_B(T, W)$ (как правило, кусочно-непрерывными функциями). Источником подобного воздействия служит как внутренняя среда обитания — ризосфера (кислотность, плотность, пористость и др.), так и внешняя — атмосфера (солнечная радиация, температура, влажность и др.), в которой функция состояния может быть дополнена до оптимального набора параметров исследуемой системы. Этот набор определяется методикой и условиями проведения эксперимента, постановкой задачи, имеющимся в наличии ресурсом. Функции состояния среды имеют следующий вид:

$$\begin{cases} f_C(T, W) = C_C \psi(T_1^{(C)}, T_2^{(C)}, T) \psi(W_1^{(C)}, W_2^{(C)}, W), \\ f_Y(T, W) = C_Y \psi(T_1^{(Y)}, T_2^{(Y)}, T) \psi(W_1^{(Y)}, W_2^{(Y)}, W), \\ f_B(T, W) = C_B \psi(T_1^{(B)}, T_2^{(B)}, T) \psi(W_1^{(B)}, W_2^{(B)}, W), \end{cases}$$

где C_C , C_Y , C_B — эмпирические константы, а

$$\psi(X_{\min}, X_{\max}, X) = \begin{cases} (X - X_{\min})(X_{\max} - X) & \text{при } X_{\min} < X < X_{\max}, \\ 0. & \end{cases}$$

При записи уравнений состояния полагается, что первые два аргумента функции в правых частях характеризуют оптимальный для роста жизненного цикла растений и микроорганизмов диапазон соответствующих величин. При неблагоприятном для данных величин состоянии они не погибают, а перестают расти.

2.5. Исследование частного случая

Интегральная модель динамики системы «почва–растение» представлена уравнениями (3)–(5). В общем случае трудности ее аналитического исследования вызваны большим чис-

лом динамических составляющих системы, а также отсутствием полного набора экспериментальных распределений, которые зачастую имеют весьма фрагментарный характер. В такой ситуации целесообразным является изучение отдельных частных случаев модели.

Ниже представлено рассмотрение такого частного случая, в котором присутствует один вид составляющих ризосферу микроорганизмов, элементов питания и растений в условиях отсутствия органического вещества почвы (опад). Внесение минеральных удобрений выполнено лишь в начальный момент времени, что позволяет нам относить их к области начальных распределений. Полагаются однородность системы, оптимальность условий внешней среды, а также отсутствие градиентов (перепадов) температуры, влажности и вещества. Уравнения модели системы в результате преобразований принимают вид

$$\begin{cases} \dot{C} = (C_0 - C)(qY + pB), \\ \dot{Y} = [d_0 + d_C(C_0 - C) + d_B B - d_Y Y]Y, \\ \dot{B} = [b_0 + b_C(C_0 - C) - b_Y Y - b_B B]B, \\ C(t_0) = 0, \quad Y(t_0) = Y_0, \quad B(t_0) = B_0, \end{cases} \quad (5)$$

где C_0 — начальное содержание элемента питания в ризосфере, а C — его текущее содержание в растении; Y, B — биомасса микроорганизмов и биомасса растения; точка над динамической переменной указывает на ее дифференцирование по времени; помеченные нулевым индексом величины — их начальные значения; t_0 — начальный момент рассмотрения системы (далее везде принимается $t_0 = 0$). Строчными буквами обозначены коэффициенты модели, численные значения которых оцениваются на основании экспериментальных распределений с помощью процедур нелинейного оценивания параметров [Бард, 1979].

Согласно первому уравнению (6) динамика содержания элементов питания в растении определяется внутренней физиологической особенностью самого растения, а также микробиологическими процессами, происходящими в ризосфере.

Динамика микроорганизмов следует так называемому логистическому уравнению [Ризниченко, Рубин, 1983], где $d_0 + d_C(C_0 - C) + d_B B$ характеризуют рост/убыль их биомассы, а последний член $d_Y Y$ — внутривидовую конкуренцию. Рост биомассы обусловлен естественным приростом d_0 , содержанием в ризосфере элементов питания $d_C(C_0 - C)$ микроорганизмов и слагаемым $d_B B$. Последнее слагаемое отражает тот факт, что растение, вследствие отмирания определенной части своей биомассы, формирует питательную для микроорганизмов среду [Кабата-Пендиас, Пендиас, 1989].

Динамика биомассы определяется естественным приростом b_0 , содержанием в ризосфере элементов питания $b_C(C_0 - C)$, отмиранием части биомассы (она расходуется на формирование питательной среды для микроорганизмов) $b_Y Y$ и внутривидовой конкуренцией растений $b_B B$.

Структура уравнений модели допускает их неявное решение в квадратурах:

$$\begin{cases} C = C_0 \{1 - \exp[-(p\bar{B} + q\bar{Y})t]\}, \\ Y = \frac{Y_0 \exp(\bar{\varphi}_Y t)}{1 + d_Y Y_0 \int_0^t \exp(\bar{\varphi}_Y \tau) d\tau}, \\ B = \frac{B_0 \exp(\bar{\varphi}_B t)}{1 + d_B B_0 \int_0^t \exp(\bar{\varphi}_B \tau) d\tau}, \\ \varphi_Y(t) = d_0 + d_C [C_0 - C(t)] + d_B B(t), \\ \varphi_B(t) = b_0 + b_C [C_0 - C(t)] - b_Y Y(t), \end{cases}$$

где верхняя черта над переменной указывает на ее среднее значение $\bar{Y}(t) = \frac{1}{t} \int_0^t Y dt$, $\bar{B}(t) = \frac{1}{t} \int_0^t B dt$, $\bar{C}(t) = \frac{1}{t} \int_0^t C dt$. Положительность правой части первого уравнения обуславливает монотонно возрастающий характер временного изменения $C(t)$. Согласно физическому смыслу содержание элементов в растении не превосходит их количество в ризосфере. Таким образом, выражение в круглых скобках показателя экспоненты в уравнении для $C(t)$ является монотонно возрастающей функцией, которая при данных условиях задачи к окончанию вегетационного периода растения достигает своего максимального значения C_0 . Вследствие этого временное изменение $C(t)$ характеризуется монотонно возрастающей и ограниченной сверху функцией.

Во втором уравнении деление обеих частей дроби на $\exp(\bar{\varphi}_Y t)$ приводит к такому представлению динамики массы микроорганизмов:

$$Y(t) = \frac{Y_0}{\exp[-\bar{\varphi}_Y(t)t] + d_Y Y_0 \int_0^t \exp[-\tilde{\varphi}_Y(t-\tau)(t-\tau)] d\tau},$$

где $\tilde{\varphi}_Y(t-\tau) = \frac{1}{t-\tau} \int_{t-\tau}^t \varphi_Y d\tau$ — среднее за время $t-\tau$ значение подынтегральной функции. Поскольку $\bar{\varphi}_Y(t)$ — монотонно возрастающая функция, то в знаменателе стоит сумма двух монотонно убывающих функций.

Деграция растений — $\dot{B} < 0$ — происходит в случае, если существует такое t^* , при котором прирост биомассы окажется равным $b_Y Y(t^*) + b_B B(t^*) - b_C \{C_0 - C(t^*)\}$. Иными словами, темп потерь биомассы на формирование питательного ресурса для микроорганизмов и внутривидовая конкуренция растений за минусом поступления в растение элементов его питания окажутся выше темпа его естественного прироста.

Модель (6) и ее некоторые модификации оказываются востребованными для решения широкого круга научных и прикладных задач. В частности, в ее рамках модель динамики паразитирующих вредителей (фитопатогенные микроорганизмы, различные гнили пшеницы и т. д.) однолетних злаковых культур в одномерном пространственном случае бесконечной прямой можно записать уравнениями

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial Y}{\partial t} = D \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} + (d_Y + d_B B) Y, \\ \frac{\partial B}{\partial t} = -b_Y Y B, \\ Y(t_0, x) = Y_0(x), \quad B(t_0, x) = B_0(x), \\ Y(t, \pm\infty) = 0, \quad B(t, -\infty) = B_\Gamma, \quad B(t, \infty) = 0, \end{array} \right. \quad (7)$$

где $Y = Y(t, x)$, $B = B(t, x)$ — весовые меры вредителей и растений, D — коэффициент диффузии вредителей; коэффициенты d_B характеризуют удельный прирост массы вредителей от поедания ими растений, а b_Y — удельные потери биомассы растений; d_Y — характеризует общий баланс рождения и смертности вредителей; t_0 , $Y_0(x)$, $B_0(x)$ — начальный момент и начальные распределения переменных системы; последние соотношения (7) характеризуют ее граничные условия. Поскольку в почве полного отмирания микроорганизмов нет [Звягинцев, 1987], то здесь учитывается только баланс «рождение–отмирание».

При записи (7) учитывается вполне естественный факт того, что скорость роста однолетних растений (в (6) он задается коэффициентом b_0) на порядок ниже скорости размножения вредителей, что соответствует рассмотрению случая определенной «замороженности» роста биомассы однолетней культуры растения. Первое уравнение характеризует динамику вредителей, которая определяется диффузионным потоком, локальным воспроизводством и притоком массы вредителей за счет частичного потребления растений. Второе уравнение характеризует динамику роста однолетней культуры растения в случае отсутствия роста биомассы. Предполагаются ее неподвижность и отрицательность скорости роста (уменьшение) вследствие потребления вредителями.

При таких условиях в (7) формируется так называемая волна «ресурс–потребитель» [Гигаури, Свиричев, 1981]. Для определения скорости ее распространения необходимо:

- 1) ввести новую переменную $\xi = x + vt$, где v — скорость волны «ресурс–потребитель»;
- 2) выразить комплекс YB из второго уравнения, а затем подставить в первое уравнение и результат проинтегрировать в промежутке $(-\infty, \xi]$;
- 3) ввести новую динамическую переменную $Z = \int_{-\infty}^{\xi} Y d\xi$.

Тогда первое уравнение (7) примет вид

$$\begin{cases} v \frac{dZ}{d\xi} - D \frac{d^2 Z}{d\xi^2} = F(Z, v), \\ F(Z, v) = v d_B b_Y \left[B_T - B_0 \exp\left(-\frac{d_B b_Y Z}{v}\right) \right] + d_Y Z, \end{cases}$$

где $F(Z, v)$ удовлетворяет требованиям логистической кривой: $F(0, v) = F(K, v) = 0$, $0 < K < \infty$, на краях интервала изменения Z она обращается в 0, $F'(0) > 0$ и $F'(Z) < F'(0)$.

При выполнении вышеприведенных условий $Z(\xi)$ является решением задачи Колмогорова–Петровского–Пискунова, с незначимым отличием зависимости $Z(\infty)$ от скорости распространения волны [Свиричев, 1987]. Таким образом, в приведенной системе (растение–потребитель) могут распространяться волны со скоростями $v > v_0 = \sqrt{(d_Y + d_B b_Y B_T) D}$.

2.6. Численная реализация

В [Четырбоцкий, 2019] сформулирована комплексная модель динамики системы «почва–растение», в которой вместе с составляющими системы учитываются динамика ризосферного (прилегающий к корням растения узкий слой почвы) сообщества микроорганизмов, а также температура и влажность среды. Поскольку на современном этапе экспериментальных исследований требуемый для параметрической идентификации этой системы доступный для расчетов набор данных имеет фрагментарный характер (а зачастую такие данные просто отсутствуют), то в данной работе используется редуцированный вариант модели (3)–(5). Для указанного варианта динамическими переменными выступают биомасса растения и содержание трех основных элементов его минерального питания (K_2O , P_2O_5 и N).

Экспериментальным материалом для исследований выступают численные результаты выполненных Ефремовой М. А. и Сладковой Н. А. экспериментов по оценке влияния азотных, фосфорных и калийных удобрений на рост яровой пшеницы (Красноуфимская-100) на торфяной низинной почве [Ефремова, Дричко, 2010; Ефремова и др., 2013; Сладкова, 2016].

Схема опытов и условия закладки опытов состоят в следующем. Перед посевом специально отобранную торфяную низинную почву обработали азотными (сульфат аммония), фосфорными (простой суперфосфат) и калийными (сульфат калия) удобрениями. Всего было выполнено 10 таких закладок, где номер отражает определенную градацию содержания K_2O в удобрении.

ниях: наименьшее содержание K_2O приходится на первую градацию, а наибольшее — на последнюю. Набор (10, 14, 19, 24, 28, 34, 39, 46, 55) определяет промежутки дней отбора растительных проб с момента появления первых всходов, которые соответствуют наиболее критическим периодам роста растений. В экспериментах учитывались биомасса надпочвенной части растения и количественное содержание в ней элементов минерального питания.

Для оценки влияния концентраций азотных, фосфорных и калийных удобрений при построении модели принимались следующие допущения.

1. Удельная динамика содержания элементов i -го вида минерального питания в растении (т. е. динамика для единицы его биомассы) в k -й закладке пропорциональна текущему содержанию этого элемента в ризосфере $C_{i,k,0} - C_{i,k}$, где $C_{i,k,0}$ — начальное содержание в ризосфере i -го вида элементов в k -й закладке, а $C_{i,k}$ — содержание этих элементов в закладке, $i = 1 \div 3$ (последовательно: K_2O , P_2O_5 и N).

2. Удельная динамика биомассы растений определяется ее естественной скоростью роста и элементами минерального питания, а также действием подобного в модели Ферхюльста фактора самолимитирования.

3. Ограниченность объема тела растения обуславливает его определенную способность к максимальному значению поглощения элементов питания, которое растение может потребить из ризосферы.

4. В самом растении учитывается взаимодействия элементов питания как объектов химического происхождения (конкуренция, симбиоз и т. д.).

Следуя приведенным допущениям, модель динамики системы «почва–растение» принимает вид

$$\begin{cases} \dot{C}_{i,k} = \left(q_{i,0}C_{i,k,0} + \sum_{j=1}^3 q_{i,j}C_{j,k} \right) B_k, \\ \dot{B}_k = \left(p_0 + \sum_{j=1}^3 p_j C_{j,k} - p_4 B_k \right) B_k, \\ C_{i,k}(0) = 0, \quad B_k(0) = B_{k,0}, \end{cases} \quad (8)$$

где $i = 1 \div 3$, $k = 1 \div 10$; $q_{i,0}$ — коэффициент пропорциональности (пункт 1 допущений): он определяет ту долю содержания элементов питания в ризосфере, которая может быть утилизирована растением; $q_{i,i}$ характеризует предельную «емкость» содержания элементов питания в теле растения; $q_{i,j}$, $j \neq i$, — коэффициенты пропорциональности при членах, посредством которых в самом растении учитываются взаимодействия между собой элементов минерального питания. Функция B_k определяет биомассу растения в k -й закладке; p_0 характеризует естественный прирост биомассы; $\sum_{j=1}^3 p_j C_{j,k}$ характеризует влияние элементов питания в растении на удельный рост его биомассы; $p_4 B_k$ характеризует самолимитирование роста биомассы; $q_{i,0}$ — коэффициент пропорциональности (пункт 1 допущений): он определяет ту долю содержания элементов питания в ризосфере, которая может быть утилизирована растением; $q_{i,i}$ характеризует предельную «емкость» содержания элементов питания в теле растения; $q_{i,j}$, $j \neq i$, — коэффициенты пропорциональности при поглощенных растением элементах $C_{j,k}$, посредством которых в самом растении учитываются взаимодействия элементов минерального питания.

Оценка предельного содержания в растении i -го вида элемента минерального питания следует из приравнивания нулю правой части 1-го уравнения (1). В первом приближении допускается, что предельные содержания определяются системой линейно-алгебраических уравнений, определяющей стационарное состояние системы. Второе уравнение системы соответствует модификации уравнения Ферхюльста: сумма первых четырех членов характеризует прирост биомассы вследствие естественного прироста и воздействия на динамику растения элементов минерального питания.

Поскольку каждое уравнение модели линейно по своим параметрам, то для начальной оценки их численных значений применим стандартный метод наименьших квадратов (МНК) [Рао, 1968]. Согласно этому методу предикторами уравнений выступают наблюдаемые в экспериментах составляющие рассматриваемой системы. Подстановка же в (8) полученных МНК значений приводит к вырожденным случаям. Поэтому для нахождения приемлемых оценок параметров следует использовать методы нелинейной оценки параметров [Бард, 1979]. Для их нахождения следует решить задачу поиска экстремума функционала:

$$\min \Phi(p) \quad \text{для } p \in P, \quad (9)$$

где P — область допустимых значений параметров. Без ограничения общности полагается, что область P соответствует k -мерному гиперкубу. Начальные значения коэффициентов как раз и задаются найденными МНК значениями коэффициентов. При построении функционала, минимизация которого определяет оценку параметров системы (8), следует учитывать различие масштабов динамических переменных. В рассматриваемом здесь случае такая запись принимает вид

$$\Phi(p) = \sum_{t=2}^9 \sum_{k=1}^{10} \left\{ \left[1 - \left(B_k^{(m)} \right)_t / (B_k)_t \right]^2 + \sum_{j=1}^3 \left[1 - \left(C_{i,k}^{(m)} \right)_t / (C_{i,k})_t \right]^2 \right\}, \quad (10)$$

где $\{B_k\}$ и $\{C_{i,k}\}$ — экспериментальные распределения, а $\{B_k^{(m)}\}$ и $\{C_{i,k}^{(m)}\}$ — так называемые модельные распределения (они следуют решению системы (8)).

Для решения задачи (9) использовался метод Марквардта [Бард, 1979]. Всего было выполнено 332 итерации, где уже на 50 итерации был достигнут минимум $\Phi(p)$. Оценки параметров минерального питания, а также коэффициент детерминации приведены в таблице 1, оценка параметров биомассы растений — в таблице 2.

Таблица 1. Оценка параметров модели содержания элементов в растении

	$q_{i,0}$	$q_{i,1}$	$q_{i,2}$	$q_{i,3}$	R^2
C_1	0.004±0.001	0.023±0.001	-0.027±0.001	0.017±0.001	0.792
C_2	0.004±0.001	0.033±0.001	0.002±0.001	0.010±0.006	0.789
C_3	0.007±0.001	0.003±0.001	-0.031±0.001	0.00004 ±0.001	0.812

Примечание. В каждой строке приведены оценки значений коэффициентов системы (8) для модели содержания элементов в растении, где после знака ± указан диапазон границ их доверительных интервалов; в столбце R^2 указан коэффициент детерминации.

Таблица 2. Оценка параметров модели динамики биомассы

	p_0	p_1	p_2	p_3	p_4
B	0.077±0.020	0.001±0.096	0.001±0.613	11.244±1.544	0.236±0.036

Примечание. Оценки значений коэффициентов для модели биомассы растений, где после знака ± указан диапазон границ их доверительных интервалов; коэффициент детерминации — 0.794.

Анализ элементов таблицы показывает существенное превышение среди остальных коэффициента p_3 (он соответствует азоту C_3), что указывает на его ведущую роль в процессе обеспечения роста биомассы растения, что тем самым согласуется с установившейся закономерностью накопления питательных веществ в процесса роста растения [Кидин, 2015]. Поскольку доверительные интервалы для p_1 и p_2 содержат нули, то здесь проверялись гипотезы $H_0: p_1 = 0$; $H_0: p_2 = 0$. С 95%-ной долей вероятности они (гипотезы) оказались достоверными. Поэтому в рамках модели (1) влиянием содержания в растении K_2O и P_2O_5 можно пренебречь. Для $q_{3,3}$ также оказывается достоверной нулевая гипотеза $H_0: q_{3,3} = 0$. Отрицательность $q_{1,2}$ и $q_{3,2}$ указывает на определенные «конкурентные» отношения между K_2O и P_2O_5 , а также N и P_2O_5 .

Для оценки адекватности модели экспериментальным распределениям следует определить «качество» выполненной подгонки модельных данных их наблюдаемым прообразам. Здесь оценка «качества» подгонки выполнялась на основании коэффициента детерминации. Коэффициент детерминации между экспериментальным и модельным распределениями для биомассы равен 0.789. Остальные детерминации приведены в таблице 1 (в столбце R^2). Их высокие значения указывают на хорошее соответствие модели (8) изучаемому процессу.

Распределение динамических переменных системы (8) приведено на рис. 2.

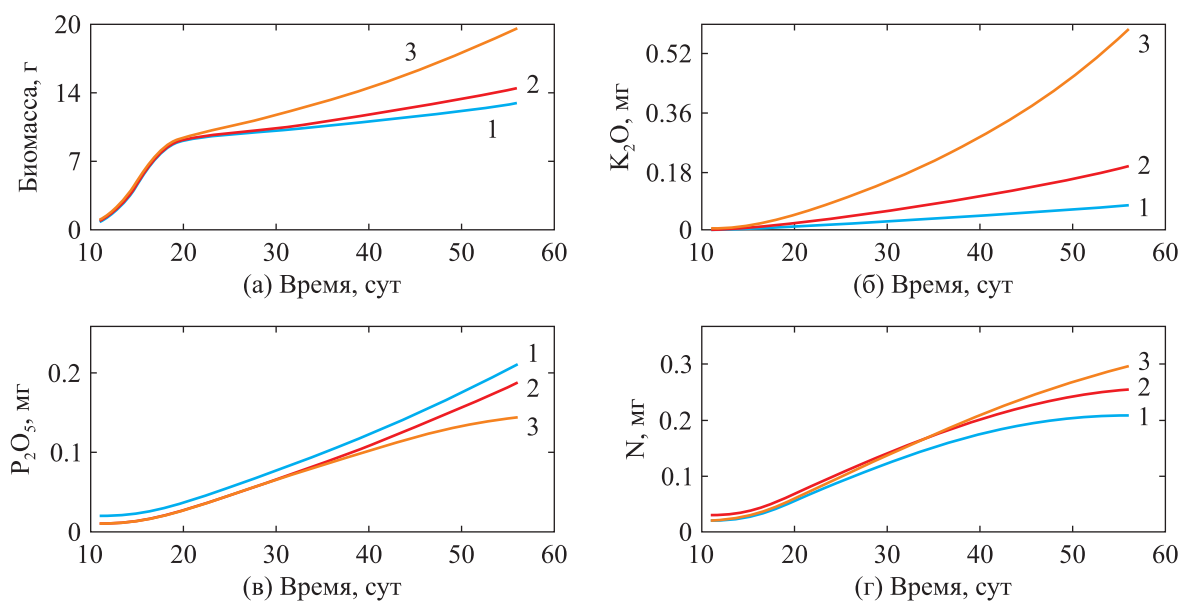


Рис. 2. Динамика переменных системы (8), где цифры отмечают временные распределения ее составляющих на участках почвы с различным содержанием K_2O в удобрениях: 1 — 100 мг, 2 — 300 мг, 3 — 600 мг

Характер следования совокупности кривых на рис. 2 отражает известный факт роста биомассы растения в зависимости от содержания калийных удобрений [Ефремова, Дричко, 2010], что подчеркивает соответствие модельных и экспериментальных распределений. При этом содержание K_2O и N в растении также следует отмеченной тенденции. Вместе с тем отмечается противоположный характер изменения содержания P_2O_5 , что отражает уже отмеченные «конкурентные» отношения между K_2O и P_2O_5 , а также N и P_2O_5 .

Тот факт, что растение потребляет в пересчете на сухую массу от 0.5 до 2 % почвенного азота, около 0.2 % фосфора и 0.9 % калия, подтверждается соотношением коэффициентов $p_1/p_2/p_3$ [Минеев, 2006]. Повышенное содержание K_2O также способствует росту содержания рассматриваемых в данной работе остальных элементов минерального питания.

Заключение

Для рассмотренного в данной работе многокомпонентного динамического объекта (система «почва–растение») построена математическая модель совместной динамики его составляющих, которая определяется ограниченным компактным набором уравнений массопереноса. Локальная динамика составляющих определяется цепочкой взаимосвязанных простых и однотипных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, где элементы живой (микроорганизмы, растения) и неживой природы (элементы минерального питания) следуют принятым в математической биологии отношениям между ними («ресурс–потребитель», внутри- и межвидовая конкуренция и т. д.). Учитывается разделение элементов питания на подвижную и неподвижную формы, а также их взаимные переходы.

Разработанные в данной работе подходы и модели могут оказаться полезными для решения важных задач прогнозирования урожайности культур сельскохозяйственного назначения. В частности, определение сроков внесения $\{t_{i,k}, i=1 \div N_C, k=1 \div N_f\}$ и объемов внесения $\{C_{i,k}^*, i=1 \div N_C, k=1 \div N_f\}$ удобрений (система (2)) для определения, например, экономической эффективности или прибыли возделывания; оценки урона урожая от сорняков и вредителей; оценка самого урожая и т. д.

При построении модели динамики системы учитываются формы зависимостей между ее составляющими. Принимаются связи между элементами питания подвижной и неподвижной форм. Для системы, где каждая из составляющих представлена только одним видом (удобрение, ассоциация микроорганизмов и растения представлены только одним видом), выполнено аналитическое исследование. Для однолетних культур сельскохозяйственного назначения разработана адаптация модели распространения волны в системе «ресурс–потребитель» (волны Колмогорова–Петровского–Пискунова).

Поскольку доступный фактический материал не содержит экспериментальных распределений микроорганизмов, то адекватность модели оценивалась для ее редуцированного варианта. Параметрическая идентификация модели на примере роста яровой пшеницы показывает хорошую степень адекватности разработанной модели. Анализ экспериментальных распределений показывает, что рост содержания в почвах K_2O приводит к росту биомассы растений. При этом азот оказывает самое большое влияние на темп роста биомассы, следующим оказывается калий, а фосфор практически не оказывает влияния на темп роста биомассы, что не противоречит ранее полученным результатам других авторов.

Список литературы (References)

- Алексеев В. В., Крышев М. М., Сазыкина Т. Г.* Физическое и математическое моделирование экосистем. — СПб.: Гидрометеойздат, 1992. — 368 с.
Alekseev V. V., Kryshev M. M., Sazykina T. G. Physicheskoe i matematicheskoe modelirovanie ecosystem [Physical and mathematical modeling of ecosystems]. — Saint-Petersburg: Gidrometeoizdat, 1992. — 368 p. (in Russian).
- Бард Й.* Нелинейное оценивание параметров. — М.: Финансы и статистика, 1979. — 349 с.
Bard J. Nonlinear estimation of parameters [Nonlinear estimation of parameters]. — Moscow: Finance and statistics, 1979. — 349 p. (in Russian).
- Благодатский С. А.* Микробная биомасса и моделирование цикла азота в почве: автореф. дисс. докт. биол. наук: 03.02.03, 03.02.13. — Пушкино, 2011. — 50 с.
Blagodatsky S. A. Microbnaya biomassa i modelirovanie cicla azota v pochve [Microbial biomass and modeling of the nitrogen cycle in the soil]: abstract. diss. doct. biol. sciences: 03.02.03, 03.02.13. — Pushchino, 2011. — 50 p. (in Russian).
- Бурканова О. А.* Влияние минеральных удобрений на процессы колонизации микроорганизмами прикорневых зон ячменя и фасоли: автореф. дисс. канд. биол. наук. — МГУ, Москва, 2007. — 28 с.

- Burkanova O. A.* Vliyanie mineral'nyh udobreniy na process colonizatsii mikroorganizmamy prikronev'yh zon jachmenya i phasoly [The effect of mineral fertilizers on the colonization processes by microorganisms of the basal zones of barley and beans]: abstract. diss. cand. biol. sciences. — Moscow State University, Moscow, 2007. — 28 p. (in Russian).
- Быховец С. С., Комаров А. С.* Простой статистический имитатор климата почвы с месячным шагом // Почвоведение. — 2002. — № 4. — С. 443–452.
Bykhovets S. S., Komarov A. S. Prostoi statisticheskiy imitator klimata pochvi s mecyachnym shagom [A simple statistical soil climate simulator with a monthly step] // Soil Science. — 2002. — No. 4. — P. 443–452 (in Russian).
- Гигаури А. А., Свирежев Ю. М.* Распространение волны в системе «ресурс–потребитель» // ДАН СССР. — 1981. — Т. 258, № 5. — С. 1274–1276.
Gigauri A. A., Svirezhev Yu. M. Rasprostraneniye volny v sisteme resers-portebytel' [Wave Propagation in the Resource-Consumer System] // DAN SSSR. — 1981. — Vol. 258, No. 5. — P. 1274–1276 (in Russian).
- Евдокимов И. В.* Методы определения биомассы почвенных микроорганизмов // Russian journal of ecosystem ecology. — 2018. — Vol. 3 (3). — P. 1–20.
Evdokimov I. V. Metody opredeleniya biomassy pochvennyh mikroorganizmov [Methods for determining the biomass of soil microorganisms] // Russian journal of ecosystem ecology. — 2018. — Vol. 3 (3). — P. 1–20 (in Russian).
- Ефремова М. А., Дричко В. Ф.* Влияние калия на физико-химические свойства торфяной низинной почвы // Агрохимия. — 2010. — № 4. — С. 3–10.
Efremova M. A., Dričko V. F. Vlyaniye kalia a fiziko-hemicheskie svoystva torfianoy nizinnoy pochvy [The effect of potassium on the physicochemical properties of peat low-lying soil] // Agrochemistry. — 2010. — No. 4. — P. 3–10 (in Russian).
- Ефремова М. А., Сладкова Н. А., Вяльшина А. С.* Динамика накопления кадмия и калия растениями пшеницы на дерново-подзолистой и торфяной низинной почвах // Агрохимия. — 2013. — № 11. — С. 86–96.
Efremova M. A., Sladkova N. A., Vyalshina A. S. Dynamika nakopleniya kadmija i kalia rasteniyami pshenicy na dernovo-podzolistoy i torfyanoy nizinnoy pochvah [Dynamics of the accumulation of cadmium and potassium by wheat plants on sod-podzolic and peat lowland soils] // Agrochemistry. — 2013. — No. 11. — P. 86–96 (in Russian).
- Звягинцев Д. Г.* Почва и микроорганизмы. — М.: Издательство Московского университета, 1987. — 256 с.
Zvyagintsev D. G. Pochva i mikroorganizmy [Soil and microorganisms]. — Moscow: Moscow Publishing House Univ., 1987. — 256 p. (in Russian).
- Кабата-Пендиас А., Пендиас Х.* Микроэлементы в почвах и растениях / Пер. с англ. — М.: Мир, 1989. — 439 с.
Kabata-Pendias A., Pendias H. Trace elements in soils and plants. — CRC Press, 2010. — 584 p. (Russ. ed.: *Kabata-Pendias A., Pendias H.* Mikroelementy v pochvah i rasteniyah / Per. s angl. — Moscow: Mir, 1989. — 439 p.).
- Кидин В. В., Торшин С. П.* Агрохимия. — М.: Проспект, 2015. — 591 с.
Kidin V. V., Torshin S. P. Agrohimiya [Agrochemistry]. — Moscow: Prospect, 2015. — 591 p. (in Russian).
- Колпак Е. П., Столбовая М. В.* Математическая модель кинетики роста растений. — <http://jurnal.org/articles/2013/mat7.html> (дата обращения 01.12.2019).
Kolpak E. P., Stolbovaya M. V. Matematicheskaya model kinetiki rosta rastenii [A mathematical model of plant growth kinetics]. — <http://jurnal.org/articles/2013/mat7.html> (accessed 01.12.2019) (in Russian).
- Комаров А. С., Хораскина Ю. С., Быховец С. С., Безрукова М. Г., Чертов О. Г.* Моделирование динамики органического вещества и элементов почвенного питания в минеральной почве и лесной подстилке // Математическая биология и биоинформатика. — 2012. — Т. 7, № 1. — С. 162–176.
Komarov A. S., Khoraskina Yu. S., Bykhovets S. S., Bezrukova M. G., Chertov O. G. Modelirovaniye dinamiki organicheskogo veshstva i elementov pochvennogo pitaniya v mineralnoy pochve i lesnoy podstilke [Modeling the dynamics of organic matter and soil nutrition elements in mineral soil and forest litter] // Mathematical Biology and Bioinformatics. — 2012. — Vol. 7, No. 1. — P. 162–176 (in Russian).
- Комаров А. С., Чертов О. Г., Быховец С. С., Шашков М. П., Фролов П. В.* Модель гумификации органического вещества почв Romul_Hum с учетом деятельности почвенной фауны // Мат. моделирование в экологии; Мат-лы IV нац. науч. конф. с международным участием, 18–22 мая 2015 г. / Ред. А. С. Комаров. — Пущино: ИФХиБПП РАН, 2015. — С. 87–90.

- Komarov A. S., Chertov O. G., Bykhovets S. S., Shashkov M. P., Frolov P. V.* Model gumifikacii organicheskogo veshstva pochv Romul_Hum s uchetom dejatel'nosti pochvennoy fauny [Model of humification of soil organic matter Romul_Hum taking into account the activity of soil fauna] // Mat. modeling in ecology; Materials IV nat. scientific conf. with international participation, May 18–22, 2015 / Ed. A. S. Komarov. — Pushchino: IFHiBPP RAS, 2015. — P. 87–90 (in Russian).
- Минеев В. Г.* Агрохимия. — М.: Издательство Московского университета, 2006. — 714 с.
Mineev V. G. Agrokhimiya [Agrochemistry]. — Moscow: Moscow University Press, 2006. — 714 p. (in Russian).
- Михайленко И. М.* Математическое моделирование роста растений на основе экспериментальных данных // Сельскохозяйственная биология. — 2007. — № 1. — С. 103–111.
Mikhailenko I. M. Matematicheskoe modelirovanie rosta rasteniy na osnove eksperimentalnykh dannykh [Mathematical modeling of plant growth based on experimental data] // Agricultural Biology. — 2007. — No. 1. — P. 103–111 (in Russian).
- Полуэктов Р. А., Смоляр Э. И., Терлеев В. В., Топаж А. Г.* Модели продукционного процесса сельскохозяйственных культур. — СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2006. — 396 с.
Poluektov R. A., Smolyar E. I., Terleev V. V., Topazh A. G. Modely produkcionnogo processa selskohozyaystvennykh kultur [Models of the production process of agricultural crops]. — Saint Petersburg: Publishing House S.-Petersburg. University, 2006. — 396 p. (in Russian).
- Почвоведение / под ред. И. С. Кауричев. — М.: Агропромиздат, 1989. — 719 с.
Pochvovedeniye [Soil Science] / ed. I. S. Kaurichev. — Moscow: Agropromizdat, 1989. — 719 p. (in Russian).
- Орлов Д. С.* Химия почв. — М.: Изд. МГУ, 1992. — 400 с.
Orlov D. S. Khimiya pochv [Soil chemistry]. — Moscow: Ed. Moscow State University, 1992. — 400 p. (in Russian).
- Рао С. Р.* Линейные статистические методы и их применение. — М.: Наука, 1968. — 547 с.
Rao S. R. Linear statistical methods and their application. — Wiley press, 1961. — 656 p. (Russ. ed.: *Rao S. R.* Lineinye statisticheskie metody i ikh primenenie. — Moscow: Nauka, 1968. — 547 p.)
- Ризниченко Г. Ю., Рубин А. Б.* Математические модели биологических продукционных процессов. — М.: Изд-во МГУ, 1983. — 302 с.
Riznichenko G. Yu., Rubin A. B. Matematicheskie modeli biologicheskikh produkcionnykh processov [Mathematical models of biological production processes]. — Moscow: Publishing House of Moscow State University, 1983. — 302 p. (in Russian).
- Романовский Б. В.* Основы химической кинетики. — М.: Экзамен, 2006. — 416 с.
Romanovsky B. V. Osnovy khimicheskoy kinetiki [Basics of physical chemistry]. — Moscow: Examen, 2006. — 416 p. (in Russian).
- Рыжова И. М.* Математическое моделирование почвенных процессов. — М.: Изд-во МГУ, 1987. — 82 с.
Ryzhova I. M. Matematicheskoe modelirovaniye pochvennykh processov [Mathematical modeling of soil processes]. — Moscow: Publishing house of Moscow State University, 1987. — 82 p. (in Russian).
- Рыжова И. М.* Анализ устойчивости почв на основе нелинейных моделей круговорота углерода: автореф. дисс. докт. биол. наук. — М.: МГУ. — 52 с.
Ryzhova I. M. Analys ustoichivosti pochv na osnove nelineynih modelei krugovorota ugleroda [The analysis of soil stability on the basis of nonlinear models of the carbon cycle]: abstract. diss. doct. biol. sciences. — Moscow: Moscow State University. — 52 p. (in Russian).
- Свиричев Ю. М.* Нелинейные волны, диссипативные структуры и катастрофы в экологии. — М.: Наука, 1987. — 368 с.
Svirizhev Yu. M. Nelineinye volny, dissipativnyye struktury i katastrophy v ekologii [Nonlinear waves, dissipative structures and catastrophes in ecology]. — Moscow: Nauka, 1987. — 368 p. (in Russian).
- Сиротенко О. Д., Абашина Е. В., Романенков В. А.* Моделирование влияния изменений климата на динамику органического углерода в пахотных почвах, эмиссию CO₂ и продуктивность агроэкосистем // Метеорология и гидрология. — 2005. — № 8. — С. 83–95.
Sirotenko O. D., Abashina E. V., Romanenkov V. A. Modelirovaniye vliyaniya izmeneniy klimata na dinamiku organicheskogo egleroda v pahotnikh pochvah, emissiyu CO₂ i produktivnost agroekosistem [Modeling the effect of climate change on the dynamics of organic carbon in arable soils, CO₂ emission and productivity of agroecosystems] // Meteorology and Hydrology. — 2005. — No. 8. — P. 83–95 (in Russian).
- Сиротенко О. Д., Романенков В. А., Павлова В. Н., Листова М. П.* Оценка и прогноз эффективности минеральных удобрений в условиях изменяющегося климата // Агрохимия. — 2009. — № 7. — С. 26–33.

- Sirotenko O. D., Romanenkov V. A., Pavlova V. N., Listova M. P.* Ocenka i prognoz effektivnosti mineralnykh udobreniy v usloviyakh izmeniyashegosiya klimata [Evaluation and prediction of the effectiveness of mineral fertilizers in a changing climate] // *Agrochemistry*. — 2009. — No. 7. — P. 26–33 (in Russian).
- Сладкова Н. А.* Распределение цинка и кадмия в системе торфяная почва — растение под влиянием фосфорных и калийных удобрений: дисс. канд. биол. наук. — СПб.: СПбГАУ, Санкт-Петербург–Пушкин, 2016. — 187 с.
- Sladkova N. A.* Raspredelenye cinca i cadmiya v sisteme torfyanaya pochva — rastenye pod vliyaniem fosfornykh i kaliynykh udobreniy [The distribution of zinc and cadmium in the peat soil — plant system under the influence of phosphorus and potassium fertilizers]: diss. cand. biol. sciences. — Saint-Petersburg: SPBGU, St. Petersburg–Pushkin, 2016. — 187 p. (in Russian).
- Торнли Дж. Г. М.* Математические модели в физиологии растений. — Киев: Наукова думка, 1982. — 312 с.
- Thornley J. H. M.* Mathematical models in plant physiology. — New York: Academic press, 1976. — 318 p. (Russ. ed.: *Thornli J. H. M.* Matematicheskie modeli v physiology rasteniy. — Kiev: Naukova dumka, 1982. — 312 p.)
- Четырбоцкий В. А.* Математическая модель распределения фосфора в ризосфере // ЛОМОНОСОВ-2019: тезисы докл. XXVI Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых: Секция «Почвоведение» (Москва 8–12 апреля 2019). — М., 2019. — С. 212–214.
- Chetyrbotsky V. A.* Matematicheskaya model raspredeleniya fosphora v rizosphere [A mathematical model of the distribution of phosphorus in the rhizosphere] // LOMONOSOV-2019: abstracts dokl. XXVI International Scientific Conference of Students, Graduate Students and Young Scientists: Section “Soil Science” (Moscow, April 8–12, 2019). — Moscow, 2019. — P. 212–214 (in Russian).
- Феоктистова Н. В., Марданова А. М., Хадиева Г. Ф., Шарипова М. Р.* Ризосферные бактерии // Ученые записки Казанского университета. Сер. Естественные науки. — 2016. — Т. 158. — С. 207–224.
- Feoktistova N. V., Mardanova A. M., Khadiyeva G. F., Sharipova M. R.* Rizosphernye bakterii [Rhizospheric bacteria] // Scientific notes of Kazan University. Ser. Natural Sciences. — 2016. — Vol. 158. — P. 207–224 (in Russian).
- Франс Дж., Торнли Дж. Х. М.* Математические модели в сельском хозяйстве. — М.: Агропромиздат, 1987. — 400 с.
- Frans J., Thornley J. H. M.* Mathematical models in agriculture. — London: London publ., 1984. — 445 p. (Russ. ed.: *Frans J., Thornley J. H. M.* Matematicheskie modely v selskov hozyaystve. — Moscow: Agropromizdat, 1987. — 400 p.)
- Хворова Л. А.* Моделирование влияния азотного питания на продукционный процесс посева люцерны: дис. канд. техн. наук. — СПб., 1992.
- Hvorova L. A.* Modelirovanie vliyaniya azotnogo pitanya na produkcionnyy process poseva lucerny [Modeling the effect of nitrogen nutrition on the production process of alfalfa crops]: dis. cand. tech. science. — Saint-Petersburg, 1992 (in Russian).
- Bondeau A., Smith P. C., Zaehle S. et al.* Modelling the role of agriculture for the 20th century global terrestrial carbon balance // *Glob. Change Biol.* — 2007. — Vol. 13. — P. 679–706.
- Clements F. E.* Plant succession. — Washington: Pubs, 1916. — 621 p.
- Daly K. R., Cooper L. J., Kobernick N., Evaristo J., Keyes S. D., Veelen A., Roose T.* Modelling water dynamics in the rhizosphere // *Rhizosphere*. — 2017. — Iss. 4. — P. 139–151.
- Daly K. R., Keyes S. D., Masum S., Roose T.* Image-based modelling of nutrient movement in and around the rhizosphere // *Journal of Experimental Botany*. — 2016. — Vol. 67, No. 4. — P. 1059–1070.
- Darrah P. R., Jones D. L., Kirk G. J. D., Roose T.* Modelling the rhizosphere: a review of methods for ‘upscaling’ to the whole-plant scale // *European Journal of Soil Science*. — February 2006. — Vol. 57. — P. 13–25.
- Jones J. W. et al.* Brief history of agricultural systems modeling // *Agricultural Systems*. — 2016. — Vol. 155. — P. 240–254.
- Hogh-Jensen H., Loges R. et al.* An empirical model for quantification of symbiotic nitrogen fixation in grass-clover mixtures // *Agric. Syst.* — 2004. — No. 82.

- Kloepper J. W.* Plant growth-promoting rhizobacteria as biological control agents // in Soil microbial ecology-applications in agricultural and environmental management. — Metting F. B., Jr. (ed.). — N.Y.: Marcel Dekker, 1993. — P. 255–274.
- Liu Y., Wu L., Baddeley J. A., Watson C. A.* Models of biological nitrogen fixation of legumes. A review // Agronomy for Sustainable Development. — Springer Verlag / EDP Sciences / INRA, 2011. — Vol. 31 (1). — P. 155–172. — [ff10.1051/agro/2010008ff.fhal-00930470f](https://doi.org/10.1051/agro/2010008ff.fhal-00930470f)
- Margalef R.* Perspectives in ecological theory. — Chicago: Univ. Chicago Press, 1968. — 112 p.
- Roose T., Keyes S. D., Daly K. R., Carminati A., Otten W., Vetterlein D., Peth S.* Challenges in imaging and predictive modeling of rhizosphere processes // Plant Soil. — 2016. — Vol. 407. — P. 9–38.
- Scott E. M. et al.* A mathematical model for dispersal of bacterial inoculants colonizing the wheat rhizosphere // Soil Biol. Biochem. — 1995. — Vol. 27, No. 10. — P. 1307–1318.
- Smith P., Smith J. U., Powlson D. S. et al.* A comparison of the performance of nine soil organic matter models using datasets from seven long-term experiments // Geoderma. — 1997. — Vol. 81. — P. 153–225.
- Tack J., Barkley A., Nalley L. L.* Warming effects on US wheat yields // Proceedings of the National Academy of Sciences. — Jun 2015. — Vol. 112 (22). — P. 6931–6936. — DOI: 10.1073/pnas.1415181112
- Wagner G. J.* Accumulation of Cadmium in Crop Plants and Its Consequences to Human Health // Advances in Agronomy. — 1993. — Vol. 51. — P. 173–212. — [http://dx.doi.org/10.1016/S0065-2113\(08\)60593-3](http://dx.doi.org/10.1016/S0065-2113(08)60593-3)

