

УДК: 532

Исследование моделей турбулентности для расчета сильно закрученного потока в резко расширяющемся канале

З. М. Маликов^а, Ф. Х. Назаров^б

Институт механики и сейсмостойкости сооружений имени М. Т. Уразбаева,
Узбекистан, 100125, г. Ташкент, ул. Дурмон йули, 33

E-mail: ^а malikov.z62@mail.ru, ^б farruxnazar@mail.ru.

Получено 29.05.2020, после доработки — 11.09.2020.

Принято к публикации 12.05.2021.

В настоящей работе проводится сравнение принципиально различных моделей турбулентности для расчета сильно закрученного потока в резко расширяющейся трубе. Данная задача имеет большое значение не только в практике, но и в теоретическом плане, потому что в таком течении возникает очень сложная анизотропная турбулентность с зонами рециркуляции и изучение протекающих процессов позволяет найти ответ на многие вопросы по турбулентности. Рассматриваемое течение хорошо изучено экспериментально. Поэтому она является очень сложной и интересной тестовой задачей для моделей турбулентности. В работе сравниваются численные результаты однопараметрической модели v_t -92, метода Рейнольдсовых напряжений SSG/LRR-RSM-w2012 и новой двухжидкостной модели. Эти модели очень сильно отличаются между собой, потому что в однопараметрической модели v_t -92 используется гипотеза Буссинеска, в модели SSG/LRR-RSM-w2012 для каждого напряжения записывается свое уравнение, а для новой двухжидкостной модели основой является совершенно иной подход к турбулентности. Особенностью подхода к турбулентности для новой двухжидкостной модели заключается в том, что он позволяет получить замкнутую систему уравнений. Сравнение этих моделей проводится не только по соответствию их результатов экспериментальным данным, но и по вычислительным ресурсам, расходуемым на численные реализации этих моделей. Поэтому в работе для всех моделей использована одинаковая методика для численного расчета турбулентного закрученного потока при числе Рейнольдса $Re = 3 \cdot 10^4$ и параметре закрутки $S_w = 0.6$. В работе показано, что новая двухжидкостная модель является эффективной для исследования турбулентных течений, так как имеет хорошую точность в описании сложных анизотропных турбулентных потоков и достаточно проста для численной реализации.

Ключевые слова: закрученные потоки, осредненные по Рейнольдсу уравнения Навье–Стокса, модель SSG/LRR-RSM-w2012, модель v_t -92, новая двухжидкостная модель, прогонка, SIMPLE

UDC: 532

Study of turbulence models for calculating a strongly swirling flow in an abrupt expanding channel

Z. M. Malikov^a, F. Kh. Nazarov^b

Institute of Mechanics and Seismic Stability of Structures named after M. T. Urazbaev,
33 Durmon yuli st., Tashkent, 100125, Uzbekistan

E-mail: ^a malikov.z62@mail.ru, ^b farruxnazar@mail.ru

Received 29.05.2020, after completion — 11.09.2020.

Accepted for publication 12.05.2021.

In this paper, compared fundamentally different turbulence models for calculating a strongly swirling flow in an abrupt expanding pipe. This task is not only of great importance in practice, but also in theoretical terms. Because in such a flow a very complex anisotropic turbulence with recirculation zones arises and the study of the ongoing processes allows us to find an answer to many questions about turbulence. The flow under consideration has been well studied experimentally. Therefore, it is a very complex and interesting test problem for turbulence models. In the paper compared the numerical results of the one-parameter v_t -92 model, the SSG/LRR-RSM-w2012 Reynolds stress method and the new two-fluid model. These models are very different from each other. Because the Boussinesq hypothesis is used in the one-parameter v_t -92 model, in the SSG/LRR-RSM-w2012 model, its own equation is written for each stress, and for the new two-fluid model, the basis is a completely different approach to turbulence. A feature of the approach to turbulence for the new two-fluid model is that it allows one to obtain a closed system of equations. Comparison of these models is carried out not only by the correspondence of their results with experimental data, but also by the computational resources expended on the numerical implementation of these models. Therefore, in this work, for all models, the same technique was used to numerically calculate the turbulent swirling flow at the Reynolds number $Re = 3 \cdot 10^4$ and the swirl parameter $S_w = 0.6$. In the paper showed that the new two-fluid model is effective for the study of turbulent flows, because has good accuracy in describing complex anisotropic turbulent flows and is simple enough for numerical implementation.

Keywords: swirling flows, Reynolds averaged Navier–Stokes equations, model SSG/LRR-RSM-w2012, model v_t -92, new two-fluid model, sweep, SIMPLE

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2021, vol. 13, no. 4, pp. 793–805 (Russian).

© 2021 Zafar M. Malikov, Farrukh Kh. Nazarov

This work is licensed under the Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Unported License.

To view a copy of this license, visit <http://creativecommons.org/licenses/by-nd/3.0/>
or send a letter to Creative Commons, PO Box 1866, Mountain View, CA 94042, USA.

1. Введение

Закрученные потоки находят широкое применение в различных технологических процессах, например для стабилизации пламени, улучшения смешения, сепарации частиц, в элементах проточного тракта гидравлических электростанций. Закрученные течения могут сопровождаться такими нестационарными эффектами, как прецессия вихревого ядра. В свою очередь, крупномасштабные пульсации, вызванные прецессией вихря, могут привести к повреждению конструкций и снижению надежности оборудования. Таким образом, для инженерных расчетов требуются модели турбулентности, достаточно точно описывающие усредненные поля и крупномасштабные пульсации закрученных течений.

Известно, что для математического моделирования турбулентных течений в настоящее время существуют в основном три подхода. В первом подходе турбулентный поток моделируется с помощью уравнений Навье–Стокса. Поэтому данный подход называется методом прямого численного моделирования (Direct Numerical Simulation, DNS). Примеры применения метода прямого моделирования можно найти, например, в работах [Boudjemadi et al., 1996, Versteegh, Nieuwstadt, 1997]. В основе данного подхода лежит гипотеза, что уравнения Навье–Стокса являются достаточными для описания турбулентного потока. Однако современные возможности метода DNS с определением всех составляющих движения ограничены расчетами при относительно невысоких числах Рейнольдса, не превышающих величину порядка 10^3 , потому что для численной реализации такого подхода необходимо трехмерную зону течения разбить на ячейки размерами менее колмогоровского масштаба, а также для учета турбулентных флуктуаций необходимо проводить интегрирование с очень мелкими шагами по времени по сравнению с характерным временем течения самого потока. Поэтому для использования данного метода для решения реальных инженерных задач требуется очень мощный суперкомпьютер. По мнению компетентных специалистов, такое будет возможно лишь к концу нашего столетия. Следующим подходом является метод моделирования крупных вихрей (Large Eddy Simulation, LES), который продемонстрирован, например, в работе [Peng, Davidson, 2001]. Метод LES по сравнению с DNS может применяться для расчетов течений с существенно большими числами Рейнольдса. Однако использование метода LES для расчета пристеночных течений требует либо введения дополнительного «эмпиризма», заключающегося в параметризации прилегающего к стенке слоя, либо применения сеток, приближающихся по своим характеристикам к сеткам метода DNS. Третьим подходом для описания турбулентного потока являются модели, которые направлены на решение уравнений Навье–Стокса, осредненных по Рейнольдсу (Reynolds-Averaged Navier–Stokes Equations, RANS). Данная система уравнений является незамкнутой, так как в ней присутствуют дополнительные неизвестные компоненты, так называемые рейнольдсовы напряжения. Поэтому все модели, которые направлены на замыкания этой системы, называются RANS-моделями турбулентности. Замыкание систем уравнений в этих моделях проводится на основе различных гипотез и предположений. Следовательно, они являются полуэмпирическими. На сегодняшний день в мире существует более 100 различных полуэмпирических моделей турбулентности RANS. Несмотря на большое их количество, до сих пор универсальная модель турбулентности не создана. Поэтому уже в середине 80-х годов прошлого столетия возник термин «кризис RANS-моделей». Это привело к тому, что появились модели, не имеющие строгих математических и физических основ, но имеющие неплохую точность и простоту в решении инженерных задач. Другими словами, акцент был сделан на создании практических моделей. Ярким представителем таких моделей можно считать модель Секундова ν_t -92 [Гуляев и др., 1993]. В данной модели используется одно уравнение для турбулентной вязкости. Поэтому она называется однопараметрической моделью. Впоследствии появляется еще одна однопараметрическая модель — модель Спаларта–Аллмараса SA [Spalart, Allmaras, 1992], которая на сегодняшний день считается одной из самых популярных среди RANS-моделей. Данная модель использована для расчета многих задач гидродинамики. Однако она оказалась неэффективной для исследования вращающегося потока, а также при обтекании тел с большой кривизной, потому что в таких течениях наблюдается анизотропная турбулентность,

в то время как модели RANS, использующие гипотезу Буссинеска, способны описывать лишь изотропные турбулентные течения. Поэтому в работе [Spalart, Shur, 1997] дается поправка на вращения потока и модель называется SARC. В работе [Nazarov et al., 2020] показано, что данная модель позволяет получить достаточно точные результаты для двухфазного потока внутри центробежного пылеуловителя. Однако в работе [Сентябов и др., 2011] отмечается, что модели SA и SARC могут даже качественно плохо описывать течения при внезапном расширении вращающегося потока. Поэтому в таких задачах рекомендуется применение нелинейных RANS-моделей, где не используется гипотеза Буссинеска. Типичными представителями нелинейной RANS-модели являются различные модели рейнольдсовых напряжений. Представителем из данного класса моделей является модель SSG/LRR-RSM. Описание данной модели можно найти, например, в работе [Eisfeld et al., 2016]. Однако эта модель является довольно сложной, так как каждое напряжение Рейнольдса имеет свое собственное уравнение переноса. Дополнительно еще используется седьмое уравнение переноса для определения масштаба. Данная модель в настоящее время в основном используется там, где обычные RANS-модели не в состоянии описывать сложные анизотропные турбулентные течения.

Еще одним подходом к проблеме турбулентности является двухжидкостный подход. Данный подход был предложен Сполдингом в работе [Spalding, 1983]. Суть данного подхода заключается в том, что турбулентный поток делится на две жидкости по некоторым отличительным признакам потока. Например, для описания перемежаемости поток делится на ламинарный и турбулентный, в задачах горения — на сгоревший и не сгоревший газ и т. д. Сложнее обстоит дело с простым турбулентным потоком, где отсутствуют явные отличительные черты потока, по которым можно было бы разделить поток на две жидкости. Поэтому в следующей работе Сполдинга [Spalding, 1983] предложено умозрительно разделить поток на «быструю» и «медленную» жидкости. С помощью этой модели были получены результаты, предсказавшие довольно точно турбулентные характеристики потока. Однако двухжидкостный подход Сполдинга не получил дальнейшего развития. По всей вероятности, причиной этому было то, что для замыкания систем уравнений привлекались еще дополнительные уравнения на основе различных гипотез, как в моделях RANS. В результате число решаемых уравнений удваивалось по сравнению с RANS-моделями, что привело к увеличению вычислительных ресурсов.

В последнее время опубликована работа одного из авторов настоящей статьи, где предложено развитие двухжидкостного подхода [Malikov, 2020]. Основные отличия новой двухжидкостной модели от модели Сполдинга следующие: а) в новой модели на основе первой гипотезы Рейнольдса (скорость турбулентного потока состоит из осредненной и флуктуирующей скоростей) математически доказывается, что турбулентный поток можно представить в виде гетерогенной смеси двух жидкостей, а в модели Сполдинга турбулентный поток умозрительно делится на две жидкости; б) в модели Сполдинга для определения некоторых турбулентных параметров привлекаются дополнительные уравнения, а в новой модели дополнительных уравнений нет. Поэтому новая двухжидкостная модель достаточно проста для численной реализации инженерных задач.

В настоящей работе в качестве объекта исследования рассматривается течение сильно закрученного турбулентного потока в канале с внезапным расширением. Данная задача хорошо изучена экспериментально [Dellenback et al., 1988] и является довольно сложной тестовой задачей для моделей турбулентности, потому что, как сказано выше, в таком течении возникает сильная анизотропная турбулентность. В работе [Сентябов и др., 2011] численно исследована данная задача, где проведен сравнительный анализ между RANS-моделями SARC, $k-\omega$ SST-RC и LES. В этой работе показано, что соответствие результатов модели LES существенно лучше, чем у RANS-моделей. Эта же задача рассматривалась и в работе [Malikov, 2020], где получено хорошее соответствие с опытными данными. Однако, насколько известно авторам, эта рассматриваемая задача не исследовалась вышеупомянутыми моделями v_t -92 и SSG/LRR-RSM-w2012. Поэтому целью настоящей работы является проведение сравнительного анализа трех принципиально различных моделей — однопараметрической линейной модели v_t -92, метода рейнольдсовых напряжений SSG/LRR-RSM-w2012 и новой двухжидкостной модели.

2. Постановка задачи

В работе численно исследуется течение сильно закрученного турбулентного потока в канале с внезапным расширением. Исследование проводится для числа Рейнольдса $Re = U_{in} D / \nu = 3 \cdot 10^4$ и параметра закрутки $S_w = 0.6$. Здесь U_{in} — максимальная аксиальная скорость на входе, D — диаметр меньшего канала, и параметр закрутки определялся по формуле

$$S_w = \frac{\int_0^R V_{0\phi} V_{0z} r^2 dr}{R \int_0^R V_{0z}^2 r dr}.$$

Расчетная область представляла собой канал радиусом $R = 1$ м и длиной 1 м, расширяющийся в канал радиусом 2 м и длиной 40 м (рис. 1).

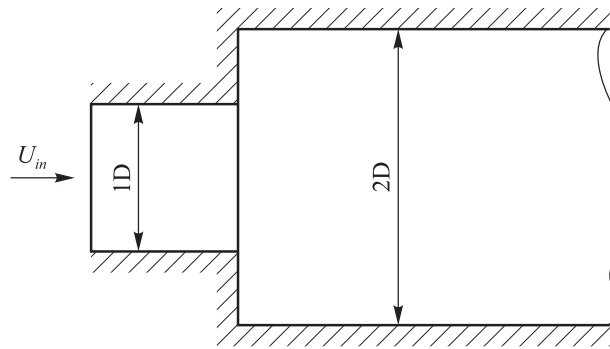


Рис. 1. Схема канала с внезапным расширением

На входе задавался экспериментальный профиль скорости, измеренный для сечения $z/D = -0.5$, соответствующего расположению входа расчетной области. Интенсивность турбулентных пульсаций оценивалась из экспериментального профиля турбулентных пульсаций.

Как было сказано выше, для исследования поставленной задачи использованы RANS-модели ν_t -92 и SSG/LRR-RSM-w2012. Эти модели хорошо известны и подробно изложены во многих научных работах и учебниках. Следовательно, нет необходимости в описании этих моделей. Что касается новой двухжидкостной модели, то она еще мало известна. Поэтому ниже для облегчения читателям представлена суть этой модели.

3. Новая двухжидкостная модель турбулентности

Как было отмечено выше, в работе [Malikov, 2020] показано, что турбулентный поток можно представить в виде гетерогенной смеси двух жидкостей. Следовательно, математическую модель турбулентности для несжимаемой жидкости можно построить с помощью гидродинамических уравнений для двух жидкостей:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \beta \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho \alpha_j V_{1j}}{\partial x_j} &= J, \\ \frac{\partial (1 - \beta) \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho (1 - \alpha_j) V_{2j}}{\partial x_j} &= -J, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\frac{\partial \varepsilon \rho V_{1i}}{\partial t} + \frac{\partial \alpha_j (\rho V_{1j} V_{1i} + \delta_{ij} p - \sigma_{1ji})}{\partial x_j} = f,$$

$$\frac{\partial (1 - \varepsilon) \rho V_{2i}}{\partial t} + \frac{\partial (1 - \alpha_j) (\rho V_{2j} V_{2i} + \delta_{ij} p - \sigma_{2ji})}{\partial x_j} = -f.$$

Здесь J — интенсивность массообмена между жидкостями, f — сила взаимодействия между жидкостями, β , α_j — объемная и поверхностная доли первой жидкости в элементарном объеме, V_{1i} , V_{2i} — скорости первой и второй жидкостей в направлении i . В системе уравнений объемная и поверхностная доли являются флуктуирующими параметрами $0 < \beta$, $\alpha_j < 1$, средние значения которых

$$\bar{\varepsilon} = \bar{\alpha}_i = 0.5. \quad (2)$$

Таким образом, в двухжидкостном подходе скорости являются нефлуктуирующими параметрами, потому что не существует такой силы, под действием которой жидкости могут совершать флуктуирующее движение.

Проведем теперь процедуру осреднения системы (1) по Рейнольдсу и получим

$$\frac{\partial 0.5 \rho V_{1j}}{\partial x_j} = \bar{J},$$

$$\frac{\partial 0.5 \rho V_{2j}}{\partial x_j} = -\bar{J},$$

$$\frac{\partial 0.5 \rho V_{1i}}{\partial t} + \frac{\partial 0.5 (\rho V_{1j} V_{1i} + \delta_{ij} \bar{p} - \sigma_{1ji})}{\partial x_j} = \bar{f}_i,$$

$$\frac{\partial 0.5 \rho V_{2i}}{\partial t} + \frac{\partial 0.5 (\rho V_{2j} V_{2i} + \delta_{ij} \bar{p} - \sigma_{2ji})}{\partial x_j} = -\bar{f}_i.$$

В этих выражениях

$$\bar{f}_i = \frac{1}{T} \int_{t-T/2}^{t+T/2} (f_i - \alpha_i p') d\tau,$$

$$\sigma_{1ij} = \mu \left(\frac{\partial V_{1i}}{\partial x_j} + \frac{\partial V_{1j}}{\partial x_i} \right),$$

$$\sigma_{2ij} = \mu \left(\frac{\partial V_{2i}}{\partial x_j} + \frac{\partial V_{2j}}{\partial x_i} \right).$$

Здесь μ — коэффициент динамической вязкости жидкости, \bar{f}_i — осредненная сила взаимодействия между жидкостями. Так как турбулентный поток представляется в виде гетерогенной смеси двух жидкостей, скорость можно представить в виде

$$V_i = \alpha_i V_{1i} + (1 - \alpha_i) V_{2i} = \frac{V_{1i} + V_{2i}}{2} + (2\alpha_i - 1) \frac{V_{1i} - V_{2i}}{2}. \quad (6)$$

Как видно из соотношения (6), первое слагаемое — это осредненная по времени скорость, а второе — флуктуирующая скорость турбулентного потока. Введем следующие обозначения:

$$\bar{V}_i = \frac{V_{1i} + V_{2i}}{2}, \quad v_i = \frac{V_{1i} - V_{2i}}{2}. \quad (7)$$

После несложных математических операций систему уравнений (3) можно привести к виду

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho \bar{V}_j}{\partial x_j} = 0, \\ \frac{\partial \rho v_j}{\partial x_j} = 2\bar{J}, \\ \frac{\partial \rho \bar{V}_i}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \bar{V}_j \bar{V}_i + \delta_{ji} \bar{p})}{\partial x_j} = \frac{\partial(\Pi_{ji} - \rho v_j v_i)}{\partial x_j}, \\ \frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho \bar{V}_j v_i + \rho v_j \bar{V}_i - \pi_{ji}) = 2\bar{f}_i, \\ \Pi_{ji} = \mu \left(\frac{\partial \bar{V}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{V}_j}{\partial x_i} \right), \quad \pi_{ji} = \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right). \end{cases} \quad (8)$$

Система (8) является основными уравнениями новой двухжидкостной модели турбулентности. Как видно из (8), уравнение движения для осредненного потока имеет очень похожий вид, что и в осредненном уравнении Рейнольдса. Однако в уравнениях Рейнольдса турбулентные напряжения являются неизвестными. Следовательно, подход Рейнольдса приводит к незамкнутой системе уравнений, и для замыкания ее необходимо привлекать различные гипотезы. Это происходит потому, что подход Рейнольдса базируется на двух гипотезах: 1) скорость турбулентного потока состоит из осредненной и флуктуирующей скоростей; 2) турбулентный поток описывается уравнением Навье–Стокса. Из этих условий видно, что они являются недостаточными для описания турбулентности, потому что на основе первой гипотезы вводится две неизвестные скорости, а используется только одно уравнение. Первую гипотезу Рейнольдса на сегодняшний день можно считать экспериментально подтвержденной. Что касается второй гипотезы, то она не совсем очевидная, потому что уравнение Навье–Стокса является точной математической моделью ламинарного потока. Что касается двухжидкостного подхода, то он дает замкнутую систему уравнений (8), потому что для каждого неизвестного параметра выведено уравнение движения.

В упомянутой работе одного из авторов [Malikov, 2020] подробно приводятся методики определения сил взаимодействия между жидкостями \bar{f}_i . Поэтому здесь приведем окончательный их вид:

$$\begin{aligned} 2\bar{f}_i &= 2\bar{V}_i \bar{J} + F_{si} + F_{fi} + F_{mi}, \\ \vec{F}_s &= \rho C_s \operatorname{rot} \vec{V} \times \vec{v}, \\ \vec{F}_i &= -\rho K_f \vec{v}, \\ F_{mi} &= 2 \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\rho v_{ji} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right], \\ v_{ji} &= 3\nu + 2 \left| \frac{v_i v_j}{\operatorname{def}(\vec{V})} \right| \text{ для } i \neq j, \quad v_{ii} = 3\nu + \frac{1}{\operatorname{div} \vec{v}} \left| \frac{v_k v_k}{\operatorname{def}(\vec{V})} \right| \frac{\partial v_k}{\partial x_k}. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь $2\bar{V}_i \bar{J}$ — сила, вызванная массообменом между жидкостями, F_{si} — поперечная сила Сеффена, обусловленная сдвиговым полем скорости, F_{fi} — сила трения, F_{mi} — сила, возникающая

в результате относительного молярного движения жидкостей, $\text{def}(\vec{V}) = \sqrt{2S_{ij}S_{ij}}$, $S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{V}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{V}_j}{\partial x_i} \right)$ — скорость деформации. Подставляя выражения (9) в систему уравнений (8), получим следующую систему уравнений новой двухжидкостной модели для турбулентного потока:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho \bar{V}_j}{\partial x_j} = 0, \\ \frac{\partial \bar{V}_i}{\partial t} + \bar{V}_j \frac{\partial \bar{V}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{p}}{\rho \partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \left(\frac{\partial \bar{V}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{V}_j}{\partial x_i} \right) - v_j v_i \right], \\ \frac{\partial v_i}{\partial t} + \bar{V}_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -\rho \nu_j \frac{\partial \bar{V}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu_{ji} \left(\frac{\partial \bar{V}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{V}_j}{\partial x_i} \right) \right] + \frac{F_{si}}{\rho} + \frac{F_{fi}}{\rho}, \\ \nu_{ji} = 3\nu + 2 \left| \frac{v_i v_j}{\text{def}(\vec{V})} \right| \text{ при } i \neq j, \\ \nu_{ii} = 3\nu + \frac{1}{\text{div } \vec{v}} \left| \frac{v_k v_k}{\text{def}(\vec{V})} \right| \frac{\partial v_k}{\partial x_k}, \\ \vec{F}_f = -\rho K_f \vec{v}, \quad \vec{F}_s = \rho C_s \text{rot } \vec{V} \times \vec{v}. \end{array} \right. \quad (10)$$

Здесь K_f — коэффициент трения

$$K_f = C_1 \lambda_{\max} + C_2 \frac{|\vec{d} \cdot \vec{v}|}{d^2}. \quad (11)$$

В данном выражении d — ближайшее расстояние до твердой стенки, λ_{\max} — наибольший корень характеристического уравнения

$$\det(A - \lambda E) = 0, \quad (12)$$

где A матрица имеет вид

$$A = \begin{vmatrix} -\frac{\partial \bar{V}_1}{\partial x_1} & -\frac{\partial \bar{V}_1}{\partial x_2} - C_s \zeta_3 & -\frac{\partial \bar{V}_1}{\partial x_3} + C_s \zeta_2 \\ -\frac{\partial \bar{V}_2}{\partial x_1} + C_s \zeta_3 & -\frac{\partial \bar{V}_2}{\partial x_2} & -\frac{\partial \bar{V}_2}{\partial x_3} - C_s \zeta_1 \\ -\frac{\partial \bar{V}_3}{\partial x_1} - C_s \zeta_2 & -\frac{\partial \bar{V}_3}{\partial x_2} + C_s \zeta_1 & -\frac{\partial \bar{V}_3}{\partial x_3} \end{vmatrix}$$

и $\vec{\zeta} = \text{rot } \vec{V}$.

В тестовых задачах показано, что хорошие результаты получаются при $C_1 = 0.7825$, $C_2 = 0.306$, $C_s = 0.2$.

Для численного исследования поставленной задачи будем пренебрегать продольными производными в вязкостных членах. Тогда система уравнений (10) в консервативном виде

в цилиндрических координатах будет иметь вид

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial V_z}{\partial z} + \frac{\partial r V_r}{r \partial r} &= 0, \\
 \frac{\partial V_z}{\partial t} + \frac{\partial V_z V_z}{\partial z} + \frac{\partial r V_r V_z}{r \partial r} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} &= \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 V_z}{\partial r^2} + \frac{\partial V_z}{r \partial r} \right) - \frac{\partial r v_r v_z}{r \partial r}, \\
 \frac{\partial V_r}{\partial t} + \frac{\partial V_z V_r}{\partial z} + \frac{\partial r V_r V_r}{r \partial r} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} &= \frac{V_\phi^2}{r} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 V_r}{\partial r^2} + \frac{\partial V_r}{r \partial r} - \frac{V_r}{r^2} \right) - \frac{\partial r v_r^2}{r \partial r}, \\
 \frac{\partial V_\phi}{\partial t} + \frac{\partial V_z V_\phi}{\partial z} + \frac{\partial r^2 V_r V_\phi}{r^2 \partial r} &= \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 V_\phi}{\partial r^2} + \frac{\partial V_\phi}{r \partial r} - \frac{V_\phi}{r^2} \right) - \frac{\partial r v_r v_\phi}{r \partial r}, \\
 \frac{\partial v_z}{\partial t} + \frac{\partial V_z v_z}{\partial z} + \frac{\partial r V_r v_z}{r \partial r} &= -(1 - C_s) \frac{\partial V_z}{\partial r} v_r + \frac{\partial}{\partial r} \left(r v_{zr} \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) - K_f v_z, \\
 \frac{\partial v_r}{\partial t} + \frac{\partial V_z v_r}{\partial z} + \frac{\partial r V_r v_r}{r \partial r} &= -C_s \frac{\partial V_z}{\partial r} v_z - \left(C_s \frac{\partial r V_\phi}{r \partial r} - \frac{2V_\phi}{r} \right) + \frac{2\partial}{\partial r} \left(r v_{rr} \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) - \frac{2v_{rr} v_r}{r^2} - K_f v_r, \\
 \frac{\partial v_\phi}{\partial t} + \frac{\partial V_z v_\phi}{\partial z} + V_r \frac{\partial r^2 V_r v_\phi}{r^2 \partial r} &= -(1 - C_s) \frac{\partial r V_\phi}{r \partial r} v_r + \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 v_{\phi r} \left(\frac{\partial v_\phi}{\partial r} - \frac{v_\phi}{r} \right) \right) - K_f v_\phi.
 \end{aligned} \tag{13}$$

Молярные вязкости равны

$$\begin{aligned}
 v_{zr} &= 3\nu + 2 \left| \frac{v_z v_r}{\text{def}(V)} \right|, \quad v_{rr} = 3\nu + 2 \left| \frac{v_r^2}{\text{def}(V)} \right|, \quad v_{\phi r} = 3\nu + 2 \left| \frac{v_\phi v_r}{\text{def}(V)} \right|, \\
 \text{def}(V) &= \sqrt{\left(\frac{\partial V_z}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial V_\phi}{\partial r} - \frac{V_\phi}{r} \right)^2}.
 \end{aligned} \tag{14}$$

Решая характеристическое уравнение, найдем наибольший корень:

$$\begin{aligned}
 \lambda_{\max} &= \sqrt{D}, \text{ если } D \geq 0, \\
 \lambda_{\max} &= 0, \text{ если } D < 0, \\
 D &= C_s(1 - C_s) \left[\left(\frac{\partial r V_\phi}{r \partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial V_z}{\partial r} \right)^2 \right] - \frac{2(1 - C_s)V_\phi}{r^2} \frac{\partial r V_\phi}{\partial r}.
 \end{aligned} \tag{15}$$

По формуле (11) коэффициент трения равен

$$K_f = C_1 \lambda_{\max} + C_2 \frac{|v_r|}{d}.$$

Здесь d — ближайшее расстояние до твердой стенки.

В работе исследуется квазистационарное решение уравнений гидродинамики для вращающегося потока. Для этого после достижения квазипериодического решения проводилось усреднение параметров по времени. Методика численной реализации системы гидродинамических уравнений при использовании различных моделей турбулентности была идентичная. Для конвективных членов использовалась схема QUICK Леонарда [Leonard, 1979] в явном виде, а вязкостные члены аппроксимировались неявной центрально-разностной схемой. Поэтому для интегрирования в поперечном направлении использовался метод прогонки. Связь давления со скоростями потока реализовывалась с помощью процедуры SIMPLE [Патанкар, 1984]. Таким

образом, точность численной процедуры по времени была первого порядка, а по пространствам — второго. На входе для скоростей потока задавались условия из эксперимента работы [Dellenback et al., 1988]. Поэтому уравнения в безразмерный вид приводились соотношением всех скоростей к максимальной аксиальной скорости потока на входе U_{in} , а пространственные масштабы — к диаметру малой трубки. Для расчетов использовалась сетка 100×100 , при этом безразмерные пространственные шаги были равны $\Delta \bar{z} = 0.05$, $\Delta \bar{r} = 0.01$. Расчеты показали, что измельчение продольного или радиального шагов в два раза, при сохранении расчетной области, привели к изменению результатов не более 1 %, однако расчетное время увеличивалось существенно. При использовании модели SSG/LRR-RSM-w2012 устойчивое решение получилось при интегрировании безразмерным шагом по времени не более $\Delta t = 0.002$, модели ν_t-92 — не более $\Delta t = 0.005$, а при использовании двухжидкостной модели устойчивые решения получаются и при $\Delta t = 0.05$.

4. Обсуждение результатов

На рис. 2–5 продемонстрированы численные результаты различных моделей. Здесь также показаны опытные данные, полученные в работе [Dellenback et al., 1988]. На рис. 2 и 3 представлены профили аксиальной и тангенциальной скоростей потока соответственно в сечении $\bar{z} = 0.1$. Аналогичные графики представлены на рис. 4 и 5 для $\bar{z} = 0.25$.

Полученные результаты показали, что метод рейнольдсовых напряжений SSG/LRR-RSM-w2012 и новая двухжидкостная модель дают результаты, очень близкие к экспериментальным данным. Однако более близкое соответствие наблюдается для двухжидкостной модели. Что касается результатов однопараметрической модели ν_t-92 , то можно сказать о качественном согласии с опытными данными. Этого и стоило ожидать, потому что, как было сказано во введении, все модели RANS, использующие гипотезу Буссинеска, не в состоянии описывать адекватно анизотропную турбулентность.

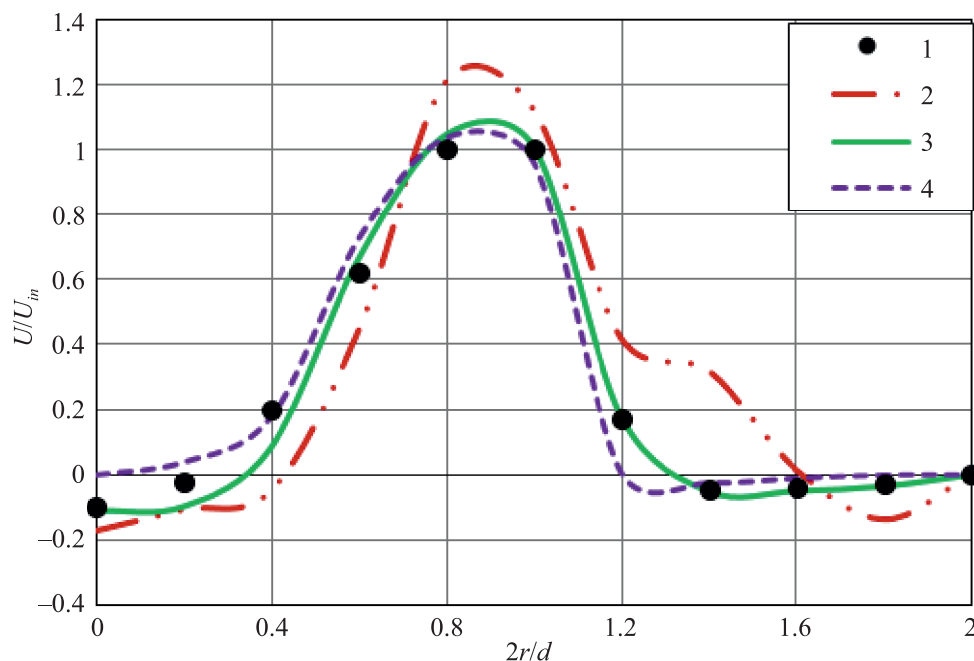


Рис. 2. Профиль аксиальной скорости в сечении $\bar{z} = 0.1$: 1 — экспериментальные данные работы [Dellenback et al., 1988], 2 — результаты модели ν_t-92 , 3 — результаты новой двухжидкостной модели, 4 — результаты метода рейнольдсовых напряжений SSG/LRR-RSM-w2012

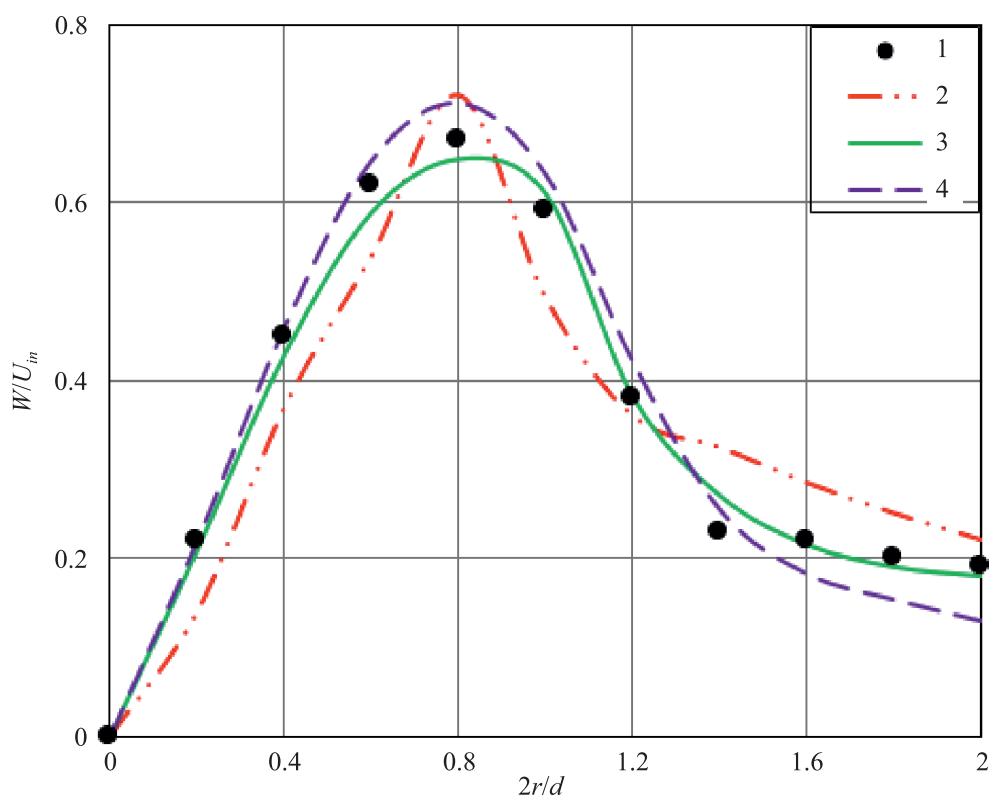


Рис. 3. Профиль тангенциальной скорости в сечении $\bar{z} = 0.1$: 1 — экспериментальные данные работы [Dellenback et al., 1988], 2 — результаты модели ν_t-92 , 3 — результаты новой двухжидкостной модели, 4 — результаты метода реинольдсовых напряжений SSG/LRR-RSM-w2012

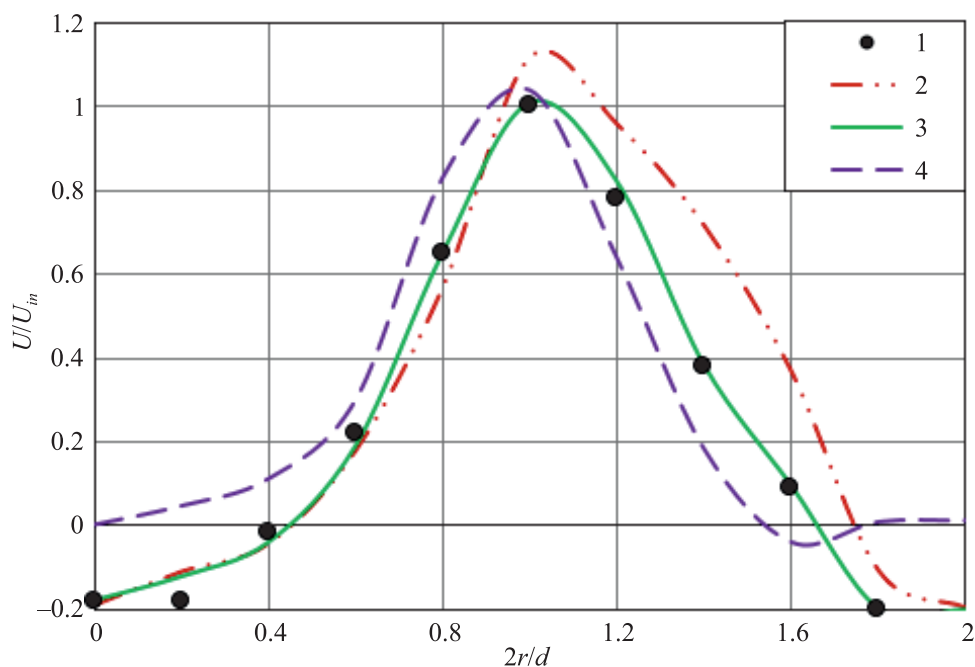


Рис. 4. Профиль аксиальной скорости в сечении $\bar{z} = 0.25$: 1 — экспериментальные данные работы [Dellenback et al., 1988], 2 — результаты модели ν_t-92 , 3 — результаты новой двухжидкостной модели, 4 — результаты метода реинольдсовых напряжений SSG/LRR-RSM-w2012

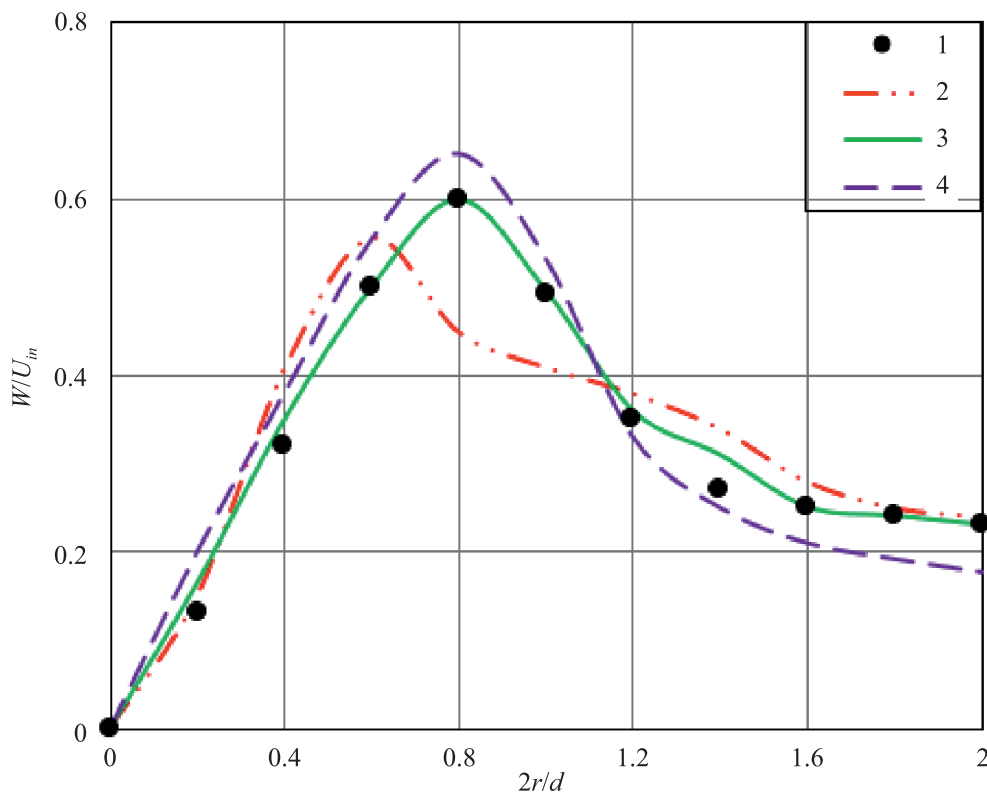


Рис. 5. Профиль тангенциальной скорости в сечении $\bar{z} = 0.25$: 1 — экспериментальные данные работы [Dellenback et al., 1988], 2 — результаты модели ν_t -92, 3 — результаты новой двухжидкостной модели, 4 — результаты метода реинльдсовых напряжений SSG/LRR-RSM-w2012

5. Заключение

Полученные результаты принципиально различных моделей турбулентности и сопоставление их с экспериментальными данными позволяют сделать вывод, что метод реинльдсовых напряжений SSG/LRR-RSM-w2012 и новая двухжидкостная модель хорошо описывают сложное анизотропное турбулентное течение с рециркуляционной зоной, а линейная модель ν_t -92 в состоянии описывать лишь качественно. При этом обнаружено, что точность новой двухжидкостной модели выше, чем у модели SSG/LRR-RSM-w2012. Еще одним существенным достоинством новой двухжидкостной модели оказалось то, что для ее численной реализации требуется существенно меньше компьютерных ресурсов по сравнению с моделями RANS.

Список литературы (References)

- Гуляев А. Н., Козлов В. Е., Секундов А. Н. К созданию универсальной однопараметрической модели для турбулентной вязкости // Изв. АН СССР, МЖГ. — 1993. — № 4. — С. 69–81.
 Gulyaev A. N., Kozlov V. E., Sekundov A. N. A universal one-equation model for turbulent viscosity // Fluid Dynamics. — 1993. — Vol. 28. — № 4. — P. 485–494. (Original Russian paper: Gulyaev A. N., Kozlov V. E., Sekundov A. N. K sozdaniyu universal'noi odnoparametricheskoj modeli dlya turbulentnoi vyazkosti // Izv. AN SSSR, MZhG. — 1993. — № 4. — P. 69–81.)
- Сентябов А. В., Гаврилов А. А., Дектерев А. А. Исследование моделей турбулентности для расчета закрученных течений // Теплофизика и аэромеханика. — 2011. — Т. 18, № 1. — С. 81–94.
 Sentyabov A. V., Gavrilov A. A., Dekterev A. A. Investigation of turbulence models for computation of swirling flows // Thermophysics and Aeromechanics. — 2011. — Vol. 18, № 1. — P. 73–85. (Original Russian paper: Sentyabov A. V.,

- Gavrilov A. A., Dekterev A. A.* Issledovanie modelei turbulentsnosti dlya rascheta zakruchennykh techenii // *Teplofizika i aeromekhanika*. — 2011. — Vol. 18, № 1. — P. 81–94.)
- Патанкар С.* Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости / пер. с англ. под редакцией В. Д. Виленского. — М.: Энергоатомиздат, 1984. — С. 104.
Patankar S. Numerical heat transfer and fluid flow. — Hemisphere Publishing Corporation, New York, 1980. (Russ. ed.: *Patankar S.* Chislennye metody resheniya zadach teploobmena i dinamiki zhidkosti / per. s angl. pod redaktsiei V. D. Vilenskogo. — М.: Energoatomizdat, 1984.)
- Boudjemadi R., Maupu V., Laurence D., Le Quere P.* Direct Numerical Simulation of Natural Convection in a Vertical Channel: A Tool for Second-Moment Closure Modelling // *Proc. Engineering Turbulence Modelling and Experiments 3*. — Amsterdam: Elsevier, 1996. — P. 39.
- Dellenback P. A., Metzger D. E., Neitzel G. P.* Measurements in turbulent swirling flow through an abrupt expansion // *AIAA J.* — 1988. — Vol. 26, No. 6. — P. 669–681.
- Eisfeld B., Rumsey C., Togiti V.* Erratum: Verification and Validation of a Second-Moment-Closure Model // *AIAA Journal*. — 2016. — Vol. 54, No. 5. — P. 1524–1541.
- Gulyaev A. N., Kozlov V. E., Secundov A. N.* A Universal One-Equation Model for Turbulent Viscosity // *Fluid Dynamics*. — 1993. — Vol. 28, No. 4. — P. 485–494 (translated from Russian, Consultants Bureau, NY).
- Leonard B. P.* A stable and accurate convective modeling procedure based on quadratic upstream interpolation // *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.* — 1979. — Vol. 19. — P. 59–98.
- Malikov Z.* Mathematical model of turbulence based on the dynamics of two fluids // *Applied Mathematical Modelling*. — 2020.
- Nazarov F. X., Malikov Z. M., Rakhmanov N. M.* Simulation and numerical study of two-phase flow in a centrifugal dust catcher // *2020 AMSD-2019 Journal of Physics: Conference Series 1441*. — 012155.
- Patankar S. V.* Numerical heat transfer and fluid flow. hemisphere publishing corporation. — Washington, New York, London, Mcgraw hill book company, New York 1980. 1. Aufl., 197 s., 76 abb., geb., dm 71, 90.
- Peng S. H., Davidson L.* Large Eddy Simulation of Turbulent Buoyant Flow in a Confined Cavity // *Intern. J. Heat Fluid Flow*. — 2001. — Vol. 22. — P. 323.
- Spalart P. R., Allmaras S. R.* A one-equation turbulence model for aerodynamic flow // *AIAA Paper*. — 1992. — Vol. 12, No. 1. — P. 439–478.
- Spalart P. R., Shur M. L.* On the sensitization of turbulence models to rotational and curvature // *Aerospace Science and Technology*. — 1997. — Vol. 1, No. 5. — P. 297–302.
- Sentyabov A. V., Gavrilov A. A., Dekterev A. A.* Issledovaniye modeley turbulentsnosti dlya rascheta zakruchennykh techeniy [The study of turbulence models for the calculation of swirling flows] // *Thermophysics and Aeromechanics*. — 2011. — Vol. 18, No. 1. — P. 81–94 (in Russian).
- Spalding D. B.* A turbulence model for buoyant and combusting flows // *4th Int. Conf. on Numerical methods in Thermal Problems, Swansea, 15–18 July 1984*. Also, as Imperial College report CFD/86/4 (1984).
- Spalding D. B.* Chemical reaction in turbulent fluids // *J. Physico-chemical Hydrodyn.* — 1983. — Vol. 4. — P. 323–336.
- Versteegh T. A., Nieuwstadt T. M.* Turbulent Budgets of Natural Convection in an Infinite, Differentially Heated, Vertical Channel // *Intern. J. Heat Fluid Flow*. — 1997. — Vol. 19. — P. 135.