

УДК: 519.7

## Моделирование структуры сложной системы на основе оценивания меры взаимодействия подсистем

С. Н. Чуканов

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Омский филиал,  
Россия, 644043, Омск, ул. Певцова, д. 13

E-mail: ch\_sn@mail.ru

*Получено 06.04.2020, после доработки — 09.05.2020.  
Принято к публикации 15.05.2020.*

В работе рассматривается использование определения меры взаимодействия между каналами при выборе конфигурации структуры системы управления сложными динамическими объектами. Приведены основные методы определения меры взаимодействия подсистем сложных систем управления на основе методов RGA (Relative Gain Array), Dynamic RGA, НИА (Hankel Interaction Index Array), РМ (Participation matrix). Задача проектирования структуры управления традиционно делится на выбор каналов ввода-вывода и выбор конфигурации управления. При выборе конфигурации управления простые конфигурации более предпочтительны, так как просты при проектировании, обслуживании и более устойчивы к сбоям в работе. Однако сложные конфигурации обеспечивают создание системы управления с более высокой эффективностью. Процессы в больших динамических объектах характеризуются высокой степенью взаимодействия между переменными процесса. Выбор структуры управления заключается в определении того, какие динамические соединения следует использовать для разработки системы управления. Когда структура выбрана, соединения могут быть использованы для конфигурирования системы управления. Для больших систем предлагается для выбора структуры управления предварительно группировать компоненты векторов входных и выходных сигналов исполнительных органов и чувствительных элементов в наборы, в которых количество переменных существенно уменьшается. Приводится количественная оценка децентрализации системы управления на основе минимизации суммы недиагональных элементов матрицы РМ. Приведен пример оценки меры взаимодействия компонент сильно связанных подсистем и меры взаимодействия компонент слабосвязанных подсистем. Дана количественная оценка последствий пренебрежения взаимодействием компонент слабосвязанных подсистем. Рассмотрено построение взвешенного графа для визуализации взаимодействия подсистем сложной системы. В работе предложен метод формирования грамиана управляемости вектором выходных сигналов, инвариантный к преобразованиям вектора состояния. Приведен пример декомпозиции системы стабилизации компонент вектора угловой скорости летательного аппарата. Оценивание мер взаимного влияния процессов в каналах систем управления позволяет повысить надежность функционирования систем при учете использования аналитической избыточности информации с различных приборов, что позволяет снизить массовые и габаритные характеристики систем, а также потребление энергии. Методы оценивания меры взаимодействия процессов в подсистемах систем управления могут быть использованы при проектировании сложных систем, например систем управления движением, систем ориентации и стабилизации летательных аппаратов.

Ключевые слова: сложная система, мера взаимодействия, декомпозиция системы, инвариантность к преобразованиям вектора состояния

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проекты №№ 18-07-00526 и 18-08-01284, и при поддержке программы фундаментальных научных исследований СО РАН № 1.5.1, проект № 0314-2019-0020.

UDC: 519.7

## Modeling the structure of a complex system based on estimation of the measure of interaction of subsystems

S. N. Chukanov

Sobolev Institute of Mathematics of the Siberian Branch of RAS, Omsk branch,  
13 Pevtsova st., Omsk, 644043, Russia

E-mail: ch\_sn@mail.ru

*Received 06.04.2020, after completion — 09.05.2020.  
Accepted for publication 15.05.2020.*

The using of determining the measure of interaction between channels when choosing the configuration structure of a control system for complex dynamic objects is considered in the work. The main methods for determining the measure of interaction between subsystems of complex control systems based on the methods RGA (Relative Gain Array), Dynamic RGA, HIIA (Hankel Interaction Index Array), PM (Participation matrix) are presented. When choosing a control configuration, simple configurations are preferable, as they are simple in design, maintenance and more resistant to failures. However, complex configurations provide higher performance control systems. Processes in large dynamic objects are characterized by a high degree of interaction between process variables. For the design of the control structure interaction measures are used, namely, the selection of the control structure and the decision on the configuration of the controller. The choice of control structure is to determine which dynamic connections should be used to design the controller. When a structure is selected, connections can be used to configure the controller. For large systems, it is proposed to pre-group the components of the vectors of input and output signals of the actuators and sensitive elements into sets in which the number of variables decreases significantly in order to select a control structure. A quantitative estimation of the decentralization of the control system based on minimizing the sum of the off-diagonal elements of the PM matrix is given. An example of estimation the measure of interaction between components of strong coupled subsystems and the measure of interaction between components of weak coupled subsystems is given. A quantitative estimation is given of neglecting the interaction of components of weak coupled subsystems. The construction of a weighted graph for visualizing the interaction of the subsystems of a complex system is considered. A method for the formation of the controllability gramian on the vector of output signals that is invariant to state vector transformations is proposed in the paper. An example of the decomposition of the stabilization system of the components of the flying vehicle angular velocity vector is given. The estimation of measures of the mutual influence of processes in the channels of control systems makes it possible to increase the reliability of the systems when accounting for the use of analytical redundancy of information from various devices, which reduces the mass and energy consumption. Methods for assessing measures of the interaction of processes in subsystems of control systems can be used in the design of complex systems, for example, motion control systems, orientation and stabilization systems of vehicles.

Keywords: complex system, measure of interaction, system decomposition, invariance to state vector transformations

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2020, vol. 12, no. 4, pp. 707–719 (Russian).

The research is supported by the Russian Foundation for Basic Research, projects Nos. 18-07-00526 and 18-08-01284, and supported by the Basic Research Program of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences No. I.5.1, Project No. 0314-2019-0020.

## 1. Введение

Процессы в больших динамических объектах характеризуются высокой степенью взаимодействия между переменными процесса. При проектировании структуры управления, а именно при выборе структуры управления и принятии решения о конфигурации контроллера, используются меры взаимодействия между каналами системы управления. Одной из задач при выборе структуры управления является определение того, какие динамические соединения следует использовать для разработки контроллера. Когда структура выбрана, соединения могут быть использованы для конфигурирования системы управления.

Задача проектирования структуры управления обычно делится на выбор каналов ввода-вывода (векторов входных сигналов чувствительных элементов и выходных сигналов исполнительных органов) и выбор конфигурации управления. При выборе конфигурации управления простые конфигурации более предпочтительны, так как они просты при проектировании, обслуживании и более устойчивы к сбоям в работе. Однако сложные конфигурации обеспечивают СУ с более высокой производительностью.

В работе рассматривается использование определения меры взаимодействия между каналами при выборе конфигурации структуры системы управления сложными динамическими объектами. Приведены основные методы определения меры взаимодействия подсистем сложных систем управления на основе методов RGA (Relative Gain Array) [Bristol, 1966], Dynamic RGA [Castano, 2015], НИА (Hankel Interaction Index Array) [Witcher, 1977; Salgado, 2004], РМ (Participation matrix) [Halvarsson, 2010; Kumar, 2012].

В работе предлагается для больших систем при выборе структуры управления предварительно группировать компоненты векторов входных и выходных сигналов исполнительных органов и чувствительных элементов в наборы, в которых количество переменных существенно уменьшается. Приводится количественная оценка децентрализации системы управления на основе минимизации суммы недиагональных элементов матрицы РМ. Приведены пример оценки меры взаимодействия компонент сильно связанных подсистем и меры взаимодействия компонент слабосвязанных подсистем. Дана количественная оценка пренебрежения взаимодействием компонент слабосвязанных подсистем. Рассмотрено построение взвешенного графа взаимодействия подсистем сложной системы.

Показано, что метод формирования грамиана управляемости вектором выходных сигналов инвариантен к преобразованиям вектора состояния без наложения ограничений на структуру системы.

Приведен пример декомпозиции системы стабилизации компонент вектора угловой скорости летательного аппарата [Раушенбах, 1974]. Методы оценивания меры взаимодействия процессов в подсистемах систем управления могут быть использованы при проектировании сложных систем, например систем управления движением, систем ориентации и стабилизации летательных аппаратов и т. д. [Чуканов, 2018]. Количественный учет взаимодействия каналов сложной системы управления позволяет сформировать искусственную взаимосвязь движений объекта [Ткаченко, 2014], что приводит к повышению надежности функционирования системы при учете использования аналитической избыточности информации с различных приборов и, следовательно, снижению массовых и габаритных характеристик систем.

## 2. Формирование грамианов

Рассмотрим устойчивую непрерывную линейную LTI систему с входным вектором (управления)  $u(t) \in \mathbb{R}^p$ , выходным вектором  $y(t) \in \mathbb{R}^p$  и вектором состояния  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad y(t) = Cx(t), \quad (1)$$

где  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ . Соответствующая матричная передаточная функция:  $G(s) = [G_{ij}(s)]$ ,  $i, j = 1, \dots, p$ . Система с дискретным временем может быть представлена в виде

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t), \quad y(t) = Cx(t). \quad (2)$$

Соответствующая матричная передаточная функция дискретной системы обозначается как  $G(z) = [G_{ij}(z)]$ ,  $i, j = 1, \dots, p$ . Системные матрицы с непрерывным временем (так и системные матрицы с дискретным временем) обозначаются как  $(A, B, C, 0)$ , где  $B = [b_1 \dots b_p]$ ,  $C^T = [c_1^T \dots c_p^T]$ ,  $b_j$ ,  $j = 1, \dots, p$  —  $j$ -й вектор-столбец матрицы  $B$ ;  $c_i$ ,  $i = 1, \dots, p$  —  $i$ -я вектор-строка матрицы  $C$ .

Устойчивая непрерывная ММО-система имеет матричное представление в пространстве состояний  $(A, B, C, 0)$ . Грамиан управляемости  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  и грамиан наблюдаемости  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  являются симметричными неотрицательно определенными матрицами, которые удовлетворяют уравнениям Ляпунова:

$$AP + PA^T + BB^T = 0, \quad (3)$$

$$A^T Q + QA + C^T C = 0. \quad (4)$$

Матрицы  $P$ ,  $Q$  могут быть также определены интегрированием выражений

$$P = \int_0^{\infty} e^{At} BB^T e^{A^T t} dt, \quad (5)$$

$$Q = \int_0^{\infty} e^{A^T t} C^T C e^{At} dt. \quad (6)$$

Соответствующие грамианы  $P$ ,  $Q$  для систем с дискретным временем определяются соотношениями  $P - A \cdot P \cdot A^T - B \cdot B^T = 0$ ,  $Q - A^T \cdot Q \cdot A - C^T \cdot C = 0$ .

Грамиан управляемости может быть определен использованием функции Matlab:  $Wc = \text{gram}(\text{sys}, 'c')$ ; грамиан наблюдаемости может быть определен использованием функции Matlab:  $Wc = \text{gram}(\text{sys}, 'o')$ , где  $\text{sys11} = \text{ss}(A, B, C, 0)$ .

С ММО-системой  $(A, B, C, 0)$  можно связать множество SISO-систем, каждая из которых имеет один вход  $u_j$ ,  $j = 1, \dots, p$ , один выход  $y_j$ ,  $i = 1, \dots, p$ , и модель пространства состояний, заданную матрицами  $(A, b_j, c_i, 0)$  с грамианами  $P_j$ ,  $Q_i$ , удовлетворяющими соотношениям  $AP_j + P_j A^T + b_j b_j^T = 0$ ,  $A^T Q_i + Q_i A + c_i^T c_i = 0$ , с  $G_{ij}(s)$  — передаточной функцией минимальной реализации элементарной системы с входом  $u_j$  и выходом  $y_j$ .

Найдем оптимальное управление  $u(t)$ ,  $t \in (-\infty, 0)$ , при котором состояние устойчивой системы  $(A, B, C, 0)$  переводится из начала координат в заданное нормализованное состояние  $x_0$ ;  $\|x_0\| = 1$ , т. е. решим задачу

$$\begin{aligned} \min_{u \in L_2(-\infty, 0)} J(u) &= \min_{u \in L_2(-\infty, 0)} \int_{-\infty}^0 u(t)^T u(t) dt; \\ \text{subject to } x(0) &= x_0; \quad \|x_0\| = 1. \end{aligned} \quad (7)$$

Требуемое оптимальное управление  $u^o(t)$  задается формулой  $u^o(t) = Be^{-At}P^{-1}x_o \Rightarrow \Rightarrow J(u^o) = x_o^T P^{-1}x_o$ , где грамиан  $P$  определяется из соотношения (3). В выражении (7) минимизируется средний модуль вектора управления на всем интервале управления. Значение оптимального функционала  $J(u)$  является малым для нормированного  $x_o \in \mathbb{R}^n$  тогда и только тогда, когда все собственные значения  $P$  велики.

Предположим, что  $x(0) = x_o$ ,  $\|x_o\| = 1$  и  $u(t) = 0 \quad \forall t \geq 0$ . Тогда

$$\int_0^{\infty} y^T(t)y(t) dt = x_o^T \left( \underbrace{\int_0^{\infty} e^{At} C^T C e^{At} dt}_Q \right) x_o = x_o^T Q x_o,$$

где грамиан  $Q$  определяется из соотношения (4). Таким образом, нормированный вектор  $x_o \in \mathbb{R}^n$  будет наблюдаемым из  $y(t)$  тогда и только тогда, когда все собственные значения  $Q$  большие.

### 3. Декомпозиция грамианов

Сформируем уравнения Ляпунова для грамиана наблюдаемости (3) для всех элементарных SISO-систем и сложим эти уравнения. В результате получаем уравнение Ляпунова для грамиана  $P$  MIMO-системы. Эта же процедура применяется также для грамиана наблюдаемости  $Q$

с учетом декомпозиции:  $BB^T = \sum_{j=1}^p b_j b_j^T$ ,  $C^T C = \sum_{i=1}^p c_i^T c_i$ .

Пусть  $P_j$  и  $Q_i$  — грамианы управляемости и наблюдаемости для элементарной SISO-системы  $(A, b_j, c_i, 0)$ . Тогда грамианы управляемости и наблюдаемости системы  $(A, B, C, 0)$  определяются выражением  $P = \sum_{j=1}^p P_j$ ,  $Q = \sum_{i=1}^p Q_i$ . Произведение грамианов  $PQ$  можно представить

в виде

$$PQ = \left( \sum_{j=1}^p P_j \right) \left( \sum_{i=1}^p Q_i \right) = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p P_j Q_i.$$

Если  $\{P_i Q_j \ll \max(P_i Q_i, P_j Q_j)\} \wedge \{P_j Q_i \ll \max(P_i Q_i, P_j Q_j)\}$ ,  $i \neq j$ , то каналы  $i$  и  $j$  имеют относительно слабую связь.

### 4. Меры взаимодействия процессов в подсистемах сложной системы управления

*Индекс RGA (Relative Gain Array)* [Bristol, 1966]. Статический индекс взаимодействия RGA для объекта с квадратичной матричной передаточной функцией  $G$  задается формулой  $\Lambda(G) = G(0) \circ G(0)^{-T}$ , где символ операции  $\circ$  обозначает поэлементное умножение Адамара. Элемент  $\Lambda_{ij}$  является частным между коэффициентом усиления установившегося состоя-

ния  $G_{ij}(0)$  в контуре между входом  $j$  и выходом  $i$ , когда все остальные контуры разомкнуты, и коэффициентом усиления стационарного состояния  $\hat{G}_{ij}(0)$  в том же контуре, когда все другие контуры замкнуты. Если взаимодействие между контурами отсутствует, усиление между входом  $u_j$  и выходом  $y_i$  останется неизменным, когда другие контуры замкнуты, поэтому относительное усиление  $\Lambda_{ij}(0) = \frac{G_{ij}}{\hat{G}_{ij}} = 1$ . С другой стороны, если в системе существует контурное взаимодействие, то  $G_{ij}$  и  $\hat{G}_{ij}$  будут различаться, что приведет к относительному усилению  $\Lambda_{ij}(0) \neq 1$ . Позже было предложен индекс DRGA (dynamic RGA [Witcher, 1977]):  $\Lambda(G(j\omega)) = G(j\omega) \circ G(j\omega)^{-T}$ .

*Управляемость вектором выходных сигналов.* В практических задачах управления важно иметь возможность контролировать вектор выходных сигналов, а не вектор состояния. Определим модель как объект с управляемым выходным вектором (ОС — Output Controllability) на интервале  $t \in [t_0, t_f]$ , если для заданных  $t_0$  и  $t_f$  любой конечный выходной вектор  $y(t_f)$  может быть достигнут из произвольного начального  $y(t_0)$ . Это верно тогда и только тогда, когда грамиан  $P_{oc}(t_0, t_f) = \int_{t_0}^{t_f} H_y(t_f, \tau) H_y^T(t_f, \tau) d\tau$  является несингулярным, где  $H_y(t_f, \tau)$  — матрица импульсного отклика при  $t > \tau$ . Для устойчивых ЛТИ-объектов с  $t_0 = 0$ :  $H_y(t) = Ce^{At}B$ , грамиан  $P_{oc}$  преобразуется в ОС-грамиан

$$P_{oc} = \int_0^{\infty} Ce^{A\tau} BB^T e^{A^T \tau} C^T d\tau = CPC^T. \quad (8)$$

Покажем, что в отличие от грамиана управляемости состояния  $P$  грамиан  $P_{oc}$  не зависит от выбранной реализации пространства состояний. Преобразуем вектор состояния  $x(t)$  в вектор  $z(t) = S \cdot x(t)$ ,  $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Тогда объект может быть описан как

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= SAS^{-1}z(t) + SBu(t), \\ y(t) &= CS^{-1}z(t). \end{aligned}$$

Для новой реализации грамиан управляемости  $P'_{oc}$  равен

$$P'_{oc} = \int_0^{\infty} CS^{-1} e^{SAS^{-1}t} SBB^T S^T e^{S^{-T}A^T S^T t} S^{-T} C^T dt = CPC^T = P_{oc}, \quad (9)$$

так как  $S^{-1} e^{SAS^{-1}t} S = S^{-1} \left[ I + \sum_{k=1}^{\infty} (SAS^{-1}t)^k \right] S = I + \sum_{k=1}^{\infty} (At)^k = e^{At}$  и  $S^T e^{S^{-T}A^T S^T t} S^{-T} = e^{A^T t}$ , где

$I \in \mathbb{R}^{n \times n}$  — единичная матрица.

*Индекс HIA (Hankel Interaction Index Array).* Определим системы HSV (Hankel singular values) с грамианами  $P$ ,  $Q$  выражением  $\sigma_H^{(i)} = \sqrt{\lambda_i}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , где  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  — упорядоченные собственные значения произведения  $PQ$ :  $\sigma_H^{(1)} \geq \sigma_H^{(2)} \geq \dots \geq \sigma_H^{(n)} \geq 0$ . Ганкелева норма системы с передаточной функцией  $G$  определяется как  $\|G\|_H = \sigma_H^{(1)} = \sqrt{\lambda_{\max}(PQ)}$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Эта мера

является инвариантной по отношению к реализации в пространстве состояний ( $P, Q$  зависят от выбранной реализации) и поэтому хорошо подходит в качестве комбинированной совместной меры управляемости и наблюдаемости. Число ненулевых HSV  $r$  соответствует размерности подпространства управляемости и наблюдаемости  $S_{co}$ .

Устойчивая система MIMO  $(A, B, C, 0)$  может быть декомпозирована на подсистемы SISO  $(A, b_j, c_i, 0)$  с одним входом  $u_j$  и одним выходом  $y_i$  каждая, где  $b_j$  —  $j$ -й столбец в матрице  $B$ ,  $c_i$  —  $i$ -я строка в матрице  $C$ . Грамианы управляемости и наблюдаемости для полной системы будут суммой соответствующих грамианов для подсистем  $P = \sum_{j=1}^n P_j, Q = \sum_{i=1}^n Q_i$ , где  $P_j$  и  $Q_i$  —

грамианы управляемости и наблюдаемости соответственно для подсистемы  $(A, b_j, c_i, 0)$ . Если норма Ганкеля рассчитывается для каждой фундаментальной подсистемы и размещается в матрице  $\tilde{\Sigma}_H: [\tilde{\Sigma}_H]_{ij} = \|G_{ij}\|_H$ , то эту матрицу можно использовать в качестве меры взаимодействия.

Нормализованной версией является НПА (Hankel Interaction Index Array):

$$[\Sigma_H]_{ij} = \frac{\|G_{ij}\|_H}{\sum_{kl} \|G_{kl}\|_H}, \quad \sum_{kl} [\Sigma_H]_{ij} = 1.$$

Чем больше элемент  $[\Sigma_H]_{ij}$ , тем больше влияние соответствующего входного сигнала на конкретный выходной сигнал. Необходимо найти простейшую структуру управления, которая дает сумму, максимально приближенную к единице.

*Мера взаимодействия  $\Sigma_2$ .* В работе [Castano, 2015] предложено использование меры взаимодействия  $\Sigma_2$ , похожей на НПА, но с нормой Ганкеля, замененной нормой  $\mathcal{H}_2$ :

$$[\Sigma_2]_{ij} = \frac{\|G_{ij}\|_2}{\sum_{kl} \|G_{kl}\|_2}.$$

Норма  $\mathcal{H}_2$  для устойчивой системы с передаточной функцией  $G(s)$  задается соотношением  $\|G\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{tr}(G_H(j\omega)G(j\omega)) d\omega}$ . Используя соотношение Парсеваля,

$$\text{вышеприведенное уравнение можно выразить как } \|G(s)\|_2 = \|g(t)\|_2 = \sqrt{\int_0^{\infty} \text{tr}(g^T(\tau)g(\tau)) d\tau},$$

где  $g(t)$  — матрица импульсной характеристики системы. Следовательно, норма  $\mathcal{H}_2$  может быть интерпретирована как мера энергии импульсного отклика. Рассмотрим устойчивую систему непрерывного времени  $(A, B, C, 0)$  с грамианом управляемости  $P$ , грамианом наблюдаемости  $Q$  и матрицей импульсного отклика  $g(t) = Ce^{At}B \cdot \text{Heaviside}(t)$ . Тогда норму  $\mathcal{H}_2$  можно рассчитать по формуле  $\|G\|_2 = \sqrt{\text{tr}(B^TQB)} = \sqrt{\text{tr}(CPC^T)}$ . Для SISO-подсистемы  $(A, b_j, c_i, 0)$   $\text{trace}(CPC^T) =$

$= c_i P_j c_i^T = b_j^T Q_i b_j$ , следовательно, можно ввести меру взаимодействия  $\Sigma_2$ :

$$[\Sigma_2]_{ij} = \frac{\|G_{ij}\|_2}{\sum_{kl} \|G_{kl}\|_2} = \frac{\sqrt{c_i P_j c_i^T}}{\sum_{kl} \sqrt{c_k P_l c_k^T}}, \quad \sum_{i,j} [\Sigma_2]_{ij} = 1.$$

*Индекс РМ (participation matrix).* Собственные значения суммы произведений  $P_j Q_i$  в общем случае не равны сумме собственных значений каждого слагаемого. След  $\text{trace}[P_j Q_i]$  является суммой квадратов HSV-подсистемы с входом  $u_j$  и выходом  $y_i$ . Информация о мере взаимодействия различных подсистем может быть сформирована в матрице РМ (participation matrix):  $\Phi = [\phi_{ij}] \in \mathbb{R}^{p \times p}$ , элементы которой определяются формулой

$$\phi_{ij} = \frac{\text{trace}[P_j Q_i]}{\text{trace}[PQ]}, \quad (10)$$

причем  $0 \leq \phi_{ij} < 1$ ,  $\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \phi_{ij} = 1$ .

## 5. Примеры моделирования структуры сложной системы

### 5.1. Пример построения матрицы РМ МИМО-системы

Рассмотрим МИМО-систему, состоящую из SISO-подсистем, которые могут быть представлены в пространстве состояний матрицами, приведенными в таблице 1.

Соответствующие передаточные функции приведены в таблице 2.

Следы матриц  $P_{oc}$  для различных пар  $u_j - y_i$  системы управления приведены в таблице 3.

Таблица 1. Матрицы МИМО-системы в пространстве состояний

|       | $j=1$  | $j=2$   | $j=3$  |
|-------|--|---|--|
| $i=1$ | $A_{11} = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -3 & -4 \end{pmatrix},$<br>$b_{11} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, c_{11} = (5 \ 0)$ | $A_{21} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix},$<br>$b_{21} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, c_{21} = (0 \ 1)$ | $A_{31} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix},$<br>$b_{31} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, c_{31} = (-1 \ 0)$ |
| $i=2$ | $A_{12} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix},$<br>$b_{12} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, c_{12} = (0 \ 1)$  | $A_{22} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix},$<br>$b_{22} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, c_{22} = (0 \ 1)$ | $A_{32} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix},$<br>$b_{32} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, c_{32} = (0 \ -1)$  |
| $i=3$ | $A_{13} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix},$<br>$b_{13} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, c_{13} = (1 \ 0)$ | $A_{23} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix},$<br>$b_{23} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, c_{23} = (0 \ 1)$ | $A_{33} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix},$<br>$b_{33} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}, c_{33} = (2 \ 0)$  |

Таблица 2. Передаточные функции SISO-систем

|       | $j=1$                                   | $j=2$                                | $j=3$                                |
|-------|---|--------------------------------------|--------------------------------------|
| $i=1$ | $G_{11}(s) = \frac{15s+140}{s^2+8s+28}$ | $G_{12}(s) = \frac{1}{s^2+4s+3}$     | $G_{13}(s) = \frac{1}{s^2+2s+3}$     |
| $i=2$ | $G_{21}(s) = \frac{4}{s^2+5s+2}$        | $G_{22}(s) = \frac{-9s+3}{s^2+2s+7}$ | $G_{23}(s) = \frac{2}{s^2+6s+4}$     |
| $i=3$ | $G_{31}(s) = \frac{2}{s^2+6s+4}$        | $G_{32}(s) = \frac{2}{s^2+6s+4}$     | $G_{33}(s) = \frac{-4s+4}{s^2+2s+3}$ |

Таблица 3. Следы матриц  $P_{oc}$  для различных пар  $u_j - y_i$

|         | $j = 1$                             | $j = 2$                              | $j = 3$                              |
|---------|-------------------------------------|--------------------------------------|--------------------------------------|
| $i = 1$ | $\text{trace}(P_{11}Q_{11}) = 8.79$ | $\text{trace}(P_{12}Q_{12}) = 0.038$ | $\text{trace}(P_{13}Q_{13}) = 0.07$  |
| $i = 2$ | $\text{trace}(P_{12}Q_{12}) = 1.16$ | $\text{trace}(P_{22}Q_{22}) = 11.30$ | $\text{trace}(P_{23}Q_{23}) = 0.077$ |
| $i = 3$ | $\text{trace}(P_{13}Q_{13}) = 0.07$ | $\text{trace}(P_{32}Q_{32}) = 0.077$ | $\text{trace}(P_{33}Q_{33}) = 4.45$  |

$$\text{trace}(PQ) = \sum_i \sum_j \text{trace}(P_{ij}Q_{ij}) = 26.032.$$

Компоненты матрицы PM (Participation matrix)  $\phi_{ij} = \frac{\text{trace}[P_j Q_i]}{\text{trace}[PQ]}$  равны

$$\Phi = [\phi_{ji}] = \begin{pmatrix} 0.338 & 0.001 & 0.003 \\ 0.045 & 0.434 & 0.003 \\ 0.003 & 0.003 & 0.171 \end{pmatrix}.$$

Для выбора пар  $u_j - y_i$ , обеспечивающих управление всеми компонентами вектора выходных сигналов, будем минимизировать значение суммы компонент матрицы PM:  $\sum_j \sum_j \phi_{ij} \rightarrow \min, i, j \notin \Omega_{sel}$ , где  $\Omega_{sel}$  — множество выбранных пар  $u_j - y_i$ .

Из таблицы следует, что необходимо выбрать пары  $u_1 - y_1$ ,  $u_2 - y_2$  и  $u_3 - y_3$ , представляющие диагональные элементы матрицы PM, причем  $\phi_{11} + \phi_{22} + \phi_{33} = 0.943$ . На остальные пары, не входящие в множество диагональных элементов, приходится  $\phi_{12} + \phi_{13} + \phi_{21} + \phi_{23} + \phi_{31} + \phi_{32} = 0.057$ .

**5.2. Формирование ориентированного графа взаимодействия процессов в каналах ММО-системы**

Рассмотрим взаимодействие процессов в каналах системы управления, обусловленное компонентами матрицы  $A$  динамического объекта. Взаимодействие компонента вектора состояния  $x_j$  с компонентом  $x_i$  будем рассматривать для системы  $(A, b_j, c_i, 0)$ , в которой вектор-столбец  $b_j$  имеет нулевые компоненты и единицу в позиции  $j$ , вектор-строка  $c_i$  имеет нулевые компоненты и единицу в позиции  $i$ .

Пусть матрица  $A$  системы равна  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ -1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ .

В таблице 4 приведены значения следов  $\text{trace}(P_{ji}Q_{ji})$  пар  $u_j - y_i$ .

Таблица 4. Значения следов  $\text{trace}(P_{ji}Q_{ji})$

|                     | $b_1 = (1 \ 0 \ 0)^T$ | $b_2 = (0 \ 1 \ 0)^T$ | $b_3 = (0 \ 0 \ 1)^T$ |
|---------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| $c_1 = (1 \ 0 \ 0)$ | 0.0227                | 0.0086                | 0.022                 |
| $c_2 = (0 \ 1 \ 0)$ | 0.0269                | 0.2896                | 0.1776                |
| $c_3 = (0 \ 0 \ 1)$ | 0.0301                | 0.1396                | 0.0863                |

Результаты определения элементов матрицы РМ:  $\Phi = [\phi_{ji}] = \begin{pmatrix} 0.0283 & 0.0107 & 0.0274 \\ 0.0335 & 0.3605 & 0.2211 \\ 0.0375 & 0.1738 & 0.1074 \end{pmatrix}$

представлены в форме ориентированного графа на рис. 1, из которого следует некоммутативность  $\phi_{ji} \neq \phi_{ij}$ ,  $i \neq j$ .

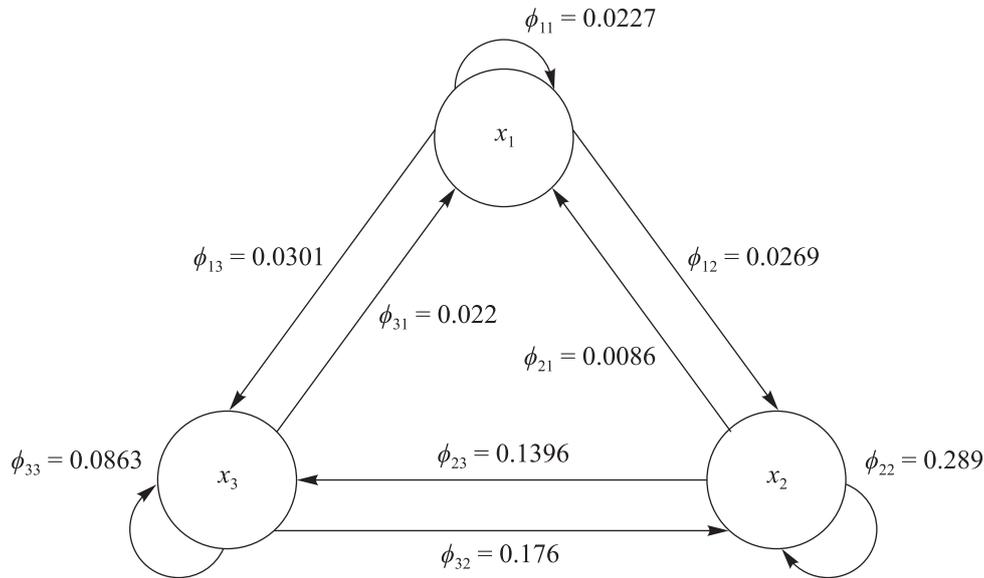


Рис. 1. Взвешенный ориентированный граф компонент  $\phi_{ij}$ ,  $i, j = 1, \dots, 3$

### 5.3. Пример декомпозиции МИМО-системы

Рассмотрим декомпозицию МИМО-системы на сильно-связанные подсистемы. Пусть матрица  $A$  МИМО системы равна:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 3 & -0.1 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & -0.1 \\ -0.1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & -0.1 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Декомпозируем эту систему на подсистемы с парами вход/выход:  $Sys_1: u_1 - y_1, u_1 - y_2, u_2 - y_1, u_2 - y_2$ ;  $Sys_2: u_3 - y_3, u_3 - y_4, u_4 - y_3, u_4 - y_4$ ;  $Sys_3: u_1 - y_3, u_1 - y_4, u_2 - y_3, u_2 - y_4$ ;  $Sys_4: u_3 - y_1, u_3 - y_2, u_4 - y_1, u_4 - y_2$ . Результаты определения компоненты матрицы РМ  $\phi_{ji}$  приведены в таблице 5.

Таблица 5. Компоненты матрицы РМ подсистем  $Sys_1 \dots Sys_4$

|  |  |
|--|--|
| $Sys_1: \phi_{11} + \phi_{12} + \phi_{21} + \phi_{22} = 0.475$ | $Sys_4: \phi_{31} + \phi_{32} + \phi_{41} + \phi_{42} = 0.025$ |
| $Sys_3: \phi_{13} + \phi_{14} + \phi_{23} + \phi_{24} = 0.025$ | $Sys_2: \phi_{33} + \phi_{34} + \phi_{43} + \phi_{44} = 0.475$ |

Так как каналы подсистем  $Sys_1$  и  $Sys_2$  имеют суммарные компоненты матрицы РМ, значительно превосходящие суммарные компоненты матрицы РМ подсистем  $Sys_3$  и  $Sys_4$ , то подсистемы  $Sys_1$  и  $Sys_2$  можно считать сильно связанными.

**5.4. Модель системы стабилизации вектора угловой скорости твердого тела**

Рассмотрим систему стабилизации компонент вектора угловой скорости летательного аппарата, рассматриваемого как твердое тело (ТТ), к требуемым значениям:  $(\hat{\omega}_x \ \hat{\omega}_y \ \hat{\omega}_z)^T = (0 \ 0 \ \omega_{z0})^T$ . Запишем уравнение движения твердого тела [Раушенбах, 1974]:

$$\begin{aligned} J_x \dot{\omega}_x &= (J_y - J_z) \omega_z \omega_y + M_x, \\ J_y \dot{\omega}_y &= (J_z - J_x) \omega_z \omega_x + M_y, \\ J_z \dot{\omega}_z &= (J_x - J_y) \omega_x \omega_y + M_z, \end{aligned} \tag{11}$$

где  $(\omega_x \ \omega_y \ \omega_z)^T$  — вектор угловой скорости ТТ относительно системы координат, связанной с ТТ, измеряемый чувствительными элементами;  $J_x = J_{xx}$ ,  $J_y = J_{yy}$ ,  $J_z = J_{zz}$  — главные компоненты тензора инерции ТТ (остальные принимаются равными нулю);  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $M_z$  — компоненты вектора управляющего момента сил, формируемого исполнительными органами.

Предположим, что исполнительные органы формируют управляющие моменты сил для стабилизации компонент вектора угловой скорости  $M_x = -k_\omega \cdot \omega_x$ ,  $M_y = -k_\omega \cdot \omega_y$ ,  $M_z = -k_\omega \cdot (\omega_z - \omega_{z0})$ , где  $\omega_{z0}$  — требуемое значение компоненты  $\omega_z$ . Будем считать, что значения  $|\omega_x|$ ,  $|\omega_y|$ ,  $|\omega_x - \omega_{z0}|$  малы и членами  $\omega_x \omega_y$ ,  $(\omega_z - \omega_{z0}) \omega_y$ ,  $(\omega_z - \omega_{z0}) \omega_x$  можно пренебречь. Тогда уравнения вращательного движения будут иметь вид

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_x &= \alpha_x \cdot \omega_{z0} \cdot \omega_y - k_{\omega x} \cdot \omega_x, \\ \dot{\omega}_y &= \alpha_y \cdot \omega_{z0} \cdot \omega_x - k_{\omega y} \cdot \omega_y, \\ \dot{\omega}_z &= -k_{\omega z} \cdot (\omega_z - \omega_{z0}). \end{aligned}$$

Выберем вектор состояния системы  $(x_1 \ x_2 \ x_3)^T = (\omega_x \ \omega_y \ \omega_z - \omega_{z0})^T$ . При значениях  $J_x = 60$ ,  $J_y = 80$ ,  $J_z = 100$ ,  $\omega_{z0} = 0.2$ ,  $k_\omega = 100$  получим динамическую матрицу

$$A = \begin{pmatrix} -1.67 & -0.067 & 0 \\ -0.1 & -1.25 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Рассчитаем компоненты матрицы РМ. Результаты приведены в таблице 6.

Таблица 6. Компоненты матрицы РМ системы стабилизации

|                     | $b_1 = (1 \ 0 \ 0)^T$ | $b_2 = (0 \ 1 \ 0)^T$ | $b_3 = (0 \ 0 \ 1)^T$ |
|---------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| $c_1 = (1 \ 0 \ 0)$ | 0.179                 | 0.0017                | 0                     |
| $c_2 = (0 \ 1 \ 0)$ | 0.0017                | 0.32                  | 0                     |
| $c_3 = (0 \ 0 \ 1)$ | 0                     | 0                     | 0.497                 |

Следовательно, система декомпозируется на невзаимодействующие подсистемы  $(A, b_j, c_i)$ , которые имеют матричное представление  $u_1 - y_1, u_2 - y_2, u_1 - y_2, u_2 - y_1$ :

$$\left( \left( \begin{pmatrix} -1.67 & -0.067 & 0 \\ -0.1 & -1.25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, (1 \ 1 \ 0) \right) \sim \left( \left( \begin{pmatrix} -1.67 & -0.067 \\ -0.1 & -1.25 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, (1 \ 1) \right), \right.$$

и  $u_3 - y_3$ :

$$\left( \left( \begin{pmatrix} -1.67 & -0.067 & 0 \\ -0.1 & -1.25 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, (0 \ 0 \ 1) \right) \sim ((1), (1), (1)).$$

## 6. Заключение

В работе рассмотрен метод выбора конфигурации структуры системы управления при управлении сложными динамическими объектами. Приведены основные методы определения меры взаимодействия подсистем сложных систем управления на основе методов RGA (Relative Gain Array), Dynamic RGA, НИА (Hankel Interaction Index Array), РМ (Participation matrix).

Для больших систем предлагается для выбора структуры управления предварительно группировать компоненты векторов входных и выходных сигналов исполнительных органов и чувствительных элементов в наборы, в которых количество переменных существенно уменьшается. Приводится количественная оценка децентрализации системы управления на основе минимизации суммы недиагональных элементов матрицы РМ. Приведен пример оценки меры взаимодействия компонент сильносвязанных подсистем и меры взаимодействия компонент слабо связанных подсистем. Дана количественная оценка пренебрежения взаимодействием компонент слабосвязанных подсистем. В работе рассмотрено построение взвешенного графа взаимодействия подсистем сложной системы.

Предложен метод формирования грамиана управляемости вектором выходных сигналов, инвариантный к преобразованиям вектора состояния. Приведен пример декомпозиции системы стабилизации компонент вектора угловой скорости летательного аппарата.

Оценивание мер взаимного влияния процессов в каналах систем управления позволяет повысить надежность функционирования систем использованием аналитической избыточности информации с различных приборов, а не мажоритарным резервированием приборов, что позволяет снизить массовые и габаритные характеристики систем, а также потребление энергии. Методы оценивания меры взаимодействия процессов в подсистемах систем управления могут быть использованы при проектировании сложных систем, например систем управления движением, систем ориентации и стабилизации летательных аппаратов и т. д.

## Список литературы (References)

Раушенбах Б. В., Токарь Е. Н. Управление ориентацией космических аппаратов. — М.: Наука, 1974.

*Raushenbakh B. V., Tokar' E. N. Upravlenie orientatsiei kosmicheskikh apparatov [Spacecraft Attitude Control]. — Moscow: Nauka, 1974 (in Russian).*

Ткаченко В. А. Ориентация КА относительно орбитальной системы координат с помощью регулятора, осуществляющего искусственную взаимосвязь движений // Космонавтика и ракетостроение. — 2014. — Т. 79, № 6. — С. 59–66.

*Tkachenko V. A. Orientatsiya KA otnositel'no orbital'noi sistemy koordinat s pomoshch'yu regul'yatora, osushchestvlyayushchego iskusstvennyuyu vzaimosvyaz' dvizhenii [Spacecraft Orientation Relative to the Orbital Coordinate System Using a Controller Performing Artificial Relationship Movements] // Kosmonavtika i raketostroyeniye [Cosmonautics and Rocket Engineering]. — 2014. — Vol. 79, No. 6. — P. 59–66 (in Russian).*

- Чуканов С. Н.* Количественное оценивание управляемости модели сложных динамических сетей // Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика. — 2018. — № 2. — С. 22–27.
- Chukanov S. N.* Kolichestvennoe otsenivanie upravlyaemosti modeli slozhnykh dinamicheskikh setei [Quantitative estimation of controllability of complex dynamic networks model] // Pribory i sistemy. Upravlenie, kontrol', diagnostika [Instruments and Systems: Monitoring, Control, and Diagnostics]. — 2018. — No. 2. — P. 22–27 (in Russian).
- Bristol E. H.* On a new measure of interaction for multi-variable process control // IEEE Transactions on Automatic Control. — 1966. — Vol. AC-11, No. 1. — P. 133–134.
- Castano M., Birk W., Asplund P.* Control configuration selection for integrating processes using graphs // IEEE Conference on Control Applications (CCA). — 2015. — P. 1606–1611.
- Halvarsson B.* Interaction Analysis in Multivariable Control Systems Applications to Bioreactors for Nitrogen Removal. Phd Thesis. — Uppsala University, Sweden. — 2010.
- Kumar V., Rao V. S., Chidambaram M.* Centralized PI controllers for interacting multivariable processes by synthesis method // ISA Transactions. — 2012. — Vol. 51. — P. 400–409.
- Salgado M. E., Conley A.* MIMO interaction measure and controller structure selection // International Journal of Control. — 2004. — Vol. 77, No. 4. — P. 367–383.
- Witcher M. E., McAvoy T. J.* Interacting control systems: steady state and dynamic measurement of interaction // ISA Transactions. — 1977. — Vol. 16. — P. 35–41.

