**КОМПЬЮТЕРНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ
И МОДЕЛИРОВАНИЕ 2023 Т. 15 № 2 С. 355–368**
DOI: 10.20537/2076-7633-2023-15-2-355-368

Ки&М

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

УДК: 519.8

Модель двухуровневой межгрупповой конкуренции

И. А. Самойленко[1,2,a], И. В. Кулешов[1,b], А. М. Райгородский[1,3,4,5,c]

[1]Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет),
Россия, 141701, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9
[2]Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»,
Россия, 119048, г. Москва, ул. Усачева, д. 6
[3]МГУ им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, кафедра математической статистики и случайных процессов,
Россия, 119991, г. Москва, Ленинские горы, д. 1
[4]Кавказский математический центр Адыгейского государственного университета,
Россия, 385000, г. Майкоп, ул. Первомайская, 208
[5]Бурятский государственный университет, институт математики и информатики,
Россия, 670000, г. Улан-Удэ, ул. Ранжурова, 5

E-mail: [a] samoylenko.ia@phystech.edu, [b] kuleshov.iv@phystech.edu, [c] mraigor@yandex.ru

Получено 19.02.2023.
Принято к публикации 23.02.2023.

Еще в середине позапрошлого десятилетия ученые, изучавшие функционирование сообществ насекомых, выделили 4 основных паттерна организационной структуры таких сообществ. (i) Сотрудничество более развито в группах с сильным родством. (ii) Кооперация у видов с большими размерами колоний зачастую развита больше, чем у видов с малыми размерами колоний. Причем в колониях малого размера зачастую наблюдаются больший внутренний репродуктивный конфликт и меньшая морфологическая и поведенческая специализация. (iii) В пределах одного вида численность выводка (т. е. в некотором смысле эффективность) на душу населения обычно снижается по мере увеличения размера колонии. (iv) Развитая кооперация, склонная проявляться при ограниченности ресурсов и жесткой межгрупповой конкуренции. Думая о функционировании группы организмов как о двухуровневом рынке конкуренции, в котором в процессе индивидуального отбора особи сталкиваются с проблемой распределения своей энергии между инвестициями в межгрупповую конкуренцию и инвестициями во внутригрупповую конкуренцию, т. е. внутреннюю борьбу за долю ресурсов, полученных в результате межгрупповой конкуренции, можно сопоставить подобной биологической ситуации экономический феномен coopetition — кооперацию конкурирующих агентов с целью в дальнейшем конкурентно поделить выигранный вследствие кооперации ресурс. В рамках экономических исследований были показаны эффекты, аналогичные (ii): в рамках соревнования большой и маленькой групп оптимальной стратегией большой будет полное выдавливание второй группы и монополизация рынка (т. е. большие группы склонны действовать кооперативно); (iii) существуют условия, при которых размер группы оказывает негативное влияние на продуктивность каждого ее индивида (такой эффект называется парадоксом размера группы, или эффект Рингельмана). Общей идеей моделирования подобных эффектов является идея пропорциональности: каждый индивид (особь / рациональный агент) решает, какую долю своих сил инвестировать в межгрупповую конкуренцию, а какую — во внутригрупповую. При этом выигрыш группы должен быть пропорционален ее суммарным инвестициям в конкуренцию, тогда как выигрыш индивида пропорционален его вкладу во внутривидовую борьбу. Несмотря на распространенность эмпирических наблюдений, до сих пор не была введена теоретико-игровая модель, в которой можно было бы подтвердить наблюдаемые эмпирически эффекты. В рамках данной работы предлагается модель, которая устраняет проблемы ранее существующих, а моделирование равновесных по Нэшу состояний в рамках предложенной модели позволяет пронаблюдать перечисленные выше эффекты в ходе численных экспериментов.

Ключевые слова: теоретико-игровые модели, равновесие по Нэшу, эволюционное моделирование, конкуперация

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта поддержки ведущих научных школ НШ775.2022.1.1.

© 2023 Иван Александрович Самойленко, Игорь Вячеславович Кулешов, Андрей Михайлович Райгородский
Статья доступна по лицензии Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Unported License.
Чтобы получить текст лицензии, посетите веб-сайт http://creativecommons.org/licenses/by-nd/3.0/
или отправьте письмо в Creative Commons, PO Box 1866, Mountain View, CA 94042, USA.

COMPUTER RESEARCH AND MODELING
2023 VOL. 15 NO. 2 P. 355–368
DOI: 10.20537/2076-7633-2023-15-2-355-368

Ки&М

MATHEMATICAL MODELING AND NUMERICAL SIMULATION

UDC: 519.8

The model of two-level intergroup competition

I. A. Samoylenko[1,2,a], I. V. Kuleshov[1,b], A. M. Raigorodskii[1,3,4,5,c]

[1]Moscow Institute of Physics and Technology,
9 Institutskiy per., Dolgoprudny, Moscow region, 141701, Russia
[2]National Research University Higher School of Economics,
6 Usacheva st., Moscow, 119048, Russia
[3]Mechanics and Mathematics Faculty, Moscow State University,
1 Leninskie Gory, Moscow, 119991, Russia
[4]Caucasus Mathematical Center at Adyghe State University,
208 Pervomaiskaya st., Maykop, 385000, Russia
[5]Institute of Mathematics and Computer Science, Buryat State University,
5 Ranzhurova st., Ulan-Ude, 670000, Russia

E-mail: [a] samoylenko.ia@phystech.edu, [b] kuleshov.iv@phystech.edu, [c] mraigor@yandex.ru

Received 19.02.2023.
Accepted for publication 23.02.2023.

At the middle of the 2000-th, scientists studying the functioning of insect communities identified four basic patterns of the organizational structure of such communities. (i) Cooperation is more developed in groups with strong kinship. (ii) Cooperation in species with large colony sizes is often more developed than in species with small colony sizes. And small-sized colonies often exhibit greater internal reproductive conflict and less morphological and behavioral specialization. (iii) Within a single species, brood size (i. e., in a sense, efficiency) per capita usually decreases as colony size increases. (iv) Advanced cooperation tends to occur when resources are limited and intergroup competition is fierce. Thinking of the functioning of a group of organisms as a two-level competitive market in which individuals face the problem of allocating their energy between investment in intergroup competition and investment in intragroup competition, i. e., an internal struggle for the share of resources obtained through intergroup competition, we can compare such a biological situation with the economic phenomenon of "coopetition" — the cooperation of competing agents with the goal of later competitively dividing the resources won in consequence In the framework of economic researches the effects similar to (ii) — in the framework of large and small group competition the optimal strategy of large group would be complete squeezing out of the second group and monopolization of the market (i. e. large groups tend to act cooperatively) and (iii) — there are conditions, in which the size of the group has a negative impact on productivity of each of its individuals (this effect is called the paradox of group size or Ringelman effect). The general idea of modeling such effects is the idea of proportionality — each individual (an individual/rational agent) decides what share of his forces to invest in intergroup competition and what share to invest in intragroup competition. The group's gain must be proportional to its total investment in competition, while the individual's gain is proportional to its contribution to intra-group competition. Despite the prevalence of empirical observations, no game-theoretic model has yet been introduced in which the empirically observed effects can be confirmed. This paper proposes a model that eliminates the problems of previously existing ones and the simulation of Nash equilibrium states within the proposed model allows the above effects to be observed in numerical experiments.

Keywords: game-theoretic modelling, Nash equilibrium, evolutionary modeling, coopetition

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2023, vol. 15, no. 2, pp. 355–368 (Russian).

This work was supported by with the financial support of the grant to support leading scientific schools НШ775.2022.1.1.

© 2023 Ivan A. Samoylenko, Igor V. Kuleshov, Andrei M. Raigorodskii
This work is licensed under the Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Unported License.
To view a copy of this license, visit http://creativecommons.org/licenses/by-nd/3.0/
or send a letter to Creative Commons, PO Box 1866, Mountain View, CA 94042, USA.

Введение. Описание проблемы предыдущих моделей

Исследования, проведенные в начале XXI века, показали, что причиной высокого уровня кооперации у эусоциальных насекомых является не генетическое родство, которое только усиливает экологически обусловленные селективные силы для сотрудничества, а именно «связывающая» сила, обусловленная высоким уровнем межгрупповой конкуренции [Wilson, Hölldobler, 2005]. Также в этой работе говорится о том, что кооперация насекомых обусловлена групповым отбором. При этом можно построить валидную модель чисто индивидуального отбора, опосредованного межгрупповой конкуренцией [Traulsen, Nowak, 2006]. Однако действительно важной является задача связи этих понятий (с помощью моделей инклюзивной приспособленности: фактор произведения потомства самостоятельно является второстепенным, а особь старается своим поведением увеличить популяцию своего вида, возможно в ущерб собственным потомкам). Определение того, как межгрупповая конкуренция повышает уровень кооперации, в которой выделенные группы можно рассматривать в большей степени не как отдельный индивид, а как общий механизм распространения генов, также называемый суперорганизмом. Обзор устройства сообществ насекомых выявил по крайней мере четыре ключевых повторяющихся организационных паттерна. (i) Наиболее развитая кооперация, т. е. самые высокие уровни альтруизма (когда большинство членов группы отказываются от прямого размножения) и наиболее сложные системы кооперативной коммуникации, очевидно, имеют место в группах родственников [Hamilton, 1964; Hamilton, 1972]. (ii) Кооперативное поведение обычно сильнее выражено у видов с большими размерами колоний, причем для видов с небольшим размером колоний характерны больший внутренний репродуктивный конфликт (проявляющийся в иерархии доминирования, например, как в небольших сообществах полистин, понеринов и лептоторацинов [West-Eberhard, Alexander, Tinkle, 1981; Heinze, 2004]) и меньшая морфологическая и поведенческая специализация [Choe, Crespi, 1997; Karsai, Wenzel, 1998]. (iii) У видов, обычно существующих в малых и средних колониях, производительность выводка на душу населения часто имеет тенденцию к снижению по мере увеличения размера колонии (число королев плюс рабочие) [Karsai, Wenzel, 1998; Michener, 1964]. (iv) Межгрупповая конкуренция, облегчаемая экологическим фактором ограниченности ресурсов, связана с наиболее развитой внутригрупповой кооперацией [Wilson, Hölldobler, 2005].

Для описания подобных процессов в работе [Reeve, Emlen, Keller, 1998] был введен термин «теория перетягивания каната». При перетягивании каната каждый член группы эгоистично расходует некоторую долю общей группового блага, чтобы увеличить свою конечную долю этого блага. Индивидуальная доля затрат называется внутригрупповыми инвестициями (или эгоистичными усилиями). Доля каждого члена группы зависит от величины его эгоистичных усилий по отношению к величине эгоистических инвестиций других членов группы, точно так же как результат реального перетягивания каната зависит от соотношения сил, возникающих на двух концах каната. Таким образом, доля индивида в перетягивании каната зависит от его инвестиций в перетягивание каната по отношению к суммарным инвестициям других членов группы [Reeve, Emlen, Keller, 1998]. Механизм перетягивания каната включает в себя феномен «взаимного контроля», когда члены группы действуют для увеличения доли своего потомства и одновременно с этим стремятся ограничить долю потомства остальных членов группы [Frank, 1995].

В рамках предложенных ранее биологических моделей использовалась логика двухуровневого «перетягивания каната»: внутри групп и между ними. Так, конкурентоспособность группы увеличивается, если состоящая в ней особь тратит больше времени и энергии на поиск пищи, уход за выводком, защиту гнезда и противостояние с другими видами; напротив, доля выигранных ресурсов особи увеличивается, если она вместо этого тратит время и энергию на накопление личных ресурсов и агрессивную конкуренцию с другими членами своей группы за ресурсы, выигранные в процессе межгрупповой конкуренции [Boomsma, Gawne, 2018; Tong, Bozdag, Ratcliff, 2022; Rusch, Gavrilets, 2020].

Помимо эволюционных моделей, существуют также и экономические, в которых можно наблюдать похожие процессы. Впервые термин coopetiton появился более века назад — в 1913 году. Он появился для описания отношений между независимыми распространителями продукции Sealshipt Oyster System, которым было предписано сотрудничать на благо системы, конкурируя друг с другом за клиентов в одном и том же городе [Cherington, 1913]. В общем же кооперативные конкурсы, в которых члены некоторых групп соревнуются за приз, который затем будет в некоторой пропорции разделен между ними, являются распространенным явлением: грантовые конкурсы по исследованиям (например, междисциплинарные конкурсы, в рамках которых необходима кооперация двух коллективов из разных областей, регулярно проводятся РНФ) и научным разработкам (таким как совместная деятельность Pfizer и BionTech), строительные тендеры, распределение средств между различными факультетами в университете, регионами в стране или странами, состоящими в международных организациях, праймериз, в рамках которых участники одной партии должны, с одной стороны, привлечь внимание к своей политической группе, с другой стороны — работать на получение личных голосов и т. д. Примеры присутствуют также и в рекламе (когда фирмы-конкуренты ссылаются друг на друга, привлекая покупателей к отрасли в целом) и многих других областях. Зачастую можно разделить выигрыш, на который претендуют конкурирующие группы, на комбинацию общественного (общую на группу) и эгоистичного блага. Как и в случае с биологическими моделями, которые упоминались выше, говоря о коллективных соревнованиях, важно понимать, что результаты работы групп зависят от индивидуальных вкладов их членов в совместную деятельность группы. Так, размер финансирования, на который может претендовать научная группа, обычно зависит от публикационных показателей, которые определяются индивидуальными публикациями ее членов. При этом финансы между членами группы не обязательно должны распределяться равномерно или в зависимости от этих показателей. Рассматривая оспариваемое благо как смешанное — общественно-частное, экономисты в [Balart, Flamand, Troumpounis, 2016] показали, что природа приза влияет на стратегический выбор правил распределения блага и, таким образом, на индивидуальные стимулы вносить свой вклад в групповые усилия, что в конечном итоге может привести к возникновению двух явлений: (i) монополизации и (ii) парадокса размера группы (эффекта Рингельмана). В контексте соревнований двух групп монополизация относится к ситуации, когда одна большая группа выдавливает из соревнования остальные [Ueda, 2002]. Хотя такая ситуация никогда не может быть равновесной, когда участниками конкурса являются эгоистичные, рациональные агенты, она может наблюдаться, когда все члены группы действуют в некотором роде коллективно, но всё еще конкурируют за частную часть приза внутри группы. Напротив, парадокс размера группы — это ситуация, при которой меньшая группа превосходит большую по вероятности выигрыша. Это понятие восходит к основополагающей работе [Olson, 2009], в которой подчеркнута серьезность «проблемы безбилетника» в крупных сообществах. В контексте коллективного поиска ренты с эндогенными правилами распределения возникновение GSP было изучено в [Nitzan, Ueda, 2011]. В работе [Balart, Flamand, Troumpounis, 2016] также было показано, что парадокс размера группы возникает всякий раз, когда приз является достаточно частным (а не общественным). Заметим, что аналогичный эффект уже упоминался выше, когда мы говорили о падении репродуктивной силы с возрастанием размера группы видов, живущих средними колониями.

Таким образом, несмотря на то что мы упускаем некоторые частности, связанные с тем, что в рамках экономических моделей возможно влияние общего знания (агенты могут принимать во внимание не только свои стратегические предпочтения, но и тот факт, что другие агенты также действуют рационально и знают это друг про друга и т. д.), в общем экономисты декларируют два возможных различных эффекта, связанных с размером группы. Для фиксированного уровня кооперации наиболее прямой эффект размера группы заключается в том, что она дает больше шансов на победу в соревновании между группами, поскольку в ней большее число потенциальных вкладчиков (т. е. если все индивиды прилагают одинаковые усилия, то совокупный вклад большой группы больше, а значит, больше и вероятность победы в соревновании между группами). Однако существует дополнительный эффект, связанный с размером группы, который наказывает большую группу: более многочисленная группа подразумевает, что частная часть приза должна быть разделена между большим количеством людей. То есть, если благо является (хотя бы частично) частным, больший размер группы также подразумевает меньшую индивидуальную долю приза в случае победы. Это то, что Ницан [Nitzan, 1991] называет эффектом сдерживания размера группы.

Таким образом, и экономические, и эволюционные модели устроены как двухуровневые модели конкуренции, в рамках которых выигрыш на каждом уровне распределяется пропорционально вложенным усилиям. Так, говоря о моделировании жизни эусоциальных насекомых, предложенном в [Reeve, Hölldobler, 2007], мы принимаем, что выигрыш каждой особи выражается как

$$\text{выигрыш особи } i\text{, состоящей в группе } I, =$$
$$= \frac{\text{эгоистичные усилия особи } i}{\text{суммарный объем эгоистичных усилий всех особей группы } I} \times$$
$$\times \frac{\text{суммарный объем усилий на межгрупповую конкуренцию группы } I}{\text{суммарный объем усилий на межгрупповую конкуренцию всех групп}}.$$

Аналогично в экономических моделях, которые упоминались выше, также используется идея пропорциональности. Однако так как этим модели вероятностные, то вместо чистых стратегий вероятность выигрыша группы пропорциональна объему усилий, которые эта группа вкладывает в межгрупповую борьбу.

Проблемой таких моделей является тот факт, что они зависят только от непосредственных усилий участников рынка (межвидовой борьбы) и никаким образом не зависят от внешних условий. То есть какие-либо эффекты в таких условиях можно продемонстрировать, только принудительно изменив стратегию какого-то индивида (группы). Это может привести к изменению равновесного состояния, однако у такого изменения нет рациональных предпосылок. Авторы предлагают ввести минимальный уровень выигрыша, который обеспечивается участнику группы независимо от его стратегии, а также минимальный уровень выигрыша, который обеспечивается группе независимо от стратегии участников этой группы. Таким образом, выигрыш индивида будет пропорционален

$$\frac{\text{минимальный выигрыш любого индивида} + \text{эгоистичные усилия индивида}}{\left(\begin{array}{c}\text{суммарные усилия (включающие минимальные выигрыши}\\ \text{всех индивидов) всех членов группы}\end{array}\right)}.$$

Аналогичная идея будет использоваться и для распределения ресурсов между сообществами. Далее работа будет устроена следующим образом: во второй части будет формально введена модель и сделаны некоторые простейшие утверждения, показывающие ее корректность. В третьей части будут показаны результаты численных экспериментов, подтверждающие эмпирические наблюдения, перечисленные во введении. Наконец, закончится статья параграфом о возможном развитии этой работы и области применимости полученных результатов.

Формальное определение модели и базовые утверждения

Определим модель формально. Пусть существует некоторое благо, которое между собой хотят поделить некоторые рациональные агенты. Пусть каждый агент в этой системе имеет какой-то ресурс (будем считать, что для агента x такой ресурс равен q_x), с помощью которого агент может влиять на распределение блага. Все агенты разбиты на некоторые группы, соревнующиеся между собой за благо. При этом каждый агент тратит какую-то часть своего ресурса на то, чтобы соперничать с другими группами, а часть — на то, чтобы соперничать с членами своей группы для раздела той части блага, которую эта группа смогла получить. Введем коэффициент a_c, который будет означать минимальную выгоду (автоматический минимум) от нахождения в сообществе c при условии того, что агент не тратит усилий на распределение ресурсов внутри группы. Тогда если группа c получает общее благо, равное r_c, то каждый агент x получает долю блага, равную

$$P(x) = r_c \cdot \frac{a_c + \delta_x}{\sum\limits_{j \in c} (a_c + \delta_j)}. \tag{1}$$

Эта величина зависит от того, сколько ресурса δ_x он тратит на соперничество внутри своей группы.

Распределение ресурса между группами работает похожим образом. Введем показатель b_c — минимальную выгоду, получаемую группой от самого факта участия в борьбе за ресурс. Тогда, если $c_i \subset C$ — некоторое сообщество из множества групп, благо, получаемое этим сообществом, равно

$$r_{c_i} = \frac{b_{c_i} + \sum\limits_{j \in c_i} (q_j - \delta_j)}{\sum\limits_{c_g \in C} \left(b_{c_g} + \sum\limits_{j' \in c_g} (q_{j'} - \delta_{j'}) \right)}. \tag{2}$$

Таким образом, получающаяся формула полезности (т. е. количество выигранного в рамках конкуренции блага) каждого агента (особи) x в такой обобщенной постановке задачи выглядит следующим образом:

$$P(x) = \frac{b_{c_i} + \sum\limits_{j \in c_i} (q_j - \delta_j)}{\sum\limits_{c_g \in C} \left(b_{c_g} + \sum\limits_{j' \in c_g} (q_{j'} - \delta_{j'}) \right)} \cdot \frac{a_{c_i} + \delta_x}{\sum\limits_{j \in c_i} \left(a_{c_i} + \delta_j \right)}. \tag{3}$$

Здесь и далее для простоты записи формулы, а также в рамках численных экспериментов будем считать a и b константами, а $\forall i \ q_i = 1$. Важно, что модель подразумевает также возможность того, чтобы вместо a и b использовались некоторые функции, зависящие от каких-то внешних факторов и более точно описывающие поведение окружающие условия, в которых функционирует эта модель. Однако в данном случае основные эффекты будут показаны на упрощенной версии модели. При таких допущениях формула выигрыша каждого агента (особи) x будет равна

$$P(i) = \frac{b + \sum\limits_{j \in c_i} (1 - \delta_j)}{\sum\limits_{c_g \in C} \left(b + \sum\limits_{j' \in c_g} (1 - \delta_{j'}) \right)} \cdot \frac{a + \delta_x}{\sum\limits_{j \in c_i} (a + \delta_j)}. \tag{4}$$

Так как мы считаем, что каждый агент (особь) хочет максимизировать функцию полезности, то нас интересуют равновесные по Нэшу состояния. То есть такие, в которых ни один агент (особь) не хочет изменить своей стратегии при условии, что стратегии остальных агентов останутся неизменными. В такой ситуации агент может влиять только на δ_x, а остальные переменные для него являются константами. Тогда можно упростить выражение, показав, как выражается функция выигрыша через δ_x и константы. Первый множитель этой формулы переписывается как $\frac{(1-\delta_x)+c_1}{(1-\delta_x)+c_2}$, а второй — как $\frac{\delta_x+c_3}{\delta_x+c_4}$, где c_i — константы.

Посчитаем функцию выигрыша в таких обозначениях:

$$P(x) = \frac{-\delta_x^2 + (c_1 - c_3 + 1)\delta_x + c_1 c_3 + c_3}{-\delta_x^2 + (c_2 - c_4 + 1)\delta_x + c_2 c_4 + c_4} = \frac{-\delta_x^2 + c_1'\delta_x + c_2'}{-\delta_x^2 + c_3'\delta_x + c_4'} = \frac{f(\delta_x)}{g(\delta_x)},$$

где c_i' — это тоже какие-то константы. Таким образом, чтобы смоделировать выбор стратегии рациональным агентом, принимающим участие в двухуровневой модели конкуренции, необходимо провести минимизацию некоторого полинома от δ_x при условии, что $\delta_x \in [0, 1]$ — любое число из заданного интервала. На этом принципе будут построены численные эксперименты в следующей части статьи. Для заключения формального определения модели вернемся к более подробной формуле выигрыша каждого агента (4) и сформулируем в рамках этой формулы два утверждения, которые помогут понять физический смысл параметров a и b.

Предложение 1. *Если $a \gg 1$, $a \gg b$, то стратегией каждого агента x будет $\delta_x = 0$, то есть тотальная кооперация со своей группой и полное использование ресурса на межгрупповую конкуренцию за благо.*

Действительно, если a очень большое, то любое изменение стратегии агента x не влечет значимого изменения доли его выигрыша от выигранного группой, а значит, оптимальной стратегией будет бросить все силы на увеличение выигрыша своей группы.

Предложение 2. *Если $b \gg 1$, $b \gg a$, то стратегией каждого агента x будет $\delta_x = 1$, то есть тотальная конкуренция внутри своей группы и отсутствие вложения ресурса в межвидовую конкуренцию.*

Действительно, если b очень большое, то любое изменение стратегии агента x не влечет значимого изменения выигрыша его группы, а значит, оптимальной стратегией будет использовать все ресурсы для получения большей доли от выигрыша его сообщества.

Также понятным является утверждение, что наблюдения, показанные в предложениях 1 и 2, обобщаются и на менее крайние случаи: рост параметра a ведет к снижению интереса агента участвовать во внутригрупповой конкуренции, тогда как с параметром b эффект прямо противоположный. Теперь можно ввести физический смысл параметров a и b. Про a можно думать как про степень родства индивидов внутри одной группы, тогда как про b можно думать как про дефицитность блага, за которое происходит конкуренция. Подобная аналогия, как будет видно из численных экспериментов, позволит продемонстрировать состоятельность предложенной модели.

Численные эксперименты

В этой части статьи при помощи компьютерного моделирования будет показано, что есть все основания считать, что в рамках описанной модели конкуренции существуют равновесные состояния системы, и эти равновесные состояния отвечают эмпирическим наблюдениям об ожидаемых организационных паттернах в рамках таких систем. Здесь и далее стратегией каждого агента будем называть число δ_x. Для демонстрации существования равновесных состояний используем следующую модель: изначально стратегия агента — это случайное число $\delta_x \in [0; 1]$, показывающее, какую долю своего ресурса агент вкладывает в конкуренцию внутри своего сообщества ($\delta_x = 1$ означает, что агент весь ресурс тратит на внутривидовое соперничество, тогда как $\delta_x = 0$ означает, что агент тратит весь свой ресурс на конкуренцию за благо с другими группами). Пронумеруем всех агентов от 1 до n. Шаг алгоритма — игроки по очереди, в зависимости от номера, могут сменить свою стратегию (в пользу более кооперативной или менее кооперативной) или оставить всё как есть. При этом каждый агент оптимизируется «жадно», без прогнозов на будущее поведение других агентов (таким образом, эффекты общего знания не влияют на решения индивидов). Можно также брать агентов не в заранее сгенерированном порядке, а случайно. Некоторые симуляции будут проведены именно в таком сеттинге (более того, сходимость к равновесию происходит гораздо быстрее именно при таком подходе), однако на них визуально сложнее различить между собой, какой конкретно группе принадлежит какая стратегия. Таким образом, первые две симуляции будут показаны для заранее заданного порядка агентов. Последующие — для случайного порядка. Симуляции будут проведены для модели конкуренции трех групп (размерами 200, 80 и 30 агентов) при разных значениях параметров a и b. По оси X каждой симуляции всегда будет показан номер итерации алгоритма. По оси Y показывается, какое δ_x выбрал каждый агент. Покажем, с учетом введенного физического смысла параметров a и b, что наблюдаемые биологами и экономистами явления имеют место и в нашей модели.

Предложение 3. *Самая развитая кооперация* (*и наивысший уровень альтруизма, когда большинство особей отказывается от размножения ради заботы о чужом потомстве*) *характерна для коллективов, связанных близким родством.*

Формулируя это утверждение на языке параметров a и b, мы получим, что кооперация будет более характерна для коллективов, в случае если показатель a выше. В этом и остальных случаях эффекты будут продемонстрированы единичными иллюстрациями, однако наблюдались для различных значений параметров.

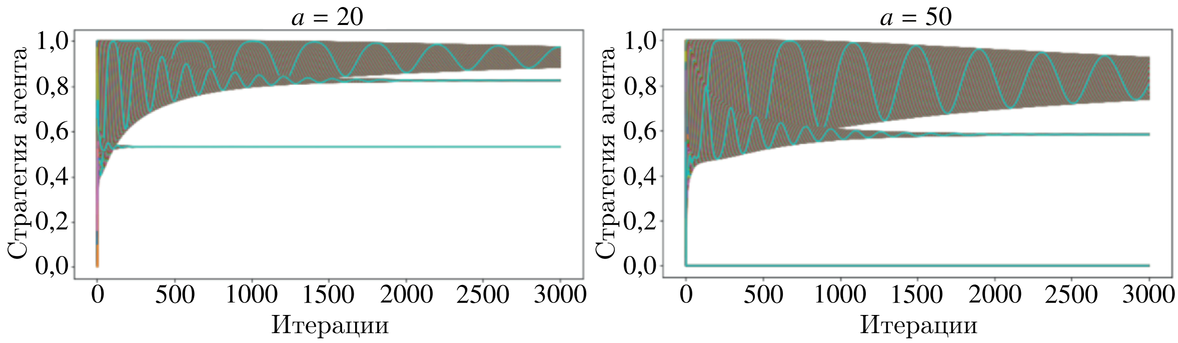

Рис. 1. Для групп размерами 200, 80, 30 показана сходимость системы к равновесному состоянию. В данном случае $b = 0{,}1$. С ростом a, показателя родства, равновесные показатели δ_x для групп падают, т. е. кооперация растет

Предложение 4. *У видов с мелкими и средними колониями общая производительность* (*отношение числа произведенных потомков к численности колонии*) *снижается с ростом колонии. В экономической теории аналогичный эффект называется парадоксом размера группы*: *рост сообщества ведет к снижению эффективности всех его членов.*

На языке параметров a и b это утверждение означает, что при конкуренции в рамках одного вида больший выигрыш в ряде случаев получается у групп меньшего размера.

Предложение 5. *Острая межгрупповая конкуренция, усиливающаяся при неравномерном пространственном распределении дефицитного ресурса, обычно коррелирует с высокоразвитой внутригрупповой кооперацией.*

Для доказательства предложения 5 авторы [Reeve, Hölldobler, 2007] используют следующую схему: групповое усилие каждой группы умножается на некоторый коэффициент g — эффект внешней среды. Модель, рассматриваемая в той статье и в дальнейших цитированиях, является частным случаем нашей модели, если принять константы a и b за 0. Однако в таком случае предложенное изменение никак не скажется на итоговом распределении: распределение

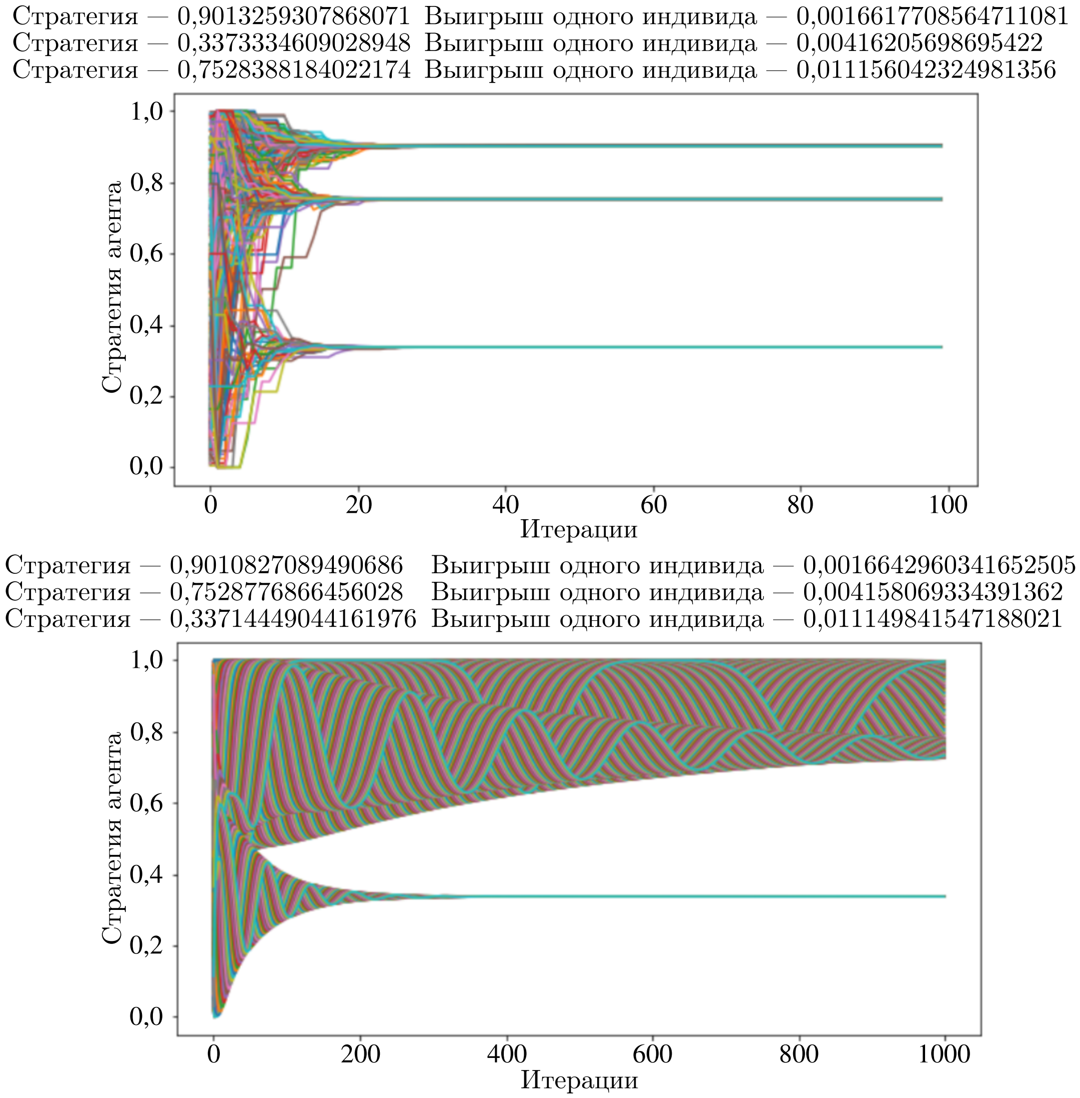

Рис. 2. На этих иллюстрациях показана сходимость к равновесным стратегиям трех групп размерами 200, 80, 30 при одинаковых значениях $a = 30$, $b = 1$ для случайного порядка агентов, меняющих свои стратегии, и для фиксированного. Исходя из симуляций, во-первых, видно, что равновесное состояние не зависит от способа, которым оно ищется, а во-вторых, видно, что выигрыш каждого индивида обратно пропорционален размеру сообщества, в котором он состоит

усилий никак не изменится, если умножить их у каждого индивида на одно и то же число. Однако если умножать только сами ресурсы, а не безусловную константу, то на выходе групповое усилие станет равным

$$b_{c_i} + g \sum_{j \in c_i} (q_j - \delta_j), \tag{5}$$

а количество ресурсов на группу будет равно

$$r_{c_i} = \frac{b_{c_i} + g \sum_{j \in c_i} (q_j - \delta_j)}{\sum_{c_l \in C} \left(b_{c_l} + g \sum_{j' \in c_l} (q_{j'} - \delta_{j'}) \right)} \tag{6}$$

и, очевидно, изменится неодинаково для разных групп. На рис. 3 показано, какое влияние умножение на фактор g окажет на стратегии агентов, получающиеся в равновесии. Проинтерпретируем полученный реультат.

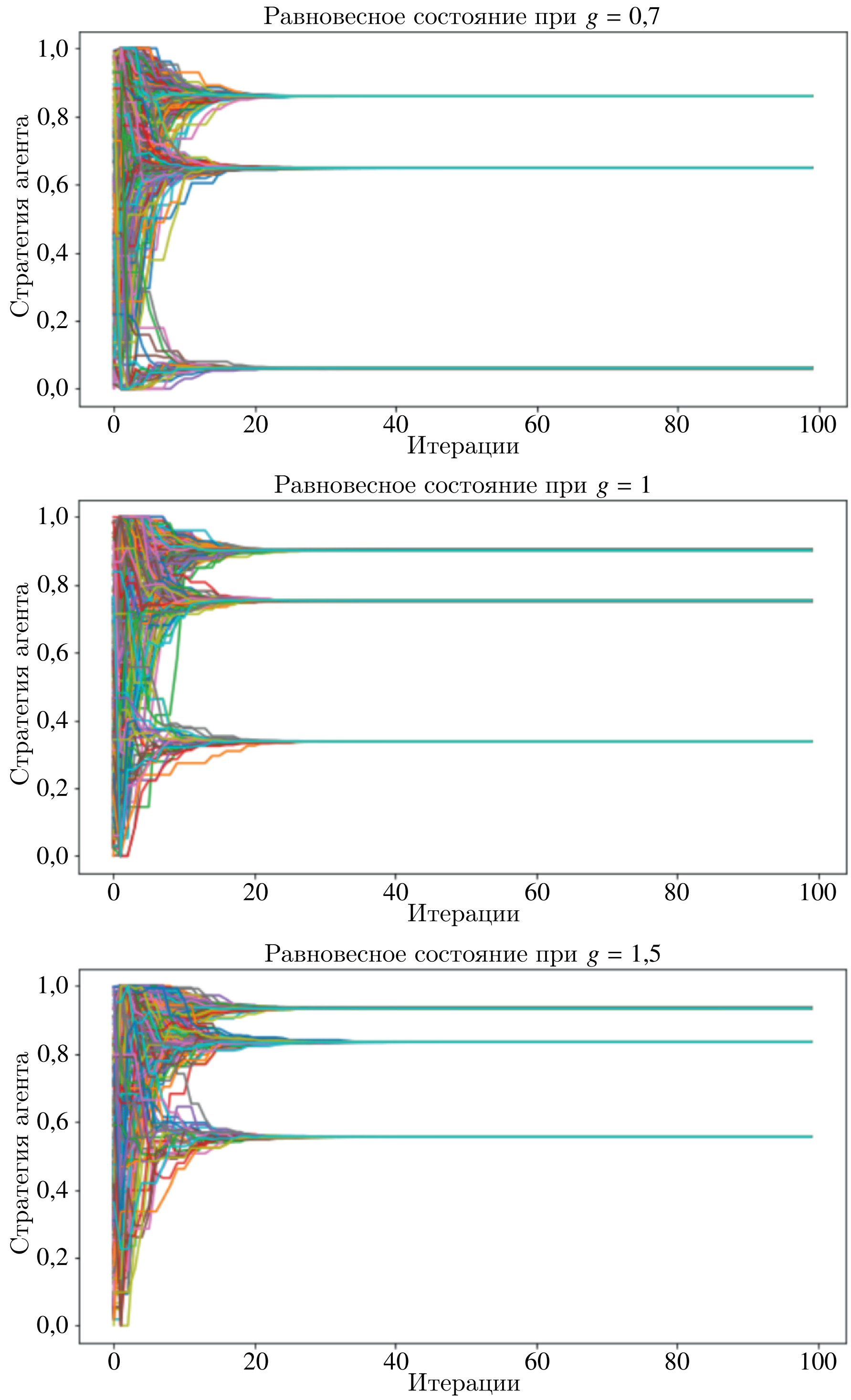

Рис. 3. В данном случае симуляции проведены для трех одинаковых групп размерами 200, 80, 30 при значениях $a = 30$, $b = 1$ и различных значениях g. С ростом коэффициента g уровень равновесных δ_x растет (а значит, кооперация падает). При этом рост g можно интерпретировать как падение b — доступности блага. Таким образом, рост дефицитности блага приводит к росту кооперации внутри групп

С ростом параметра g доля ресурса, отводимая на внутригрупповое соперничество, только растет (т. е. уровень кооперации падает). В чем причина? Это естественно, так как при описании, которое обычно использовалось для параметра g, наблюдать заявленный эффект не получалось. Перейдем к формульной записи выигрыша группы:

$$r_{c_i} = \frac{b_{c_i} + g \sum\limits_{j \in c_i} (q_j - \delta_j)}{\sum\limits_{c_l \in C} \left(b_{c_l} + g \sum\limits_{j' \in c_l} (q_{j'} - \delta_{j'}) \right)} = \frac{\frac{1}{g} \left(b_{c_i} + g \sum\limits_{j \in c_i} (q_j - \delta_j) \right)}{\sum\limits_{c_g \in C} \frac{1}{g} \left(b_{c_l} + g \sum\limits_{j' \in c_l} (q_{j'} - \delta_{j'}) \right)} = \frac{\frac{b_{c_i}}{g} + \sum\limits_{j \in c_i} (q_j - \delta_j)}{\sum\limits_{c_l \in C} \left(\frac{b_{c_l}}{g} + \sum\limits_{j' \in c_l} (q_{j'} - \delta_{j'}) \right)}. \tag{7}$$

Таким образом, можно считать описанное авторами [Reeve, Hölldobler, 2007] действие в терминах нашей модели уменьшением в g раз константы b, т. е. фактора безусловного выигрыша группы. Если такой безусловный выигрыш уменьшается, то необходимость вкладывать ресурсы в межвидовую борьбу возрастает, а значит, растет и внутригрупповая кооперация (как было предсказано и показано нами выше), и, значит, предложение 5 будет соблюдаться в нашей модели. Перейдем к последнему предложению, которое заявлялось в аннотации статьи.

Предложение 6. *У видов с большими колониями кооперация обычно развита лучше; в маленьких колониях чаще наблюдается эгоистическая «грызня» между соплеменниками за право оставить потомство. В экономической теории это наблюдение называется монополизацией. В случае коллективной конкуренции большая группа стремится выдавить меньшую, действуя согласованно и в существенной степени кооперативно.*

В нашей модели наблюдать подобный эффект не получилось, однако тому есть несколько согласующихся с эмпирическими данными причин. По своей природе описанный эффект связан с константой b — безусловным выигрышем сообщества. На языке изучения сообществ насекомых размер колоний, как и их количество на единицу площади, зависит от неравномерности распределения дефицитного блага и от богатства участков, где это благо есть. Чем богаче участок, тем обычно больше на нем колоний общественных насекомых и тем крупнее каждая колония. Таким образом, один и тот же фактор (богатство участка) положительно коррелирует с обеими переменными. Когда богатство участка растет, одновременно увеличиваются и размер колонии (что ведет к снижению кооперации), и их количество (что ведет к ее росту). Таким образом, для подтверждения (или опровержения) предложения 6 необходима более тонкая настройка параметра b. Более того, как было показано в экономических работах, хотя оптимальной кооперативной стратегией для большой группы является сильная кооперация и выдавливание меньших групп от блага, такая стратегия не является равновесной. В нашей модели агенты рациональны и действуют эгоистично (хотя эгоистичная стратегия и может повлечь выгоду для сообщества агента), поэтому такая кооперация и не реализуется. Таким образом, по всей видимости, большие группы, которые действуют некооперативно, проигрывают эволюционный отбор, тогда как небольшие конкурентные группы (виды) вполне могут существовать в некоторых ограничениях.

Проведенные авторами статьи численные эксперименты показывают, что, по-видимому, достаточно часто в системах, в которых агенты получают благо согласно формуле (4), существуют равновесные состояния. Тем не менее на практике многие системы двухуровневой конкуренции могут быть не очень стабильными. За счет чего это может происходить? Заметим, что в приведенных численных экспериментах (не важно, в каком порядке были взяты агенты) все особи действовали строго по очереди и обладали информацией о всей системе. То есть если агент x меняет свою стратегию в момент времени t, то он точно знает, какой будет его выигрыш в следующий момент времени. На практике, пока особь (агент) x принимает решение о смене стратегии, такие же решения могут принимать и другие агенты. Покажем, что если некоторые агенты принимают решение одновременно, то даже небольшое количество таких агентов может помешать системе стабилизироваться около равновесного состояния. Говоря об исходной модели, ее можно было представлять так: в каждый момент времени t один агент принимает жадное решение (не учитывающее будущие ответы других агентов) о смене или поддержании своей стратегии о распределении ресурсов. Пусть теперь в момент времени t решение о жадной смене стратегии принимает одновременно не один агент, а несколько. (Таким образом, появляется неопределенность. Если одновременно принимают решение о смене стратегии агенты x_1 и x_2, то в момент времени $t+1$ агент x_1 использует стратегию оптимальную как ответ на стратегию x_2 в момент времени t, а не в момент $t+1$.) Покажем, что в условиях предыдущих численных экспериментов такая неопределенность приведет к тому, что уже при небольшом количестве агентов, одновременно меняющих свои стратегии, система может стать нестабильной.

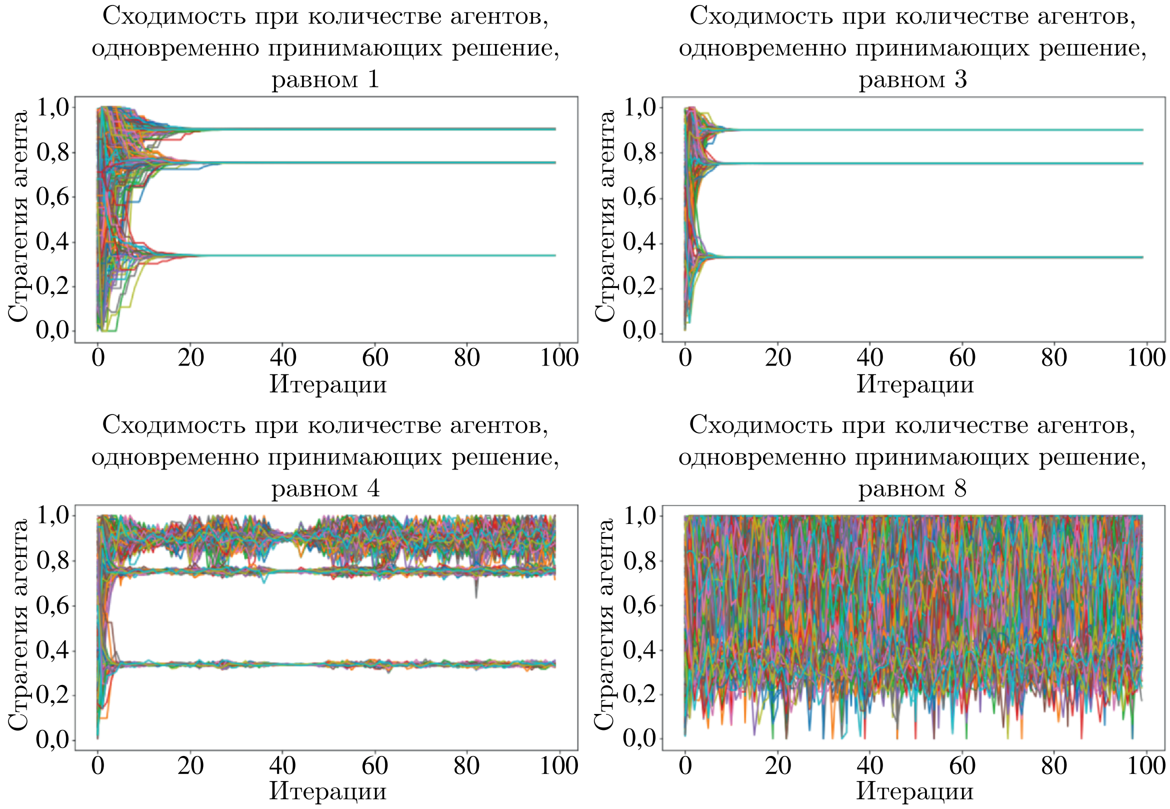

Рис. 4. Показано, как меняется сходимость к равновесной стратегии при росте неопределенности (растет количество агентов, принимающих решение одновременно, без информации о других). В данном случае показаны симуляции для трех групп размерами 200, 80, 30 при значениях параметров $a = 30$ и $b = 1$. При трех одновременных ходах сходимость происходит буквально за несколько итераций, тогда как при четырех сходимости нет в принципе — система хаотично колеблется около равновесия. В дальнейшем рост количества одновременно меняющих стратегию агентов ведет к еще большему увеличению хаоса

Как видно из рис. 4, если 3 агента одновременно принимают решение о смене стратегии, система быстро стремится к стабильному состоянию. Если же число таких агентов увеличить до 4 (что всё равно мало по сравнению с общим количество агентов системы), то наблюдается фазовый переход системы: теперь стабильного состояния нет, зато наблюдается некоторая динамика около стабильного состояния. И далее с ростом количества агентов, принимающих решения, энтропия быстро растет. Уже при количестве агентов, равном 8, никакой стабильности в системе не наблюдается, и стратегии агентов каждый ход существенно меняются. Таким образом, хотя стабильное состояние у системы и есть, уже небольшая неполнота информации у агентов, населяющих эту систему, может не дать ей сойтись к равновесному по Нэшу состоянию.

Заключение и дальнейшие направления исследования

Введенные в этой работы параметры степени родства и дефицитности ресурса позволили продемонстрировать в численных экспериментах некоторые эффекты, которые ранее наблюдались учеными из разных предметных областей, однако не согласовывались одновременно в какой-то конкретной модели. Поиск равновесных по Нэшу состояний в модели, в которой эгоистичные агенты, разбитые на сообщества, получают благо согласно формуле (4), позволил решить этот вопрос. Эффект кооперации больших групп, по всей видимости, нельзя объяснить эгоистичными соображениями о равновесии, и он следует лишь из эволюционной устойчивости больших групп, склонных к кооперации, и эволюционной неустойчивости иных больших групп. В будущем планируется, во-первых, показать аналитически справедливость предложений 3–6. Во-вторых, так как модель показала свою широкую универсальность, ее можно применять к изучению конкретных сообществ или экосистем. В рамках более частных задач параметры a и b, введенные в задаче, могут вести себя как некоторые функции, зависящие от внешней среды. Также уровень ресурса, которым располагает каждый агент, может не быть одинаковым для всех, а взят из некоторого распределения. Полученные авторами результаты уже заинтересовали отечественные научные СМИ, такие как ТАСС (https://nauka.tass.ru/nauka/16928303), и авторы надеются, что специфицированная таким образом модель поможет в будущем получать содержательные прогностические результаты в области биологии и экономики.

Список литературы (References)

Balart P., Flamand S., Troumpounis O. Strategic choice of sharing rules in collective contests // Social Choice and Welfare. — 2016. — Vol. 46. — P. 239–262.

Boomsma J. J., Gawne R. Superorganismality and caste differentiation as points of no return: how the major evolutionary transitions were lost in translation // Biological Reviews. — 2018. — Vol. 93, No. 1. — P. 28–54.

Cherington P. T. Advertising as a business force: a compilation of experience records. — Doubleday, Page for the Associated advertising clubs of America, 1913.

Choe J. C., Crespi B. J. The evolution of social behaviour in insects and arachnids. — Cambridge University Press, 1997.

Frank S. A. Mutual policing and repression of competition in the evolution of cooperative groups // Nature. — 1995. — Vol. 377, No. 6549. — P. 520–522.

Hamilton W. D. Altruism and related phenomena, mainly in social insects // Annual Review of Ecology and systematics. — 1972. — Vol. 3, No. 1. — P. 193–232.

Hamilton W. D. The evolution of social behavior // J. theor. Biol. — 1964. — Vol. 7. — P. 1–52.

Heinze J. Reproductive conflict in insect societies // Advances in the Study of Behavior. — 2004. — Vol. 34, No. 1. — P. 1–57.

Karsai I., Wenzel J. W. Productivity, individual-level and colony-level flexibility, and organization of work as consequences of colony size // Proceedings of the National Academy of Sciences. — 1998. — Vol. 95, No. 15. — P. 8665–8669.

Michener C. D. Reproductive efficiency in relation to colony size in hymenopterous societies // Insectes sociaux. — 1964. — Vol. 11. — P. 317–341.

Nitzan S. Collective rent dissipation // The Economic Journal. — 1991. — Vol. 101, No. 409. — P. 1522–1534.

Nitzan S., Ueda K. Prize sharing in collective contests // European Economic Review. — 2011. — Vol. 55, No. 5. — P. 678–687.

Olson M. The free-rider problem / The social movements reader: Cases and concepts. — 2009. — P. 60–65.

Reeve H. K., Emlen S. T., Keller L. Reproductive sharing in animal societies: reproductive incentives or incomplete control by dominant breeders? // Behavioral Ecology. — 1998. — Vol. 9, No. 3. — P. 267–278.

Reeve H. K., Hölldobler B. The emergence of a superorganism through intergroup competition // Proceedings of the National Academy of Sciences. — 2007. — Vol. 104, No. 23. — P. 9736–9740.

Rusch H., Gavrilets S. The logic of animal intergroup conflict: A review // Journal of Economic Behavior & Organization. — 2020. — Vol. 178. — P. 1014–1030.

Traulsen A., Nowak M. A. Evolution of cooperation by multilevel selection // Proceedings of the National Academy of Sciences. — 2006. — Vol. 103, No. 29. — P. 10952–10955.

Tong K., Bozdag G. O., Ratcliff W. C. Selective drivers of simple multicellularity // Current Opinion in Microbiology. — 2022. — Vol. 67. — P. 102141.

West-Eberhard M. J., Alexander R. D., Tinkle D. W. Natural selection and social behavior. — 1981.

Wilson E. O., Hölldobler B. Eusociality: origin and consequences // Proceedings of the National Academy of Sciences. — 2005. — Vol. 102, No. 38. — P. 13367–13371.

Ueda K. Oligopolization in collective rent-seeking // Social Choice and Welfare. — 2002. — P. 613–626.