

УДК: 532.685

## Усредненная модель двухфазных капиллярно-неравновесных течений в среде с двойной пористостью

А. С. Волошин<sup>1,a</sup>, А. В. Конюхов<sup>2,b</sup>, Л. С. Панкратов<sup>3,c</sup>

<sup>1</sup>Российский федеральный ядерный центр Всероссийского научно-исследовательского института  
экспериментальной физики,

Россия, 607188, Нижегородская обл., г. Саров, пр. Мира, 37

<sup>2</sup>Объединенный институт высоких температур РАН,

Россия, 125412, г. Москва, ул. Ижорская, д. 13, стр. 2

<sup>3</sup>Московский физико-технический институт,

Россия, 141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., д. 9

E-mail: <sup>a</sup> owlletter@mail.ru, <sup>b</sup> konyukhov\_av@mail.ru, <sup>c</sup> leon\_s\_pan@yahoo.fr

Получено 17.11.2022, после доработки — 15.12.2022.

Принято к публикации 27.02.2023.

Построена математическая модель двухфазных капиллярно-неравновесных изотермических течений несжимаемых фаз в среде с двойной пористостью. Рассматривается среда с двойной пористостью, которая представляет собой композицию двух пористых сред с контрастными капиллярными свойствами (абсолютной проницаемостью, капиллярным давлением). Одна из составляющих сред обладает высокой проницаемостью и является проводящей, вторая характеризуется низкой проницаемостью и образует несвязную систему матричных блоков. Особенностью модели является учет влияния капиллярной неравновесности на массообмен между подсистемами двойной пористости, при этом неравновесные свойства двухфазного течения в составляющих средах описываются в линейном приближении в рамках модели Хассанизаде. Усреднение методом формальных асимптотических разложений приводит к системе дифференциальных уравнений в частных производных, коэффициенты которой зависят от внутренних переменных, определяемых из решения ячеечных задач. Численное решение ячеечных задач для системы уравнений в частных производных является вычислительно затратным. Поэтому для внутреннего параметра, характеризующего распределение фаз между подсистемами двойной пористости, формулируется термодинамически согласованное кинетическое уравнение. Построены динамические относительные фазовые проницаемости и капиллярное давление в процессах дренирования и пропитки. Показано, что капиллярная неравновесность течений в составляющих подсистемах оказывает на них сильное влияние. Таким образом, анализ и моделирование этого фактора является важным в задачах переноса в системах с двойной пористостью.

Ключевые слова: двойная пористость, усреднение, двухфазное течение, капиллярная неравновесность, динамическое капиллярное давление, динамические относительные фазовые проницаемости

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 20-01-00564).

UDC: 532.685

## Homogenized model of two-phase capillary-nonequilibrium flows in a medium with double porosity

A. S. Voloshin<sup>1,a</sup>, A. V. Konyukhov<sup>2,b</sup>, L. S. Pankratov<sup>3,c</sup>

<sup>1</sup>Russian Federal Nuclear Center All-Russian Research Institute of Experimental Physics,  
37 prospekt Mira, Sarov, Nizhny Novgorod Region, 607188, Russia

<sup>2</sup>Joint Institute for High Temperatures of the Russian Academy of Sciences,  
13/2 Izhorskaya st., Moscow, 125412, Russia

<sup>3</sup>Moscow Institute of Physics and Technology,  
9 Institutskiy pereulok, Dolgoprudny, Moscow Region, 141700, Russia

E-mail: <sup>a</sup> owlletter@mail.ru, <sup>b</sup> konyukhov\_av@mail.ru, <sup>c</sup> leon\_s\_pan@yahoo.fr

*Received 17.11.2022, after completion – 15.12.2022.*

*Accepted for publication 27.02.2023.*

A mathematical model of two-phase capillary-nonequilibrium isothermal flows of incompressible phases in a double porosity medium is constructed. A double porosity medium is considered, which is a composition of two porous media with contrasting capillary properties (absolute permeability, capillary pressure). One of the constituent media has high permeability and is conductive, the second is characterized by low permeability and forms an disconnected system of matrix blocks. A feature of the model is to take into account the influence of capillary nonequilibrium on mass transfer between subsystems of double porosity, while the nonequilibrium properties of two-phase flow in the constituent media are described in a linear approximation within the Hassanizadeh model. Homogenization by the method of formal asymptotic expansions leads to a system of partial differential equations, the coefficients of which depend on internal variables determined from the solution of cell problems. Numerical solution of cell problems for a system of partial differential equations is computationally expensive. Therefore, a thermodynamically consistent kinetic equation is formulated for the internal parameter characterizing the phase distribution between the subsystems of double porosity. Dynamic relative phase permeability and capillary pressure in the processes of drainage and impregnation are constructed. It is shown that the capillary nonequilibrium of flows in the constituent subsystems has a strong influence on them. Thus, the analysis and modeling of this factor is important in transfer problems in systems with double porosity.

**Keywords:** double porosity, homogenization, two-phase flow, capillary nonequilibrium, dynamic capillary pressure, dynamic relative phase permeabilities

*Citation:* *Computer Research and Modeling*, 2023, vol. 15, no. 3, pp. 567–580 (Russian).

The work is done with the support of the Russian Foundation for Basic Research (grant No. 20-01-00564).

## Введение

Задача определения переноса химических компонентов в двухфазных течениях в пористой среде возникает в связи с проблемами экологии, технологиями химического воздействия на пласт при разработке месторождений углеводородов, прогнозированием последствий аварий, связанных с загрязнением среды радиоактивными веществами и опасными химическими компонентами. Данной проблеме посвящена обширная литература. Наибольшую сложность представляет моделирование переноса в пористой среде со сложной внутренней структурой, такой как блочно-трещиноватые среды или среды, являющиеся композицией нескольких сред с контрастными фильтрационно-емкостными и капиллярными свойствами. Особенностью многофазных течений в таких средах является отсутствие при определенных условиях капиллярного равновесия в представительном объеме пористой среды, в результате чего такие характеристики, как капиллярное давление и относительные фазовые проницаемости, определяющие течение фаз в усредненных моделях уровня Дарси, не являются функциями фазовых насыщенныхностей, а зависят также от истории их изменения. Данная особенность требует применения специальных моделей многофазной фильтрации. К данному классу относятся как феноменологические модели, построенные на основе данных эксперимента и термодинамических принципов, такие как модели Хассанизаде [Hassanizadeh, Gray, 1993] и Кондаурова [Кондауров, 2009], феноменологические модели двойной пористости [Баренблатт, Желтов, Кочина, 1960], а также модели, полученные методами теории усреднения. Среди последних выделим появившиеся в последнее время модели, которые учитывают влияние двухмасштабной капиллярной неравновесности. Подход, который используется при выводе таких моделей в [Salimi, Bruining, 2012; Konyukhov, Pankratov, Voloshin, 2019], основан на усреднении в неоднородной пористой среде уравнений, уже учитывающих капиллярную неравновесность течения в рамках одной из вышеупомянутых моделей. В [Salimi, Bruining, 2012] получен результат усреднения модели Хассанизаде, в [Konyukhov, Pankratov, Voloshin, 2019] выполнено усреднение модели Кондаурова. Расчеты на основе таких моделей требуют решения многомерного уравнения пропитки, в результате чего система уравнений в фазовой постановке сводится к решению одного уравнения в частных производных для насыщенности смачивающей фазы (см., например, [Pankratov, Konyukhov, Voloshin, 2017; Konyukhov, Pankratov, Voloshin, 2017], где получено уравнение пропитки для модели Кондаурова). В настоящей работе выполнено усреднение модели Хассанизаде в неоднородной пористой среде с периодической структурой, которая является композицией двух пористых сред с заданными свойствами и дан качественный анализ динамических характеристик такой среды в процессах дренирования и пропитки. В § 1 сформулирована физико-математическая модель, приведен результат усреднения модели Хассанизаде для системы уравнений неравновесного изотермического двухфазного течения, включающей уравнение переноса химического компонента. Полученные уравнения не содержат источников членов, но коэффициенты в уравнениях переноса зависят от параметров, определяемых из решения ячеечной задачи. В § 2 описана процедура определения эффективных коэффициентов. В разделе 3 вводится термодинамически согласованное уравнение для описания эволюции параметра неравновесности. Полученная формулировка является своего рода гибридом моделей Хассанизаде и Кондаурова, при этом параметры модели определяются на основе данных о структуре пористой среды. В § 4 изучается поведение динамических относительных фазовых проницаемостей и капиллярного давления в процессах дренирования и пропитки.

## 1. Физико-математическая модель

### 1.1. Уравнения двухфазного течения

В этом разделе вводятся уравнения двухфазного течения. Рассматривается ограниченная связная область с периодической мезоструктурой  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  ( $d = 2, 3$ ). Данная структура масштаби-

руется параметром  $\varepsilon > 0$ , который представляет собой отношение размера ячейки периодичности ко всей области  $\Omega$ . Будем предполагать, что  $\varepsilon \downarrow 0$ . Пусть  $Y \stackrel{\text{def}}{=} (0, 1)^d$  — элементарная ячейка трещиновато-пористой среды. Полагается, что  $Y$  состоит из двух однородных пористых сред:  $Y_m$  и  $Y_f$ , которые соответствуют частям области, занятым матричным блоком и межблочным пространством. Тогда  $Y = Y_m \cup Y_f \cup \Gamma_{fm}$ , где  $\Gamma_{fm}$  обозначает границу раздела между двумя средами. Пусть  $\Omega_\ell^\varepsilon$ , где  $\ell$  — это  $f$  или  $m$ , обозначает открытое множество, соответствующее пористой среде с индексом  $\ell$ . Тогда  $\Omega = \Omega_m^\varepsilon \cup \Gamma_{fm}^\varepsilon \cup \Omega_f^\varepsilon$ , где  $\Gamma_{fm}^\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} \partial\Omega_f^\varepsilon \cap \partial\Omega_m^\varepsilon \cap \Omega$ , а индексы  $m, f$  соответствуют матрице и межблочному пространству. Для простоты будем полагать, что  $\Omega_m^\varepsilon \cap \partial\Omega = \emptyset$ . Введем обозначения:

$$\Omega_T \stackrel{\text{def}}{=} \Omega \times (0, T), \quad \Omega_{\ell,T}^\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} \Omega_\ell^\varepsilon \times (0, T), \quad \Sigma_T^\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} \Gamma_{fm}^\varepsilon \times (0, T),$$

где  $T > 0$  фиксировано.

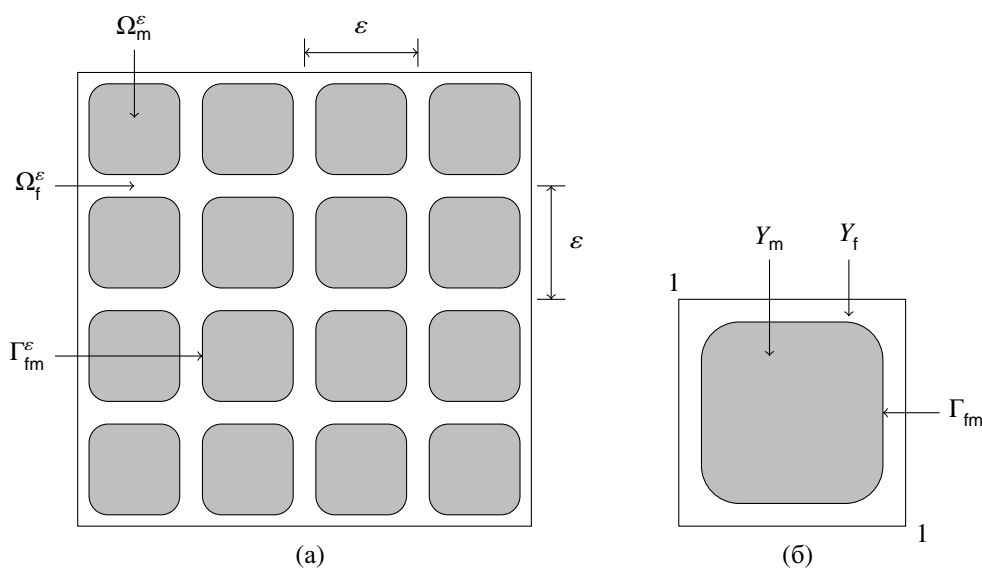


Рис. 1. (а) Ограниченная связная область  $\Omega$  с периодической структурой:  $\varepsilon$  — отношение размера ячейки периодичности ко всей области  $\Omega$ ,  $\Omega_m^\varepsilon$  — матрица блоков,  $\Omega_f^\varepsilon$  — межблочное пространство,  $\Gamma_{fm}^\varepsilon$  — граница раздела между двумя средами. (б) Ячейка периодичности  $Y$ :  $Y_m^\varepsilon$  и  $Y_f^\varepsilon$  — части ячейки периодичности  $Y$ , занятые блоком и межблочным пространством соответственно и разделенные границей  $\Gamma_{fm}$

Заметим, что в нашей исходной модели межблочное пространство представлено как пористая среда, свойства которой сильно отличаются от свойств матричных блоков. Численное моделирование описанной здесь модели приводится, например, в [Chen, 2007].

Прежде чем описать уравнения модели для неоднородной пористой среды  $\Omega$  с периодической мезоструктурой, приведем обозначения физических величин, используемых в статье. Определим также функцию пористости и тензор глобальной проницаемости, свойственные для трещиновато-пористой среды  $\Omega$  с двойной пористостью. Введем обозначения:

- $S_{w,\ell}^\varepsilon = S_{w,\ell}^\varepsilon(x, t)$  и  $S_{n,\ell}^\varepsilon = S_{n,\ell}^\varepsilon(x, t)$  — насыщенности смачивающей и несмачивающей жидкостей в среде  $\Omega_\ell^\varepsilon$  соответственно, удовлетворяющие условию  $S_{w,\ell}^\varepsilon + S_{n,\ell}^\varepsilon = 1$  ( $\ell = f, m$ );
- $P_{w,\ell}^\varepsilon = P_{w,\ell}^\varepsilon(x, t)$  и  $P_{n,\ell}^\varepsilon = P_{n,\ell}^\varepsilon(x, t)$  — давления смачивающей и несмачивающей жидкостей в среде  $\Omega_\ell^\varepsilon$ , соответственно ( $\ell = f, m$ );
- $f_{w,\ell}^\varepsilon = f_{w,\ell}^\varepsilon(S_{w,\ell}^\varepsilon)$  и  $f_{n,\ell}^\varepsilon = f_{n,\ell}^\varepsilon(S_{n,\ell}^\varepsilon)$  — относительные фазовые проницаемости смачивающей и несмачивающей жидкостей в среде  $\Omega_\ell^\varepsilon$  соответственно ( $\ell = f, m$ );

- $c_\ell^\varepsilon = c_\ell^\varepsilon(x, t)$  – концентрация твердого реагента в смачивающей фазе ( $\ell = f, m$ );
- $\phi_\ell$  и  $K_\ell$  – пористость и абсолютная проницаемость в среде  $\Omega_\ell^\varepsilon$ , соответственно, не зависящие от  $\varepsilon$  и удовлетворяющие неравенствам  $0 < \phi_\ell < 1$  и  $0 < K_\ell < +\infty$ ;
- $\mathcal{D}_\ell^\varepsilon = \mathcal{D}_\ell(S_{w,\ell}^\varepsilon)$  – коэффициент диффузии;
- $\mu_w, \mu_n$  – вязкости смачивающей и несмачивающей жидкостей соответственно;
- $\tau_\ell$  – параметр капиллярного затухания в среде  $\Omega_\ell^\varepsilon$ ;
- $P_{c,\ell}^{eq}(S_{w,\ell}^\varepsilon)$  и  $P_{c,\ell}^\varepsilon$  – равновесная и динамическая функции капиллярного давления, задаваемые следующим образом [Hassanizadeh, Gray, 1993]:

$$P_{c,\ell}^{eq}(S_{w,\ell}^\varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} p_{n,\ell}^\varepsilon - p_{w,\ell}^\varepsilon, \quad P_{c,\ell}^\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} P_{c,\ell}^{eq}(S_{w,\ell}^\varepsilon) + \tau_\ell \frac{\partial S_{w,\ell}^\varepsilon}{\partial t}, \quad (1)$$

где  $P_{c,\ell}^{eq}(1) = 0$ , а для производной  $[P_{c,\ell}^{eq}(s)]'$  функции  $P_{c,\ell}^{eq}(s)$  по  $s$  справедливо неравенство  $[P_{c,\ell}^{eq}(s)]' < 0$  для любого  $s \in [0, 1]$ .

Теперь сформулируем уравнения модели. В этих уравнениях для простоты мы будем пренебрегать гравитационными эффектами. Основными неизвестными в данной задаче являются насыщенности, фазовые давления и концентрации.

**Уравнения течения в межблочном пространстве.** Уравнения течения в межблочном пространстве  $\Omega_{f,T}^\varepsilon$  имеют вид

$$\begin{cases} \phi_f \frac{\partial S_f^\varepsilon}{\partial t} - \text{div} \{K_f \lambda_{w,f}(S_f^\varepsilon) \nabla p_{w,f}^\varepsilon\} = 0, \\ -\phi_f \frac{\partial S_f^\varepsilon}{\partial t} - \text{div} \{K_f \lambda_{n,f}(S_f^\varepsilon) \nabla p_{n,f}^\varepsilon\} = 0, \\ \phi_f \frac{\partial}{\partial t} [S_f^\varepsilon c_f^\varepsilon] - \text{div} \{K_f c_f^\varepsilon \lambda_{w,f}(S_f^\varepsilon) \nabla p_{w,f}^\varepsilon + \mathcal{D}_f(S_f^\varepsilon) \nabla c_f^\varepsilon\} = 0, \\ p_{n,f}^\varepsilon - p_{w,f}^\varepsilon = P_{c,f}^\varepsilon - \tau_f \frac{\partial S_f^\varepsilon}{\partial t}. \end{cases} \quad (2)$$

Здесь  $S_f^\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} S_{w,f}^\varepsilon$  – насыщенность смачивающей жидкости в системе трещин ( $0 \leq S_f^\varepsilon \leq 1$ );  $\lambda_{w,f}(S_f^\varepsilon)$  и  $\lambda_{n,f}(S_f^\varepsilon) := \lambda_{n,f}(1 - S_f^\varepsilon)$  – подвижности смачивающей и несмачивающей фаз, определяемые как

$$\lambda_{w,f}(S_f^\varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{f_{w,f}}{\mu_w}(S_f^\varepsilon), \quad \lambda_{n,f}(S_f^\varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{f_{n,f}}{\mu_n}(S_f^\varepsilon). \quad (3)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В [Konyukhov, Pankratov, Voloshin, 2021] рассматривается случай без параметра капиллярного затухания. В этом случае разность фазовых давлений равна капиллярному давлению.

**Уравнения течения в матричных блоках.** Уравнения течения в матричных блоках  $\Omega_{m,T}^\varepsilon$  имеют вид

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} (\phi_m S_m^\varepsilon) - \varepsilon^2 \text{div} \{K_m \lambda_{w,m}(S_m^\varepsilon) \nabla p_{w,m}^\varepsilon\} = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} (\phi_m [1 - S_m^\varepsilon]) - \varepsilon^2 \text{div} \{K_m \lambda_{n,m}(S_m^\varepsilon) \nabla p_{n,m}^\varepsilon\} = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} (\phi_m S_m^\varepsilon c_m^\varepsilon) - \varepsilon^2 \text{div} \{K_m c_m^\varepsilon \lambda_{w,m}(S_m^\varepsilon) \nabla p_{w,m}^\varepsilon + \mathcal{D}_m(S_m^\varepsilon) \nabla c_m^\varepsilon\} = 0, \\ p_{n,m}^\varepsilon - p_{w,m}^\varepsilon = P_{c,m}^\varepsilon - \tau_m \frac{\partial S_m^\varepsilon}{\partial t}. \end{cases} \quad (4)$$

Здесь  $S_m^\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} S_{w,m}^\varepsilon$  — насыщенность смачивающей жидкости в матричных блоках ( $0 \leq S_m^\varepsilon \leq 1$ );  $\lambda_{w,m}(S_m^\varepsilon)$  и  $\lambda_{n,m}(S_m^\varepsilon) := \lambda_{n,m}(1 - S_m^\varepsilon)$  — подвижности смачивающей и несмачивающей фаз, определяемые как

$$\lambda_{w,m}(S_m^\varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{f_{w,m}}{\mu_w}(S_m^\varepsilon), \quad \lambda_{n,m}(S_m^\varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{f_{n,m}}{\mu_n}(S_m^\varepsilon). \quad (5)$$

**Условия на границе раздела сред.** Предполагается непрерывность фазовых потоков и давлений на границе раздела сред  $\Sigma_T^\varepsilon$ . А именно,

$$\begin{cases} K_f \lambda_{w,f}(S_f^\varepsilon) \nabla p_{f,w}^\varepsilon \cdot \nu = \varepsilon^2 K_m \lambda_{w,m}(S_m^\varepsilon) \nabla p_{m,w}^\varepsilon \cdot \nu, \\ K_f \lambda_{n,f}(S_f^\varepsilon) \nabla p_{f,n}^\varepsilon \cdot \nu = \varepsilon^2 K_m \lambda_{n,m}(S_m^\varepsilon) \nabla p_{m,n}^\varepsilon \cdot \nu, \\ p_{w,f}^\varepsilon = p_{w,m}^\varepsilon \quad \text{и} \quad p_{n,f}^\varepsilon = p_{n,m}^\varepsilon, \end{cases} \quad (6)$$

где  $\nu$  — орт нормали к  $\Gamma_{fm}^\varepsilon$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ 2.** Из непрерывности фазовых давлений на границе раздела сред  $\Sigma_T^\varepsilon$  следует непрерывность функции равновесного капиллярного давления, т. е.  $P_{c,f}^{eq}(S_f^\varepsilon) = P_{c,m}^{eq}(S_m^\varepsilon)$  на  $\Sigma_T^\varepsilon$ . Это соотношение, в частности, означает разрыв функции насыщенности на  $\Sigma_T^\varepsilon$ .

Для концентрации также предполагается непрерывность на  $\Sigma_T^\varepsilon$  как самой функции концентрации, так и соответствующего потока. А именно,

$$\begin{cases} c_f^\varepsilon = c_m^\varepsilon, \\ \mathcal{D}_f(S_f^\varepsilon) \nabla c_f^\varepsilon \cdot \nu = \varepsilon^2 \mathcal{D}_m(S_m^\varepsilon) \nabla c_m^\varepsilon \cdot \nu, \end{cases} \quad (7)$$

где  $\nu$  — орт нормали к  $\Gamma_{fm}^\varepsilon$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ 3.** Соотношение (7)<sub>2</sub> для потока давления смачивающей фазы вместе с соотношениями (7) подразумевает, что на  $\Sigma_T^\varepsilon$

$$\{K_f c_f^\varepsilon \lambda_{w,f}(S_f^\varepsilon) \nabla p_{w,f}^\varepsilon + \mathcal{D}_f(S_f^\varepsilon) \nabla c_f^\varepsilon\} \cdot \nu = \varepsilon^2 \{K_m c_m^\varepsilon \lambda_{w,m}(S_m^\varepsilon) \nabla p_{w,m}^\varepsilon + \mathcal{D}_m(S_m^\varepsilon) \nabla c_m^\varepsilon\} \cdot \nu. \quad (8)$$

**Начальные условия.** Начальные условия для функции насыщенности имеют вид

$$S_f^\varepsilon(x, 0) = S_f^{\text{init}}(x) \quad \text{и} \quad S_m^\varepsilon(x, 0) = S_m^{\text{init}}(x). \quad (9)$$

Соответствующие начальные условия для функции концентрации:

$$c_f^\varepsilon = c_f^{\text{init}}(x) \quad \text{и} \quad c_m^\varepsilon = c_m^{\text{init}}(x). \quad (10)$$

Уравнения (2)–(5) вместе с условиями (6)–(10) должны быть дополнены граничными условиями на внешней границе  $\partial\Omega$ . Однако эти условия не играют никакой роли в процессе усреднения и для краткости будут опущены.

## 1.2. Основные предположения

Сформулируем основные предположения на исходные данные нашей задачи.

- (A1) Насыщенности в межблочном пространстве и матричных блоках удовлетворяют условию  $0 \leq S_\ell^\varepsilon \leq 1$  ( $\ell = f, m$ ).
- (A2) Концентрация реагента в блоках удовлетворяет условию  $0 \leq c_\ell^\varepsilon \leq 1$  ( $\ell = f, m$ ).
- (A3) Величины  $\phi_f, \phi_m, K_f, K_m$  удовлетворяют условиям  $0 < \phi_f, \phi_m < 1$  и  $0 < K_f, K_m < +\infty$ .
- (A4) Подвижности  $\lambda_{w,\ell}$  и  $\lambda_{n,\ell}$  являются гладкими функциями и обладают следующими свойствами: (i)  $0 \leq \lambda_{w,\ell}, \lambda_{n,\ell} \leq 1$  в  $[0, 1]$ ; (ii)  $\lambda_{w,\ell}(0) = 0$  и  $\lambda_{n,\ell}(1) = 0$ ; (iii) существует положительная константа  $L_0$  такая, что  $\lambda_\ell(s) = \lambda_{w,\ell}(s) + \lambda_{n,\ell}(s) \geq L_0 > 0$  в  $[0, 1]$ .
- (A5) Капиллярное давление  $P_{c,\ell}$  является убывающей функцией насыщенности  $S_\ell^\varepsilon$ .

## 2. Усреднение модели Хассанизаде в среде с двойной пористостью

В этом разделе приведена усредненная система уравнений (более подробно про усреднение см., например, в [Arbogast et al., 1991; Hornung, 1997; Bourgeat, Panfilov, 1998; Panfilov, 2000; Amaziane, Panfilov, Pankratov, 2016; Jurak, Pankratov, Vrbaški, 2016; Amaziane et al., 2018; Voloshin, Pankratov, Konyukhov, 2018]). Введем обозначения:

- $S_f, P_w, P_n$  и  $c_f$  – усредненные (макроскопические) насыщенность смачивающей жидкости, давления смачивающей и несмачивающей жидкостей и функция концентрации соответственно;

- $\Phi_\ell$  – эффективная пористость, определяемая как

$$\Phi_\ell \stackrel{\text{def}}{=} \phi_\ell |Y_\ell|, \quad (11)$$

где  $|Y_\ell|$  – мера множества  $Y_\ell$  ( $\ell = f, m$ ) или объемная доля соответствующей подсистемы ( $|Y| = 1$ );

- $\mathbb{K}^*$  – усредненный тензор, элементы которого  $\mathbb{K}_{ij}^*$  определяются следующим образом:

$$\mathbb{K}_{ij}^* \stackrel{\text{def}}{=} K_f \int_{Y_f} [\nabla_y \zeta_i + \mathbf{e}_i] [\nabla_y \zeta_j + \mathbf{e}_j] dy, \quad (12)$$

где  $\zeta_j$  – решение вспомогательной ячеечной задачи

$$\begin{cases} -\Delta_y \zeta_j = 0 & \text{в } Y_f, \\ \nabla_y \zeta_j \cdot \mathbf{v} = -\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{v} & \text{на } \Gamma_{fm}, \\ y \mapsto \zeta_j(y), & Y \text{ – периодическая;} \end{cases} \quad (13)$$

- $\mathbb{K}^{\mathcal{D}}(S_f)$  – усредненный тензор с элементами

$$\mathbb{K}_{ij}^{\mathcal{D}}(S_f) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{D}(S_f) \int_{Y_f} [\nabla_y \zeta_i + \mathbf{e}_i] [\nabla_y \zeta_j + \mathbf{e}_j] dy. \quad (14)$$

Аналогично [Konyukhov, Pankratov, Voloshin, 2021] усредненная система в  $\Omega_T$  имеет вид

$$\begin{cases} \Phi_f \frac{\partial S_f}{\partial t} - \operatorname{div} \{ \mathbb{K}^* \lambda_{w,f}(S_f) \nabla P_w \} = \mathcal{Q}_w, \\ -\Phi_f \frac{\partial S_f}{\partial t} - \operatorname{div} \{ \mathbb{K}^* \lambda_{n,f}(S_f) \nabla P_n \} = \mathcal{Q}_n, \\ \Phi_f \frac{\partial}{\partial t} [S_f c_f] - \operatorname{div} \{ \mathbb{K}^* c_f \lambda_{f,w}(S_f) \nabla P_w + \mathbb{K}^{\mathcal{D}}(S_f) \nabla c_f \} = \mathcal{Q}_c, \\ P_n - P_w = P_c - \tau_f \frac{\partial S_f}{\partial t}. \end{cases} \quad (15)$$

Уравнения течения в матричных блоках:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} (\phi_m s) - \operatorname{div}_y \{ K_m \lambda_{m,w}(s) \nabla P_w \} = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} (\phi_m [1 - s]) - \operatorname{div}_y \{ K_m \lambda_{m,n}(s) \nabla P_n \} = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} (\phi_m s c_m) - \operatorname{div}_y \{ K_m c_m \lambda_{m,w}(s) \nabla P_w + \mathcal{D}_m(s) \nabla c_m \} = 0, \\ P_n - P_w = P_c(s) - \tau_m \frac{\partial s}{\partial t}. \end{cases} \quad (16)$$

Здесь  $s, p_w, p_n$  и  $c_m$  — локальные насыщенность смачивающей жидкости, давления смачивающей и несмачивающей жидкостей и концентрация в матричном блоке  $Y_m$  соответственно.

Для любых  $x \in \Omega$  и  $t > 0$  обменные источники члены определяются как

$$Q_w \stackrel{\text{def}}{=} - \int_{Y_m} \frac{\partial}{\partial t} (\phi_m s) dy, \quad Q_n \stackrel{\text{def}}{=} - \int_{Y_m} \frac{\partial}{\partial t} (\phi_m [1 - s]) dy; \quad Q_c \stackrel{\text{def}}{=} - \int_{Y_m} \frac{\partial}{\partial t} (\phi_m s c_m) dy. \quad (17)$$

Сформулируем основной результат раздела.

**Теорема 1.** *Предположим, что (i) при  $\ell = f, m$  начальные значения насыщенностей и концентраций не зависят от  $\varepsilon$ ; (ii) выполнены предположения (A1)–(A4); (iii) решение задачи (2)–(10) существует и единственно. Тогда асимптотическое поведение решения задачи (2)–(10) при  $\varepsilon \rightarrow 0$  описывается решением задачи (15)–(17).*

Введем консервативные переменные

$$\Phi \stackrel{\text{def}}{=} \Phi_f + \Phi_m, \quad \Phi S \stackrel{\text{def}}{=} \Phi_f S_f + \Phi_m [1 - \xi], \quad \Phi S c \stackrel{\text{def}}{=} \Phi_f S_f c_f + \Phi_m [1 - \xi] \eta \quad (18)$$

с параметрами, зависящими от решения ячейечной задачи:

$$\xi \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{|Y_m|} \int_{Y_m} (1 - s) dy, \quad \eta \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{|Y_m|(1 - \xi)} \int_{Y_m} (1 - s) c_m dy. \quad (19)$$

Тогда система (16) принимает вид

$$\begin{cases} \Phi \frac{\partial S}{\partial t} - \operatorname{div} \{ \mathbb{K}^* \lambda_{w,f}(S, \xi) \nabla P_w \} = 0, \\ - \Phi \frac{\partial S}{\partial t} - \operatorname{div} \{ \mathbb{K}^* \lambda_{n,f}(S, \xi) \nabla P_n \} = 0, \\ \Phi \frac{\partial}{\partial t} [S c] - \operatorname{div} \{ \mathbb{K}^* c_f \lambda_{w,f}(S, \xi) \nabla P_w + \mathbb{K}^D(S, \xi) \nabla c_f \} = 0, \\ P_n - P_w = P_c(S_f) - \tau_f \frac{\partial S_f}{\partial t}. \end{cases} \quad (20)$$

Здесь  $\lambda_{j,\ell}(S, \xi) = \frac{f_{j,\ell}(S_f)}{\mu_j}$ ,  $j = \{w, n\}$ .

### 3. Кинетическое уравнение для параметра неравновесности

Рассмотрим упрощенную термодинамически согласованную модель массообмена. Пусть обмен между подсистемами описывается аналогами закона Дарси:

$$p_{w,f}^\varepsilon - p_{w,m}^\varepsilon = - \frac{\gamma}{\lambda_{w,m}(S_m^\varepsilon)} \frac{\partial \xi^\varepsilon}{\partial t}, \quad p_{n,f}^\varepsilon - p_{n,m}^\varepsilon = \frac{\gamma}{\lambda_{n,m}(S_m^\varepsilon)} \frac{\partial \xi^\varepsilon}{\partial t}, \quad (21)$$

где  $\gamma$  — множитель, зависящий от геометрии низкопроницаемых матричных блоков;  $\xi^\varepsilon$  — насыщенность матричных блоков несмачивающей фазой.

Далее для краткости верхний индекс  $\varepsilon$  будет опускаться.

Вычитая из второго уравнения (21) первое, получим

$$(p_{n,f} - p_{w,f}) - (p_{n,m} - p_{w,m}) = \gamma \frac{\lambda_{w,m} + \lambda_{n,m}}{\lambda_{w,m} \lambda_{n,m}} \frac{\partial \xi}{\partial t}. \quad (22)$$



Согласно (1)

$$p_{n,f} - p_{w,f} = P_{c,f} - \tau_f \frac{\partial S_f}{\partial t}, \quad p_{n,m} - p_{w,m} = P_{c,m} - \tau_m \frac{\partial S_m}{\partial t}, \quad (23)$$

где давления и насыщенность в матричном блоке следует рассматривать как средние в  $\Omega_m$ .

Подстановка (23) в (22) дает

$$P_{c,f}(S_f) - P_{c,m}(S_m) = \gamma \frac{\lambda_{w,m} + \lambda_{n,m}}{\lambda_{w,m}\lambda_{n,m}} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \tau_f \frac{\partial S_f}{\partial t} - \tau_m \frac{\partial S_m}{\partial t}. \quad (24)$$

Выражая насыщенности  $S_f$  и  $S_m$  через насыщенность матричных блоков несмачивающей фазой  $\xi$  и полную насыщенность  $S$ , согласно соотношениям

$$S_m = 1 - \xi, \quad S_f = \left[ 1 + \frac{\Phi_m}{\Phi_f} \right] S - \frac{\Phi_m}{\Phi_f} [1 - \xi] \quad (25)$$

получим кинетическое уравнение для параметра  $\xi$ :

$$P_{c,f} \left( \left[ 1 + \frac{\Phi_m}{\Phi_f} \right] S - \frac{\Phi_m}{\Phi_f} [1 - \xi] \right) - P_{c,m}(1 - \xi) = \left[ \gamma \frac{\lambda_{w,m} + \lambda_{n,m}}{\lambda_{w,m}\lambda_{n,m}} + \tau_f \frac{\Phi_m}{\Phi_f} + \tau_m \right] \frac{\partial \xi}{\partial t} + \tau_f \left[ 1 + \frac{\Phi_m}{\Phi_f} \right] \frac{\partial S}{\partial t}. \quad (26)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Полученная модель двойной пористости не противоречит второму началу термодинамики. При этом диссипация неравновесных капиллярных процессов есть

$$\frac{\lambda_{w,f} |\nabla p_{w,f}|^2 + \lambda_{n,f} |\nabla p_{n,f}|^2}{T} + \frac{\tau_f \Phi_f}{T} \left( \frac{\partial S_f}{\partial t} \right)^2 + \frac{\tau_m \Phi_m}{T} \left( \frac{\partial S_m}{\partial t} \right)^2 \geq 0. \quad (27)$$

В качестве доказательства получим уравнение энтропии для двухфазного течения в рамках модели двойной пористости.

Полная энергия имеет вид

$$E = E_{\text{int}} + (1 - \Phi)E_s + \Phi_f S_f E_{w,f} + \Phi_m S_m E_{w,m} + \Phi_f [1 - S_f] E_{n,f} + \Phi_m [1 - S_m] E_{n,m}, \quad (28)$$

где  $E_{\text{int}}$  — энергия контактных поверхностей, равная сумме поверхностных энергий каждой из подсистем;  $E_s$  — энергия скелета.

Система уравнений течения, дополненная уравнением энергии, имеет вид

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} (\Phi_f \rho_{w,f} S_{w,f}) - \text{div} \{ \lambda_{w,f} \rho_{w,f} \nabla p_{w,f} \} = -q_w, \\ \frac{\partial}{\partial t} (\Phi_f \rho_{n,f} S_{n,f}) - \text{div} \{ \lambda_{n,f} \rho_{n,f} \nabla p_{n,f} \} = -q_n, \\ \frac{\partial}{\partial t} (\Phi_m \rho_{w,m} S_{w,m}) = q_w, \\ \frac{\partial}{\partial t} (\Phi_m \rho_{n,m} S_{n,m}) = q_n, \\ \frac{\partial E}{\partial t} - \text{div} \{ (E_{w,f} + p_{w,f}) \lambda_{w,f} \nabla p_{w,f} \} - \text{div} \{ (E_{n,f} + p_{n,f}) \lambda_{n,f} \nabla p_{n,f} \} = 0, \end{cases} \quad (29)$$

где  $\rho_{\alpha,\ell}$  — плотность фазы  $\alpha$  в среде  $\ell$ .

Полная энтропия имеет вид

$$\Theta = (1 - \Phi)\Theta_s + \Phi_f S_{w,f} \Theta_{w,f} + \Phi_m S_{w,m} \Theta_{w,m} + \Phi_f S_{n,f} \Theta_{n,f} + \Phi_m S_{n,m} \Theta_{n,m}, \quad (30)$$

где  $\Theta_s$  — энтропия скелета.

Используя уравнение Гиббса – Дюгема для каждой из фаз в каждой из сред, из (29) получим уравнение энтропии:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Theta}{\partial t} - \operatorname{div} \left\{ \Theta_{w,f} \lambda_{w,f} \nabla p_{w,f} \right\} - \operatorname{div} \left\{ \Theta_{n,m} \lambda_{n,m} \nabla p_{n,m} \right\} = \\ = \frac{1}{T} \left[ -\frac{\partial E_{\text{int}}}{\partial t} + \Phi_f p_{w,f} \frac{\partial S_{w,f}}{\partial t} + \Phi_m p_{w,m} \frac{\partial S_{w,m}}{\partial t} + \Phi_f p_{n,f} \frac{\partial S_{n,f}}{\partial t} + \Phi_m p_{n,m} \frac{\partial S_{n,m}}{\partial t} \right] + \\ + \frac{1}{T} \left[ (\mu_{n,f} - \mu_{w,f}) \frac{\partial \xi_f}{\partial t} + (\mu_{n,m} - \mu_{w,m}) \frac{\partial \xi_m}{\partial t} \right] + \frac{\lambda_{w,f} |\nabla p_{w,f}|^2 + \lambda_{n,f} |\nabla p_{n,f}|^2}{T}, \quad (31) \end{aligned}$$

где  $\mu_{\alpha,\ell}$  – химический потенциал фазы  $\alpha$  в среде  $\ell$ . Члены числителя второго слагаемого правой части (31), пропорциональные разности химических потенциалов фаз, неотрицательны, а в случае несжимаемых жидкостей равны нулю вследствие того, что химические потенциалы таких жидкостей являются функциями только температуры. Запишем сумму в квадратных скобках первого слагаемого правой части (31), используя связь капиллярного давления с энергией поверхностей контакта фаз:

$$\Phi_\ell P_{c,\ell}^{eq}(S_{w,\ell}) = -\frac{\partial E_{\text{int},\ell}}{\partial S_{w,\ell}}, \quad (32)$$

и равенства (23):

$$\begin{aligned} -\frac{\partial E_{\text{int}}}{\partial t} + \Phi_f p_{w,f} \frac{\partial S_{w,f}}{\partial t} + \Phi_m p_{w,m} \frac{\partial S_{w,m}}{\partial t} + \Phi_f p_{n,f} \frac{\partial S_{n,f}}{\partial t} + \Phi_m p_{n,m} \frac{\partial S_{n,m}}{\partial t} = \\ = \Phi_f P_{c,f}^{eq}(S_{w,f}) \frac{\partial S_{w,f}}{\partial t} + \Phi_m P_{c,m}^{eq}(S_{w,m}) \frac{\partial S_{w,m}}{\partial t} + \Phi_f p_{w,f} \frac{\partial S_{w,f}}{\partial t} + \Phi_m p_{w,m} \frac{\partial S_{w,m}}{\partial t} - \\ - \Phi_f p_{n,f} \frac{\partial S_{w,f}}{\partial t} - \Phi_m p_{n,m} \frac{\partial S_{w,m}}{\partial t} = \tau_f \Phi_f \left( \frac{\partial S_{w,f}}{\partial t} \right)^2 + \tau_m \Phi_m \left( \frac{\partial S_{w,m}}{\partial t} \right)^2 \geq 0. \quad (33) \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Второй член в правой части (33) представляет диссипацию, связанную с неравновесностью в матричном блоке. На микроуровне он соответствует вязкой диссипации течений, связанных с перераспределением фаз под действием капиллярных сил. Для простоты рассмотрим среду, содержащую включения с контрастными капиллярными свойствами, такую, что подсистемы разделены тонкой низкопроницаемой оболочкой, объемом которой при рассмотрении баланса массы можно пренебречь. При этом каждая из подсистем находится в состоянии термодинамического равновесия. Вязкая диссипация в осредненном уравнении для энтропии, связанная с перераспределением фаз между подсистемами, есть

$$\left( \frac{q_w}{\lambda_w} + \frac{q_n}{\lambda_n} \right) \Sigma \Delta = \frac{V}{\Sigma \Delta} \frac{\lambda_w + \lambda_n}{\lambda_w \lambda_n} \Phi_m \left( \frac{\partial S_{w,m}}{\partial t} \right)^2. \quad (34)$$

Здесь  $q_w$  и  $q_n$  – потоки фильтрации фаз через оболочку,  $\lambda_w$  и  $\lambda_n$  – подвижности фаз в оболочке,  $\Delta$  – толщина разделяющей оболочки,  $\Sigma$  и  $V$  – площадь поверхности и объем матричных блоков в единице объема пористой среды. Условие того, что эта диссипация на модельном уровне представлена первым членом в правой части (33) дает выражение для параметра  $\tau_m$ :

$$\tau_m = \frac{V}{\Sigma \Delta} \frac{\lambda_w + \lambda_n}{\lambda_w \lambda_n}. \quad (35)$$

#### 4. Динамические относительные фазовые проницаемости и капиллярное давление

В §1 приведена система уравнений для двухфазного течения несжимаемых жидкостей в среде с двойной пористостью. Результирующая система записана в консервативном виде, не

имеющем источниковых членов, соответствующих обмену массой между подсистемами двойной пористости. Присутствие в уравнениях таких источников, вычисляемых на явном слое по времени, способно сильно ограничивать шаг по времени при численном интегрировании системы. Вместе с тем в полученной системе капиллярное давление и относительные фазовые проницаемости являются функциями насыщенности и дополнительной переменной, которая находится из решения ячеечной задачи. В случае несжимаемых фаз эта величина может быть просто выражена через насыщенность матричных блоков несмачивающей фазой, которую удобно рассматривать в качестве внутреннего параметра, от которого зависят энергия поверхностей контакта фаз, с одной стороны, и входящие в систему относительные фазовые проницаемости и капиллярное давление — с другой. В § 2, основываясь на связи потоков фаз между подсистемами и разностью фазовых давлений, аналогичной закону Дарси, мы ввели обыкновенное дифференциальное уравнение, которое описывает изменение внутренней переменной под влиянием капиллярных сил (интегральный аналог уравнения пропитки). Особенности этого уравнения являются учет капиллярной неравновесности течения в подсистемах на основе модели Хассанизаде и термодинамическая согласованность. Обмен массой между подсистемами оказывается пропорциональным разности динамических, а не равновесных, капиллярных давлений, и обмен массой между подсистемами двойной пористости зависит не только от текущих фазовых насыщенностей, но также от скорости изменения фазовых насыщенностей в проводящей подсистеме. Чтобы оценить влияние капиллярной неравновесности сред, композицией которых является рассматриваемая неоднородная среда на ее транспортные свойства, рассмотрим эволюцию капиллярного давления и относительных фазовых проницаемостей, входящих в усредненную систему в процессах дренирования и пропитки. Положим для определенности, что проводящая подсистема и включения составляют равные объемные доли:  $\Phi_f = \Phi_m = 0,5$ .

Обе среды характеризуются равновесными функциями капиллярного давления (van Genuchten):

$$P_{c,\ell}^{eq} = \frac{1}{\alpha} \left( \frac{1}{S_\ell^{1/m}} - 1 \right)^{1/n}, \quad (36)$$

$\alpha$ ,  $m$ ,  $n$  — константы, характеризующие пористую среду.

Для природных сред характерные значения  $\alpha$  изменяются в диапазоне  $10^{-5} < \alpha < 10^{-3} \text{ Па}^{-1}$ , а  $m$  — в диапазоне  $0,5 < m < 0,9$ ,  $n = \frac{1}{1-m}$ . В приведенных ниже расчетах мы принимаем  $m = 0,7$  для проводящей подсистемы и включений, равную пористость, а также произвольно полагаем  $\frac{\alpha_f}{\alpha_m} = 2$ , тем самым в равновесии насыщенность смачивающей фазой включений выше аналогичной величины для проводящей подсистемы. Относительные фазовые проницаемости, входящие в усредненные уравнения, полагаем степенными функциями фазовых насыщенностей (Corey)

$$f_{w,f}(S, \xi) = \left( \left[ 1 + \frac{\Phi_m}{\Phi_f} \right] S - \frac{\Phi_m}{\Phi_f} [1 - \xi] \right)^2, \quad f_{n,f}(S, \xi) = \left( \left[ 1 + \frac{\Phi_m}{\Phi_f} \right] [1 - S] - \frac{\Phi_m}{\Phi_f} \xi \right)^2. \quad (37)$$

Входящее в усредненную систему динамическое капиллярное давление есть

$$P_{c,\ell} = P_{c,\ell}^{eq} \left( \left[ 1 + \frac{\Phi_m}{\Phi_f} \right] S - \frac{\Phi_m}{\Phi_f} [1 - \xi] \right) - \tau_f \left[ 1 + \frac{\Phi_m}{\Phi_f} \right] \frac{\partial S}{\partial t}. \quad (38)$$

На рис. 2 и 3 показаны относительные фазовые проницаемости и капиллярное давление в зависимости от текущего значения насыщенности в процессах дренирования ( $\frac{dS}{dt} < 0$ ) и пропитки ( $\frac{dS}{dt} > 0$ ), а также равновесные кривые для данных величин, которые реализуются в бесконечно медленных процессах изменения насыщенности. Как следует из сравнения расчетов на

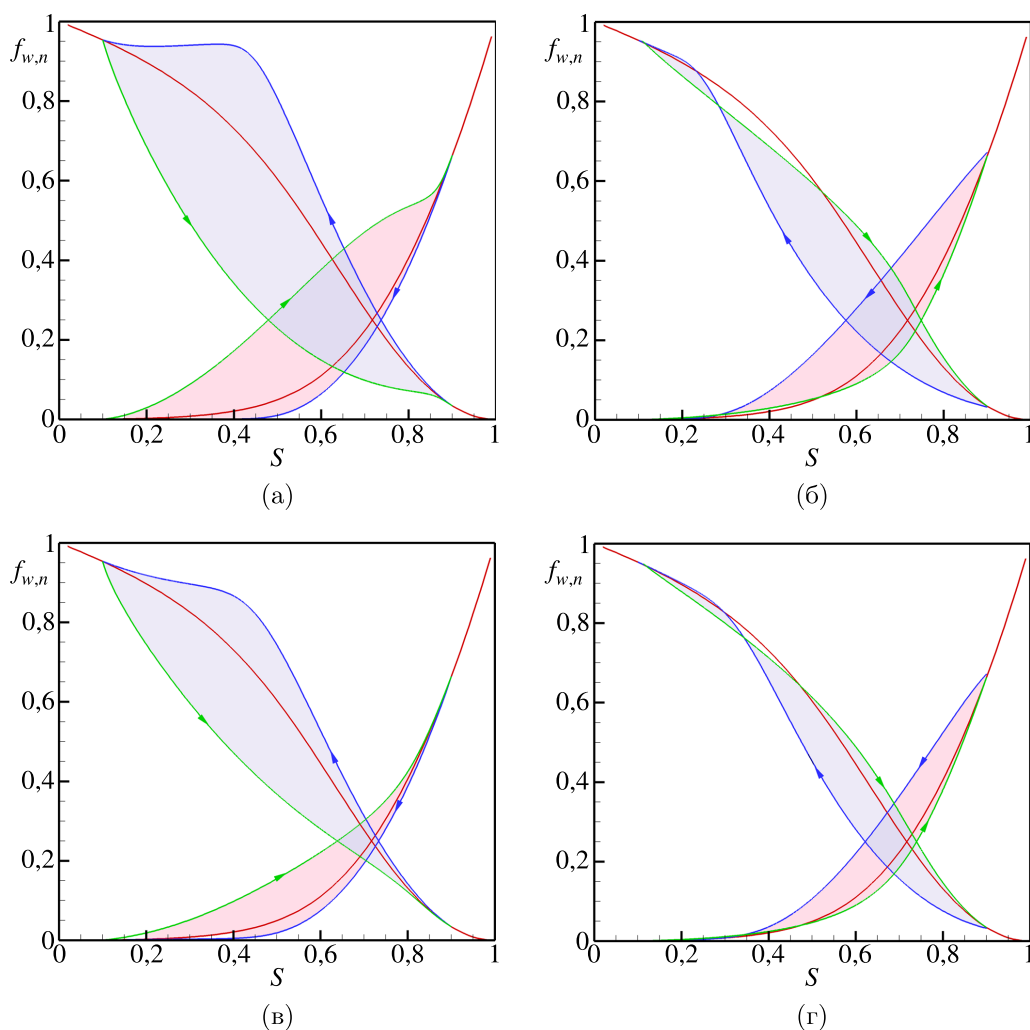


Рис. 2. Относительные проницаемости смачивающей и несмачивающей фаз в процессах дренирования и пропитки при различных значениях параметров, характеризующих неравновесность проводящей и непроводящей компонент двойной пористости. Красным цветом показаны равновесные зависимости. (а)  $\frac{\alpha\tau_l}{\tau} = 0$ ,  $\frac{\alpha\tau_r}{\tau} = 6$ ; (б)  $\frac{\alpha\tau_l}{\tau} = 4$ ,  $\frac{\alpha\tau_r}{\tau} = 6$ ; (в)  $\frac{\alpha\tau_l}{\tau} = 0$ ,  $\frac{\alpha\tau_r}{\tau} = 3$ ; (г)  $\frac{\alpha\tau_l}{\tau} = 2$ ,  $\frac{\alpha\tau_r}{\tau} = 3$

рис. 2, характер гистерезиса относительных фазовых проницаемостей может качественно измениться при учете неравновесности проводящей подсистемы. А именно, без учета последней кривая дренирования относительной проницаемости смачивающей фазы расположена выше кривых пропитки (и выше равновесной кривой). Учет неравновесного компонента двойной пористости в рамках модели Хассанизаде, как следует из рис. 2, б и 2, в, приводит к обратной ситуации: кривая пропитки лежит в основном выше кривой дренирования и в рассматриваемом случае близка к равновесной кривой. Аналогичная инверсия гистерезиса при выбранных параметрах наблюдается и в кривых динамических относительных проницаемостей несмачивающей фазы.

Динамическое капиллярное давление в процессах дренирования ( $S(t) = 0,1 + 0,8e^{-t/\tau}$ ) и пропитки ( $S(t) = 0,9 - 0,8e^{-t/\tau}$ ) при различных значениях параметров, характеризующих неравновесность проводящей и непроводящей компонент двойной пористости, представлено на рис. 3, где показана безразмерная величина  $aP_c$  в зависимости от текущей насыщенности. Красным цветом показана равновесная кривая капиллярного давления. На рис. 3, а показан расчет при значениях параметров  $\frac{\alpha\tau_l}{\tau} = 0$  и  $\frac{\alpha\tau_m}{\tau} = 3$ . Расчет на рис. 3, б отличается значением парамет-

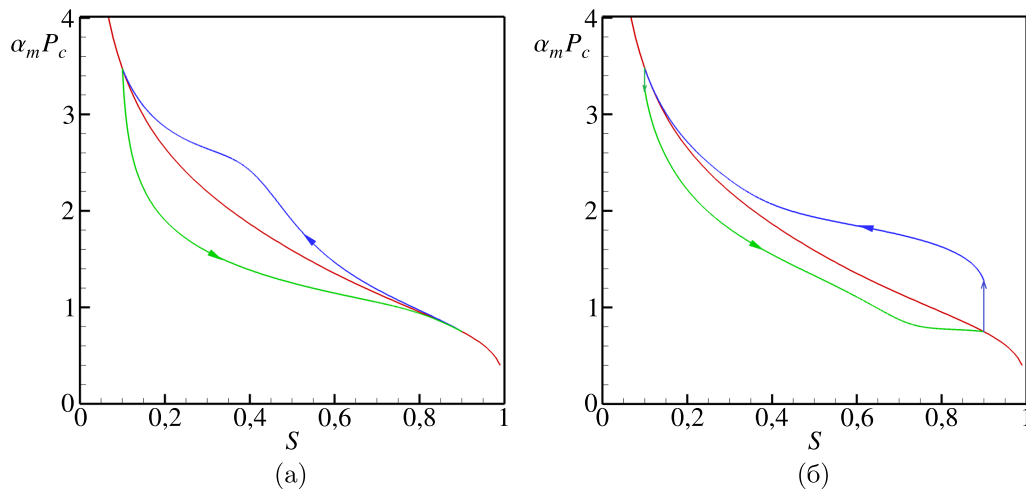


Рис. 3. Динамическое капиллярное давление в процессах дренирования и пропитки при различных значениях параметров, характеризующих неравновесность проводящей и непроводящей компонент двойной пористости. Красным цветом показана равновесная кривая капиллярного давления. (а)  $\frac{\alpha\tau_i}{\tau} = 0$ ,  $\frac{\alpha\tau_i}{\tau} = 3$ ; (б)  $\frac{\alpha\tau_i}{\tau} = 2$ ,  $\frac{\alpha\tau_i}{\tau} = 3$

ра, характеризующего неравновесность проводящей подсистемы:  $\frac{\alpha\tau_i}{\tau} = 2$ . Если в первом случае наибольшее расхождение кривых дренирования и пропитки наблюдается в области малых насыщенныхностей, то при учете капиллярной неравновесности проводящей подсистемы имеет место обратная тенденция: расхождение кривых увеличивается в области больших насыщенныхностей. Из наблюдаемых качественных изменений соответствующих кривых при учете капиллярной неравновесности следует, что они не могут быть аппроксимированы подгонкой коэффициентов модели, в основе которой лежат не динамические, а равновесные функции капиллярного давления.

## Заключение

Построена математическая модель двухфазных капиллярно-неравновесных изотермических течений несжимаемых фаз в среде с двойной пористостью. Рассматривается среда с двойной пористостью, которая представляет собой композицию двух пористых сред с контрастными капиллярными свойствами (абсолютной проницаемостью, капиллярным давлением). Одна из составляющих сред обладает высокой проницаемостью и является проводящей, вторая характеризуется низкой проницаемостью и образует несвязную систему матричных блоков. Особенностью модели является учет влияния капиллярной неравновесности на массообмен между подсистемами двойной пористости, при этом неравновесные свойства двухфазного течения в составляющих средах описываются в линейном приближении в рамках модели Хассанизаде. Усреднение методом формальных асимптотических разложений приводит к системе дифференциальных уравнений в частных производных, коэффициенты которой зависят от внутренних переменных, определяемых из решения ячеечных задач. Численное решение ячеечных задач для системы уравнений в частных производных является вычислительно затратным. Поэтому для внутреннего параметра, характеризующего распределение фаз между подсистемами двойной пористости, формулируется термодинамически согласованное кинетическое уравнение. Построены динамические относительные фазовые проницаемости и капиллярное давление в процессах дренирования и пропитки. Показано, что капиллярная неравновесность течений в составляющих подсистемах оказывает на них сильное влияние. Таким образом, анализ и моделирование этого фактора являются важными в задачах переноса в системах с двойной пористостью.

## Список литературы (References)

- Баренблатт Г. И., Желтов Ю. П., Кочина И. Н.* Об основных представлениях теории фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах // Прикладная математика и механика. — 1960. — Т. 24, № 5. — С. 852–864.
- Barenblatt G. I., Zheltov Yu. P., Kochina I. N.* Ob osnovnykh predstavleniyah teorii fil'tracii odnorodnykh zhidkostej v treshchinovatykh porodah [Basic concepts in the theory of seepage of homogeneous liquids in fissured rocks] // Prikladnaya matematika i mekhanika. — 1960. — Vol. 24, No. 5. — P. 852–864 (in Russian).
- Кондауров В. И.* Неравновесная модель пористой среды, насыщенной несмешивающимися жидкостями // Прикладная математика и механика. — 2009. — Т. 73, № 1. — С. 121–142.
- Kondaurov V. I.* A non-equilibrium model of porous medium saturated with immiscible fluids // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. — 2009. — Vol. 73, No. 1. — P. 88–102. (Original Russian paper: *Kondaurov V. I. Neravnovesnaya model' poristoj sredy, nasyshchennoj nesmeshivayushchimisya zhidkostyami* // Prikladnaya matematika i mekhanika. — 2009. — Vol. 73, No. 1. — P. 121–142.)
- Amaziane B., Jurak M., Pankratov L., Vrbaški A.* Some remarks on the homogenization of immiscible incompressible two-phase flow in double porosity media // Discrete and Continuous Dynamical Systems. — Series B. — 2018. — Vol. 23, No. 2 — P. 629–665.
- Amaziane B., Panfilov M., Pankratov L.* Homogenized model of two-phase flow with local nonequilibrium in double porosity media // Advances in the Mathematical Physics. — 2016. — Vol. 2016. — Article ID 3058710.
- Arbogast T., Douglas J., Hornung U., Dautray R. (ed.)* Modelling of naturally fractured reservoirs by formal homogenization techniques // Frontiers in Pure and Applied Mathematics. — Amsterdam: Elsevier, 1991. — P. 1–19.
- Bourgeat A., Panfilov M.* Effective two-phase flow through highly heterogeneous porous media: capillary nonequilibrium effects // Computational Geosciences. — 1998. — Vol. 2, No. 3. — P. 191–215.
- Chen Z.* Homogenization and simulation for compositional flow in naturally fractured reservoirs // Journal of Mathematical Analysis and Applications. — 2007. — Vol. 326, No. 1. — P. 12–32.
- Hassanizadeh S. M., Gray W. G.* Thermodynamic basis of capillary pressure in porous media // Water Resources Research. — 1993. — Vol. 29. — P. 3389–3405.
- Hornung U.* Homogenization and porous media. — New York: Springer-Verlag, 1997.
- Jurak M., Pankratov L., Vrbaški A.* A fully homogenized model for incompressible two-phase flow in double porosity media // Applicable Analysis. — 2016. — Vol. 95, No. 10. — P. 2280–2299.
- Konyukhov A., Pankratov L., Voloshin A.* Homogenized non-equilibrium models of two-phase flow in fractured porous media. — Moscow: Fizmatkniga, 2017.
- Konyukhov A., Pankratov L., Voloshin A.* The homogenized Kondaurov type non-equilibrium model of two-phase flow in multiscale non-homogeneous media // Physica Scripta. — 2019. — Vol. 94, No. 5. — Article ID 054002.
- Konyukhov A., Pankratov L., Voloshin A.* Appearance of the instability from the inhomogeneity in two-phase flow with gas-producing reaction in fractured porous medium // Physics of Fluids. — 2021. — Vol. 33, No. 1. — Article ID 016604.
- Panfilov M.* Macroscale models of flow through highly heterogeneous porous media. — London: Kluwer Academic Publishers, 2000.
- Pankratov L., Konyukhov A., Voloshin A.* General non-equilibrium matrix imbibition equation for Kondaurov's double porosity model // Proceedings of the Sixth BIOT Conference on Poromechanics. — 2017. — P. 531–538.
- Salimi H., Bruining J.* Upscaling of fractured oil reservoirs using homogenization including non-equilibrium capillary pressure and relative permeability // Computational Geoscience. — 2012. — Vol. 16, No. 2. — P. 367–389.
- Voloshin A., Pankratov L., Konyukhov A.* Homogenization of Kondaurov's non-equilibrium two-phase flow in double porosity media // Applicable Analysis. — 2018. — Vol. 98, No. 8. — P. 1429–1450.