

УДК: 519.6; 539.3

Релаксационные колебания и устойчивость тонких оболочек

В. А. Грачев, Ю. С. Найштут^а

Архитектурно-строительная академия Самарского государственного технического университета,
Россия, 443001, г. Самара, ул. Молодогвардейская, д. 194

E-mail: ^а neustadt99@mail.ru

Получено 11.11.2019, после доработки — 16.04.2020.

Принято к публикации 27.04.2020.

В работе изучаются возможности прогнозирования потери устойчивости тонких цилиндрических оболочек неразрушающими методами на стадии эксплуатации. Исследуются пологие оболочки, изготовленные из высокопрочных материалов. Для таких конструктивных решений характерны перемещения поверхностей, превосходящие толщины элементов. В рассматриваемых оболочках могут генерироваться релаксационные колебания значительной амплитуды даже при сравнительно невысоком уровне внутренних напряжений. Произведено упрощенное механико-математическое моделирование задачи о колебаниях цилиндрической оболочки, сводящее проблему к обыкновенному дифференциальному уравнению. При создании модели существенно использованы исследования многих авторов по изучению геометрии поверхности, образующейся после потери устойчивости. Нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение колеблющейся оболочки совпадает с хорошо изученным уравнением Дуффинга. Важно, что для тонких оболочек в уравнении Дуффинга появляется малый параметр перед второй производной по времени. Последнее обстоятельство дает возможность провести детальный анализ выведенного уравнения и описать релаксационные колебания — физическое явление, присущее только тонким высокопрочным оболочкам.

Показано, что гармонические колебания оболочки вокруг положения равновесия и устойчивые релаксационные колебания определяются точкой бифуркации решений уравнения Дуффинга. Эта точка является первой в схеме Фейгенбаума по преобразованию устойчивых периодических движений в динамический хаос. Произведены вычисления амплитуды и периода релаксационных колебаний в зависимости от физических свойств и уровня внутренних напряжений в оболочке. Рассмотрены два случая нагружения: сжатие вдоль образующих и внешнее давление.

Отмечено, что если внешние силы изменяются в течение времени по гармоническому закону, то периодическое колебание оболочки (нелинейный резонанс) состоит из отрезков медленного и скачкообразного движений. Этот факт, наряду со знанием амплитуды и частоты колеблющейся оболочки, позволяет предложить экспериментальную установку для прогноза потери устойчивости оболочки неразрушающим методом. В качестве критерия безопасности принято следующее требование: максимальные комбинации нагрузок не должны вызывать перемещения, превышающие заданные пределы. Получена формула, оценивающая запас устойчивости (коэффициент безопасности) конструкции по результатам экспериментальных измерений.

Ключевые слова: упругие оболочки, потеря устойчивости, релаксационные колебания, осциллятор Дуффинга, коэффициент безопасности, экспериментальный прогноз потери устойчивости

UDC: 519.6; 539.3

Relaxation oscillations and buckling of thin shells

V. A. Grachev, Yu. S. Neustadt^a

Academy of Building and Architecture, Samara State Technical University,
194 Molodogvardeiskaya st., Samara, 443001, Russia

E-mail: ^a neustadt99@mail.ru

*Received 11.11.2019, after completion — 16.04.2020.
Accepted for publication 27.04.2020.*

The paper reviews possibilities to predict buckling of thin cylindrical shells with non-destructive techniques during operation. It studies shallow shells made of high strength materials. Such structures are known for surface displacements exceeding the thickness of the elements. In the explored shells relaxation oscillations of significant amplitude can be generated even under relatively low internal stresses. The problem of the cylindrical shell oscillation is mechanically and mathematically modeled in a simplified form by conversion into an ordinary differential equation. To create the model, the researches of many authors were used who studied the geometry of the surface formed after buckling (postbuckling behavior). The nonlinear ordinary differential equation for the oscillating shell matches the well-known Duffing equation. It is important that there is a small parameter before the second time derivative in the Duffing equation. The latter circumstance enables making a detailed analysis of the obtained equation and describing the physical phenomena — relaxation oscillations — that are unique to thin high-strength shells.

It is shown that harmonic oscillations of the shell around the equilibrium position and stable relaxation oscillations are defined by the bifurcation point of the solutions to the Duffing equation. This is the first point in the Feigenbaum sequence to convert the stable periodic motions into dynamic chaos. The amplitude and the period of relaxation oscillations are calculated based on the physical properties and the level of internal stresses within the shell. Two cases of loading are reviewed: compression along generating elements and external pressure.

It is highlighted that if external forces vary in time according to the harmonic law, the periodic oscillation of the shell (nonlinear resonance) is a combination of slow and stick-slip movements. Since the amplitude and the frequency of the oscillations are known, this fact enables proposing an experimental facility for prediction of the shell buckling with non-destructive techniques. The following requirement is set as a safety factor: maximum load combinations must not cause displacements exceeding specified limits. Based on the results of the experimental measurements a formula is obtained to estimate safety against buckling (safety factor) of the structure.

Keywords: elastic shells, buckling, relaxation oscillations, Duffing oscillator, safety factor, experimental buckling prediction

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2020, vol. 12, no. 4, pp. 807–820 (Russian).

1. Введение

В последние 30–40 лет наметился прогресс в изучении нелинейных колебаний тонких упругих оболочек. В частности, удалось понять происхождение и распространение уединенных волн (солитонов) [Киселев, Долгих, 2013; Samsonov, 2011; Guo et al., 2018]. Показано, что для очень тонких оболочек солитоны с амплитудой порядка толщины оболочки прослеживаются при меньших нагрузках чем те, которым отвечает бифуркация форм равновесия (статический критерий устойчивости в малом [Вольмир, 1963]). Существенно, что амплитуды уединенных волн зависят не только от возмущений геометрии оболочек в процессе их эксплуатации, но и от уровня внутренних напряжений, созданных внешними силами в ходе предварительного нагружения.

Движения солитонов порождают две критические ситуации. Во-первых, возможно появление больших деформаций, вызывающих пластическое течение материала оболочки. Во-вторых, характер движения солитонов может оказаться неустойчивым. Обе ситуации являются недопустимыми. Но наступление аварийных ситуаций для очень тонких оболочек происходит постепенно, амплитуды волн растут монотонно, начиная с небольших величин. Процесс перехода в аварийное состояние может быть смоделирован во время безопасной эксплуатации. Другими словами, в процессе эксплуатации появляется возможность прогнозирования предельного нагружения, приводящего к потере общей устойчивости.

Задача оценки безопасности эксплуатируемых оболочек с использованием методов неразрушающего контроля становится в настоящее время особенно актуальной в связи с появлением новых высокопрочных материалов. Масса (толщина) оболочек уменьшается, возрастает опасность потери устойчивости. Развитие компьютерной техники обнаружило численное несоответствие между теоретическим предсказанием коэффициента безопасности тонких оболочек, полученным на основе теории пологих оболочек Кармана–Тзяна [Hutchinson, 2016], и проведенными недавно опытами [Viro et al., 2017]. Все новые эксперименты не противоречат выводам нелинейной динамической трехмерной теории упругости. Поэтому существует необходимость прогнозирования поведения оболочек, находящихся в условиях, близких к состоянию потери устойчивости.

В работе [Neustadt, Grachev, 2019] предложена опытная проверка выводов трехмерной динамической теории: во время эксплуатации в оболочке генерируется уединенная волна небольшой амплитуды. Измеряя наблюдаемую амплитуду, можно оценить деформации оболочки при увеличении внешних сил и таким образом спрогнозировать предельную нагрузку.

Измерение амплитуд солитонных волн представляет, однако, непростую техническую задачу, так как даже при малых отклонениях (нелинейных колебаниях порядка толщин оболочки) возможно появление недопустимых пластических деформаций материала. В этой связи представляет интерес поиск физических закономерностей, сопровождающих нелинейные процессы, которые происходят в оболочках и предшествуют потере устойчивости.

Динамическое поведение тонких металлических оболочек описывается дифференциальными уравнениями с малым коэффициентом при старших производных по времени. Это свойство позволяет предполагать существование низкочастотных релаксационных колебаний в период эксплуатации оболочек. Поэтому обоснование высказанного предположения — возникновение и развитие релаксационных нелинейных колебаний и их связь с прогнозом устойчивости оболочек — является предметом дальнейшего изучения.

2. Постановка задачи о радиальных колебаниях аксиально нагруженных цилиндрических оболочек

Рассмотрим радиальные колебания цилиндра бесконечной длины, радиусом R и толщиной h , нагруженного аксиальной медленно возрастающей нагрузкой. Оболочка предполагается тонкостенной. Для металлических оболочек параметр тонкостенности $\varepsilon = R/h$ обычно не менее 100.

Как установлено [Киселев, Долгих, 2013], до определенного момента образующие цилиндра остаются прямолинейными. Рост напряжений σ до величины $\sigma_{кр}$ делает образующие криволинейными (рис. 1), и это обозначает потерю устойчивости оболочки.

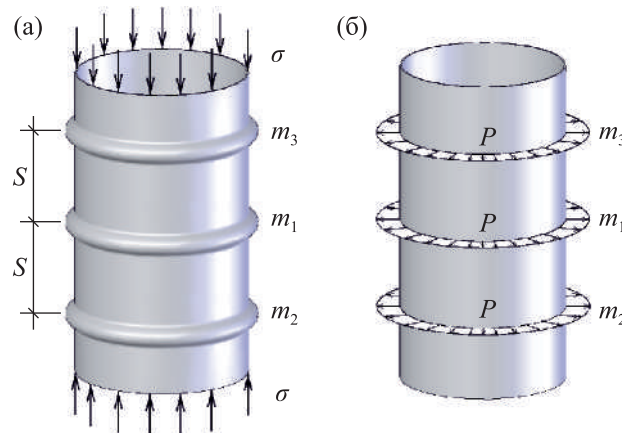


Рис. 1. а) Возможная форма потери устойчивости при аксиальном нагружении оболочки бесконечной длины нормальными напряжениями σ . Вблизи окружностей, проходящих через точки m_1, m_2, m_3 , образуются зоны локального выпучивания, расстояние между которыми S определяется длиной краевого эффекта от действия распределенных сил P , показанных справа на схеме б)

Важно отметить, что в первом приближении форма деформирования криволинейной образующей близка к той, которая получается, если загружать оболочку горизонтальными силами, приложенными вдоль кругов, перпендикулярных к оси цилиндра [Вольмир, 1963]. Увеличенная форма фрагмента деформированной образующей показана на рис. 2.

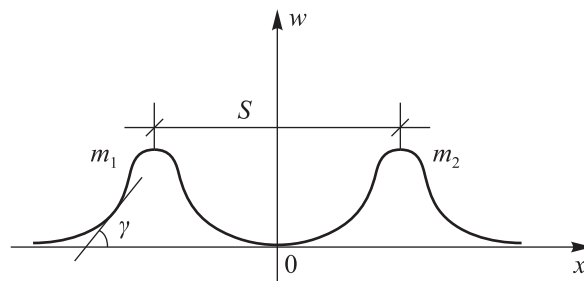


Рис. 2. Фрагмент деформированной образующей цилиндра, показанного на рис. 1. Начальное положение образующей совпадает с осью x , функция w — радиальное отклонение точек образующей после приложения сил, угол наклона касательной к оси x обозначен буквой γ

Если учесть, что при нагружении по схеме (рис. 1, б) напряженно-деформированное состояние оболочки характеризуется ярко выраженным краевым эффектом [Timoshenko, Voinovskiy-Krieger, 1989], а действие сил P прослеживается только на расстояниях порядка $S = (Rh)^{1/2}$ от линии их приложения, то для тонких оболочек величина S — это 5–8 толщин оболочки.

Выражения для радиальных смещений w имеют вид

$$w = \frac{P}{8\beta^3 D} \varphi(\beta x), \quad \frac{dw}{dx} = -\frac{P\zeta(\beta x)}{4\beta^2 D}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \quad \beta^4 = \frac{3(1-\nu^2)}{R^2 h^2}. \quad (1)$$

Здесь E, ν — модуль Юнга и коэффициент Пуассона, а формулы для $\varphi(x)$ и $\zeta(x)$ явно записываются через комбинации гармонических и гиперболических функций.

Чтобы получить качественное описание потери устойчивости, рассмотрим упрощенную одномерную модель. Сосредоточим массу полосы шириной единица (вдоль окружности)

в местах максимальных прогибов образующей (точки m_1 и m_2 на рис. 1). То есть предполагаем, что в точках m_1 и m_2 находятся тела с массой $M = \rho h S$ (где ρ — плотность материала оболочки, а $S = \pi/\beta$ — удвоенная длина краевого эффекта [Тимошенко, Войновский-Кригер, § 115]), и эти тела-точки совершают колебания в направлении нормали к поверхности оболочки. При малых по сравнению с толщиной оболочки отклонениях w проекция внутренних сил на нормаль составит $P_0 = 8\beta^3 D w$. Силы P_0 должны находиться в равновесии с силами инерции $I = M d^2 w/dt^2$ и «повернутыми» на угол γ нормальными силами $N = 2\sigma h \sin(\gamma)$. Уравнение движения масс M имеет вид

$$M \frac{d^2 w}{dt^2} + P_0 - N = 0. \quad (2)$$

По формулам (1)

$$\frac{dw}{dx} = \frac{2\beta w \zeta(\beta x)}{\varphi(\beta x)}. \quad (3)$$

Усредним выражение $\zeta(\beta x)/\varphi(\beta x)$ на интервале S , пользуясь формулами входящих функций для бесконечного цилиндра:

$$\zeta(\beta x) = e^{-\beta x} \sin(\beta x), \quad \varphi(\beta x) = e^{-\beta x} (\sin(\beta x) + \cos(\beta x)).$$

Получается для средней величины $p = \zeta(\beta x)/\varphi(\beta x)$ выражение

$$p = \frac{2\beta}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2\beta}} \frac{\sin(\beta x) dx}{\sin(\beta x) + \cos(\beta x)} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin z dz}{\sin z + \cos z} = \frac{2}{\pi} \left(\frac{z}{2} - \frac{1}{2} \ln(\sin z + \cos z) \right) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{2}.$$

Формула (3) преобразуется к виду

$$\frac{dw}{dx} \approx \beta w.$$

Окончательно упрощенное уравнение радиальных колебаний оболочки принимает форму

$$M \frac{d^2 w}{dt^2} + 8\beta^3 D w - 2\sigma h \beta w = 0. \quad (4)$$

Уравнению (4) отвечают гармонические колебания с частотой

$$\omega^2 = (8\beta^3 D - 2\sigma h \beta) / M. \quad (5)$$

Следовательно, критическое значение напряжений $\sigma_{кр}$, соответствующее величине $\omega = 0$, выразится формулой

$$\sigma_{кр} = \frac{Eh}{R\sqrt{3(1-\nu^2)}}. \quad (6)$$

Соотношение (5) при $\nu = 0.3$ приводит к приближенному значению $\sigma_{кр} = 0.6Eh/R$, и это хорошо известное верхнее критическое значение нагрузки.

Откажемся от предположения, что $\sin(\gamma) = \operatorname{tg}(\gamma) = dw/dx$, учтем в выражениях P_0 и N нелинейные члены, содержащие производную dw/dx в третьей степени. В работе [Кабриц и др., 2002] произведены приближенные вычисления нелинейных перемещений по схеме рис. 1, б. Установлено, что кривые «нагрузка–перемещение» вначале близки к линейному закону, но при $w_1 > h$ заметно отклоняются от прямой (рис. 3). Приближенно уравнение кривой «нагрузка–перемещение» можно принять в форме $P_1 = P_0 - c\beta^3 w^3$, где положительная константа c зависит

от упругих свойств материала и относительной толщины βh . Необходимо сказать, что определение числа c сопряжено с вычислительными сложностями, не найдено строгого доказательства того, что всегда существует интервал $w_1 < w < w_0$, для которого $P_1 = P_0 - c\beta^3 w^3$. Поэтому существование положительной константы c следует считать дополнительным предположением, основанным на численных экспериментах. Проверка сделанного допущения может быть частично проведена по результатам натуральных экспериментов. Одна из таких возможностей изложена в § 4.

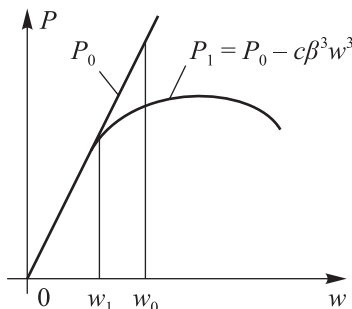


Рис. 3. Кривые «нагрузка (P) – перемещение (w)» точек m_1, m_2, m_3 по рис. 1, вычисленные в рамках линейной (P_0) и нелинейной (P_1) теорий оболочек

В силу соотношений

$$\sin \beta = \frac{dw/dx}{\sqrt{1 + (dw/dx)^2}}, \quad 1/\sqrt{1 + \left(\frac{dw}{dx}\right)^2} \cong 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{dw}{dx}\right)^2$$

получим уточненное значение

$$N = 2\sigma h \left(\frac{dw}{dx} - \frac{1}{2}\left(\frac{dw}{dx}\right)^3 \right).$$

Дополнительно примем во внимание затухание колебаний, введя диссипативный член $\alpha dw/dt$, в котором коэффициент $\alpha = \alpha_0 S > 0$, где α_0 — коэффициент динамической вязкости материала оболочки. Тогда вместо (4) будет

$$M \frac{d^2 w}{dt^2} + \alpha \frac{dw}{dt} + (8\beta^3 D - 2\beta\sigma h)w - (c - \sigma h)\beta^3 w^3 = 0. \quad (7)$$

Записанное равенство — это известное уравнение Дуффинга, которое подробно изучено в [Ланда, 1997; Kovacic, Brennan, 2011].

Если $(c - \sigma h) < 0$, то вследствие $(4D\beta^3 - \sigma\beta h) > 0$ перемещения w — периодические колебания вокруг положения равновесия $w = 0$. Так ведет себя маятник, когда масса M колеблется на жесткой пружине. Период колебаний $T = 2\pi/\omega$ растет с ростом начального отклонения и может быть явно выражен через эллиптический интеграл первого рода $K(x)$ [Мойсеев, 1981]. Критическое значение $\sigma_{\text{крн}}$ получается при $\omega = 0$ (как и в гармоническом случае). Численно $\sigma_{\text{крн}}$ незначительно отличаются от найденных по формуле (6). Картина колебаний на фазовой плоскости аналогична устойчивым малым колебаниям маятника вблизи положения равновесия.

Неравенство $(c - \sigma h) > 0$ меняет ситуацию вблизи точки w_0 (рис. 3). На фазовом портрете образуются точки бифуркации решений уравнения (7). Появляются (даже при малых отклонениях от гармонических движений) устойчивые циклы колебаний более низкой частоты по сравнению с найденной по формуле (5). Такие колебания называют релаксационными. В следующем разделе приводим анализ решений уравнения (7), следуя книге [Мищенко, Розов, 1975].

3. Движение цилиндрических оболочек при отклонениях от положения равновесия, сравнимых с толщиной

Перепишем уравнение (7) в виде системы первого порядка:

$$\begin{aligned} M \frac{dx}{dt} &= -\alpha x - (8\beta^3 D - 2\beta\sigma h)w + (c - \sigma h)\beta^3 w^3, \\ \frac{dw}{dt} &= x. \end{aligned} \quad (8)$$

Учтем, что для тонких металлических оболочек параметр $m = M/8\beta^3 D$ — малое число порядка $(10^{-4} - 10^{-5}) \text{ с}^2$, физически означающее величину, пропорциональную квадрату периода собственных колебаний. На фазовой плоскости (рис. 4) кривая $\Gamma(x, w)$ —

$$\alpha x + (8\beta^3 D - 2\beta\sigma h)w - (c - \sigma h)\beta^3 w^3 = 0$$

— разделяет области, где составляющая вектора скорости $v = dx/dt$ вдоль оси x меняет знак. Так как число m — малый параметр, то значение v велико везде, кроме точек, близких к четырехугольнику $BCDE$. Поэтому движение по кривой $\Gamma(x, w)$ происходит значительно медленнее, чем перемещение между любыми точками на фазовой плоскости.

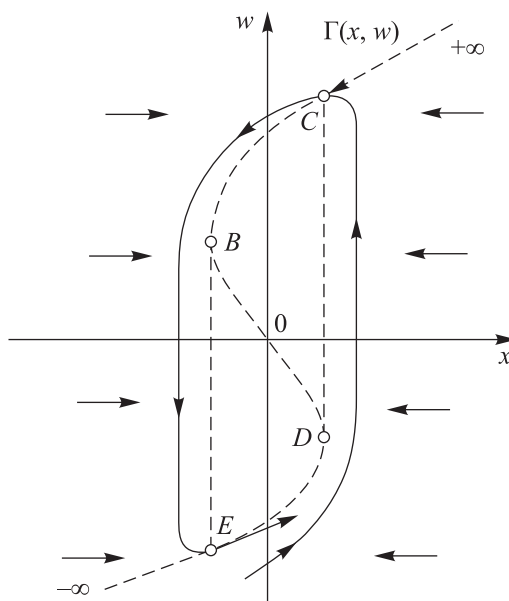


Рис. 4. Отображение на фазовой плоскости радиальных релаксационных колебаний: перемещения w точки m_1 (рис. 1) вдоль четырехугольника $CBED$ со скоростью $x = dw/dt$. Движение по кривой $\Gamma(x, w)$ разрывное: на участках CB и ED — медленное, а на BE и DC — скачкообразное

Следовательно, либо движение, начавшееся в некоторой точке плоскости, притягивается к отрезку BD , и происходят гармонические колебания вблизи положения равновесия $x = w = 0$, либо, двигаясь вначале по кривой $\Gamma(x, w)$, попав в одну из точек B, D , траектория срывается с $\Gamma(x, w)$ и совершает релаксационные колебания по контуру $BCDE$.

Релаксационные колебания, возникшие первоначально при отклонениях оболочки от положения равновесия, характеризуются несколькими особенностями, которые могут оказаться полезными для прогноза устойчивости тонких упругих оболочек. Во-первых, характер периодических релаксационных движений отличается от гармонических колебаний: изменение амплитуды по времени происходит по графику рис. 5.

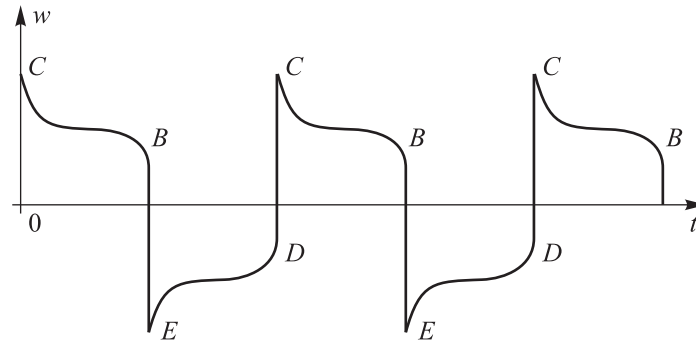


Рис. 5. Зависимость перемещений w точки m_1 (рис. 1) при релаксационных колебаниях от времени t . Точки C, B, E, D отвечают положениям на рис. 4, обозначенным теми же буквами

Участки медленного движения CB, ED чередуются с участками скачкообразного изменения скорости BE и DC . Кроме того, период релаксационных колебаний можно подсчитать по формуле

$$T = \oint_{CBED} \frac{dw}{x}. \quad (9)$$

Число T зависит от амплитуды w , и оно отличается от периода собственных колебаний оболочки, найденного по формуле (5).

Важно, что релаксационные колебания на тонких оболочках можно наблюдать при напряжениях ниже $\sigma_{кр}$. В этой связи интересно поведение оболочек при воздействии периодической нагрузки с амплитудой A и частотой $p = 2\pi/T$ (нелинейный резонанс). Установлено [Фейгенбаум, 1980], что с ростом A решения системы

$$M \frac{dx}{dt} + \alpha x + (8\beta^3 D - 2\beta\sigma h)w - (c - \sigma h)\beta^3 w^3 = A \cos(pt), \quad (10)$$

$$\frac{dw}{dt} = x$$

перестают быть единственными. Если при небольших значениях A_0 наблюдаются малые гармонические колебания, то при значениях $A_0 < A_1 < A_2 \dots < A_n$ происходит бифуркация функций w . Каждый раз удваивается период появления новых повторяющихся значений w_n . В итоге в динамической системе (10) разрушается первоначальное периодическое движение. В силу сходимости A_n к пределу A_∞ (отличному от бесконечности) за конечное время движение становится хаотичным. Числа A_n стремятся к A_∞ со скоростью геометрической прогрессии с постоянной Фейгенбаума $\delta = 4.669$.

Процесс перехода детерминированного движения в хаотичное становится очень наглядным, если переписать (10) в виде трех уравнений и рассмотреть 3D-моделирование процесса на основе численного анализа [Kanama, 2008]:

$$M \frac{dx}{dt} + \alpha x + (b - 2\sigma h)u - (c - \sigma h)u^3 = A \cos z, \quad (11)$$

$$\frac{du}{dt} = \beta x, \quad \frac{dz}{dt} = p.$$

В (11) введены следующие обозначения: $b = 8\beta^2 D$, $u = \beta w$.

Хаос устанавливается через несколько итераций благодаря быстрой сходимости A_n к A_∞ , но применительно к оболочкам достаточно обнаружить при A_1 существование релаксационных колебаний (устойчивого цикла периодических колебаний, отличного от гармонического), так

как в этом случае появляются большие перемещения (рис. 5), которые недопустимы при эксплуатации.

Следует отметить, что релаксационные колебания прослеживаются не только при аксиальном нагружении пологих цилиндрических оболочек. Например, пусть внешнее давление q порождает кольцевые напряжения $\sigma = qR/h$. Учтем, что при потере устойчивости кольцевое сечение приобретает радиальные смещения w , характерные для длинной оболочки, нагруженной одинаковыми радиальными силами, как показано на рис. 6. Особенность деформирования заключается в том, что функции w и dw/dt близки к соответствующим функциям шарнирно закрепленной прямолинейной балки длины L , а краевой эффект отсутствует.

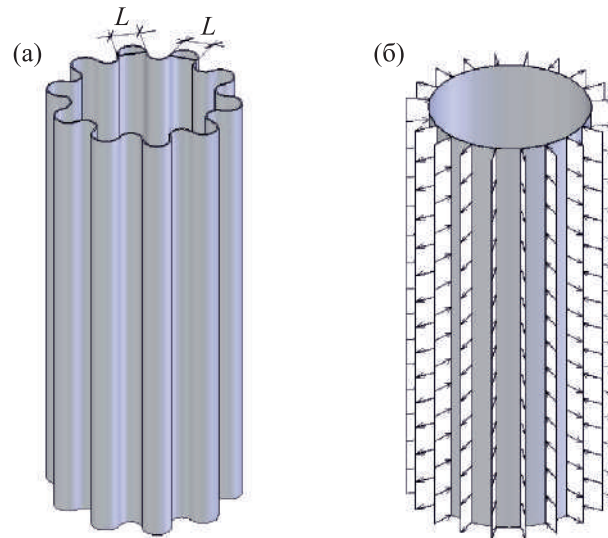


Рис. 6. Моделирование формы потери устойчивости цилиндрической оболочки при внешнем давлении: а) возможная форма потери устойчивости оболочки при нагружении внешним давлением, L — длина поперечных образующих складки; б) моделирование формы потери устойчивости оболочки путем воздействия локальными силами, приложенными нормально к поверхности вдоль образующих; расстояния между противоположно направленными силами равно L

Формулы типа (1) получаются на основе известных решений о деформировании цилиндрической оболочки локальными силами [Даревский, 1964, 1968].

Нелинейные поправки неоднократно оценивались численно [Doerich, Rotter, 2008], они позволяют определить коэффициент c на рис. 3. Не приводя подробных вычислений, запишем окончательный результат для аппроксимации в линейном приближении внутренних сил и углов поворота круговых сечений:

$$P_0 = 8\beta^3 Dw, \quad dw/dx = h\beta w/L. \quad (12)$$

Проведенный анализ показывает, что колебания сжатой цилиндрической оболочки описываются системой дифференциальных уравнений (11) с малым параметром при старшей производной. Эта система получена путем учета в уравнениях движения нелинейных членов, появляющихся при аппроксимации кривой «нагрузка–перемещение» до третьих степеней w . Если на оболочку действует вынуждающая сила $A \cos(pt)$, то при малых A оболочка совершает гармонические колебания с частотой p . Подберем частоту p , чтобы наблюдать релаксационные колебания (войдем в нелинейный резонанс) с небольшой амплитудой при действующей нагрузке σ .

Измерив амплитуду колебаний точек оболочки и зная частоту p , найдем коэффициент запаса (безопасности) по нагрузке из условия, чтобы максимальные перемещения w были допустимы при эксплуатации конструкции. В следующем параграфе изложена техническая реализация этого плана.

4. Экспериментальное определение критической нагрузки

На рис. 7 показана схема экспериментальной установки по прогнозированию потери устойчивости тонкой цилиндрической оболочки, нагруженной вдоль образующих. Материал оболочки имеет магнитную проводимость. К оболочке жестко крепится рамка с размерами: вдоль окружности $l_2 = \pi R/3$, по образующей $l_1 = 2\pi/\beta$. На рамке располагается электромагнитная катушка, которая генерирует нормальное давление на поверхность оболочки внутри рамки по формуле $A \cos(pt)$. Параметры A и p можно изменять, но так, чтобы суммарные внутренние напряжения оставались упругими: $s_{ij}s_{ij} \leq 2k^2$ (число k — предел текучести на сдвиг, s_{ij} — девиатор напряжений), а частота p не превосходила первую частоту собственных колебаний p_0 .

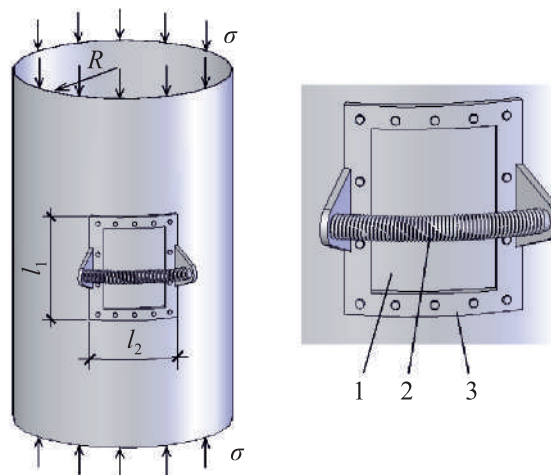


Рис. 7. Экспериментальная установка по прогнозированию запаса устойчивости оболочки радиусом R , находящейся под нагрузкой σ . Левый рисунок — схема установки измерительного оборудования с габаритами l_1 и l_2 на оболочку. Правый рисунок — детали измерительного блока: 1 — поверхность оболочки, на которой возбуждаются колебания, 2 — электромагнитная возбуждающая катушка, 3 — жесткая немагнитная рамка крепления катушки возбуждения

Включив ток в катушке, подберем резонансную частоту, близкую к полученной по формуле (9), и будем увеличивать интенсивность возбуждения A до тех пор, когда можно будет зафиксировать релаксационный характер колебаний.

Если увеличение A делает напряжения внутри оболочки неупругими, а релаксационные колебания не возникают, то потеря упругой устойчивости исключается и можно считать коэффициент безопасности бесконечным. Если же наблюдаются релаксационные колебания, сравнимые с отклонениями порядка толщины оболочки, то измеряются амплитуда и период колебаний оболочки при максимально допустимой во время эксплуатации интенсивности возбуждения A . Результаты измерений служат основой для дальнейших предсказаний. Дело в том, что входящие в систему (11) коэффициенты c и σ в момент испытаний известны с невысокой точностью. Поэтому первая задача состоит в том, чтобы уточнить эти параметры. Покажем, как их связать с измеренными амплитудой и частотой колебаний.

По рис. 4 из условия максимума функции

$$x = (b - 2\sigma h)u / \alpha - (c - \sigma h)u^3 / \alpha \quad (13)$$

в точке w_B найдем

$$u_B = \sqrt{\frac{b - 2\sigma h}{3(c - \sigma h)}}, \quad x_B = \frac{1}{\alpha}(u_B(b - 2\sigma h) - u_B^3(c - \sigma h)). \quad (14)$$

В формуле (14) и далее нижний индекс B, C, D, E обозначает значение функций u, w или x в соответствующей точке по рис. 4.

Знание x_B позволяет найти $u_E = -2u_B = -u_C$, поскольку u_E также является корнем уравнения (14).

Число u_E сравнивается с измеренной амплитудой (если известно точное значение σ). Если совпадение не обнаружено, следует уточнить величину c по первой формуле из (14). Если же точное значение σ достоверно не найдено, необходимо воспользоваться формулой для периода релаксационных колебаний (9). Вычисляется асимптотическая оценка T [Мищенко, Розов, 1975]:

$$T \approx 2 \int_B^C \frac{\alpha du}{(b - 2\sigma h)u - (c - \sigma h)u^3} = \frac{\alpha a}{c - \sigma h} \int_{u_B}^{u_C} \frac{du}{a + u} = \frac{\alpha a}{c - \sigma h} \ln \frac{a + 2u_B}{a + u_B}, \quad (15)$$

$$a^2 = \frac{b - 2\sigma h}{c - \sigma h}.$$

Формулы (14) и (15) при совместном решении относительно c и σ при измеренных T и u_B дают возможность определить коэффициент запаса устойчивости оболочки исходя из следующего требования: при нагрузке $k_s \sigma$ перемещение u_E становится предельно допустимым u_s .

Получается

$$k_s = \frac{b - V^2 c}{\sigma h (2 - V^2)}, \quad V^2 = \frac{3u_s^2}{4}. \quad (16)$$

5. Выводы

Поиск физических явлений, которые наблюдаются до потери устойчивости тонкостенных систем, показывает, что полномасштабному разрушению предшествуют не только гармонические колебания небольшой амплитуды, но и релаксационные колебания (нелинейный резонанс) конструкций. Последние обнаружены в упругих прочных оболочках, когда внутренние сжимающие напряжения ниже критических напряжений, найденных по линейной теории устойчивости.

Анализ нелинейной разрешающей системы уравнений для цилиндрической оболочки выявил аналогию с динамическим поведением осциллятора Дуффинга. В настоящей работе принята упрощенная математическая модель, сводящая механическую проблему к обыкновенному дифференциальному уравнению. Эта модель близка к построениям [Новожилов, 1948; Койтер, 1960], применяемым в тех задачах статической устойчивости, когда необходимо учитывать нелинейные эффекты. В результате удалось объяснить основные факты, подтвержденные известными экспериментами [Вольмир, 1963].

Современные исследования нелинейных задач устойчивости тонкостенных конструкций показывают, что двумерные нелинейные теории оболочек не могут объяснить всех фактов, сопутствующих этой проблеме [Ворович, 1980; Vovovich, 1999; Грачев, Найштут, 2018]. Основное препятствие состоит в том, что ни одна двумерная теория оболочек не может гарантировать единственность решения при загрузке конструкции малой нагрузкой. В то же время все эксперименты с тонкими оболочками свидетельствуют о том, что при малой нагрузке деформированная поверхность единственна. Единственность доказана лишь в рамках нелинейной трехмерной теории упругости. Но в динамической трехмерной теории упругости неизвестна теорема существования решений. Существование решений доказано в частных задачах с дополнительными ограничениями на поведение оболочек [Водопьянов, Молчанова, 2015; Miroshnikov, Tzavaras, 2012]. В этих условиях непосредственный расчет запаса устойчивости путем численного интегрирования нелинейных динамических уравнений трехмерной теории упругости связан с серьезными трудностями. Замена тонкой континуальной оболочки трехмерной ко-

нечномерной моделью порождает потерю точности даже при линейной постановке задачи. Поэтому в нелинейной постановке конечномерные 3D-схемы пока не получили развития, и преодоление возникших сложностей потребует значительных усилий в будущем. Далека от решения и задача поиска новых физических явлений, сопровождающих сравнимые с толщиной движения тонких оболочек. Видимо, проблема [Fermi et al., 1965] о существовании особых периодических движений в системе нелинейных осцилляторов близка к задаче поиска релаксационных колебаний в трехмерной теории упругости.

Экспериментальное изучение устойчивости тонких оболочек важно не только на стадии проектирования конструкций, но и во время их эксплуатации.

В работе [Thompson, 2015] предлагается оценивать безопасность эксплуатируемой конструкции путем статического нагружения оболочки дополнительной пробной «боковой» нагрузкой рис. 8. Опыт основан на том факте, что даже при незначительной величине силы Q увеличение напряжений σ вначале приводит к локальной потере устойчивости цилиндрической поверхности. Образуются вмятины — «хлопуны», граница которых обозначена буквой C .

Перемещение силы Q на расстояние q порождает потенциальную энергию деформации вмятины $W = Qq$. Дальнейший рост σ увеличивает габариты «хлопунов», а когда величина W достигает значения W_M (энергия Максвелла), происходит глобальная потеря устойчивости. Экспериментально найденные напряжения $\sigma = P_M$, соответствующие энергии W_M , названы нагрузкой Максвелла. Эти напряжения рекомендуется считать предельными (контролируемыми) при эксплуатации оболочек на том основании, что в процессе работы конструкции величина W может измеряться пробной нагрузкой: если испытание показывает $W > W_M$, то безопасность оболочки обеспечена. Если же при испытаниях обнаруживается, что $W < W_M$, то состояние конструкции признается аварийным.

Необходимо отметить, что описанный критерий эффективен только в том случае, если значительно различие в величинах P_M и нижней критической нагрузки P_L , отвечающей глобальному разрушению. Для тонких оболочек такое свойство еще предстоит доказать.

В этой связи предложенный в настоящей статье экспериментальный прием (рис. 7) по прогнозированию неразрушающим методом коэффициента безопасности тонкой оболочки, находящейся под нагрузкой, может оказаться полезным.

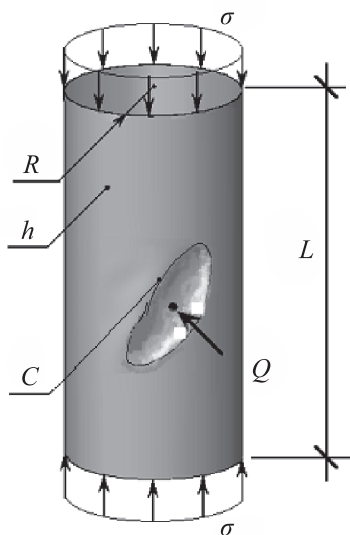


Рис. 8. Оценка чувствительности разрушения, полученная на основе пробного нагружения силой Q оболочки длины L , радиусом R и толщиной h , находящейся под эксплуатационной нагрузкой σ . Вычисляется энергия деформации $W = Qq$, которая накопилась в оболочке при перемещении силы Q на расстояние q при образовании локальной вмятины (контур которой обозначен буквой C). Число $W = Qq$ сравнивается с определенной в предварительных испытаниях образцов энергией Максвелла W_M . Нарушением безопасности при эксплуатации считается $W < W_M$

Список литературы (References)

- Вольмир А. С.* Устойчивость упругих систем. — М.: Физматгиз, 1963.
Volmir A. S. Ustoichivost uprugih sistem [Stability of Elastic Systems]. — Moscow: Fizmatgis, 1963 (in Russian)
- Водопьянов С. К., Молчанова А. О.* Вариационные задачи нелинейной теории упругости в некоторых классах отображений с конечным искажением // Доклады Академии наук. — 2015. — Т. 465, № 5. — С. 523–526.
Vodopianov S. K., Molchanova A. O. Variazionnyye problemy nelineinoi teorii uprugosti v opredelennykh klassakh funkzii s konechnym iskszheniem [Variational problems of nonlinear elasticity in certain classes of mappings with finite distortion] // Doklady Akademii nauk Rossii [Doklady RAS]. — 2015. — Vol. 465, No. 5. — P. 523–526 (in Russian).
- Ворович И. И.* Математические проблемы нелинейной теории пологих оболочек. — М.: Физматгиз, 1980.
Vorovich I. I. Matematicheskie problemi nelineinoi teorii pologih obolochek [Mathematical problems of shallow shells nonlinear theory]. — Moscow: Fizmatgis, 1980 (in Russian).
- Грачев В. А., Найштут Ю. С.* Задачи устойчивости тонких упругих оболочек // Компьютерные исследования и моделирование. — 2018. — Т. 10, № 6. — С. 775–787.
Grachev V. A., Neustadt Yu. S. Zadachi ustoichivosti tonkich uprugich obolochek [Buckling problems of thin elastic shells] // Computer research and modeling. — 2018. — Vol. 10, No. 6. — P. 775–787 (in Russian).
- Даревский В. М.* Определение перемещений и напряжений в цилиндрической оболочке при локальных нагрузках // Прочность и динамика авиационных двигателей: сборник. Вып. 1. — М.: Машиностроение, 1964. — С. 23–83.
Darevskii V. M. Opredelenie peremeschenii i napryazhenii v tsilindricheskoi oboblochke pri lokalnykh nagruzkah [Determination of displacements and stresses in a cylindrical shell at local loads] / Prochnost i dinamika aviaionnykh dvigateley: sbornik [Durability and dynamics of aircraft engines]. Vol. 1. — Moscow: Mashinery, 1964. — P. 23–83 (in Russian).
- Даревский В. М.* Оболочки под действием локальных нагрузок // Прочность, устойчивость, колебания: справочник / ред. И. А. Биргер, Я. Г. Пановко. Т. 2. — М.: Машиностроение, 1968. — С. 49–96.
Darevskii V. M. Obolochki pod deistviem lokalnykh nagruzkok [Shells under local loading] / Prochnost, ustoichivost, kolebaniya: spravochnik / red. I. A. Birger, Ya. G. Panovko [Durability, buckling, oscillations: handbook / eds. I. A. Birger, Ya. G. Panovko]. Vol. 2. — Moscow: Mashinery, 1968. — P. 49–96 (in Russian).
- Кабриц С. А., Михайловский Е. И., Товстик П. Е., Черных К. Ф., Шамина В. А.* Общая нелинейная теория упругих оболочек. — СПб.: Изд-во Санкт-Петербургского ун-та, 2002.
Kabritz S. A., Michailovskii E. I., Tovstik P. E., Chernykh K. F., Shamina V. F. Obschaya nelineinaya teoriya uprugih obolochek [General nonlinear theory of elastic shells]. — St. Petersburg: Sankt-Petersburg University Publishing, 2002 (in Russian).
- Киселев В. В., Долгих Д. В.* Нелинейно-упругие узоры из вмятин на поверхностях нагруженных пластин и оболочек. — М.: Физматлит, 2013.
Kiselev V. V., Dolgikh D. V. Nelineino-uprugie uzory na poverhnostyah nagruzhennykh plastin i obolochek [Nonlinear patterns of dents on surfaces of plates and shells under load]. — Moscow: Phizmatlit, 2013 (in Russian).
- Койтер В. Т.* Устойчивость и закритическое поведение упругих систем // Механика. Периодич. сб. пер. иностр. лит. — М.: ИЛ, 1960. — № 5. — С. 99–110.
Koiter W. Elastic Stability and Post Buckling Behavior in Nonlinear Problems // Proceedings of the Symposium on Nonlinear Problems, University of Wisconsin Press, Madison, 1963, pp. 257–275. (Original Russian paper: *Koiter W.* Ustoichivost i zakriticheskoe povedenie uprugih sistem // Mehanika. Sb. perev. inost. lit. — Moscow: IL, 1960. — No. 5. — P. 99–110.)
- Ланда П. С.* Нелинейные колебания и волны. — М.: Наука; Физматлит, 1997.
Landa P. S. Nelineinye kolebaniya i volny [Nonlinear oscillations and waves]. — Moscow: Nauka; Fizmatlit, 1997 (in Russian).
- Мищенко Е. Ф., Розов Н. Х.* Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания. — М.: Наука, 1975.
Mishchenko E. F., Rozov N. H. Differentsialnyye uravneniya s malym parametrom i relaksatsionnyye kolebaniya [Differential Equations with Small Parameters and Relaxation Oscillations]. — Moscow: Nauka, 1975 (in Russian).
- Моисеев Н. Н.* Асимптотические методы нелинейной механики. — М.: Наука, 1981.
Moissev N. N. Asimptoticheskiye metody nelineynoy mekhaniki [Asymptotic methods of nonlinear mechanics]. — Moscow: Nauka, 1981 (in Russian).

- Новожилов В. В.* Основы нелинейной теории упругости. — М.–Л.: Гостехиздат, 1948.
Novozhilov V. V. Osnovy nelineinoi teorii uprugosti [Foundations of the Nonlinear Theory of Elasticity]. — Moscow–Leningrad: Gostehizdat, 1948 (in Russian).
- Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С.* Пластинки и оболочки. — М.: Физматгиз, 1963.
Timoshenko S., Voinovsky-Krieger S. Theory of plates and shells. 2d ed. — New York: Mc Graw-Hill, 1959. (Russ. ed.: *Timoshenko S., Voinovsky-Krieger S.* Plastinki i obolochki. — Moscow: Fizmatgis, 1963.)
- Doerich C., Rotter J. M.* Behavior of Cylindrical Steel Shells Supported on Local Brackets // Journal of Structural Engineering. — 2008. — Vol. 134 (8). — P. 1269–1277.
- Feigenbaum M. J.* Universal Behavior in Nonlinear Systems // Los Alamos Science. — 1980. — Vol. 1, No. 1. — P. 4–27. Перевод Тиходеева С. Г. УФН, т. 141, № 2. С. 343–374.
- Fermi E., Pasta J., Ulam S.* Studies of nonlinear problems // Los-Alamos scientific report, LA-(1940, 1955). Collected works of Enrico Fermi, The University of Chicago Press. — Vol. 2. — P. 977–988 (Copyright 1965).
- Guo B., Pang X. F., Wang Y. F., Liu N.* Solitons. Berlin-Boston: Walter de Gruyter GmbH, 2018.
- Hutchinson J. W.* Buckling of spherical shells revisited // Proc. R. Soc. — 2016. — Vol. A 472 (2195), 20160577.
- Kanamaru T.* Duffing_oscillator. [Electronic resource]: http://scholarpedia.org/article/Duffing_oscillator doi:10.4249/scholarpedia.6327 (accessed: 22.10.2014).
- Kovacic I., Brennan M. J. (eds.)* The Duffing Equation: Nonlinear Oscillators and their Behaviour, Chichester: UK. Wiley & Sons, Ltd., 2011.
- Miroshnikov A., Tzavaras A. A.* Variational Approximation Scheme for Radial Polyconvex Elasticity That Preserves the Positivity of Jacobians // Comm. Math. Sciences. — 2012. — Vol. 10, No. 1. — P. 87–115.
- Neustadt Yu. S., Grachev V. A.* Buckling prognosis for thin elastic shallow shells // Zeitschrift für Angewandte Math. und Physik. — 2019. — Vol. 70 (4). — A.N. 113.
- Samsonov A. M.* Strain solitons in solids and How to Construct Them. — London – New York – Washington, DC: CHAPMAN & HALL/CRC Boca Raton, 2011.
- Thompson J. M. T.* Advances in Shell Buckling: Theory and Experiments // International Journal of Bifurcation and Chaos. — 2015. — Vol. 25, No. 1. — P. 1530001 (25 p.).
- Timoshenko S. P., Voinovsky-Krieger S.* Theory of plates and shells. — New York – London – Toronto: McGraw-Hill, 1989.
- Virovich I. I.* Nonlinear Theory of Shallow Shells. — New York: Springer-Verlag, 1999.
- Virovich I., Kreilos T., Schneider T. M., Rubinstein S. M.* Stability Landscape of Shell Buckling // Physical Review Letters. — 2017. — Vol. 119. — P. 224101 (5 p.).