

УДК: 519.622, 004.021, 004.942

## Молекулярно-динамические исследования равновесных конфигураций одноименно заряженных частиц в планарных системах с круговой симметрией

Э. Г. Никонов<sup>1,2,a</sup>, Р. Г. Назмитдинов<sup>1,2,b</sup>, П. И. Глуховцев<sup>1,2,c</sup>

<sup>1</sup>Объединенный институт ядерных исследований,  
Россия, 141980, г. Дубна, Московская область, ул. Жолио-Кюри, 6

<sup>2</sup>Университет «Дубна»,  
Россия, 141980, г. Дубна, Московская область, ул. Университетская, 19

E-mail: <sup>a</sup> e.nikonov@jinr.ru, <sup>b</sup> rashid@theor.jinr.ru, <sup>c</sup> pavelgl2018@gmail.com

*Получено 24.03.2022, после доработки — 27.05.2022.*

*Принято к публикации 30.05.2022.*

В данной работе представлены результаты численного анализа равновесных конфигураций отрицательно заряженных частиц (электронов), запертых в круговой области бесконечным внешним потенциалом на ее границе. Для поиска устойчивых конфигураций с минимальной энергией авторами разработан гибридный вычислительный алгоритм. Основой алгоритма являются интерполяционные формулы, полученные из анализа равновесных конфигураций, полученных с помощью вариационного принципа минимума энергии для произвольного, но конечного числа частиц в циркулярной модели. Решения нелинейных уравнений данной модели предсказывают формирование оболочечной структуры в виде колец (оболочек), заполненных электронами, число которых уменьшается при переходе от внешнего кольца к внутренним. Число колец зависит от полного числа заряженных частиц. Полученные интерполяционные формулы распределения полного числа электронов по кольцам используются в качестве начальных конфигураций для метода молекулярной динамики. Данный подход позволяет значительно повысить скорость достижения равновесной конфигурации для произвольно выбранного числа частиц по сравнению с алгоритмом имитации отжига Метрополиса и другими алгоритмами, основанными на методах глобальной оптимизации.

Ключевые слова: атом Томсона, кристалл Вигнера, молекулярная динамика

Работа выполнена в рамках проекта ОИЯИ № 05-6-1118-2014/2023 с использованием ресурсов гетерогенного кластера HybriLIT.

UDC: 519.622, 004.021, 004.942

## Molecular dynamics studies of equilibrium configurations of equally charged particles in planar systems with circular symmetry

E. G. Nikonov<sup>1,2,a</sup>, R. G. Nazmitdinov<sup>1,2,b</sup>, P. I. Glukhovtsev<sup>1,2,c</sup>

<sup>1</sup>Joint Institute for Nuclear Research,  
6 Jolio-Curie st., Dubna, Moscow region, 141980, Russia

<sup>2</sup>Dubna University,  
19 Universitetskaya st., Dubna, Moscow region, 141980, Russia

E-mail: <sup>a</sup> e.nikonov@jinr.ru, <sup>b</sup> rashid@theor.jinr.ru, <sup>c</sup> pavelgl2018@gmail.com

*Received 24.03.2022, after completion — 27.05.2022.*

*Accepted for publication 30.05.2022.*

The equilibrium configurations of charged electrons, confined in the hard disk potential, are analysed by means of the hybrid numerical algorithm. The algorithm is based on the interpolation formulas, that are obtained from the analysis of the equilibrium configurations, provided by the variational principle developed in the circular model. The solution of the nonlinear equations of the circular model yields the formation of the shell structure which is composed of the series of rings. Each ring contains a certain number of particles, which decreases as one moves from the boundary ring to the central one. The number of rings depends on the total number of electrons. The interpolation formulas provide the initial configurations for the molecular dynamics calculations. This approach makes it possible to significantly increase the speed at which an equilibrium configuration is reached for an arbitrarily chosen number of particles compared to the Metropolis annealing simulation algorithm and other algorithms based on global optimization methods.

Keywords: Tomson atom, Wigner crystal, molecular dynamics

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2022, vol. 14, no. 3, pp. 609–618 (Russian).

This work was supported by the JINR project No. 05-6-1118-2014/2023 and used HybriLIT resources.

## Введение

Планарные системы одноименных частиц, взаимодействующих посредством кулоновского потенциала и запертых внешними потенциалами с высокой симметрией, играют важную роль в различных областях как экспериментальной, так и теоретической физики и химии. С другой стороны, такие системы представляют огромный интерес с точки зрения решения фундаментальной задачи о нахождении оптимальных равновесных конфигураций конечного числа взаимодействующих частиц, локализованных в ограниченном пространстве, при существовании огромного числа локальных минимумов. Поэтому, естественно, проблема распределения одноименно заряженных частиц в планарных системах является актуальной на протяжении многих десятилетий (см., например, обзор [Bowick, Giomi, 2009]). В частности, данная проблема возникает при анализе поведения квантовых вихрей в Бозе-конденсате [Saarikoski et al., 2010], электронов в квантовых точках [Birman, Nazmitdinov, Yukalov, 2013], коллоидных систем, в которых коллоидные частицы самоорганизуются на границе раздела двух различных жидкостей [Yao, Olvera de la Cruz, 2013; Binks, Horozov, 2006; Leunissen et al., 2007].

Впервые проблема равновесных конфигураций электронов в поле гармонического осциллятора была рассмотрена Джозефом Джон Томсоном [Thomson, 1904], который предложил так называемую пудинговую модель атома. Ему удалось определить равновесные конфигурации электронов в экваториальной плоскости для небольшого числа электронов  $N < 10$ . Позднее Вигнер предсказал формирование кристаллической решетки для свободного газа электронов при нулевой температуре [Wigner, 1934]. Характерной чертой обеих моделей является доминирование кулоновского взаимодействия над кинетической энергией движения электронов. Много позднее результаты расчетов равновесных конфигураций латеральных квантовых точек (где в качестве эффективного потенциала удержания электронов рассматривался потенциал гармонического осциллятора) с помощью метода Монте-Карло в работах [Lozovik, Mandelshtam, 1992; Bolton, Rössler, 1993; Vedanov, Peeters, 1994] было предсказано формирование устойчивых электронных конфигураций в виде последовательности кольцеобразных оболочек с определенным числом электронов ( $N \leq 100$ ). Интересно отметить, что результаты данных расчетов полностью совпали с предсказаниями, полученными с помощью модели Томсона для числа электронов  $N \leq 50$ . Несмотря на то что модели Томсона и Вигнера отличаются как числом взаимодействующих частиц, так и наличием (в первом случае) и отсутствием (во втором случае) границ, они играют важную роль при изучении систем взаимодействующих частиц в различных областях как экспериментальной, так и теоретической физики и химии. Отметим, что трансляционная симметрия ответственна за формирование кристаллической решетки электронного газа, тогда как циклическая симметрия приводит к формированию оболочек в модели Томсона [Birman, Nazmitdinov, Yukalov, 2013].

Следует подчеркнуть, что поиск оптимальной равновесной конфигурации заданного числа одноименно заряженных частиц представляет сложную фундаментальную проблему. Задача поиска глобального минимума осложняется наличием огромного количества локальных минимумов, неограниченно возрастающего с ростом числа частиц в системе. Многочисленные численные расчеты основаны на полуэмпирических правилах, справедливых для небольшого числа частиц. С другой стороны, подходы, основанные на континуальном пределе [Koulakov, Shklovskii, 1998; Mughal, Moore, 2007], позволяя описать общую тенденцию эволюции электронной плотности в рамках теории упругости, не способны предсказать формирование оболочечной структуры большого, но конечного числа частиц.

В данной работе авторами предложен алгоритм поиска глобального минимума, основанный на решении системы нелинейных уравнений, полученных из вариационного принципа для произвольного, но конечного числа одноименно заряженных частиц, запертых в латеральной

плоскости круговым потенциалом с бесконечными стенками [Cerkaski, Nazmitdinov, Puente, 2015; Nazmitdinov et al., 2017]. Развитый авторами подход основан на использовании полученных в работе формул, описывающих распределение данного числа частиц по всем заполненным оболочкам (кольцам). В отличие от работ [Cerkaski, Nazmitdinov, Puente, 2015; Nazmitdinov et al., 2017], в которых в начальной конфигурации фиксировалось только число частиц во внешней оболочке (кольце), в данной работе распределение частиц в начальной конфигурации определяется аналитическими функциями для каждого кольца в отдельности. Полученная таким способом начальная конфигурация позволяет существенно уменьшить общее расчетное время для получения конфигурации с глобальным минимумом энергии системы по сравнению с известными численными методами глобальной минимизации функционала энергии многочастичных систем (молекулярная динамика, Монте-Карло и т. д.).

## Постановка задачи

Математическая постановка задачи может быть сформулирована следующим образом. Дана система одноименно заряженных частиц, запертых круговым потенциалом радиусом  $R$  с бесконечными стенками:

$$V(r) = \begin{cases} 0, & r < R; \\ \infty, & r \geq R. \end{cases} \quad (1)$$

Конфигурации частиц определяются гамильтонианом (2), в котором потенциальная энергия взаимодействия доминирует над кинетической, т. е. в нашем случае она отсутствует.

$$H = \sum_{i=1}^N V(r_i) + \alpha \sum_{i < j}^N \frac{1}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}, \quad (2)$$

где  $r_i$  — расстояние  $i$ -й частицы от центра круга радиусом  $R$  с запирающим потенциалом  $V(r)$  на границе,  $\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r}$  — величина, характеризующая силу взаимодействия зарядов в среде. Без потери общности в дальнейшем в качестве заряженных частиц рассматриваются электроны с зарядом  $-e$ .

Необходимо найти устойчивую конфигурацию  $N$  частиц внутри заданной области с минимально возможным значением энергии. Задача может быть решена методами глобальной оптимизации, методами молекулярной динамики или методами Монте-Карло. Например, модифицированным методом имитации отжига Метрополиса. Однако наличие огромного количества локальных минимумов, неограниченно возрастающих с ростом числа частиц в системе, приводит к фундаментальной проблеме поиска глобального энергетического минимума.

## Стратегия решения

Многочисленные исследования поиска равновесных конфигураций одноименно заряженных частиц, запертых латеральными потенциалами с круговой симметрией, позволили выделить наиболее эффективные численные подходы. К числу таковых относится метод молекулярной динамики, который по затратам вычислительных ресурсов выглядит более предпочтительным по сравнению с методом глобальной оптимизации или методом Монте-Карло. Традиционная схема использования метода молекулярной динамики состоит в следующем. В качестве начальных данных задается случайное распределение  $N$  частиц внутри ограниченной области, в нашей работе — внутри окружности единичного радиуса. Далее запускается молекулярная динамика с торможением. При достижении нулевой температуры системы расчеты, реализующие временную

эволюцию системы, заканчиваются, и рассчитывается энергия полученной равновесной конфигурации частиц. Данная процедура повторяется итеративно несколько миллионов раз, до достижения максимально минимальной энергии. Например, для числа частиц порядка  $10^2$  необходимо сделать примерно  $10^4$  запусков, каждый из которых может состоять из  $10^6$ – $10^7$  временных итераций. Такое количество запусков для различных начальных конфигураций частиц обусловлено чрезвычайно малой, порядка  $10^{-3}$ , вероятностью достижения глобального минимума по энергии. Таким образом, традиционная схема расчетов устойчивых конфигураций с минимальной энергией требует значительных вычислительных ресурсов даже для систем, содержащих небольшое число частиц.

В данной работе авторами предложен алгоритм поиска глобального минимума, основанный на следующей схеме. В качестве начального приближения берется распределение частиц, полученное с помощью интерполяционных формул, описывающих зависимость числа частиц  $n_i$ , распределенных на  $i$ -м кольце, от количества колец  $p$ . Интерполяционные формулы получены на основе решений нелинейных уравнений циркулярной модели для определения устойчивых конфигураций одноименно заряженных частиц, запертых потенциалами с круговой симметрией в планарных системах в [Cerkaski, Nazmitdinov, Puente, 2015; Nazmitdinov et al., 2017]. После этого запускается молекулярная динамика с торможением. Последний этап реализован аналогично традиционной схеме метода молекулярной динамики.

Рассмотрим более подробно детали предложенного в данной работе подхода. В работах [Cerkaski, Nazmitdinov, Puente, 2015; Nazmitdinov et al., 2017] был развит вариационный подход (3), (4) для решения проблемы формирования равновесных конфигураций одноименно заряженных частиц в планарных системах с круговой симметрией. Данная модель основана на результатах модели Томсона, в которой равновесные конфигурации заряженных частиц формируются в виде последовательности заполненных колец с определенным числом электронов (оболочек). В отличие от модели Томсона [Thomson, 1904] развитая модель учитывает взаимодействие между кольцами и позволяет рассчитать распределение числа частиц  $n_i$  по кольцам для устойчивой конфигурации с минимальной энергией для заданного количества колец  $p$ . Равновесные конфигурации определяются посредством решения следующих нелинейных уравнений:

$$\mathcal{F}_i = 0, \quad i = 1, \dots, p; \quad (3)$$

$$\mathcal{F}_i = r_i \sum_{j=1}^{i-1} n_j \left( \frac{r_j E \left[ \left( \frac{r_i}{r_j} \right)^2 \right]}{r_j^2 - r_i^2} - \frac{K \left[ \left( \frac{r_i}{r_j} \right)^2 \right]}{r_j} \right) + r_i^2 \sum_{j=i+1}^p \frac{n_j E \left[ \left( \frac{r_j}{r_i} \right)^2 \right]}{r_j^2 - r_i^2} - \frac{\pi}{8} \sum_{k=1}^{n_i-1} \frac{1}{\sin \frac{\pi k}{n_i}}. \quad (4)$$

Здесь  $K = X_{-1}$  ( $E = X_1$ ) — полные эллиптические интегралы первого (второго) рода:  $X_p(x) = \int_0^{\pi/2} dt (1 - x \sin^2 t)^{p/2}$ ;  $r_i$  — это значение  $i$ -го оптимального радиуса для заданной устойчивой конфигурации заряженных частиц. Алгоритм решения уравнений (3), (4) с помощью пакета Wolfram Mathematica реализует поиск распределения электронов на фиксированном числе оболочек методом перебора в окрестности начального распределения, полученного на основе оценок из работы [Nazmitdinov et al., 2017]. Решение системы уравнений (3), (4) данной модели может быть использовано для получения начальных распределений заряженных частиц, реализующих состояния с энергией, близкой по значению к величине глобального минимума для системы с заданным количеством частиц  $N$ . Интерполяция решений уравнений (3), (4) приводит, в частности, к следующим функциональным зависимостям:

- числа оболочек  $p$  от полного числа частиц  $N$ :

$$p(N) = -0,668 + 0,487 \cdot \sqrt{N}; \quad (5)$$

- полного числа частиц  $N$  от числа оболочек  $p$ :

$$N(p) = 4,1988 + 7,27 \cdot p^{1,66} + 0,48 \cdot p^{2,48}; \quad (6)$$

- числа частиц  $n_i$  на  $i$ -й оболочке (кольце) от полного числа частиц в системе  $N$ :

$$n_i(N) = a_i N^{2/3} - b_i. \quad (7)$$

Значения коэффициентов  $a_i$ ,  $b_i$  приведены в таблице 1.

Таблица 1. Коэффициенты  $a_i$ ,  $b_i$  для формулы (7).  $i$  – номер оболочки (кольца).  $i = 1$  соответствует первой внешней оболочке

$i$	1	2	3	4	5	6
$a_i$	2,7948	1,3439	1,1323	1,0127	0,9482	0,8517
$b_i$	3,9444	7,2999	10,845	14,850	19,128	21,732

Данные формулы позволяют получить распределения частиц по оболочкам, которые могут служить начальным приближением для молекулярно-динамических расчетов, существенно ускоряющим процесс достижения минимальных равновесных конфигураций.

## Анализ эффективности предложенного алгоритма

Сравнение результатов экстраполяции числа частиц на первой внешней оболочке для полного числа частиц, равного 1000, по формулам (6), (7), полученным в нашей работе с результатами экстраполяции по формулам, полученным в работах [Worley, 2006; Nazmitdinov et al., 2017], приведено в таблице 2.

Таблица 2. Распределение частиц на первом внешнем кольце  $n_1$  для полного числа частиц в системе  $N = 1000$ . (\*) – формула из работы [Worley, 2006], (\*\*) – формула из работы [Nazmitdinov et al., 2017], (\*\*\*) – формула (7),  $[n_1]$  – ближайшее целое

$n_1(N) = 2,7922N^{2/3} - 3,723 \pm 0,021^{(*)}$	$n_1(1000) = 275,50 \pm 0,08$	$[n_1] = 276$
$n_1(N) = 2,795N^{2/3} - 3,184^{(**)}$	$n_1(1000) = 276,316$	$[n_1] = 276$
$n_1(N) = 2,79475N^{2/3} - 3,944^{(***)}$	$n_1(1000) = 275,53$	$[n_1] = 276$

Легко убедиться, что результат вычислений по формулам, полученным в нашей работе, находится в хорошем согласии с соответствующими результатами из двух упомянутых работ.

Как показал анализ трудоемкости предложенного авторами алгоритма, увеличение количества колец с фиксированным распределением частиц в начальной конфигурации приводит к значительному сокращению как количества запусков, так и, соответственно, общего количества итераций. Соответствующие данные приведены в таблице 3, где используются следующие обозначения:  $p_{\text{init}}$  – количество оболочек с фиксированным числом частиц в начальной конфигурации;  $I_{\text{GMD}}$  – общее количество итераций для достижения глобального минимума по энергии  $E_{\text{GS}}$ ;  $P$  (%) – вероятность достижения глобального минимума по энергии  $E_{\text{GS}}$ ;  $t$  – время вычислений в секундах;  $t_r$  – время вычислений в секундах с помощью пакета Wolfram Mathematica количества частиц на  $p_{\text{init}}$  внешних оболочках в начальной конфигурации. При вычислениях с двойной точностью методом молекулярной динамики для системы, состоящей из  $N$  частиц, объем необходимой памяти в байтах оценивается величиной порядка  $\sim 96N$ . Например, для  $N = 187$  затраты памяти составляют  $\sim 17952$  байта. Легко убедиться в совпадении всех значащих цифр, кроме

Таблица 3. Сравнение трудоемкости расчетов для  $N = 187$ , количества колец  $p = 6$ , энергии основного состояния  $E_{GS} = 23\,652,18798$  в приведенных единицах (см. формулу (2) при  $\alpha = 1$ ). Здесь  $p_{init}$  — количество оболочек с фиксированным числом частиц в начальной конфигурации.  $I_{GMD}$  — общее количество итераций для достижения глобального минимума по энергии  $E_{GS}$ .  $P$  (%) — вероятность достижения глобального минимума по энергии  $E_{GS}$ .  $t$  — время вычислений в секундах для процессора Intel(R) Xeon(R) CPU E5-2695 v3 @ 2,30 GHz.  $t_r$  — время вычислений в секундах с помощью пакета Wolfram Mathematica количества частиц на  $p_{init}$  внешних оболочках в начальной конфигурации для процессора Intel(R) Core(TM) i5-4440 CPU @ 3,10 GHz

$p_{init}$	$I_{GMD}$	$P$ (%)	$E_{GS}$	$t$	$t_r$
0	$2,5 \cdot 10^8$	0,88	23 653,0502	$1,06 \cdot 10^5$	—
1	3 688 125	6,30	23 652,1883	1592,33	0,08
2	1 202 040	19,17	23 652,1881	587,84	0,40
3	756 317	30,07	23 652,1880	386,70	1,95
4	227 526	86,12	23 652,1880	166,57	9,77

верхней строчки таблицы, где приведены результаты расчетов для начальной конфигурации частиц, заданной случайным образом.

Таблица 4 позволяет оценить точность вычислений энергии основного состояния для устойчивой конфигурации при различном количестве оболочек  $p$ . В таблице приведены расчеты для конфигураций с заполненными оболочками (кольцами). В первом столбце таблицы приведены значения количества колец  $p$ . Во втором — полное число частиц в системе. В третьем столбце приведены значения энергии равновесной конфигурации (основного состояния) системы в приведенных единицах, полученных при помощи предложенного авторами алгоритма. В четвертом столбце для сравнения с расчетами авторов представлены значения соответствующих минимумов энергии, взятых из уже упоминавшейся работы [Nazmitdinov et al., 2017]. Как видно из таблицы, полученные авторами результаты находятся в хорошем согласии с результатами расчетов из работы [Nazmitdinov et al., 2017].

Таблица 4. Анализ точности вычислений. Здесь  $p$  — количество заполненных оболочек в основном состоянии с минимумом энергии  $E_{GS}$ ;  $N$  — общее число частиц в системе;  $E_{GS}$  — значения энергии основного состояния, полученные авторами данной работы;  $E_{GS}^1$  — значения энергии основного состояния, полученные в работе [Nazmitdinov et al., 2017]

$p$	$N$	$E_{GS}$	$E_{GS}^1$
1	12	59,57568	59,576
2	30	479,07957	479,080
3	56	1862,64973	1862,650
4	92	5358,35363	5358,353
5	136	12 181,34530	12 181,345
6	187	23 652,18798	23 652,188
7	248	42 446,27784	42 446,278

На рис. 1 в виде гистограмм представлены результаты вычислений методом молекулярной динамики распределения частиц с минимальной энергией для различных начальных конфигураций. На гистограммах представлены вероятности  $P$  (%) получения значений минимумов энергии, достигнутых в соответствующих запусках для различных начальных конфигураций. При этом каждая гистограмма соответствует определенному количеству колец  $p_{init}$ , зафиксированных в начальной конфигурации. Для произвольного, полностью случайного начального распределения частиц внутри круговой области соответствующие вероятности представлены на рис. 2.

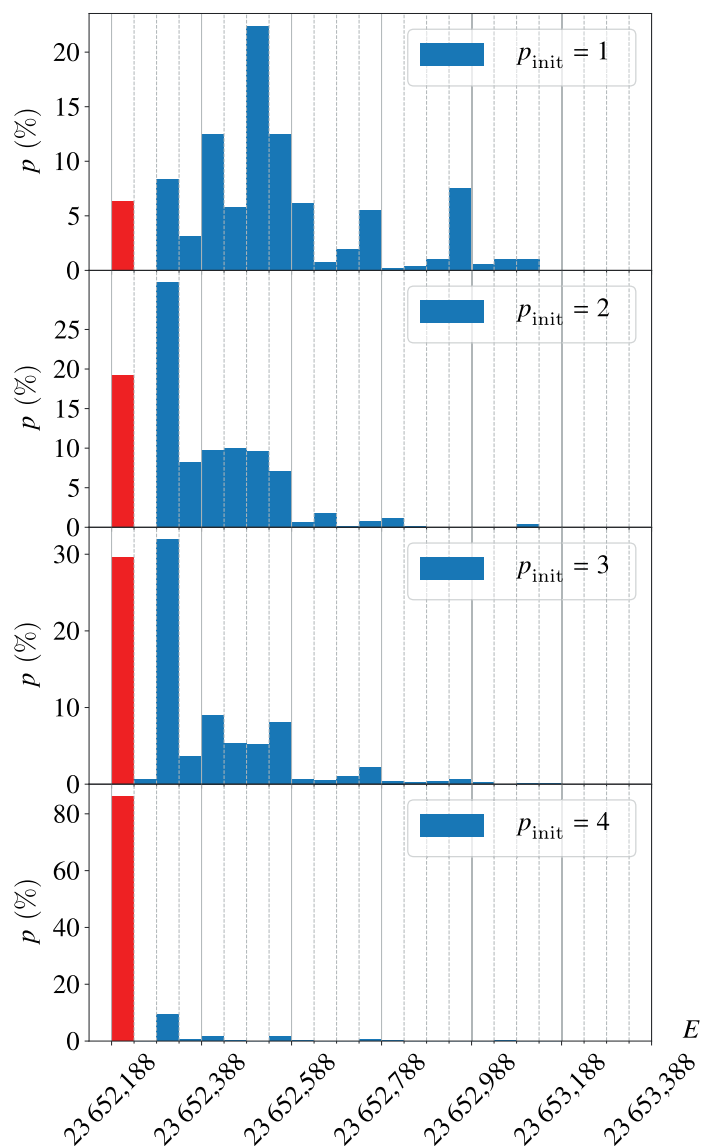


Рис. 1. Результаты вычислений методом молекулярной динамики распределения частиц по энергии для различных начальных конфигураций. Количество зафиксированных в начальном распределении колец  $p_{init} = 1, 2, 3, 4$  соответственно.  $P$  (%) (ось ординат) — вероятность достижения глобального минимума по энергии в процентах,  $E$  (ось абсцисс) — энергия в приведенных единицах (см. формулу (2) при  $\alpha = 1$ ). Величина красного бина соответствует вероятности достижения равновесной конфигурации с минимумом энергии  $E_{GS}$

## Заключение

В данной работе представлены результаты численного анализа равновесных конфигураций одноименно заряженных частиц (электронов), запертых в круговой области бесконечным внешним потенциалом на ее границе. Для поиска устойчивых конфигураций с минимальной энергией нами разработан гибридный вычислительный алгоритм с использованием метода молекулярной динамики. Основой алгоритма является использование в качестве начальных данных для метода молекулярной динамики результатов решения системы нелинейных уравнений, полученных из принципа минимизации энергии конечного числа частиц. Данная минимизация позволяет опре-



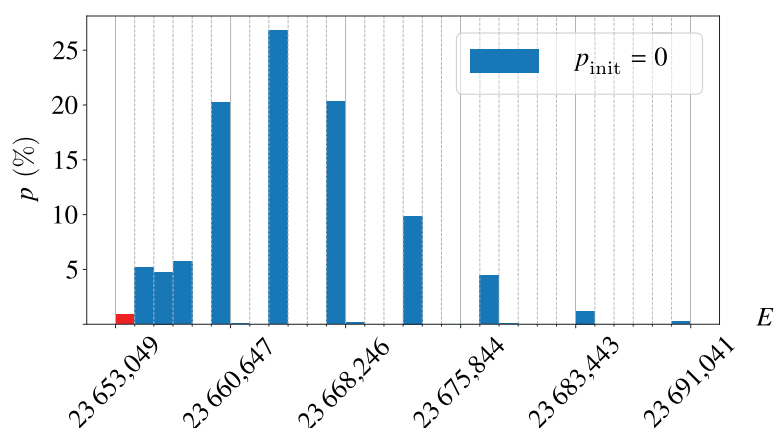


Рис. 2. Результаты вычислений методом молекулярной динамики распределения частиц по энергии для произвольного, полностью случайного начального распределения частиц внутри круговой области. Количество зафиксированных в начальном распределении колец  $p_{\text{init}} = 0$ .  $P$  (%) (ось ординат) — вероятность достижения глобального минимума по энергии,  $E$  (ось абсцисс) — энергия в приведенных единицах (см. формулу (2) при  $\alpha = 1$ ). Величина красного бина соответствует вероятности достижения равновесной конфигурации с минимумом энергии  $E_{\text{GS}}$

делить образование основного устойчивого состояния в виде серии колец (оболочек). В каждом кольце локализовано определенное число частиц, которое убывает по мере движения от граничного кольца к центральному. С использованием результатов решения уравнений нами получены интерполяционные формулы зависимости распределения числа частиц от номера кольца, которые позволяют значительно повысить скорость достижения равновесной конфигурации для произвольно выбранного числа частиц по сравнению с традиционным методом молекулярной динамики, алгоритмом имитации отжига Метрополиса и другими алгоритмами, основанными на методах глобальной оптимизации. Разработанные авторами алгоритмы и программы могут быть использованы для численного исследования устойчивости систем одноименно заряженных частиц в различных областях физики, химии, молекулярной биологии и нанотехнологий.

## Список литературы (References)

- Bedanov V.M., Peeters F.M. Ordering and phase transitions of charged particles in a classical finite two-dimensional system // Phys. Rev. B. — 1994. — Vol. 49, No. 4. — P. 2667–2676.
- Binks B.P., Horozov T.S. Colloidal Particles at Liquid Interfaces. — Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2006. — 519 p.
- Birman J.L., Nazmitdinov R. G., Yukalov V.I. Effects of symmetry breaking in finite quantum systems // Rhys. Reps. — 2013. — Vol. 526, Issue 1. — P. 1–91.
- Bolton F., Rössler U. Classical model of a Wigner crystal in a quantum dot // Superlatt. Microstruct. — 1993. — Vol. 13, Issue 2. — P. 139–147.
- Bowick M.J., Giomi L. Two-dimensional matter: order, curvature and defects // Adv. Phys. — 2009. — Vol. 58, Issue 5. — P. 449–563.
- Cerkaski M., Nazmitdinov R. G., Puente A. Thomson rings in a disk // Phys. Rev. E. — 2015. — Vol. 91. — 032312. — P. 1–5.
- Koulakov A. A., Shklovskii B. I. Charging spectrum of a small Wigner crystal island // Philos. Mag. B. — 1998. — Vol. 77. — P. 1235–1247; Charging spectrum and configurations of a Wigner crystal island // Phys. Rev. B. — 1998. — Vol. 57, No. 4. — P. 2352–2367.

- Leunissen M. E., van Blaaderen A., Hollingsworth A. D., Sullivan M. T., Chaikin P. M.* Electrostatics at the oil–water interface, stability, and order in emulsions and colloids // *Proc. Natl. Acad. Sci.* — 2007. — Vol. 104, No. 8. — P. 2585–2590.
- Lozovik Yu. E., Mandelshtam V. A.* Classical and quantum melting of a Coulomb cluster in a trap // *Phys. Lett. A.* — 1992. — Vol. 165, Issue 5–6. — P. 469–472.
- Mughal A., Moore M. A.* Topological defects in the crystalline state of one-component plasmas of nonuniform density // *Phys. Rev. E.* — 2007. — Vol. 76, Issue 1. — P. 011606. — P. 1–18.
- Nazmitdinov R. G., Puente A., Cerkaski M., Pons M.* Self-organization of charged particles in circular geometry // *Phys. Rev. E.* — 2017. — Vol. 95. — P. 042603. — P. 1–11.
- Saarikoski H., Reimann S. M., Harju A., Manninen M.* Vortices in quantum droplets: Analogies between boson and fermion systems // *Rev. Mod. Phys.* — 2010. — Vol. 82, Issue 3. — P. 2785–2834.
- Thomson J. J.* XXIV. On the structure of the atom: an investigation of the stability and periods of oscillation of a number of corpuscles arranged at equal intervals around the circumference of a circle; with application of the results to the theory of atomic structure // *Phil. Mag.* — 1904. — Vol. 7, Issue 39. — P. 237–265.
- Yao Z., Olvera de la Cruz M.* Topological Defects in Flat Geometry: The Role of Density Inhomogeneity // *Phys. Rev. Lett.* — 2013. — Vol. 111. — P. 115503. — P. 1–5.
- Wigner E. P.* On the Interaction of Electrons in Metals // *Phys. Rev.* — 1934. — Vol. 46. — P. 1002–1011.
- Worley A.* Minimal energy configurations for charged particles on a thin conducting disc: the perimeter particles // *arXiv:physics/0609231v1 [physics.gen-ph]* — 2006. — P. 1–16.