

УДК: 004.94

Моделирование кластерного движения беспилотных транспортных средств в гетерогенном транспортном потоке

Н. В. Быков

Российский университет транспорта (МИИТ),
Россия, 127994, г. Москва, ул. Образцова, д. 9, стр. 9

E-mail: nik.bkv@gmail.com

Получено 09.03.2022, после доработки — 25.07.2022.

Принято к публикации 25.07.2022.

Одной из особенностей беспилотных автомобильных транспортных средств является их способность к организованному движению в форме кластеров: последовательности движущихся с единой скоростью транспортных средств. Влияние образования и движения этих кластеров на динамику транспортных потоков представляет большой интерес. В настоящей работе предложена качественная имитационная модель кластерного движения беспилотных транспортных средств в гетерогенной транспортной системе, состоящей из двух типов агентов (транспортных средств): управляемых человеком и беспилотных. В основу описания временной эволюции системы положены правила 184 и 240 для элементарных клеточных автоматов. Управляемые человеком транспортные средства перемещаются по правилу 184 с добавлением случайного торможения, вероятность которого зависит от расстояния до находящегося впереди транспортного средства. Для беспилотных транспортных средств используется комбинация правил, в том числе в зависимости от типа ближайших соседей, в некоторых случаях независимо от расстояния до них, что привносит в модель нелокальное взаимодействие. При этом учтено, что группа последовательно движущихся беспилотных транспортных средств может сформировать организованный кластер. Исследовано влияние соотношения типов транспортных средств в системе на характеристики транспортного потока при свободном движении на круговой однополосной и двухполосной дорогах, а также при наличии светофора. Результаты моделирования показали, что эффект образования кластеров имеет существенное влияние при свободном движении, а наличие светофора снижает положительный эффект приблизительно вдвое. Также исследовано движение кластеров из беспилотных автомобилей на двухполосных дорогах с возможностью перестроения. Показано, что учет при перестроении беспилотными транспортными средствами типов соседних транспортных средств (беспилотное или управляемое человеком) положительно влияет на характеристики транспортного потока.

Ключевые слова: клеточные автоматы, транспортные потоки, беспилотные автомобили, мультиагентные системы, компьютерное моделирование, гетерогенный трафик, интеллектуальные транспортные системы, кластерное движение

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 19-29-06090мк.

UDC: 004.94

A simulation model of connected automated vehicles platoon dynamics in a heterogeneous traffic flow

N. V. Bykov

Russian University of Transport (RUT-MIIT),
9/9 Obraztsova st., Moscow, 127994, Russia

E-mail: nik.bkv@gmail.com

*Received 09.03.2022, after completion – 25.07.2022.
Accepted for publication 25.07.2022.*

The gradual incorporation of automated vehicles into the global transport networks leads to the need to develop tools to assess the impact of this process on various aspects of traffic. This implies a more organized movement of automated vehicles which can form uniformly moving platoons. The influence of the formation and movement of these platoons on the dynamics of traffic flow is of great interest. The currently most developed traffic flow models are based on the cellular automaton approach. They are mainly developed in the direction of increasing accuracy. This inevitably leads to the complication of models, which in their modern form have significantly moved away from the original philosophy of cellular automata, which implies simplicity and schematicity of models at the level of evolution rules, leading, however, to a complex organized behavior of the system. In the present paper, a simulation model of connected automated vehicles platoon dynamics in a heterogeneous transport system is proposed, consisting of two types of agents (vehicles): human-driven and automated. The description of the temporal evolution of the system is based on modified rules 184 and 240 for elementary cellular automata. Human-driven vehicles move according to rule 184 with the addition of accidental braking, the probability of which depends on the distance to the vehicle in front. For automated vehicles, a combination of rules is used depending on the type of nearest neighbors, regardless of the distance to them, which brings non-local interaction to the model. At the same time, it is considered that a group of sequentially moving connected automated vehicles can form an organized platoon. The influence of the ratio of types of vehicles in the system on the characteristics of the traffic flow during free movement on a circular one-lane and two-lane roads, as well as in the presence of a traffic light, is studied. The simulation results show that the effect of platoon formation is significant for a freeway traffic flow; the presence of a traffic light reduces the positive effect by about half. The movement of platoons of connected automated vehicles on two-lane roads with the possibility of lane changing was also studied. It is shown that considering the types of neighboring vehicles (automated or human-driven) when changing lanes for automated vehicles has a positive effect on the characteristics of the traffic flow.

Keywords: computer simulation, traffic flow, cellular automata, multi-agent system, automated vehicles, heterogeneous traffic, platoon dynamics

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2022, vol. 14, no. 5, pp. 1041–1058 (Russian).

The research was supported by Russian Foundation for Basic Research (RFBR), project 19-29-06090mk.

1. Введение

Целью настоящей работы является разработка простой модели кластерного движения беспилотных автомобильных транспортных средств (БАТС) в гетерогенном транспортном потоке с двумя типами агентов — БАТС и управляемыми человеком автомобильными транспортными средствами (АТС) — на основе клеточных автоматов (КА), позволяющей качественно воспроизводить основные характеристики транспортного потока и оценивать влияние соотношения АТС различного типа на пропускную способность и другие макроскопические характеристики. Таким образом, основным результатом предлагаемой работы являются не количественные предсказания, а, скорее, качественное объяснение процессов внедрения БАТС в транспортные системы городов будущего. Основным объектом исследования являются кластеры БАТС и их влияние на транспортный поток. Для этого рассмотрены случаи однополосной кольцевой дороги, однополосной кольцевой дороги со светофором, а также двухполосной дороги с возможностью перестроения, в которой для БАТС введены специальные правила. Основным инструментом исследования является имитационное (компьютерное) моделирование.

БАТС быстро становятся частью повседневной картины автомобильного движения: такие производители, как Waymo (Google), Aptiv, Baidu, General Motors Cruise и «Яндекс», уже тестируют свои БАТС на дорогах общего пользования. Разработкой этих технологий занимаются также Tesla, Volkswagen, Audi, BMW, Volvo, Nissan, Jaguar Land Rover, Cognitive Technologies, КамАЗ и другие. Внедрение БАТС в традиционные транспортные системы приводит к возникновению гетерогенного трафика, т. е. такого транспортного потока, в котором присутствуют как минимум два различных (в данном случае с точки зрения управления) типа АТС: управляемые человеком и беспилотные. При этом в перспективе доля БАТС в общем числе АТС будет только увеличиваться.

Согласно современным концепциям транспортных систем умного города БАТС могут взаимодействовать с дорожной инфраструктурой посредством интерфейсов V2I (англ. vehicle-to-infrastructure) или же непосредственно друг с другом посредством интерфейсов V2V (англ. vehicle-to-vehicle) [Meneguetta et al., 2018]. В результате этого взаимодействия БАТС могут не только оценивать скорости и расстояния до окружающих объектов (других АТС, препятствий и так далее) посредством встроенной системы датчиков, но и обмениваться с такими же БАТС или наземной инфраструктурой информацией об их текущем состоянии и намерениях (например, таким образом можно узнать ускорение другого БАТС). Это позволяет группе БАТС создавать синхронизированные кластеры, движущиеся с одинаковой скоростью как единое целое, что в итоге должно приводить к увеличению средней скорости и уменьшению числа заторов на дорогах.

Для развития транспортной инфраструктуры, включающей БАТС, необходимо создавать новые математические и компьютерные модели, описывающие совместное движение БАТС и управляемых человеком АТС. Основной проблемой на этом пути является отсутствие эмпирических данных о таких транспортных потоках — достаточное количество БАТС в настоящее время просто не создано. Кроме того, существуют различные технические и этические разногласия на пути создания системы управления БАТС. В связи с этим ни одна из созданных на данный момент моделей гетерогенного трафика, строго говоря, не может быть валидирована при помощи экспериментальных данных [Imran et al., 2020; Rodaro, Yeldan, 2013; Vranken et al., 2021; Ye, Yamamoto, 2018]. В силу этих обстоятельств, вероятно, роль точных количественных моделей на этом этапе не столь важна и для понимания качественных феноменов динамики транспортных потоков сохраняют ценность простые модели демонстрационного характера.

В исследовании движения АТС существуют два больших направления. Первое, более фундаментальное, направление нацелено на построение моделей динамики АТС на различных масштабах и находится на стыке статистической физики и компьютерного моделирования. С точки

зрения статистической физики транспортный поток является собой вид многочастичной системы с сильно взаимодействующими целенаправленно движущимися частицами [Schreckenberg et al., 1995]. Второе направление связано с моделированием конкретных улично-дорожных сетей с целью исследования возможности их изменения (см., например, [Kasatkina et al., 2021]). В настоящей работе освещено первое направление.

Существующие модели автомобильного трафика можно условно разделить на модели макро-, мезо- и микроуровня [Shi et al., 2016; Treiber, Kesting, 2013; Гасников и др., 2013]. В моделях макроуровня транспортный поток уподоблен движению сплошной среды (их еще называют гидродинамическими), поэтому преимущественно они подходят для описания движения гомогенных систем. Модели микроуровня гораздо лучше подходят для описания гетерогенного трафика, поскольку описывают на кинематическом уровне движение отдельных АТС. Модели мезоуровня занимают промежуточное положение между моделями макро- и микроуровня и в основном являются усредненными моделями микроуровня; подход к их построению аналогичен подходу кинетической теории к описанию движения газовых систем. Следует отметить, что со времени создания первых моделей транспортных потоков объект моделирования (АТС) довольно существенно изменился. Современные АТС стали более интеллектуальными, в процессе движения они используют не только локальную информацию о состоянии ближайших соседей, но также и глобальную информацию (обмен с инфраструктурой). Таким образом, подход к моделированию, связанный с аналогией с физическими системами, становится более ограниченным в применении, хотя и сохраняет свою актуальность.

Модели микроуровня делятся на модели следования за лидером и модели на основе КА, которые в последнее время и получили основное развитие. Это связано с несколькими факторами: простота реализации, вычислительное быстродействие, простое распараллеливание вычислений, а также то, что они хорошо воспроизводят эмпирические данные. За последние тридцать лет было предложено большое количество КА-моделей транспортных потоков, преимущественно они являются развитием основополагающей модели Нагеля и Шрекенберга (НШ) [Nagel, Schreckenberg, 1992; Schreckenberg et al., 1995], в которой скорость АТС представлена пятью дискретными значениями. Главным образом все модели различаются стохастической составляющей и способом учета эффектов медленного старта, быстрого старта, случайного торможения и так далее. В 2000-х годах появились КА-модели, модифицированные в соответствии с теорией трех фаз Кёрнера [Kerner et al., 2002; Kokubo, Tanimoto, Nagishima, 2011], согласно которой в транспортном потоке можно выделить три фазы: свободный поток, синхронизированный поток и широкий движущийся кластер [Kerner, 2004], что отличает ее от классических моделей, базирующихся на предпосылке фундаментальной диаграммы (эмпирическая зависимость плотности потока АТС от числа АТС, приходящихся на единицу длины дороги), в которых есть только две фазы: свободный поток и плотный поток. Несмотря на вводимые в модели усложнения, они остаются достаточно простыми и наглядными с точки зрения их интерпретации. Однако некоторые современные попытки создания КА-моделей для описания гетерогенного трафика, включающего БАТС, привели к тому, что для обеспечения необходимой для обмена информацией между БАТС временной дискретизации (порядка 0,1 с) одно АТС в модели имеет длину 500 клеток [Jiang et al., 2021; Vranken et al., 2021]. Такой подход обеспечивает повышение точности, но при этом скорее похож на конечно-разностную аппроксимацию непрерывного процесса с относительно высоким разрешением и уже практически не имеет ничего общего классической идеологией подхода КА. В последнем обычно подразумеваются простота и даже некоторая схематичность модели микроуровня, которая позволяет получить относительно реалистичные характеристики системы на макроуровне или как минимум описать некоторые важные свойства системы. В этой ситуации кажется разумным вернуться к более простым моделям и попытаться сделать некоторые рабочие предсказания о процессе на их основе.

Первоначальной основой моделей транспортных потоков является модель, базирующаяся на правиле 184 Вольфрама для элементарных клеточных автоматов (ЭКА). Под ЭКА понимается одномерный КА с бинарным состоянием ячеек, эволюция каждой ячейки во времени для которого определяется только состоянием самой ячейки и двух ее ближайших соседей. Интересно отметить, что параллельно с развитием моделей типа НШ были предложены модели довольно сложных транспортных систем (например, всего города Женева [Dupuis, Chopard, 2003]) на основе правила 184 [Chopard et al., 1996]. Так, в работах [Rosenblueth, Gershenson, 2010; Zapotecatl et al., 2017] предложено описание движения АТС при наличии перекрестков с помощью консервативной (в смысле сохранения числа АТС) комбинации элементарных правил 184, 252 и 136. При этом последние два правила используются только на ближайших к перекресткам клетках (до и после) при включении красного света.

В современных КА-моделях транспортных потоков зачастую сложно провести четкую границу между традиционным подходом КА и мультиагентной системой. В традиционных КА-моделях акцент делается на семантику Цузе, согласно которой ячейка (участок дороги) может содержать только одно АТС, что по смыслу отличается от мультиагентных моделей (семантика Цетлина) [Матюшкин, Заплетина, 2019].

Подобные упрощенные модели в теоретическом плане являются частным случаем так называемых асимметричных синхронных процессов с запретами (англ. synchronous asymmetric exclusion processes), впервые описанных в статье [Spitzer, 1970], и представляют собой следующую сущность. Имеется дискретный ориентированный контур, на котором задано направление движения (в отличие от общего случая, в котором движение частиц возможно в обе стороны с различными вероятностями, в этом случае направление движения только одно; иными словами, вероятность движения в обратном направлении равна нулю), состоящий из n ячеек, в котором находится m частиц, $m < n$. В любой дискретный момент времени каждая частица находится в ячейке. При этом в одной ячейке не может находиться более одной частицы. На каждом шаге по времени частицы пытаются переместиться в ближайшую по направлению движения ячейку, если она не занята другой частицей. Правила этого перемещения обычно и представляют основной интерес. Ряд работ посвящен аналитическим исследованиям таких систем применительно к дорожному трафику [Blank, 2010; Tatashev, Yashina, 2019; Yashina, Tatashev, 2018]. В работе [Gray, Griffeth, 2001] аналитически исследованы некоторые правила динамики транспортных потоков, включая круиз-контроль, при этом вероятность перехода в новое состояние зависит не только от состояния текущей ячейки и двух соседних, но и через одну по направлению движения.

Простые модели транспортных потоков, в которых АТС перемещаются только на одну ячейку за шаг по времени, обычно критикуются в связи с неудобством их масштабирования. Так, если в модели НШ одна клетка имеет длину порядка 7,5 м, а шаг по времени — 1 с, что позволяет моделировать дискретный набор скоростей от 0 до 135 км/ч с шагом 27 км/ч, то в моделях типа правила 184 имеется только одно возможное значение скорости. В работе [Rosenblueth, Gershenson, 2010] предложено использовать масштаб одной клетки 5 м, таким образом, 1 км дороги соответствует 200 клеткам. При этом шаг по времени составляет $\frac{1}{3}$ с, скорость, следовательно, — 54 км/ч. По порядку величины это примерно соответствует скорости в черте города. Естественно, в этом случае возникает нереалистичное ускорение, однако это можно считать платой за простоту модели.

2. Модель гетерогенного транспортного потока

2.1. Модель гетерогенного транспортного потока на однополосной дороге

Самым первым правилом эволюции КА, которое использовалось для моделирования транспортных потоков и легло в основу более сложных моделей, является правило 184 Вольфрама, набор эволюционных паттернов для которого показан на рис. 1, а. Состояние клетки на

следующем шаге по времени зависит от ее состояния и состояний двух ближайших соседей на текущем шаге. По классификации ЭКА это правило относится ко второму классу периодических КА [Chopard, Droz, 1998; Wolfram, 1986].

Для однополосной дороги модель движения АТС на основе этого правила формулируется следующим образом. Дорога разбивается на дискретные элементы — клетки, в каждой из которых может находиться не более одного АТС. Состояние клетки может быть описано одним битом — клетка либо занята, либо свободна. При переходе на следующий дискретный шаг по времени ($t \rightarrow t + 1$) АТС из своей клетки перемещается в следующую по направлению движения, если она свободна. Если следующая клетка занята, АТС остается в исходной клетке. Это проиллюстрировано на рис. 1, б, на котором те АТС, которые перемещаются при переходе от t к $t + 1$, отмечены стрелками.

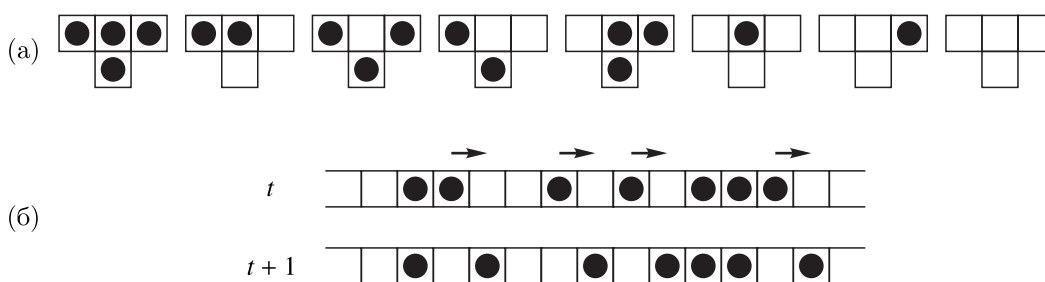


Рис. 1. Правило 184, описывающее эволюцию КА: а) эволюционные паттерны правила 184; б) иллюстрация для модели трафика (переход из состояния в момент времени t в состояние в момент времени $t + 1$)

Если x_i — текущее положение (номер ячейки) i -го АТС, а g_i — число незанятых клеток до находящегося впереди АТС, то

$$x_i(t + 1) = \begin{cases} x_i(t) + 1, & \text{если } g_i(t) > 0, \\ x_i(t), & \text{если } g_i(t) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

В работе [Belitsky, Ferrari, 2005] показано, что для такой модели при периодических граничных условиях асимптотическая плотность потока АТС (среднее число АТС, проходящих через заданную ячейку в единицу времени) определяется формулой

$$q(\rho) = \begin{cases} \rho, & \rho \leq \frac{1}{2}, \\ 1 - \rho, & \rho > \frac{1}{2}, \end{cases} \tag{2}$$

где ρ — плотность АТС (среднее число АТС, проходящее на одну ячейку в системе).

Для придания результатам моделирования большей схожести с эмпирическими данными в модель необходимо ввести элементы стохастичности, которые свойственны человеку-водителю при управлении АТС. Тогда шаг (1) выполняется с вероятностью P_i , которая зависит от расстояния до впереди едущего АТС:

$$x_i(t + 1) = \begin{cases} x_i(t) + 1, & \text{если } \text{rand}[0, 1] \leq P_i, \\ x_i(t) & \text{— в противном случае,} \end{cases} \tag{3}$$

где

$$P_i = \begin{cases} 0, & \text{если } g_i(t) = 0, \\ p_1, & \text{если } g_i(t) = 1, \\ p_2, & \text{если } g_i(t) = 2, \\ p_3, & \text{если } 3 \leq g_i(t) \leq g_{\max}, \\ 1, & \text{если } g_i(t) \geq g_{\max}. \end{cases}$$

Причем $p_1 \leq p_2 \leq p_3$. Здесь $\text{rand}[0, 1]$ – случайное действительное число, равномерно распределенное на отрезке $[0, 1]$.

В отличие от классической модели НШ, в которой вероятность торможения не зависит от состояния, модель (3) учитывает эффект медленного старта. При $g_i(t) \geq g_{\max}$ движение становится полностью детерминированным. Также в отличие от системы моделей, описанных в работе [Gray, Griffeth, 2001], предложенный переход в следующее состояние опирается не на состояние четырех ячеек (двух впереди и одной сзади от текущего АТС), а только на расстояние до ближайшего по направлению движения АТС и берет в расчет большее число ячеек (в зависимости от g_{\max}).

Основное различие между БАТС и управляемых человеком АТС состоит во времени реакции на изменение поведения впереди едущего АТС. Эта реакция определяется типами текущего и впереди движущегося АТС. В гетерогенном транспортном потоке из двух типов АТС может быть четыре типа следования (рис. 2, а):

- (а) управляемое человеком АТС – управляемое человеком АТС;
- (б) управляемое человеком АТС – БАТС;
- (с) БАТС – управляемое человеком АТС;
- (д) БАТС – БАТС.

Если АТС управляется человеком, то он, как правило, не знает, как управляется АТС впереди, поэтому можно считать, что в случаях (а) и (б) модель движения АТС одна и та же и описывается стохастическим правилом (3).

Процесс следования БАТС за управляемым человеком АТС определяется системой автоматического круиз-контроля. Основное допущение модели для беспилотных АТС состоит в том, что для них отсутствуют эффекты случайного торможения, присущие водителю-человеку. Поэтому для случая (с) движение определяется классическим правилом 184 (1).

Существенное отличие случая (д) от остальных состоит в том, что группа из последовательно движущихся БАТС может образовывать кластер из нескольких БАТС, который перемещается как единое целое за счет обмена информацией между БАТС через интерфейс V2V, характерное время которого много меньше шага по времени в модели (обычно этот шаг ~ 1 с, характерное же время обмена информацией для БАТС $\sim 0,1$ с). Для описания этого случая введем следующее правило эволюции:

- если впереди БАТС имеется свободная клетка, то оно в нее перемещается;
- если клетка перед БАТС занята другим БАТС, осуществляется проверка того, что перед последним имеется либо свободная клетка, либо следующее БАТС;
- если имеется непрерывный набор последовательно расположенных клеток длиной не более $S + 1$, занятых БАТС, впереди которого имеется свободная клетка, то все эти БАТС смещаются на одну клетку как единое целое (кластер).

Здесь S — максимальное число БАТС, которые могут следовать за лидером-БАТС, т. е. $S + 1$ — максимально допустимый размер кластера, состоящего из БАТС.

Таким образом, S клеток внутри кластера, в которых находятся БАТС, эволюционируют по правилу Вольфрама 240, а клетка, в которой находится лидер-БАТС, — по правилу 184.

На рис. 2, б показаны примеры движения различных АТС в гетерогенной транспортной системе, осуществляемые на основе описанных выше правил.

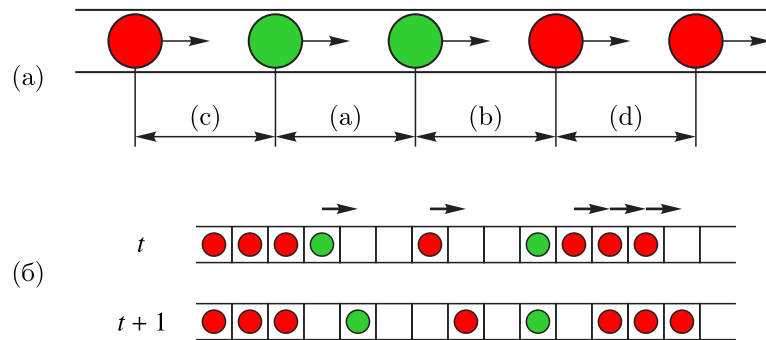


Рис. 2. Модель гетерогенного трафика (красные кружки — БАТС, зеленые — управляемые человеком АТС): а) типы следования АТС в гетерогенной транспортной системе: (а) управляемое человеком АТС — управляемое человеком АТС, (б) управляемое человеком АТС — БАТС, (с) БАТС — управляемое человеком АТС, (д) БАТС — БАТС; б) модель движения кластера из БАТС (переход из состояния в момент времени t в состояние в момент времени $t + 1$)

Несмотря на то что можно построить стохастический КА с расширенным набором состояний и правил эволюции, описывающий все указанные переходы, рассмотренной модели можно дать более наглядную интерпретацию: на топологию ленточного КА наложена мультиагентная модель, в которой правила перехода относятся к агентам.

Эта модель является развитием модели, предложенной ранее в работе [Быков, 2022]. В отличие от классического правила 184 модель (3) и предложенная модель движения кластера из БАТС не являются ЭКА: для их временной эволюции недостаточно информации о состояниях только соседних с текущей клеток, они являются комбинациями правил ЭКА, которые для различных ячеек зависят от состояния системы (например, находится ли в ячейке БАТС или управляемое человеком АТС).

Также следует отметить, что, несмотря на то, что как правило 240, отвечающее модели движения БАТС внутри кластера, так и правило 184 являются полностью детерминированными, тот факт, что обычно в начальный момент времени все АТС случайным образом распределены на дороге, приводит к стохастическому характеру результатов моделирования для любой модели движения АТС.

2.2. Модель движения на светофоре

БАТС позволяют реализовать такую систему управления, которая практически исключает эффект медленного старта за счет обмена информацией о скоростях и ускорениях находящихся впереди АТС. Медленный старт является одной из причин пониженной пропускной способности дорог и возникает при начале движения на светофорах и при выходе из заторов.

Рассмотрим случай, когда на круговой однополосной дороге находится светофор в клетке с координатой x_{il} . Светофор может находиться в двух режимах: зеленый и красный. При этом длительность горения зеленого света обозначим как T_g , а длительность горения красного света — как T_r . Тогда полный период работы светофора равен $T_g + T_r$.

Если светофор находится в режиме зеленого света, то движение описывается правилами, описанными в подпараграфе 2.1. Если светофор находится в режиме красного света, то любое АТС, попавшее на клетку с координатой x_{II} , останавливается и стоит до тех пор, пока светофор не перейдет в режим зеленого света. Таким образом, движение перед светофором с красным светом и после него моделируется правилами Вольфрама 252 и 136 соответственно, что совпадает с моделью, описанной в работах [Rosenblueth, Gershenson, 2010; Zapotecatl et al., 2017]. Особенность рассматриваемого случая состоит в наличии сочетания стохастичности в поведении управляемых человеком АТС, движущихся по правилу (3), а также БАТС, движущихся по правилам 184 и 240 (внутри кластера).

Примеры пространственно-временных диаграмм (x - t -диаграмм) при наличии светофора приведены на рис. 3. При этом рассмотрено три характерных случая: все АТС управляются человеком, т. е. доля управляемых человеком АТС $R_{HDV} = 1$ (рис. 3, а); все АТС — беспилотные, но не могут образовывать кластеры (рис. 3, б); все АТС — беспилотные и могут образовывать кластеры, состоящие не более чем из 6 БАТС, т. е. $S = 5$ (рис. 3, в).

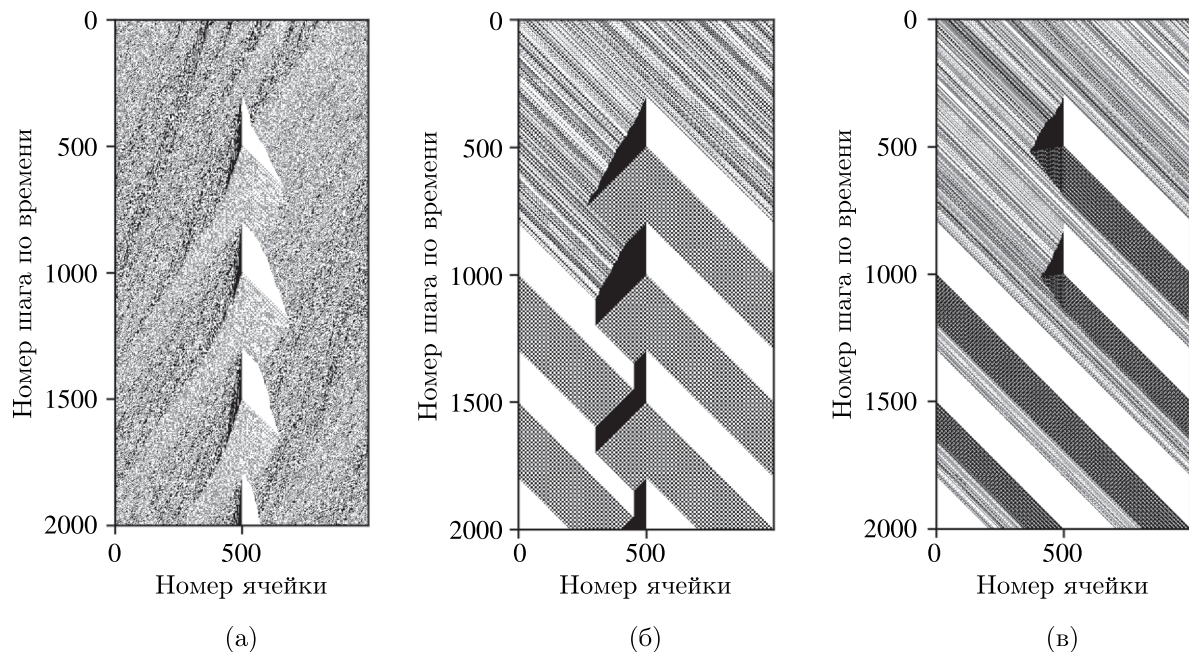


Рис. 3. Пространственно-временные диаграммы движения 350 АТС при длине однополосной дороги равной 1000 клеток (т. е. плотность АТС $\rho = 0,35$), для периодов работы светофора $T_g = 300$ (длительность зеленого сигнала) и $T_r = 200$ (длительность красного сигнала), находящегося в клетке с координатой $x_{II} = 500$: а) $R_{HDV} = 1$; б) $R_{HDV} = 0, S = 0$; в) $R_{HDV} = 0, S = 5$. Здесь R_{HDV} — доля АТС, управляемых человеком; $S + 1$ — максимальный размер кластера из БАТС

Из сравнения рис. 3, а, рис. 3, б и рис. 3, в видно существенное отличие характера движения БАТС и АТС, управляемых человеком. Сравнение рис. 3, а и рис. 3, б подтверждает эффективность образования кластеров из 6 БАТС, в результате которого достигаются синхронизация движения БАТС в системе и ликвидация заторов через несколько полных периодов работы светофора.

2.3. Правила перестроения в гетерогенном потоке для двухполосной дороги

Существует достаточно большое число правил поведения АТС при перестроениях на двух- и многополосных дорогах. Как правило, эти правила состоят из двух критериев:

- стимулирующего критерия, с помощью которого принимается решение о том, является ли выгодным перестроение при текущей ситуации;
- критерия безопасности, на основе которого принимается решение о том, безопасно ли перестроение, иными словами, не произойдет ли в этом случае столкновение или не создаст ли перестраивающееся АТС помеху движению другим АТС.

В случае моделей на основе вариации правила 184 перестроение обычно осуществляется упрощенным способом. Например, в работе [Belitsky et al., 2001] было предложено простое правило: если АТС не может двигаться вперед в текущей полосе, а в соседней полосе при условии возможности перестроения (клетка слева или справа от АТС свободна) оно имеет такую возможность, то оно перестраивается на соседнюю полосу. Такой подход, однако, пригоден только для простых правил движения АТС, таких, как правило 184.

Обозначим: g_f^{PL} — число свободных клеток до находящегося впереди по текущей полосе АТС; g_b^{AL} и g_f^{AL} — число свободных клеток до находящихся впереди и сзади соответственно по соседней полосе АТС (рис. 4).

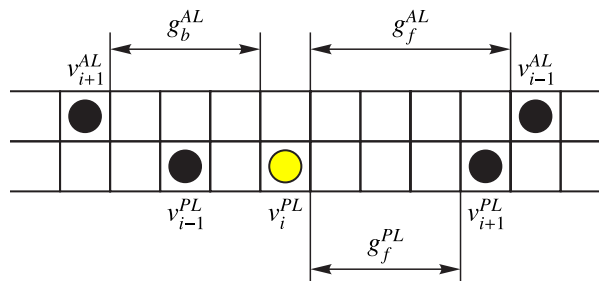


Рис. 4. К пояснению правил перестроения на двухполосной дороге: g_b^{AL} и g_f^{AL} — число свободных клеток до находящихся сзади и впереди соответственно АТС по соседней полосе; g_f^{PL} — число свободных клеток до едущего впереди в текущей полосе АТС; v_i^{PL} — скорость текущего (рассматриваемого) АТС; v_{i-1}^{AL} и v_{i+1}^{AL} — скорости едущих сзади и впереди соответственно АТС по соседней полосе; v_{i-1}^{PL} и v_{i+1}^{PL} — скорости едущих сзади и впереди соответственно АТС по текущей полосе

Стимулирующий критерий для управляемых человеком АТС, с учетом вероятностного характера их движения при малом числе свободных впереди клеток, может быть сформулирован в следующем варианте:

$$g_f^{PL} = 0 \quad \text{и} \quad g_f^{AL} \geq 1. \quad (4)$$

Таким образом, управляемое человеком АТС перестраивается, если оно не может двигаться в текущей полосе, а в соседней имеются одна или более свободных клеток в направлении движения.

Критерий безопасности также должен учитывать необходимость наличия хотя бы одной свободной клетки за АТС при перестроении, чтобы не создавать существенных помех движению в соседней полосе:

$$g_b^{AL} \geq 1. \quad (5)$$

Выбор таких критериев обусловлен тем, что в модели (3) АТС после перестроения может с определенной вероятностью не двинуться дальше, особенно если перед ним свободна только одна клетка, что приведет к снижению общей скорости на перестраиваемой полосе. Этого можно избежать, потребовав, чтобы минимальное число свободных клеток впереди и сзади АТС при перестроении было еще больше, однако это приведет к тому, что при средних и высоких плотностях АТС перестроения будут наблюдаться слишком редко по сравнению с реальной дорожной ситуацией.

При выполнении критериев (4) и (5) перестроение выполняется с некоторой вероятностью P_{CL} , которая в общем случае может зависеть от типа АТС.

Отсутствие эффекта случайного торможения в модели движения БАТС позволяет в стимулирующем критерии (4) отказаться от выдерживания некоторого расстояния перед БАТС при перестроении:

$$g_f^{PL} \leq 1 \quad \text{и} \quad g_f^{AL} \geq 0. \quad (6)$$

Первое условие в (6) учитывает возможное наличие образованного кластера.

Если при перестроении учитывать типы окружающих АТС, можно сформулировать довольно большое число дополнительных правил перестроения. Для примера исследуем следующее простое правило перестроения БАТС:

$$g_f^{PL} \leq 1 \quad \text{и} \quad g_f^{AL} \geq 0, \quad t_f^{AL} = \text{CAV} \quad \text{и} \quad t_f^{PL} \neq \text{CAV}, \quad (7)$$

где t_f^{AL} и t_b^{AL} — типы впереди и сзади едущих АТС в соседней полосе (БАТС – CAV, от англ. connected automated vehicle). Таким образом, БАТС перестраивается на соседнюю полосу не только при выполнении стимулирующего критерия (6), но и только тогда, когда на соседней полосе впереди находится БАТС, а на текущей впереди находится АТС, управляемое человеком.

Критерий безопасности для БАТС может быть также сформулирован с учетом типа АТС на соседней линии:

$$g_b^{AL} \geq 1 \quad \text{и} \quad t_b^{AL} \neq \text{CAV} \quad \text{или} \quad g_b^{AL} \geq 0 \quad \text{и} \quad t_b^{AL} = \text{CAV}, \quad (8)$$

то есть в случае, если при перестроении позади должно оказаться не БАТС, выполняется критерий безопасности (5), а в случае — если БАТС, нет необходимости выдерживать какое-то минимальное расстояние.

2.4. Топология транспортной сети и расчет макропараметров системы

Будем рассматривать классическую топологическую структуру транспортной сети — одно- или двухполосную дорогу с периодическими граничными условиями, которая эквивалентна замкнутой кольцевой дороге. В системе может присутствовать два типа агентов — управляемые человеком АТС и БАТС.

Описанная структура изображена на рис. 5 для однополосного (рис. 5, а) и двухполосного (рис. 5, б) случаев.

В силу периодических граничных условий полное число АТС в системе сохраняется, поэтому плотность АТС (среднее число АТС, приходящееся на одну клетку) не зависит от времени:

$$\rho = \frac{N}{nK}, \quad (9)$$

где N — полное число АТС в системе, n — число клеток в одной полосе, K — число полос движения.

Средняя скорость всех АТС в системе может быть вычислена по формуле

$$\bar{v} = \frac{1}{T_e} \sum_{t=T_s-1}^{T_s+T_e-1} \left[\frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} v_i(t) \right] = \frac{1}{T_e N} \sum_{t=T_s-1}^{T_s+T_e-1} \sum_{i=0}^{N-1} v_i(t), \quad (10)$$

где T_s — число шагов по времени, которое прошло с начала моделирования до достижения установившегося состояния системы; T_e — число шагов по времени, в течение которых производится снятие показаний (наблюдение).

Плотность потока АТС q с учетом (9) и (10) определяется следующим образом:

$$q = \rho \bar{v} = \frac{1}{T_e n K} \sum_{t=T_s}^{T_s+T_e-1} \sum_{i=0}^{N-1} v_i(t). \quad (11)$$

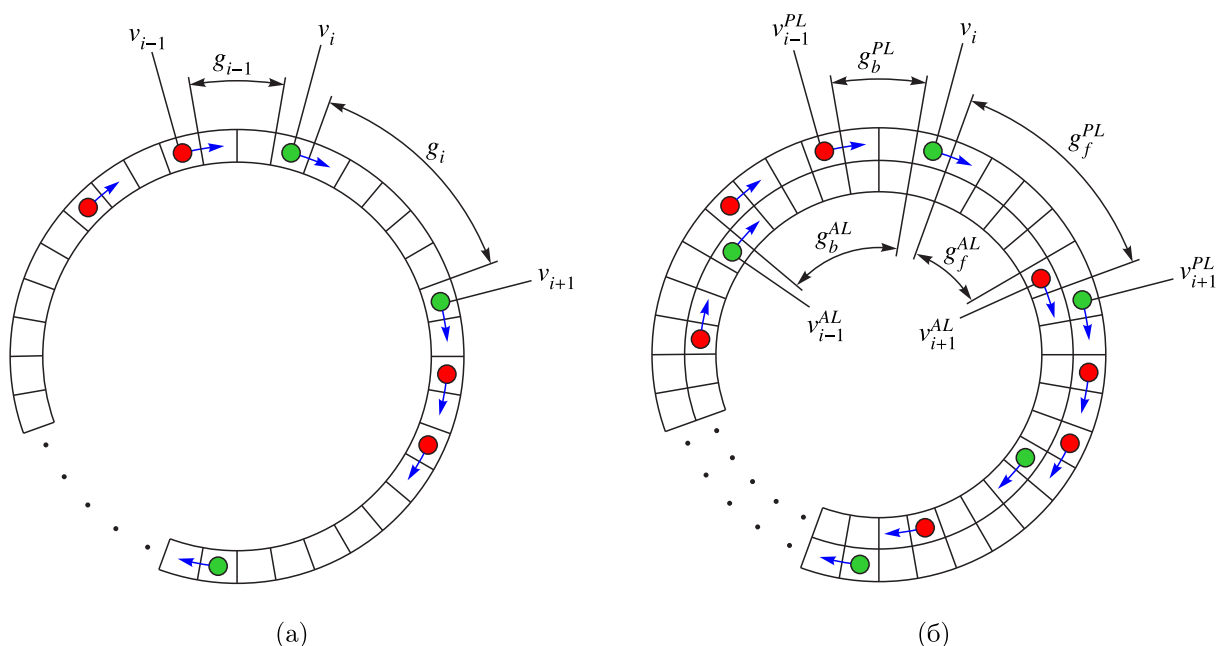


Рис. 5. Топология транспортной системы с периодическими граничными условиями: а) однополосная дорога: g_i — число свободных клеток до едущего впереди АТС, v_i — скорость текущего АТС, g_{i-1} — число свободных клеток до едущего сзади АТС, v_{i-1} и v_{i+1} — скорости едущих сзади и впереди АТС соответственно; б) двухполосная дорога: g_b^{AL} и g_f^{AL} — число свободных клеток до находящихся сзади и впереди соответственно АТС по соседней полосе, v_{i-1}^{AL} и v_{i+1}^{AL} — скорости едущих сзади и впереди соответственно АТС по соседней полосе, g_b^{PL} и g_f^{PL} — число свободных клеток до едущих сзади и впереди соответственно АТС по текущей полосе, v_{i-1}^{PL} и v_{i+1}^{PL} — скорости едущих сзади и впереди соответственно АТС по текущей полосе

В силу эргодичности рассматриваемой системы такой способ вычисления плотности потока эквивалентен расчету среднего числа АТС, пересекающих выбранную ячейку в единицу времени за общее время T_e .

Для каждой единичной симуляции системы (эпизода) в начальный момент заданное число АТС (в соответствии с их плотностью ρ и долей управляемых человеком АТС R_{HDV}) случайным образом равномерно размещается в nK клетках. Скорость всех АТС в начальный момент времени равна нулю. Сначала система моделируется в течение T_s шагов по времени для достижения установившегося состояния, а потом в течение T_e шагов рассчитываются средняя скорость (10) и поток (11).

При расчетах использовались следующие значения параметров модели (3): $p_1 = 0,1$, $p_2 = 0,3$, $p_3 = 0,95$, $g_{\max} = 5$. Число клеток в каждой полосе — $n = 1000$, число шагов по времени на установление — $T_s = 4000$, число шагов по времени, в течение которых снимаются показатели, — $T_e = 5000$. Интервал изменения плотности $[0, 1]$ разбивался на 1000 участков, т. е. шаг составлял ровно 1 АТС.

3. Результаты моделирования и обсуждение

3.1. Влияние доли беспилотных транспортных средств и размера кластера на характеристики потока на однополосной дороге

На рис. 6 показано влияние доли управляемых человеком АТС R_{HDV} на плотность потока АТС q на однополосной дороге. На рис. 6, а БАТС не могут образовывать кластеры ($S = 0$). Вид-

но, что тем не менее доля БАТС оказывает значительное влияние на поток транспортных средств, позволяя почти в три раза увеличить его при замене всех АТС беспилотными. Фундаментальная диаграмма (зависимость потока от плотности АТС) для случая $R_{HDV} = 0$ соответствует классическому правилу 184 (1) и описывается формулой (2). Результаты на рис. 6, б отвечают случаю, когда БАТС могут образовывать кластер длиной не более 4 единиц. Из сравнения рис. 6, а и рис. 6, б следует, что влияние эффекта кластеризации практически отсутствует при малой доле БАТС, поскольку вероятность успешного образования кластера в этом случае мала; однако, когда их доля превышает 70 % от общего числа транспортных средств, выигрыш становится более заметным, достигая увеличения приблизительно в 1,5 раза по сравнению со случаем $S = 0$.

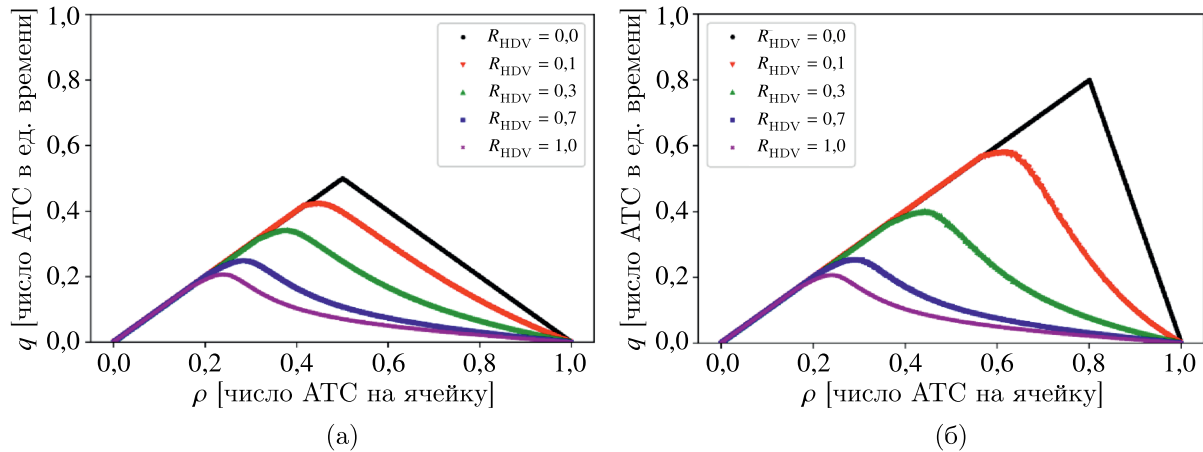


Рис. 6. Зависимость плотности потока АТС q от плотности АТС ρ (фундаментальные диаграммы) при различных долях управляемых человеком АТС (R_{HDV}): а) $S = 0$; б) $S = 3$, где $S + 1$ — максимальный размер кластера из БАТС

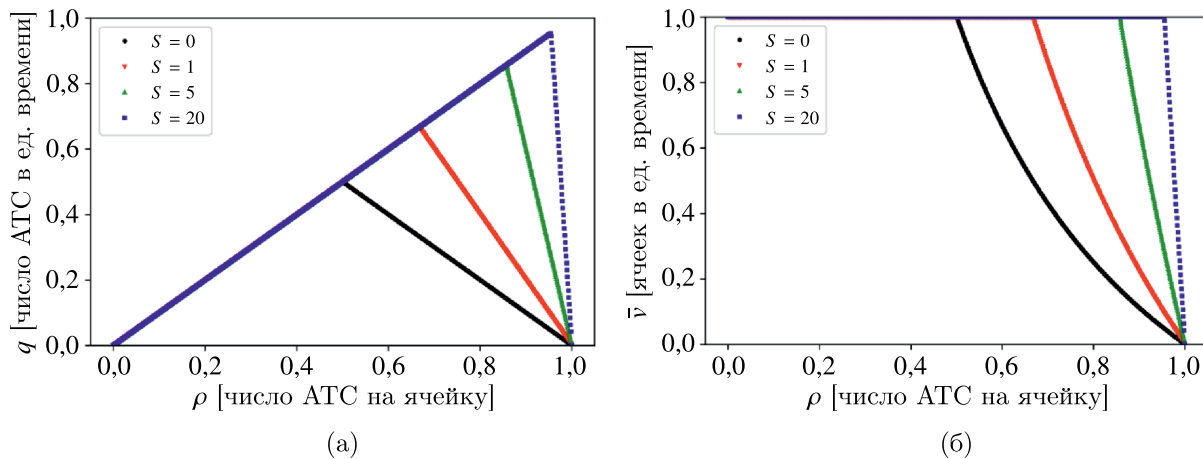


Рис. 7. Влияние максимального размера кластера из БАТС на поток и среднюю скорость в системе, состоящей только из БАТС: а) зависимость плотности потока АТС q от плотности АТС ρ (фундаментальные диаграммы); б) зависимость средней скорости БАТС \bar{v} от плотности ρ , где $S + 1$ — максимальный размер кластера из БАТС

Для иллюстрации влияния размера кластера S на основные характеристики транспортного потока на рис. 7 показаны фундаментальная диаграмма (рис. 7, а) и зависимость средней скорости от плотности (рис. 7, б) при $R_{HDV} = 0$ (т. е. когда БАТС составляют 100 % всех транспортных средств) при различных максимально допустимых размерах кластера.

Из этих результатов видно, что даже возможность образовывать кластер из двух БАТС ($S = 1$) позволяет заметным образом увеличить поток (от 0,5 до 0,65) и сместить точку фазового перехода от свободного потока к плотному (от 0,5 до 0,65 по плотности). Увеличение максимального размера кластера до 6 БАТС оказывает еще более заметный эффект. Наконец, размер кластера в 20 БАТС дает результат, близкий в предельном, соответствующему $S = N - 2$, когда в системе существует только одна свободная клетка, в которую на каждом шаге по времени двигается как целое кластер, сохраняя максимально возможный поток, близкий к 1. При этом добавление одного АТС в систему полностью прекращает движение, поскольку все клетки становятся занятыми. При $\rho \leq \frac{1}{2}$ кластеризация БАТС не оказывает влияния на поток.

С учетом идеализации движения кластера БАТС получен оптимистичный результат, согласно которому рост пропускной способности практически не ограничен при увеличении доли БАТС в транспортном потоке. Такой вывод, однако, качественно совпадает с результатами более сложного моделирования [Jiang et al., 2021].

3.2. Влияние наличия светофора на характеристики потока на однополосной дороге

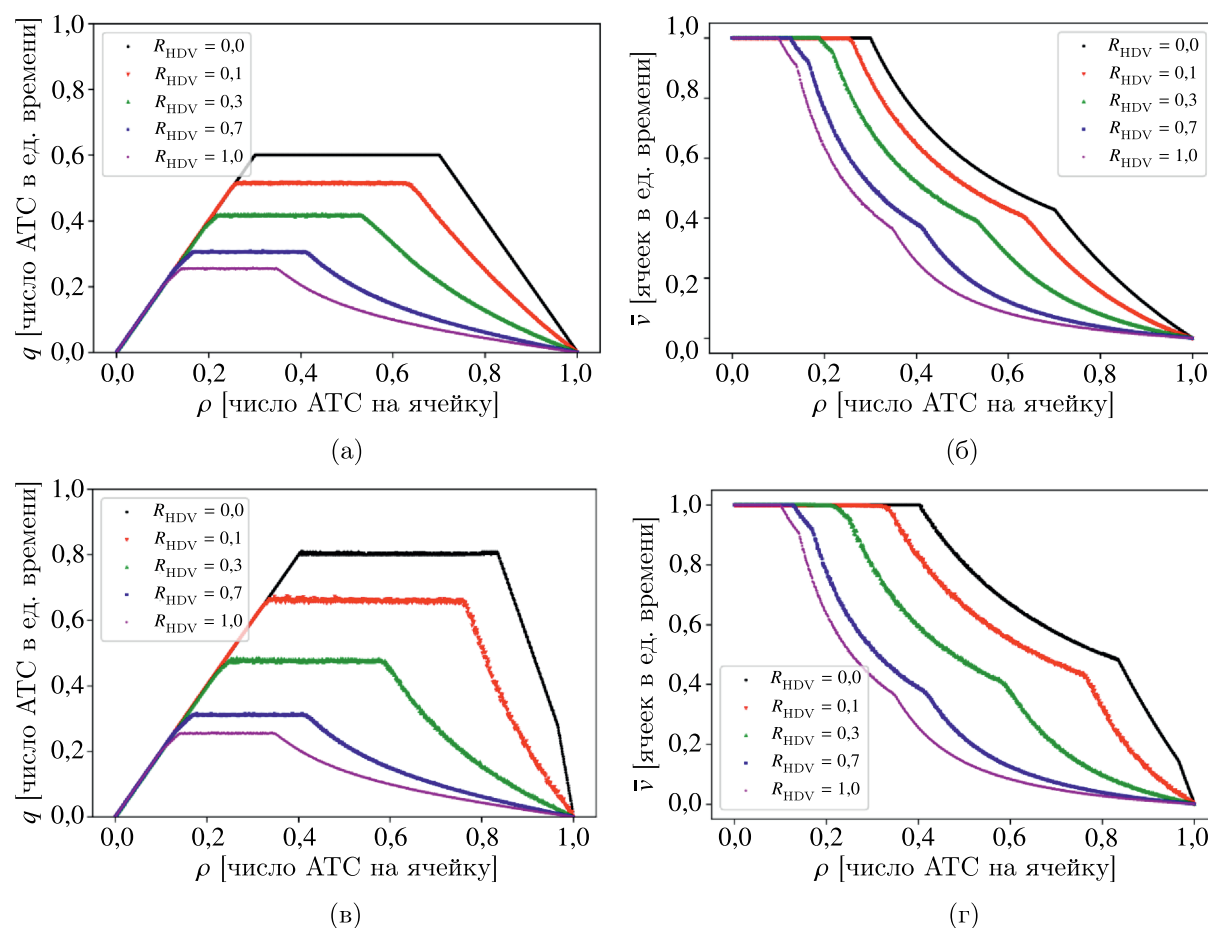


Рис. 8. Влияние доли управляемых человеком АТС R_{HDV} на поток и среднюю скорость на однополосной круговой дороге при наличии светофора: зависимость плотности потока АТС q от плотности АТС ρ (фундаментальные диаграммы) для $S = 0$ (а) и для $S = 3$ (в); зависимость средней скорости АТС \bar{v} от плотности АТС ρ для $S = 0$ (б) и для $S = 3$ (г). Здесь $S + 1$ — максимальный размер кластера из БАТС

Рассмотрим влияние эффекта кластеризации БАТС при наличии на круговой дороге светофора в клетке с координатой $x_{il} = 500$ и с периодами функционирования $T_g = 300$ и $T_r = 200$. Таким образом, полный период функционирования светофора составляет 500 шагов по времени. На рис. 8 показаны фундаментальные диаграммы и средняя скорость АТС при различных значениях R_{HDV} для случаев, когда БАТС не могут образовывать кластеры (рис. 8, а и б) и когда они могут образовывать кластеры длиной не более 4 БАТС (рис. 8, в и г).

В этом случае, хотя увеличение доли БАТС в системе позволяет повысить плотность потока АТС, эффект образования кластеров играет гораздо меньшую роль, чем на свободной дороге. Это объясняется тем, что светофор ограничивает максимальный поток, поэтому тот выигрыш, который дает кластеризация БАТС на свободной дороге, компенсируется ограничениями, которые вносит светофорное регулирование.

3.3. Влияние правил перестроения БАТС на двухполосной дороге на характеристики транспортного потока

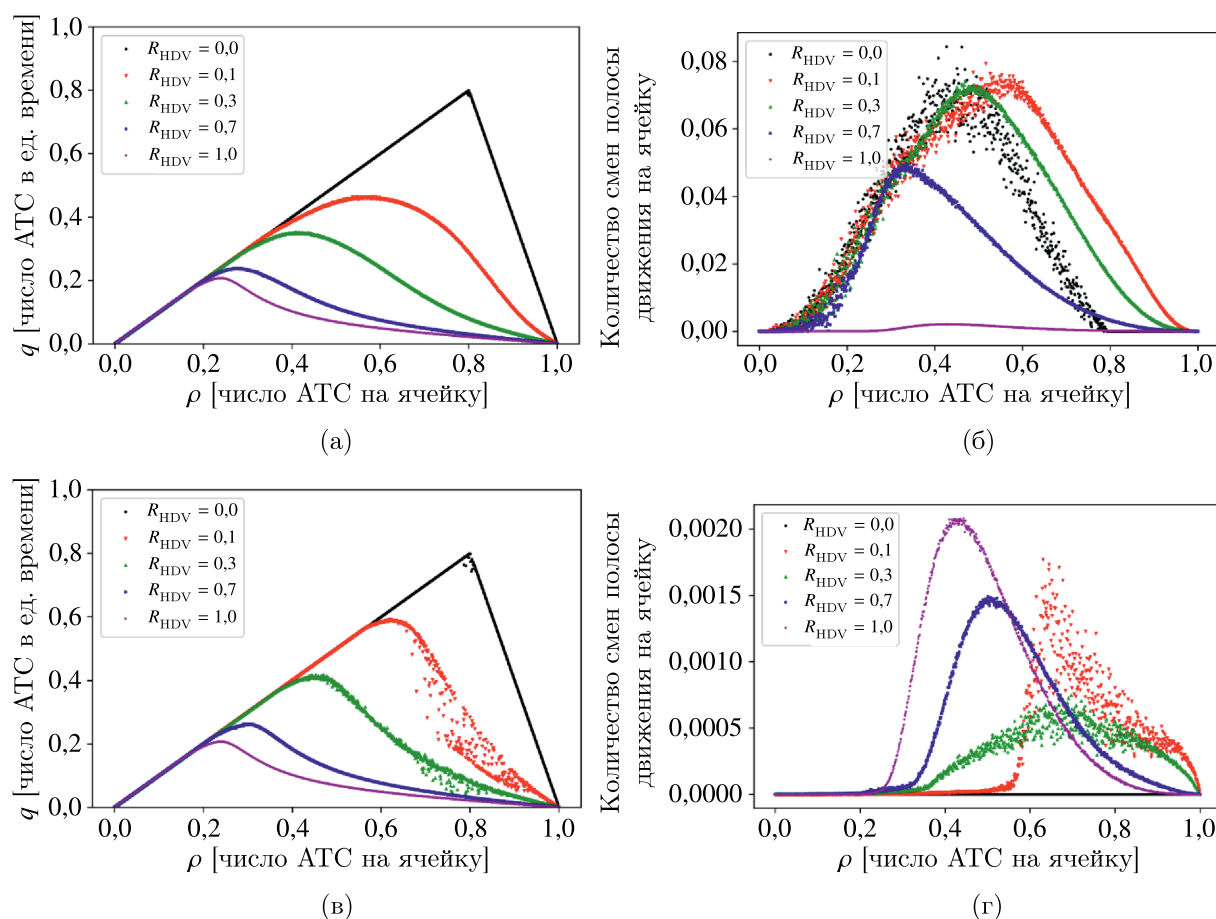


Рис. 9. Характеристики транспортного потока на двухполосной круговой дороге в зависимости от доли управляемых человеком АТС (R_{HDV}): зависимости плотности потока АТС q от плотности АТС ρ (фундаментальные диаграммы): а) для правила перестроения (6); в) для правила перестроения (7); зависимости частоты перестроений АТС (на ячейку): б) для правила перестроения (6); г) для правила перестроения (7)

Рассмотрим гетерогенное движение по двухполосной дороге. В качестве базового случая для сравнения возьмем ситуацию двухполосной дороги при полном отсутствии перестроения,

с возможностью для БАТС образовывать кластеры ($S = 3$). Легко понять, что в этом случае фундаментальная диаграмма совпадает с изображенной на рис. 6, б.

Зададим вероятность перестроения $P_{CL} = 0,5$. Сначала рассмотрим случай, когда БАТС перестраиваются, руководствуясь правилом (6), т. е. не учитывается тип АТС на другой полосе. Результаты показаны на рис. 9, а и б. Видно, что полученные характеристики ниже аналогичных при отсутствии перестроения (кроме случая $R_{HDV} = 0$), в особенности это касается случая малых значений $R_{HDV} > 0$. При высоких R_{HDV} вероятность образования кластеров и для однополосной дороги довольно низка, поэтому перестроения не оказывают такого существенного отрицательного воздействия. В то же время по мере увеличения доли БАТС остающиеся в системе управляемые человеком АТС при перестроении, в результате которого они оказываются между двух БАТС в одной полосе, препятствуют дальнейшему образованию кластера, поскольку не учитывают тип соседних АТС. Это доказывается тем, что при $R_{HDV} = 0$ перестроение никак не сказывается на потоке (ср. рис. 6, б и рис. 9, а).

Теперь рассмотрим случай, когда БАТС перестраиваются согласно правилу (7), т. е. тип соседних АТС учитывается. Результаты показаны на рис. 9, в и г. Из этих результатов видно, что перестроение БАТС в те линии, где уже есть БАТС впереди или сзади, позволяет повысить поток по сравнению с предыдущим случаем. Разброс значений потока на фундаментальной диаграмме обусловлен тем, что в этом случае итоговая конфигурация в части возможности образовывать кластеры при перестроении очень чувствительна к начальному состоянию системы и в целом подвержена большим флуктуациям установившихся значений.

4. Заключение

Предложенный подход к описанию гетерогенных транспортных потоков, содержащих управляемые человеком и беспилотные АТС, позволяет исследовать влияние соотношения этих типов АТС в общем транспортном потоке на пропускную способность и среднюю скорость.

Основным достоинством предложенного подхода является простота микроскопической модели движения АТС. В то же время это можно считать и недостатком: как и многие классические модели, эта модель корректно описывает только две основные фазы транспортного потока — свободный поток и плотный поток, в то время как фаза синхронизированного движения этой моделью не описывается. Поскольку классический подход КА, как и любое моделирование, должен отражать только существенные с точки зрения решаемой задачи стороны изучаемого явления, в данном случае это допустимо: с точки зрения вычисления макропараметров и влияния присутствия БАТС на поток наличие синхронизированной фазы в потоке управляемых человеком АТС можно считать несущественной деталью.

Проведенное моделирование показывает, что само по себе наличие БАТС в транспортном потоке позволяет существенно повысить пропускную способность трасс за счет отсутствия у них эффекта случайного торможения. Если при этом БАТС имеют возможность образовывать связанные кластеры, то пропускная способность может повыситься еще в 1,5–2 раза. Наличие светофоров на дороге снижает преимущество БАТС перед традиционными АТС: БАТС имеют существенное преимущество в среднем и плотном потоке на свободной дороге. На двухполосной дороге использование информации о типах находящихся вокруг АТС позволяет БАТС осуществлять перестроения более эффективно с точки зрения обеспечения более высоких значений транспортного потока.

В заключение следует указать на большую чувствительность процесса кластеризации к начальным условиям. Для случая топологии однополосной замкнутой ленты образование и длина кластера (при заданном параметре S) определяются только начальным размещением АТС, поскольку в этом случае перестановки АТС в процессе движения исключены. Поэтому образовавшиеся в начале кластеры будут сохраняться в процессе эволюции системы. Вероятность

образования кластера при равномерном случайном начальном размещении АТС обратно пропорциональна доле управляемых человеком АТС в системе. В двухленточной топологии с возможностью перестроения АТС между полосами появляется возможность увеличения длины текущих кластеров, создания новых кластеров и разрушения существующих при перестроении АТС. При этом учет типа АТС при перестроении приводит к увеличению потока АТС, но вносит большие флуктуации в установившиеся режимы функционирования системы. В то же время отказ от учета типа АТС при перестроении демонстрирует отсутствие флуктуаций, при этом поток АТС снижается по сравнению с одномерным случаем из-за эффекта разрушения кластеров.

Список литературы (References)

- Гасников А. В., Кленов С. Л., Нурминский Е. А., Холодов Я. А., Шамрай Н. Б.* Введение в математическое моделирование транспортных потоков / под ред. А. В. Гасникова. — М.: Издательство МЦНМО, 2013.
- Gasnikov A. V., Klenov S. L., Nurminskiy E. A., Kholodov Ya. A., Shamray N. B.* Vvedenie v matematicheskoye modelirovaniye transpornikh potokov [Introduction to mathematical simulation of traffic flow] / ed. by A. V. Gasnikov. — Moscow: MCNMO, 2013 (in Russian).
- Матюшкин И. В., Заплетина М. А.* Обзор по тематике клеточных автоматов на базе современных отечественных публикаций // Компьютерные исследования и моделирование. — 2019. — Т. 11, № 1. — С. 9–57. — DOI: 10.20537/2076-7633-2019-11-1-9-57
- Matyushkin I. V., Zapletina M. A.* Obzor po tematike kletochnykh avtomatov na baze sovremennykh otechestvennykh publikatsii [Cellular automata review based on modern domestic publications] // Computer Research and Modeling. — 2019. — Vol. 11, No. 1. — P. 9–57. — DOI: 10.20537/2076-7633-2019-11-1-9-57 (in Russian).
- Belitsky V., Ferrari P.* Invariant measures and convergence properties for cellular automaton 184 and related processes // Journal of Statistical Physics. — 2005. — Vol. 118, No. 3/4. — P. 589–623. — DOI: 10.1007/s10955-004-8822-4
- Belitsky V., Krug J., Jordão Neves E., Schütz G. M.* A cellular automaton model for two-lane traffic // Journal of Statistical Physics. — 2001. — Vol. 103, No. 5. — P. 945–971. — DOI: 10.1023/A:1010361022379
- Blank M.* Metric properties of discrete time exclusion type processes in continuum // J. Stat. Phys. — 2010. — Vol. 140. — P. 170–197. — DOI: 10.1007/s10955-010-9983-y
- Bykov N. V.* Cellular automata simulation of heterogeneous freeway traffic flow in a smart city // 2022 4th International Youth Conference on Radio Electronics, Electrical and Power Engineering (REEPE). — 2022. — P. 1–5. — DOI: 10.1109/REEPE53907.2022.9731490
- Chopard B., Droz M.* Cellular automata modeling of physical systems. — Cambridge University Press, 1998. — DOI: 10.1017/CBO9780511549755
- Chopard B., Luthi P. O., Queloze P. A.* Cellular automata model of car traffic in a two-dimensional street network // Journal of Physics A: Mathematical and General. — 1996. — Vol. 29, No. 10. — P. 2325–36. — DOI: 10.1017/CBO9780511549755
- Dupuis A., Chopard B.* Cellular automata simulations of traffic: A model for the city of Geneva // Networks Spat. Econ. — 2003. — Vol. 3, No. 1. — P. 9–21. — DOI: 10.1088/0305-4470/29/10/012
- Gray L., Griffeth D.* The ergodic theory of traffic jams // J. Stat. Phys. — 2001. — Vol. 105, No. 3–4. — P. 413–452. — DOI: 10.1023/A:1012202706850
- Imran W., Khan Z. H., Gulliver T. A., Khattak K. S., Nasir H.* A macroscopic traffic model for heterogeneous flow // Chinese J. Phys. European Transport Research Review. — 2020. — Vol. 63. — P. 419–435. — DOI: 10.1016/j.cjph.2019.12.005
- Jiang Y., Wang S., Yao Z., Zhao B., Wang Y.* A cellular automata model for mixed traffic flow considering the driving behavior of connected automated vehicle platoons // Phys. A Stat. Mech. its Appl. — 2021. — Vol. 582. — P. 126262. — DOI: 10.1016/j.physa.2021.126262

- Kasatkina E. V., Ketova K. V., Vavilova D. D.* Development of an analysis and information system for the control of traffic flows in the region // AIP Conference Proceedings. — 2021. — Vol. 2402. — P. 050019. — DOI: 10.1063/5.0071290
- Kerner B.* The physics of traffic. Empirical freeway pattern features, engineering applications, and theory. — Berlin, Heidelberg: Springer, 2004. — DOI: 10.1007/978-3-540-40986-1
- Kerner B. S., Klenov S. L., Wolf D. E.* Cellular automata approach to three-phase traffic theory // J. Phys. A. Math. Gen. — 2002. — Vol. 35, No. 47. — P. 9971–10013. — DOI: 10.1088/0305-4470/35/47/303
- Kokubo S., Tanimoto J., Hagishima A.* A new cellular automata model including a decelerating damping effect to reproduce Kerner's three-phase theory // Phys. A Stat. Mech. its Appl. — 2011. — Vol. 390, No. 4. — P. 561–568. — DOI: 10.1016/j.physa.2010.10.027
- Meneguette R. I., De Grande R. E., Loureiro A. A. F.* Intelligent transport system in smart cities. — Cham: Springer International Publishing, 2018. — 191 p. — DOI: 10.1007/978-3-319-93332-0
- Nagel K., Schreckenberg M.* A cellular automaton model for freeway traffic // J. Phys. I. — 1992. — Vol. 2, No. 12. — P. 2221–2229. — DOI: 10.1051/jp1:1992277
- Rodaro E., Yeldan Ö.* A multi-lane traffic simulation model via continuous cellular automata. — 2013. — <http://arxiv.org/abs/1302.0488>
- Rosenblueth D. A., Gershenson C.* A model of city traffic based on elementary cellular automata // Complex Syst. — 2010. — Vol. 19, No. 4. — P. 305–322. — DOI: 10.25088/ComplexSystems.19.4.305
- Schreckenberg M., Schadschneider A., Nagel K., Ito N.* Discrete stochastic models for traffic flow // Phys. Rev. E. — 1995. — Vol. 51, No. 4. — P. 2939–2949. — DOI: 10.1103/PhysRevE.51.2939
- Shi W., Lu W.-Z., Xue Y., He H.-D.* Revised lattice Boltzmann model for traffic flow with equilibrium traffic pressure // Phys. A Stat. Mech. its Appl. — 2016. — Vol. 443. — P. 22–31. — DOI: 10.1016/j.physa.2015.09.045
- Spitzer F.* Interaction of Markov processes // Advances in Mathematics. — 1970. — Vol. 5, No. 2. — P. 246–290. — DOI: 10.1016/0001-8708(70)90034-4
- Tatashev A., Yashina M.* Spectrum of elementary cellular automata and closed chains of contours // Machines. — 2019. — Vol. 7, No. 2. — P. 28. — DOI: 10.3390/machines7020028
- Treiber M., Kesting A.* Traffic flow dynamics. — Berlin, Heidelberg: Springer, 2013. — 503 p. — DOI: 10.1007/978-3-642-32460-4
- Vranken T., Sliwa B., Wietfeld C., Schreckenberg M.* Adapting a cellular automata model to describe heterogeneous traffic with human-driven, automated, and communicating automated vehicles // Phys. A Stat. Mech. its Appl. — 2021. — Vol. 570. — P. 125792. — DOI: 10.1016/j.physa.2021.125792
- Wolfram S.* Theory and applications of cellular automata. — Singapore: World Scientific, 1986.
- Yashina M. V., Tatashev A. G.* Traffic model based on synchronous exclusion processes // Mathematical Methods in the Applied Science. — 2018. — Vol. 43, No. 14. — P. 8136–8146. — DOI: 10.1002/mma.6237
- Ye L., Yamamoto T.* Modeling connected and autonomous vehicles in heterogeneous traffic flow // Phys. A Stat. Mech. its Appl. — 2018. — Vol. 490. — P. 269–277. — DOI: 10.1016/j.physa.2017.08.015
- Zapotecatl J. L., Rosenblueth D. A., Gershenson C.* Deliberative self-organizing traffic lights with elementary cellular automata // Complexity. — 2017. — Vol. 2017. — P. 7691370. — DOI: 10.1155/2017/7691370