

УДК: 519.7, 004.9

Сравнение сложных динамических систем на основе топологического анализа данных

С. Н. Чуканов

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Омский филиал,
Россия, 644043, г. Омск, ул. Певцова, д. 13

E-mail: ch_sn@mail.ru

*Получено 13.08.2022, после доработки — 07.12.2022.
Принято к публикации 27.02.2023.*

В работе рассматривается возможность сравнения и классификации динамических систем на основе топологического анализа данных. Определение мер взаимодействия между каналами динамических систем на основе методов НПА (Hankel Interaction Index Array) и РМ (Participation Matrix) позволяет построить графы НПА и РМ и их матрицы смежности. Для любой линейной динамической системы может быть построен аппроксимирующий ориентированный граф, вершины которого соответствуют компонентам вектора состояния динамической системы, а дуги — мерам взаимного влияния компонент вектора состояния. Построение меры расстояния (близости) между графами различных динамических систем имеет важное значение, например для идентификации штатного функционирования или отказов динамической системы или системы управления. Для сравнения и классификации динамических систем в работе предварительно формируются взвешенные ориентированные графы, соответствующие динамическим системам, с весами ребер, соответствующими мерам взаимодействия между каналами динамической системы. На основе методов НПА и РМ определяются матрицы мер взаимодействия между каналами динамических систем. В работе приведены примеры формирования взвешенных ориентированных графов для различных динамических систем и оценивания расстояния между этими системами на основе топологического анализа данных. Приведен пример формирования взвешенного ориентированного графа для динамической системы, соответствующей системе управления компонентами вектора угловой скорости летательного аппарата, который рассматривается как твердое тело с главными моментами инерции. Метод топологического анализа данных, используемый в настоящей работе для оценки расстояния между структурами динамических систем, основан на формировании персистентных баркодов и функций персистентного ландшафта. Методы сравнения динамических систем на основе топологического анализа данных могут быть использованы при классификации динамических систем и систем управления. Применение традиционной алгебраической топологии для анализа объектов не позволяет получить достаточное количество информации из-за уменьшения размерности данных (в связи потерей геометрической информации). Методы топологического анализа данных обеспечивают баланс между уменьшением размерности данных и характеристикой внутренней структуры объекта. В настоящей работе используются методы топологического анализа данных, основанные на применении фильтраций Vietoris-Rips и Dowker для присвоения каждому топологическому признаку геометрической размерности. Для отображения персистентных диаграмм метода топологического анализа данных в гильбертово пространство и последующей количественной оценки сравнения динамических систем используются функции персистентного ландшафта. На основе построения функций персистентного ландшафта предлагаются сравнение графов динамических систем и нахождение расстояний между динамическими системами. Для этой цели предварительно формируются взвешенные ориентированные графы, соответствующие динамическим системам. Приведены примеры нахождения расстояния между объектами (динамическими системами).

Ключевые слова: сложная динамическая система, персистентные гомологии, функции персистентного ландшафта

Работа выполнена при поддержке программы фундаментальных научных исследований СО РАН № I.5.1, проект № 0314-2019-0020, и Российского научного фонда, грант № 22-21-00035.

UDC: 519.7, 004.9

Comparison of complex dynamical systems based on topological data analysis

S. N. Chukanov

Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Omsk branch,
13 Pevtsova st., Omsk, 644043, Russia

E-mail: ch_sn@mail.ru

Received 13.08.2022, after completion — 07.12.2022.

Accepted for publication 27.02.2023.

The paper considers the possibility of comparing and classifying dynamical systems based on topological data analysis. Determining the measures of interaction between the channels of dynamic systems based on the HIIA (Hankel Interaction Index Array) and PM (Participation Matrix) methods allows you to build HIIA and PM graphs and their adjacency matrices. For any linear dynamic system, an approximating directed graph can be constructed, the vertices of which correspond to the components of the state vector of the dynamic system, and the arcs correspond to the measures of mutual influence of the components of the state vector. Building a measure of distance (proximity) between graphs of different dynamic systems is important, for example, for identifying normal operation or failures of a dynamic system or a control system. To compare and classify dynamic systems, weighted directed graphs corresponding to dynamic systems are preliminarily formed with edge weights corresponding to the measures of interaction between the channels of the dynamic system. Based on the HIIA and PM methods, matrices of measures of interaction between the channels of dynamic systems are determined. The paper gives examples of the formation of weighted directed graphs for various dynamic systems and estimation of the distance between these systems based on topological data analysis. An example of the formation of a weighted directed graph for a dynamic system corresponding to the control system for the components of the angular velocity vector of an aircraft, which is considered as a rigid body with principal moments of inertia, is given. The method of topological data analysis used in this work to estimate the distance between the structures of dynamic systems is based on the formation of persistent barcodes and persistent landscape functions. Methods for comparing dynamic systems based on topological data analysis can be used in the classification of dynamic systems and control systems. The use of traditional algebraic topology for the analysis of objects does not allow obtaining a sufficient amount of information due to a decrease in the data dimension (due to the loss of geometric information). Methods of topological data analysis provide a balance between reducing the data dimension and characterizing the internal structure of an object. In this paper, topological data analysis methods are used, based on the use of Vietoris-Rips and Dowker filtering to assign a geometric dimension to each topological feature. Persistent landscape functions are used to map the persistent diagrams of the method of topological data analysis into the Hilbert space and then quantify the comparison of dynamic systems. Based on the construction of persistent landscape functions, we propose a comparison of graphs of dynamical systems and finding distances between dynamical systems. For this purpose, weighted directed graphs corresponding to dynamical systems are preliminarily formed. Examples of finding the distance between objects (dynamic systems) are given.

Keywords: complex dynamical system, persistent homology, persistent landscape functions

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2023, vol. 15, no. 3, pp. 513–525 (Russian).

The work was supported by the Basic Research Program of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences No. I.5.1, Project No. 0314-2019-0020, and the Russian Science Foundation, grant No. 22-21-00035.

1. Введение

Понятие расстояния в обыденной жизни означает некоторую степень близости объектов. Математические понятия метрики расстояния (т.е. функции множества действительных чисел $d(x, y) \geq 0$, $x, y \in X \times X$, удовлетворяющей $(x = y) \Rightarrow d(x, y) = 0$, $d(x, y) = d(y, x)$, $d(x, y) = d(x, z) + d(z, y)$) и метрического пространства (X, d) были введены Феликсом Хаусдорфом [Hausdorff, 1914]. Метрики расстояний стали инструментом во многих областях математики (теория графов, анализ речи, распознавание образов, вычислительная биология, поиск информации и др. области науки). Разработка наиболее подходящих показателей расстояния и подобия для количественной оценки близости между объектами стала стандартной задачей. В энциклопедии [Deza, Deza, 2016] рассматриваются методы определения расстояний как между геометрическими объектами, так и между сигналами различной физической природы (звуковыми, изображениями, электромагнитными и т.д.). Определение малого уровня расстояния (меньше минимального порога) между изображениями объекта-эталона и неизвестного объекта можно оценивать как распознавание образа неизвестного объекта. Определение большого уровня расстояния (больше максимального порога) между изображениями объекта-эталона и неизвестного объекта можно оценивать как ошибку распознавания образа неизвестного объекта. Представляя графы взаимного влияния между каналами динамической системы в качестве сравниваемого с эталоном изображения, можно оценивать расстояние между графом взаимного влияния эталонной динамической системы и графом взаимного влияния анализируемой динамической системы; на основе этого оценивания можно распознать сходство (или отличие) анализируемой динамической системы по отношению к эталонной динамической системе. В работе [Deza, Deza, 2016] отсутствуют методы оценивания расстояния между динамическими системами.

В настоящей работе расстояние между динамическими системами оценивается на основе топологического анализа данных [Carlsson, 2009; Edelsbrunner, Harer, 2022]. Для этой цели предварительно формируются взвешенные ориентированные графы, соответствующие динамическим системам, с весами ребер, соответствующими мерам взаимодействия между каналами динамической системы. На основе методов НПА и РМ определяются матрицы мер взаимодействия между каналами динамических систем.

Метод топологического анализа данных, используемый в настоящей работе для оценки расстояния между структурами динамических систем, основан на формировании персистентных баркодов [Edelsbrunner, Harer, 2022] и функций персистентного ландшафта [Bubenik, 2020]. Применение традиционной алгебраической топологии [Hatcher, 2005] для анализа объектов не позволяет получить достаточное количество информации из-за уменьшения размерности данных (в связи потерей геометрической информации). Методы топологического анализа данных обеспечивают баланс между уменьшением размерности данных и характеристикой внутренней структуры объекта. В настоящей работе используются методы топологического анализа данных, основанные на применении фильтраций Vietoris-Rips и Dowker [Chowdhury, 2019] для присвоения каждому топологическому признаку геометрической размерности. В работе рассматриваются математические модели и функции представления объектов персистентного ландшафта на основе метода персистентной гомологии. Рассмотрены методы построения функций персистентного ландшафта, которые позволяют отображать функции персистентного ландшафта в гильбертово пространство.

Сложные динамические системы и системы управления характеризуются взаимодействием между каналами системы и подсистемами [Чуканов, 2020]. При проектировании системы управления определяются меры взаимодействия между подсистемами. Одной из проблем при проектировании системы управления является определение динамической системы, которую необходимо использовать при проектировании. В работе рассматриваются методы оценивания взаимодействия между подсистемами при проектировании структуры системы управления

сложными динамическими объектами. Меры взаимодействия между динамическими системами определяются на основе методов НИА (Hankel Interaction Index Array) и РМ (Participation Matrix) [Halvarsson, 2010; Kumar, Rao, Chidambaram, 2012].

Для любой динамической ЛТИ-системы может быть построен аппроксимирующий граф, вершины которого соответствуют компонентам вектора состояния x динамической системы, а ребра — мерам взаимного влияния компонентов вектора x . Так как мера влияния компоненты x_i вектора x на компоненту x_j может отличаться от меры влияния x_j на x_i (асимметричное взаимодействие), то аппроксимирующие графы должны быть ориентированными; каждому дуге сопоставляется вес — мера влияния компоненты (вершины графа) x_j на компоненту x_i .

Каждый граф, в свою очередь, можно рассматривать как симплициальный комплекс — объект алгебраической топологии [Hatcher, 2005]. Применение алгебраической топологии для анализа объектов не позволяет получить достаточное количество информации из-за уменьшения размерности данных (в связи потерей геометрической информации). Методы топологического анализа данных [Carlsson, 2009; Edelsbrunner, Harer, 2022] основаны на формировании персистентных гомологий, которые обеспечивают баланс между топологическим уменьшением размерности данных и характеристикой внутренней геометрической структуры объекта. Персистентная гомология может быть представлена персистентным баркодом или персистентной диаграммой. В настоящей работе используются методы топологического анализа данных, основанные на применении фильтраций Vietoris-Rips и Dowker [Chowdhury, 2019] для присвоения каждому топологическому признаку геометрической размерности. В работе рассматриваются математические модели и функции представления объектов персистентного ландшафта на основе метода персистентной гомологии. Рассмотрены методы построения функций персистентного ландшафта, которые позволяют отображать персистентные диаграммы и персистентные баркоды в гильбертово пространство. На основе построения функций персистентного ландшафта в работе предложены сравнение графов динамических систем и нахождение расстояний между динамическими системами. Для этой цели предварительно формируются взвешенные ориентированные графы, соответствующие динамическим системам, с весами ребер, соответствующими мерам взаимодействия между каналами динамических систем.

В настоящей работе приведены примеры формирования взвешенных ориентированных графов для различных динамических систем и оценивания расстояния между этими системами на основе топологического анализа данных, который основан на формировании персистентных баркодов [Ghrist, 2008] и функций персистентного ландшафта [Bubenik, 2020].

В работе приведен пример формирования взвешенного ориентированного графа для динамической системы, соответствующей системе управления компонентами вектора угловой скорости летательного аппарата, который рассматривается как твердое тело с главными моментами инерции. Методы сравнения динамических систем на основе топологического анализа данных могут быть использованы при проектировании и идентификации отказов систем управления, а также при распознавании временных рядов, формируемых динамическими системами (например, при распознавании ECG, EEG, MRI, финансовых рядов, телеметрии летательных аппаратов и т. д.).

2. Оценивание взаимодействия процессов в подсистемах сложной динамической системы

Рассмотрим ЛТИ-систему с входным вектором $u(t) \in \mathbb{R}^p$, выходным вектором $y(t) \in \mathbb{R}^p$ и вектором состояния $x(t) \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \quad (1)$$

где $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$, $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$; передаточная функция системы $G(z) = [G_{ij}(z)]$; $i, j = 1, \dots, p$.

Матрица системы обозначается через $(A, B, C, 0)$, где $B = [b_1 \dots b_p]$; $C^T = [c_1^T \dots c_p^T]$, b_j , $j = 1, \dots, p$, — j -й вектор-столбец матрицы B ; c_i , $i = 1, \dots, p$, — i -я вектор-строка матрицы C . Определим грамиан управляемости $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ и грамиан наблюдаемости $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ системы как решения уравнений Ляпунова:

$$\begin{aligned} AP + PA^T + BB^T &= 0, \\ A^T Q + QA + C^T C &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Грамиан управляемости можно определить с помощью функции Matlab: $Wc = \text{gram}(\text{sys}, 'c')$; грамиан наблюдаемости — с помощью функции $Wo = \text{gram}(\text{sys}, 'o')$, где $\text{sys} = \text{ss}(A, B, C, 0)$.

С МИМО-системой $(A, B, C, 0)$ можно связать множество SISO-систем, каждая из которых имеет один вход u_j , $j \in 1, \dots, p$, один выход y_i , $i \in 1, \dots, p$, и модель пространства состояний, заданную матрицами $(A, b_j, c_i, 0)$ с грамианами P_j, Q_i , удовлетворяющими соотношениям Ляпунова:

$$\begin{aligned} AP_j + P_j A^T + b_j b_j^T &= 0; \\ A^T Q_i + Q_i A + c_i^T c_i &= 0. \end{aligned}$$

Мера взаимодействия НИА (Hankel Interaction Index Array). Пусть $\sigma_H^{(i)} = \sqrt{\lambda_i}$, $i = 1, \dots, n$, — сингулярные числа Ганкеля, где $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ — упорядоченные собственные значения произведения PQ : $\sigma_H^{(1)} \geq \sigma_H^{(2)} \geq \dots \geq \sigma_H^{(n)} \geq \dots$. Ганкелева норма системы с передаточной функцией G определяется как $\|G\|_H = \sigma_H^{(1)} = \sqrt{\lambda_{\max}(PQ)}$, $i = 1, \dots, n$. Система МИМО $(A, B, C, 0)$ может быть декомпозирована на подсистемы SISO $(A, b_j, c_i, 0)$ с одним входом u_j и одним выходом y_i каждая, где b_j — j -й столбец в матрице B , c_i — i -я строка в матрице C . Грамианы управляемости и наблюдаемости для системы $(A, B, C, 0)$ будут суммой соответствующих грамианов для подсистем: $P = \sum_{j=1}^n P_j$, $Q = \sum_{i=1}^n Q_i$, где P_j и Q_i — грамианы управляемости и наблюдаемости для подсистемы $(A, b_j, c_i, 0)$. Если норма Ганкеля рассчитывается для каждой подсистемы и размещается в матрице $\|G_{ij}\|_H$, то эту матрицу можно использовать в качестве меры взаимодействия. Нормализованной версией является НИА (Hankel Interaction Index Array) [Чуканов, 2020]:

$$[\Sigma_H]_{ij} = \frac{\|G_{ij}\|_H}{\sum_{kl} \|G_{kl}\|_H}, \quad \sum_{kl} [\Sigma_H]_{ij} = 1.$$

Мера взаимодействия Σ_2 . В работе [Halvarsson, 2010] предлагается использовать меру Σ_2 , аналогичную НИА, но с нормой

$$[\Sigma_2]_{ij} = \frac{\|G_{ij}\|_2}{\sum_{kl} \|G_{kl}\|_2},$$

где

$$\|G\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{tr}(G(j\omega)G(j\omega)) d\omega},$$

или

$$\|G(s)\|_2 = \|g(t)\|_2 = \sqrt{\int_0^{\infty} \text{tr}(g^T(\tau)g(\tau)) d\tau},$$

$g(t)$ — матрица импульсной характеристики системы. Для системы $(A, B, C, 0)$ с грамианом управляемости P и грамианом наблюдаемости Q норму \mathcal{H}_2 можно определить по формуле $\|G\|_2 = \sqrt{\text{tr}(B^T Q B)} = \sqrt{\text{tr}(C P C^T)}$. Для подсистемы SISO $(A, b_j, c_i, 0)$: $\text{tr}(C P C^T) = c_i P_j c_i^T = b_j^T Q_i b_j$, можно ввести меру взаимодействия Σ_2 :

$$[\Sigma_2]_{ij} = \frac{\|G_{ij}\|_2}{\sum_{kl} \|G_{kl}\|_2} = \frac{\sqrt{c_i P_j c_i^T}}{\sum_{kl} \sqrt{c_k P_l c_k^T}}, \quad \sum_{i,j} [\Sigma_2]_{ij} = 1. \quad (3)$$

Индекс РМ. След $\text{tr}[P_j Q_i]$ является суммой квадратов сингулярных чисел Ганкеля, подсистемы с входом u_j и выходом y_i . Мера взаимодействия подсистем может быть оценена по компонентам матрицы РМ (participation matrix) $\Phi = [\phi_{ij}] \in \mathbb{R}^{p \times p}$:

$$\phi_{ij} = \frac{\text{tr}[P_j Q_i]}{\text{tr}[P Q]}, \quad (4)$$

$$0 \leq \phi_{ij} < 1, \quad \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \phi_{ij} = 1.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Следует отметить, что в общем случае компоненты РМ не являются коммутативными ($\phi_{ij} \neq \phi_{ji}$), не выполняется неравенство треугольника ($\phi_{ij} \leq \phi_{ik} + \phi_{kj}$).

3. Метод топологического анализа данных

Метод топологического анализа данных [Carlsson, 2009; Edelsbrunner, Harer, 2022], используемый в настоящей работе для оценки расстояния между динамическими системами, основан на формировании персистентных баркодов [Ghrist, 2008] и функций персистентного ландшафта [Bubenik, 2020]. Преимущества применения в приложениях топологического анализа данных, по сравнению с алгебраической топологией [Hatcher, 2005], основаны на повышении разнообразия информации за счет получения геометрической информации о баркодах (в алгебраической топологии используются только числа Бетти и характеристики Эйлера объектов). В то же время методы топологического анализа данных не используют декартовы координаты объектов и инвариантны по отношению к евклидовым преобразованиям (перенос, вращение, масштабирование).

Рассмотрим симплицальный комплекс Σ , который представляет собой набор непустых подмножеств конечного множества вершин Σ_0 , которые удовлетворяют $\alpha \in \Sigma, \beta \subset \alpha \Rightarrow \beta \in \Sigma$. Если $\alpha \in \Sigma$ и $k = |\alpha| - 1$, α называется k -симплексом и симплекс $\beta \subset \alpha$ является гранью α . Мы будем обозначать множество всех k -симплексов как Σ_0 . Размерность Σ определяется как $\dim(\Sigma) := \max_{\alpha \in \Sigma} \{|\alpha| - 1\}$. Рассмотрим C_k как свободную абелеву группу с коэффициентами в \mathbb{Z} , порожденную k -симплексами, так что каждый элемент $A \in C_k$ может быть выражен в виде $c = \sum_{i=1}^n c_i \alpha_i$, где α_i — k -симплексы и $c_i \in \mathbb{Z}$.

Предположим, что множество вершин Σ_0 упорядочено. Это позволяет определить множество гомоморфизмов $d_i: \Sigma_k \rightarrow \Sigma_{k-1}$, $0 \leq i \leq k$, заданных формулой $d_i(\sigma) = \sigma \setminus \{s_i\}$, где d_i — i -й элемент σ . Определим граничный гомоморфизм $\delta_k: C_k \rightarrow C_{k-1}$, заданный формулой $\delta_k = \sum_{i=0}^k (-1)^i d_i$. Так как $\delta_k \circ \delta_{k+1} = 0$, то $\text{Im}(\delta_{k+1}) \subseteq \text{Ker}(\delta_k)$. k -я группа гомологий Σ определяется как $H_k(\Sigma) = \frac{\text{Ker}(\delta_k)}{\text{Im}(\delta_{k+1})}$. k -е число Бетти Σ определяется как $\beta_k = \text{rank}(H_k(\Sigma))$ и является количеством k -мерных дыр в Σ , т.е. β_0 — это число независимых компонент связности, β_1 — число петель, β_2 — число полостей и т.д.

Предположим, что существует облако точек $X = \{x_1, x_2, \dots, x_N\} \subset \mathbb{R}^d$. Симплициальный Čech-комплекс $C(X, \varepsilon)$ с параметром $\varepsilon > 0$ и с вершинами в X определяется как $C(X, \varepsilon) = \left\{ \alpha \subset X : \bigcap_{v \in \alpha} B_\varepsilon(v) \neq \emptyset \right\}$, где $B_\varepsilon(v)$ — шар радиусом ε с центром в v . Симплициальный Vietoris-Rips-комплекс $VR(X, \varepsilon)$ с параметром $\varepsilon > 0$ и с вершинами в X определяется как: $VR(X, \varepsilon) = \{ \alpha \subset X : \|v_i - v_j\| \leq \varepsilon, \forall v_i, v_j \in \alpha \}$.

Если $\Sigma(\varepsilon)$ — Čech- или Vietoris-Rips-комплекс с $\varepsilon > 0$ с вершинами в X , то получим свойство фильтрации $\Sigma(\varepsilon') \subseteq \Sigma(\varepsilon) \forall \varepsilon' \leq \varepsilon$. Из этого свойства следует, что $H_k(\Sigma(\varepsilon')) \rightarrow H_k(\Sigma(\varepsilon)) \forall \varepsilon' \leq \varepsilon$.

Фильтрация симплициального комплекса Σ представляет собой отображение $\varepsilon \in (0, \infty) \rightarrow \Sigma(\varepsilon)$, где $\Sigma(\varepsilon) \subseteq \Sigma$ также является симплициальным комплексом и удовлетворяет свойству фильтрации $\Sigma(\varepsilon') \subseteq \Sigma(\varepsilon) \forall \varepsilon' \leq \varepsilon$. Фильтрация $\varepsilon \rightarrow \Sigma(\varepsilon)$ индуцирует следующее свойство в группах гомологии: $H_k(\Sigma(\varepsilon')) \rightarrow H_k(\Sigma(\varepsilon)) \forall \varepsilon' \leq \varepsilon$. Это индуцирует канонические гомоморфизмы $h_k^{\varepsilon', \varepsilon} : H_k(\Sigma(\varepsilon')) \rightarrow H_k(\Sigma(\varepsilon))$, $(\forall k) \wedge (\forall \varepsilon' \leq \varepsilon)$.

Класс гомологии $\alpha \in H_k(\Sigma(b))$, $b > 0$, рождается при значении $b(\alpha) = b$, если $\alpha \notin H_k^{b-\delta, b} \forall \delta > 0$. Если α рождается в b , говорят, что α умирает в $d(\alpha) = d \geq b$, если $(h_k^{b, \varepsilon}(\alpha) \neq 0, b < \varepsilon < d) \wedge (h_k^{b, d}(\alpha) = 0)$. Персистентность класса гомологии α — это разность $\text{pers}(\alpha) = d(\alpha) - b(\alpha)$.

Персистентные гомологии конечного множества $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ можно представить в виде топологических генераторов (баркодов) — пар появления (БТ — birth time) и исчезновения (ДТ — death time) баркодов, которые можно обозначить как $l_j^k = \{b_j^k, d_j^k\}$, $j \in \{1, 2, \dots, N_k\}$, где N_k — общее число k -мерных топологических генераторов [Ghrist, 2008]. Определим множество баркодов k -го измерения: $L_k = \left\{ l_j^k = \{b_j^k, d_j^k\}_{j \in \{1, 2, \dots, N_k\}} \right\}$. Топологическая персистентность может быть представлена персистентным баркодом (каждый l_j^k рассматривается как баркод) или персистентной диаграммой (каждый l_j^k рассматривается как двумерная точка с координатой $l_j^k = (b_j^k, d_j^k)$) [Bubenik, 2020].

На основе информации о матрицах Σ_2 или Φ динамических систем можно построить взвешенные ориентированные графы, в качестве весов ребер которых $\omega_X(x_i, x_j)$ будут использоваться компоненты матриц Σ_2 или Φ .

Vietoris-Rips-комплекс взвешенного ориентированного графа (X, ω_X) , где $\omega_X(x, x')$ — это вес между точками $x, x' \in X$, определяется следующим образом: $VR(X, \varepsilon) := \left\{ \alpha \in \text{row}(X) : \max_{x, x' \in \alpha} \omega_X(x, x') \leq \varepsilon \right\}$. С сетью (орграфом) (X, ω_X) можно связать Vietoris-Rips-фильтрацию $\{VR(X, \varepsilon) \rightarrow VR(X, \varepsilon')\}_{\varepsilon \leq \varepsilon'}$. Čech-комплекс равен $\check{C}(X, \varepsilon) := \left\{ \alpha \subseteq X : \exists p \in X : \max_{x \in \alpha} \omega_X(x, p) \leq \varepsilon \right\}$.

Dowker-комплексы представляют собой обобщение Čech-комплекса на случай асимметричных сетей (орграфов) [Chowdhury, 2019]. Для заданной сети (X, ω_X) рассмотрим соотношение $R(X, \varepsilon) := \{(x, x') : \omega_X(x, x') \leq \varepsilon\} \forall \varepsilon \in \mathbb{R}$; тогда $R_{\delta, X} \subseteq R_{\delta', X} \forall \delta' \geq \delta$. Используя $R(X, \varepsilon)$, построим симплициальный комплекс $D^{si}(X, \varepsilon)$:

$$D^{si}(X, \varepsilon) := \{ \alpha = [x_0, \dots, x_n] : \exists x' \in X : (x_i, x') \in R(X, \varepsilon) \forall x_i \}. \quad (5)$$

Если $\alpha \in D^{si}(X, \varepsilon)$, то любая грань σ также принадлежит $D^{si}(X, \varepsilon)$. Назовем $D^{si}(X, \varepsilon)$ симплициальным Dowker- δ -sink-комплексом, ассоциированным с X , и называем x' ε -sink для α . Для $\varepsilon' \geq \varepsilon$ имеется отображение включения $D^{si}(X, \varepsilon) \rightarrow D^{si}(X, \varepsilon')$. Дуальный Dowker-source-комплекс, связанный с X , определяется как

$$D^{so}(X, \varepsilon) := \{ \alpha = [x_0, \dots, x_n] : \exists x' \in X : (x', x_i) \in R(X, \varepsilon) \forall x_i \}. \quad (6)$$

Использование баркодов персистентных гомологий не позволяет построить функциональное метрическое пространство (например, гильбертово пространство). Рассмотрим метод построения гильбертова пространства и использование *функций персистентного ландшафта*.

Для каждого отдельного баркода можно определить кусочно-линейную функцию $f(x, l_j^k)$:

$$f(x, l_j^k) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \notin (b_j^k, d_j^k), \\ x - b_j^k, & \text{если } x \in \left[b_j^k, \frac{b_j^k + d_j^k}{2} \right], \\ -x + d_j^k, & \text{если } x \in \left[\frac{b_j^k + d_j^k}{2}, d_j^k \right]. \end{cases} \quad (7)$$

Персистентный ландшафт k -мерного баркода L_k — это последовательность функций $\lambda_m^{PL}: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty]$, $m = 1, 2, 3, \dots$, где $\lambda_m(x)$ — m -е наибольшее значение $\{f(x, l_j^k)\}_{j=1}^{N_k}$. Для баркодов $B = \{I_j\}$ можно определить функцию персистентного ландшафта (PL [Bubenik, 2020]) как

$$\lambda(k, t) = \sup\{h \geq 0 \mid [t - h, t + h] \subset I_j \text{ для различных } j \geq k\}. \quad (8)$$

Для функций персистентных ландшафтов можно сформировать внутреннее скалярное произведение

$$\langle \lambda^{PL}, \lambda'^{PL} \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda_k^{PL}(t) \lambda_k'^{PL}(t) dt$$

и соответствующее гильбертово функциональное пространство.

Расстояния между персистентными ландшафтами можно определить с помощью нормы L^∞ : $\|\lambda^{PL} - \lambda'^{PL}\|_\infty = \sup_{k,t} |\lambda_k^{PL}(t) - \lambda_k'^{PL}(t)|$ или нормы L^p [Kusano, Hiraoka, Fukumizu, 2016; Chukanov, 2019; Chukanov, 2020]:

$$\|\lambda^{PL} - \lambda'^{PL}\|_p = \left[\sum_k \int_{-\infty}^{\infty} |\lambda_k^{PL}(t) - \lambda_k'^{PL}(t)|^p dt \right]^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty. \quad (9)$$

4. Экспериментальные исследования

ПРИМЕР 1. Рассмотрим взаимодействие процессов в каналах динамической системы с матрицей A . Для подсистемы $(A, b_j, c_i, 0)$ сложной динамической системы, в которой вектор-столбец b_j имеет нулевые компоненты и единицу в позиции j , вектор-строка c_i имеет нулевые компоненты и единицу в позиции i , определим меру взаимодействия компонента вектора состояния x_j с компонентом x_i .

Пусть динамическая матрица системы равна

$$A_1 = \begin{pmatrix} -2 & 0,25 & 0,75 \\ 0,25 & -2 & 0,5 \\ 0,75 & 0,5 & -2 \end{pmatrix}, \quad A_1(i, j) = A_1(j, i).$$

Определим матрицу Φ в соответствии с (4):

$$\Phi_1 = [\phi_{ji}] = \begin{pmatrix} 0,249 & 0,022 & 0,071 \\ 0,022 & 0,214 & 0,039 \\ 0,071 & 0,039 & 0,273 \end{pmatrix}, \quad \phi_{ji} = \phi_{ij}.$$

Построим граф, в котором веса ребер соответствуют компонентам матрицы Φ_1 (см. рис. 1).

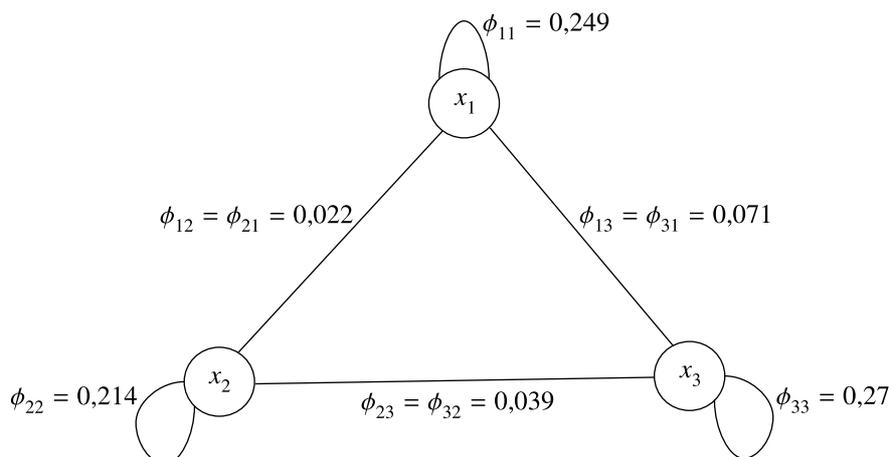


Рис. 1. Взвешенный ориентированный граф компонент матрицы РМ ϕ_{ij} , $i, j = 1, 2, 3$. В вершинах находятся компоненты вектора состояния динамической системы; веса ребер соответствуют компонентам матрицы Φ_1

По весам ребер $\omega(x_i, x_j)$ получим 0-мерные баркоды: $[0 \ 0,022]$, $[0 \ 0,071]$, $[0 \ \infty)$.

$$\lambda 1(1, t) = t \cdot st(t, (0 \dots 0,0355]) + (0,071 - t) \cdot st(t, (0,0355 \dots 0,071]),$$

$$\lambda 1(2, t) = t \cdot st(t, (0 \dots 0,011]) + (0,022 - t) \cdot st(t, (0,011 \dots 0,022]).$$

Пусть матрица A_2 системы с несимметричными взаимодействиями равна

$$A_2 = \begin{pmatrix} -2 & 0,25 & 0,75 \\ 0,5 & -2 & 0,25 \\ 0,75 & 0,5 & -2 \end{pmatrix}, \quad (i \neq j) \Rightarrow A_2(i, j) \neq A_2(j, i).$$

Определим матрицу Φ в соответствии с (4):

$$\Phi_2 = [\phi_{ji}] = \begin{pmatrix} 0,273 & 0,023 & 0,068 \\ 0,04 & 0,221 & 0,023 \\ 0,086 & 0,004 & 0,264 \end{pmatrix}, \quad \phi_{ji} \neq \phi_{ij}, \quad i \neq j.$$

Построим граф, в котором веса ребер соответствуют компонентам матрицы Φ_2 (см. рис. 2).

По весам ориентированных дуг $\omega(x_i, x_j)$ получим 0-мерные баркоды: $2[0 \ 0,023]$, $[0 \ \infty)$, так как $[0 \ 0,023] = \max\{[0 \ 0,023], [0 \ 0,04]\} = \max\{[0 \ 0,023], [0 \ 0,004]\}$.

$$\lambda 2(1, t) = t \cdot st(t, (0 \dots 0,0115]) + (0,023 - t) \cdot st(t, (0,0115 \dots 0,023]),$$

$$\lambda 2(2, t) = t \cdot st(t, (0 \dots 0,0115]) + (0,023 - t) \cdot st(t, (0,0115 \dots 0,023]).$$

Рассмотрим систему с динамической матрицей A_3 с несимметричными взаимодействиями:

$$A_3 = \begin{pmatrix} -2 & 0,25 & 0,5 \\ 0,75 & -2 & 0,75 \\ 0,5 & 0,25 & -2 \end{pmatrix}.$$

Определим матрицу Φ в соответствии с (4):

$$\Phi_3 = [\phi_{ji}] = \begin{pmatrix} 0,207 & 0,085 & 0,031 \\ 0,077 & 0,201 & 0,077 \\ 0,031 & 0,085 & 0,207 \end{pmatrix}.$$

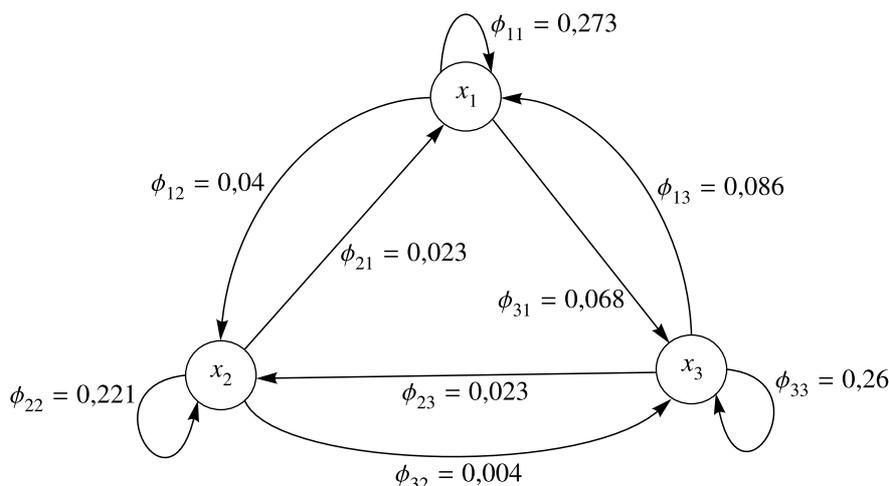


Рис. 2. Взвешенный ориентированный граф компонент матрицы РМ ϕ_{ij} , $i, j = 1, \dots, 3$. В вершинах находятся компоненты вектора состояния динамической системы; веса ориентированных дуг соответствуют компонентам матрицы Φ_2

По весам ориентированных дуг $\omega(x_i, x_j)$ получим 0-мерные баркоды: $[0 \ 0,031]$, $[0 \ 0,085]$, $[0 \ \infty)$, так как $[0 \ 0,085) = \max\{[0 \ 0,085), [0 \ 0,077)\}$.

$$\lambda 3(1, t) = t \cdot st(t, (0 \dots 0,0425]) + (0,085 - t) \cdot st(t, (0,0425 \dots 0,085]),$$

$$\lambda 3(2, t) = t \cdot st(t, (0 \dots 0,0155]) + (0,031 - t) \cdot st(t, (0,0155 \dots 0,031]).$$

ПРИМЕР 2. Определим расстояния между системами с динамическими матрицами A_1, A_2, A_3 по формуле (9); результаты приведены в табл. 1.

Таблица 1. Расстояния между динамическими системами

	λ_1	λ_2
d_1	0,71	0,022
d_2	0,023	0,023
d_3	0,085	0,031

Откуда получим расстояния между динамическими системами: $\|\lambda 1_1 - \lambda 2_1\|_2 = 0,173$, $\|\lambda 1_1 - \lambda 3_1\|_2 = 0,172$, $\|\lambda 2_1 - \lambda 3_1\|_2 = 0,007$.

ПРИМЕР 3. Рассмотрим пример системы стабилизации компонент вектора угловой скорости $(\omega_x \ \omega_y \ \omega_z)^T$ летательного аппарата, рассматриваемого как твердое тело, к требуемым значениям $(\widehat{\omega}_x \ \widehat{\omega}_y \ \widehat{\omega}_z)^T = (0 \ 0 \ \omega_{z0})^T$ [Раушенбах, Токарь, 1974] с динамическими уравнениями

$$\begin{aligned} J_x \dot{\omega}_x &= (J_y - J_z) \omega_z \omega_y + M_x, \\ J_y \dot{\omega}_y &= (J_z - J_x) \omega_z \omega_x + M_y, \\ J_z \dot{\omega}_z &= (J_x - J_y) \omega_x \omega_y + M_z, \end{aligned} \quad (10)$$

где $J_x = J_{xx}$, $J_y = J_{yy}$, $J_z = J_{zz}$ — компоненты тензора инерции твердого тела; M_x, M_y, M_z — компоненты вектора управляющего момента сил.

Предположим, что управляющие моменты сил формируются в соответствии с соотношениями

$$\begin{aligned} M_x &= -k_\omega \cdot \omega_x, \\ M_y &= -k_\omega \cdot \omega_y, \\ M_z &= -k_\omega \cdot (\omega_z - \omega_{z0}), \end{aligned} \quad (11)$$

где ω_{z0} — требуемое значение ω_z . Будем считать, что значения $|\omega_x|$, $|\omega_y|$, $|\omega_x - \omega_{z0}|$ малы и членами $\omega_x \omega_y$, $(\omega_z - \omega_{z0})\omega_y$, $(\omega_z - \omega_{z0})\omega_x$ можно пренебречь. Тогда динамические уравнения движения твердого тела будут иметь вид

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_x &= \alpha_x \cdot \omega_{z0} \cdot \omega_y - k_{\omega x} \cdot \omega_x, \\ \dot{\omega}_y &= \alpha_y \cdot \omega_{z0} \cdot \omega_x - k_{\omega y} \cdot \omega_y, \\ \dot{\omega}_z &= -k_{\omega z} \cdot (\omega_z - \omega_{z0}). \end{aligned} \quad (12)$$

Выберем вектор состояния системы $(x_1 \ x_2 \ x_3)^T = (\omega_x \ \omega_y \ \omega_z - \omega_{z0})^T$. При значениях $\omega_{z0} = 0,2$, $k_\omega = 100$ и главных моментах инерции, приведенных в табл. 2, получим динамические матрицы A_1, A_2, A_3 и матрицы Φ_1, Φ_2, Φ_3 (см. табл. 2).

Таблица 2. Параметры динамических систем

Система	Моменты инерции	Динамическая матрица	Матрица РМ
Sys1	$J_x = 60, J_y = 80, J_z = 90$	$A_1 = \begin{pmatrix} -1,67 & -0,033 & 0 \\ 0,075 & -1,25 & 0 \\ 0 & 0 & -1,11 \end{pmatrix}$	$\Phi_1 = \begin{pmatrix} 0,0895 & 0,000093 & 0 \\ 0,00048 & 0,1597 & 0 \\ 0 & 0 & 0,2029 \end{pmatrix}$
Sys2	$J_x = 60, J_y = 80, J_z = 100$	$A_2 = \begin{pmatrix} -1,67 & -0,067 & 0 \\ 0,1 & -1,25 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\Phi_2 = \begin{pmatrix} 0,0893 & 0,00038 & 0 \\ 0,00085 & 0,1592 & 0 \\ 0 & 0 & 0,225 \end{pmatrix}$
Sys3	$J_x = 60, J_y = 80, J_z = 110$	$A_3 = \begin{pmatrix} -1,67 & -0,1 & 0 \\ 0,125 & -1,25 & 0 \\ 0 & 0 & -0,91 \end{pmatrix}$	$\Phi_3 = \begin{pmatrix} 0,0889 & 0,00085 & 0 \\ 0,0013 & 0,1584 & 0 \\ 0 & 0 & 0,3019 \end{pmatrix}$

Для нахождения расстояния между динамическими системами используем соотношение (9). Результаты приведены в табл. 3.

Таблица 3. Расстояния между динамическими системами

	λ^{st}	λ^{so}	λ_{\max}
d_1	0,000093	0,00048	0,00048
d_2	0,00038	0,00085	0,00085
d_3	0,00085	0,0013	0,0013

Откуда получим расстояния между динамическими системами: $\|\lambda1_{\max} - \lambda2_{\max}\|_2 = 0,0001812$, $\|\lambda1_{\max} - \lambda3_{\max}\|_2 = 0,000349$, $\|\lambda2_{\max} - \lambda3_{\max}\|_2 = 0,0002771$.

5. Заключение

В работе рассматривается возможность сравнения и классификации динамических систем на основе топологического анализа данных. Для этой цели предварительно формируются взвешенные ориентированные графы, соответствующие динамическим системам, с весами ребер, соответствующими мерам взаимодействия между каналами динамической системы. Рассматривается метод выбора параметров проектирования системы управления динамическими объектами при учете взаимодействия этих объектов. На основе методов НПА (Hankel Interaction Index

Array) и РМ (Participation Matrix) определяются меры взаимодействия между каналами динамических систем.

Приведены примеры формирования взвешенных ориентированных графов для различных динамических систем и оценивания расстояния между этими системами на основе топологического анализа данных. Методы сравнения динамических систем на основе топологического анализа данных могут быть использованы при проектировании и идентификации отказов систем управления. Метод топологического анализа данных, используемый для оценки расстояния между динамическими системами, основан на формировании персистентных баркодов и функций персистентного ландшафта.

Приведен пример формирования взвешенного ориентированного графа для динамической системы, соответствующей системе управления компонентами вектора угловой скорости летательного аппарата, который рассматривается как твердое тело с главными моментами инерции.

Методы сравнения динамических систем на основе топологического анализа данных могут быть использованы при проектировании и идентификации отказов систем управления, а также при распознавании временных рядов, формируемых динамическими системами (например, при распознавании ECG, EEG, MRI, финансовых рядов, телеметрии летательных аппаратов и т. д.).

В дальнейших работах предполагается построить алгоритмы оценивания нормальных и патологических временных рядов ECG и EEG, формируемых соответствующими динамическими системами.

Список литературы (References)

- Раушенбах Б. В., Токарь Е. Н.* Управление ориентацией космических аппаратов. — М.: Наука, 1974.
Raushenbakh B. V., Tokar' E. N. Upravlenie orientatsiei kosmicheskikh apparatov [Spacecraft Attitude Control]. — Moscow: Nauka, 1974 (in Russian).
- Чуканов С. Н.* Моделирование структуры сложной системы на основе оценивания меры взаимодействия подсистем // Компьютерные исследования и моделирование. — 2020. — Т. 12, № 4. — С. 707–719. — DOI: 10.20537/2076-7633-2020-12-4-707-719
Chukanov S. N. Modelirovanie struktury slozhnoj sistemy na osnove ocenivaniya mery vzaimodejstviya podsystem [Modeling the structure of a complex system based on estimating the measure of interaction between subsystems] // Computer Research and Modeling. — 2020. — Vol. 12, No. 4. — P. 707–719 (in Russian).
- Bubenik P.* The persistence landscape and some of its properties // Topological Data Analysis. — Springer, Cham. — 2020. — P. 97–117. — DOI: 10.1007/978-3-030-43408-3_4
- Carlsson G.* Topology and data // Bulletin of the American Mathematical Society. — 2009. — Vol. 46, No. 2. — P. 255–308. — DOI: 10.1090/S0273-0979-09-01249-X
- Chowdhury S.* Metric and topological approaches to network data analysis. — The Ohio State University, 2019.
- Chukanov S. N.* Comparison of objects' images based on computational topology methods // Informatics and Automation. — 2019. — Vol. 18, No. 5. — P. 1043–1065. — DOI: 10.15622/sp.2019.18.5.1043-1065
- Chukanov S. N.* The comparison of diffeomorphic images based on the construction of persistent homology // Automatic Control and Computer Sciences. — 2020. — Vol. 54, No. 7. — P. 758–771. — DOI: 10.3103/S0146411620070056
- Deza M. M., Deza E.* Encyclopedia of distances // Encyclopedia of distances. — Berlin, Heidelberg: Springer, 2016. — DOI: 10.1007/978-3-662-52844-0
- Edelsbrunner H., Harer J.* Computational topology: an introduction. — American Mathematical Soc., 2022.
- Halvarsson B.* Interaction analysis in multivariable control systems applications to bioreactors for nitrogen removal. — Phd Thesis. — Sweden: Uppsala University, 2010.

-
- Hatcher A.* Algebraic topology. — Cambridge UP, 2005.
- Hausdorff F.* Main features of set theory (Grundzüge der Mengenlehre — German). — Leipzig: Veit & Comp., 1914.
- Ghrist R.* Barcodes: the persistent topology of data // Bulletin of the American Mathematical Society. — 2008. — Vol. 45, No. 1. — P. 61–75. — DOI: 10.1090/S0273-0979-07-01191-3
- Kumar V., Rao V.S., Chidambaram M.* Centralized PI controllers for interacting multivariable processes by synthesis method // ISA Transactions. — 2012. — Vol. 51. — P. 400–409. — DOI: 10.1016/j.isatra.2012.02.001
- Kusano G., Hiraoka Y., Fukumizu K.* Persistence weighted Gaussian kernel for topological data analysis // International Conference on Machine Learning. — PMLR, 2016. — P. 2004–2013.