

УДК: 538.913; 539.8

Эффект нелинейной супратрансмиссии в дискретных структурах: обзор

П. В. Захаров

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,
Россия, 195251, Санкт-Петербург, ул. Политехническая, 29

E-mail: zakharovpvl@rambler.ru

Получено 03.12.2022, после доработки — 10.01.2023.

Принято к публикации 27.02.2023.

В данной работе приводится обзор исследований, посвященных нелинейной супратрансмиссии и сопутствующим явлениям. Данный эффект заключается в передаче энергии на частотах, не поддерживаемых рассматриваемыми системами. Супратрансмиссия не зависит от интегрируемости системы, устойчива к демпфированию и различным классам граничных условий. Кроме того, нелинейная дискретная среда при некоторых общих условиях, накладываемых на структуру, может создавать неустойчивость, обусловленную внешним периодическим воздействием. Она является порождающим процессом, лежащим в основе нелинейной супратрансмиссии. Это возможно, когда система поддерживает нелинейные моды различной природы, в частности дискретные бризеры. Тогда энергия проникает в систему, как только амплитуда внешнего гармонического возбуждения превышает максимальную амплитуду статического бризера той же частоты.

Эффект нелинейной супратрансмиссии является важным свойством многих дискретных структур. Необходимыми условиями для его существования являются дискретность и нелинейность среды. Его проявление в системах различной природы говорит о его фундаментальности и значимости. В данном обзоре рассмотрены основные работы, затрагивающие вопрос нелинейной супратрансмиссии в различных системах, преимущественно модельных.

Многими авторскими коллективами ведутся исследования данного эффекта. В первую очередь это модели, описываемые дискретными уравнениями, в том числе \sin -Гордона и дискретным нелинейным уравнением Шрёдингера. При этом эффект не является исключительно модельным и проявляет себя в натуральных экспериментах в электрических цепях, в нелинейных цепочках осцилляторов, а также в метастабильных модульных метаструктурах. Происходит поэтапное усложнение моделей, что приводит к более глубокому пониманию явления супратрансмиссии, а переход к разупорядоченным и с элементами хаоса структурам позволяет говорить о более тонком проявлении данного эффекта. Численные асимптотические подходы позволяют исследовать нелинейную супратрансмиссию в сложных неинтегрируемых системах. Усложнение всевозможных осцилляторов, как физических, так и электрических, актуально для различных реальных устройств, базирующихся на подобных системах. В том числе в области нанообъектов и транспорта энергии в них посредством рассматриваемого эффекта. К таким системам относятся молекулярные, кристаллические кластеры и наноустройства. В заключении работы приводятся основные тенденции исследований нелинейной супратрансмиссии.

Ключевые слова: нелинейная супратрансмиссия, солитон, дискретный бризер, нелинейная динамика решеток, инфратрансмиссия, уединенная волна, компьютерная модель

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 21-12-00275.

UDC: 538.913; 539.8

The effect of nonlinear supratransmission in discrete structures: a review

P. V. Zakharov

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University,
29 Polytechnicheskaya st., St. Petersburg, 195251, Russia

E-mail: zakharovpvl@rambler.ru

Received 03.12.2022, after completion — 10.01.2023.

Accepted for publication 27.02.2023.

This paper provides an overview of studies on nonlinear supratransmission and related phenomena. This effect consists in the transfer of energy at frequencies not supported by the systems under consideration. The supratransmission does not depend on the integrability of the system, it is resistant to damping and various classes of boundary conditions. In addition, a nonlinear discrete medium, under certain general conditions imposed on the structure, can create instability due to external periodic influence. This instability is the generative process underlying the nonlinear supratransmission. This is possible when the system supports nonlinear modes of various nature, in particular, discrete breathers. Then the energy penetrates into the system as soon as the amplitude of the external harmonic excitation exceeds the maximum amplitude of the static breather of the same frequency.

The effect of nonlinear supratransmission is an important property of many discrete structures. A necessary condition for its existence is the discreteness and nonlinearity of the medium. Its manifestation in systems of various nature speaks of its fundamentality and significance. This review considers the main works that touch upon the issue of nonlinear supratransmission in various systems, mainly model ones.

Many teams of authors are studying this effect. First of all, these are models described by discrete equations, including sin-Gordon and the discrete Schrödinger equation. At the same time, the effect is not exclusively model and manifests itself in full-scale experiments in electrical circuits, in nonlinear chains of oscillators, as well as in metastable modular metastructures. There is a gradual complication of models, which leads to a deeper understanding of the phenomenon of supratransmission, and the transition to disordered structures and those with elements of chaos structures allows us to talk about a more subtle manifestation of this effect. Numerical asymptotic approaches make it possible to study nonlinear supratransmission in complex nonintegrable systems. The complication of all kinds of oscillators, both physical and electrical, is relevant for various real devices based on such systems, in particular, in the field of nano-objects and energy transport in them through the considered effect. Such systems include molecular and crystalline clusters and nanodevices. In the conclusion of the paper, the main trends in the research of nonlinear supratransmission are given.

Keywords: nonlinear supratransmission, soliton, discrete breather, nonlinear lattice dynamics, infra-transmission, solitary wave, computer model

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2023, vol. 15, no. 3, pp. 599–617 (Russian).

This work was supported by the Russian Science Foundation grant No. 21-12-00275.

1. Введение

Нелинейные дискретные структуры могут порождать множество различных эффектов, обусловленных характером связей частиц системы. В данном обзоре рассматриваются достижения исследований, посвященных эффекту нелинейной супратрансмиссии (НСТ), суть которого заключается в передаче энергии на частотах, не поддерживаемых рассматриваемыми системами. Первой публикацией, посвященной этой проблеме, считается работа [Geniet, Leon, 2002], основы для которой были заложены годом ранее в [Caputo, Leon, 2001]. В работе было сформулировано правило возбуждения волн в дискретной цепочке для передачи энергии на частотах вне спектра системы. Оно состоит в том, что энергия проникает в систему, как только амплитуда внешнего гармонического возбуждения превышает максимальную амплитуду статического бризера той же частоты.

Здесь следует обратиться к понятию дискретного бризера (ДБ) для более детального понимания механизма передачи энергии. В общем случае под ДБ понимают пространственно локализованные, строго периодические колебательные моды большой амплитуды в нелинейных дискретных системах [Flach, Willis, 1998]. Существование ДБ как периодических во времени решений, локализованных в дискретном пространстве, впервые было строго доказано в работе [MacKay, Aubry, 1994] для бесконечных цепочек локально диффузионно связанных нелинейных осцилляторов. Этому феномену посвящено множество работ, затрагивающих теоретические, прикладные и экспериментальные аспекты [Aubry, 1997; Flach, Gorbach, 2008; Manley, 2010; Zakharov, Korznikova, Dmitriev, 2017; Abdullina et al., 2019]. Многообразие систем, поддерживающих ДБ, привело к обсуждению их вклада в различные свойства дискретных структур, в том числе в макроскопические [Захаров и др., 2016; Savin, Korznikova, Dmitriev, 2022; Захаров и др., 2017]. Например, в одной из последних работ показан вклад бризеров в теплоемкость кристаллов [Singh et al., 2021].

Выделяют множество различных типов ДБ. Классифицировать дискретные бризеры можно по ряду признаков: по размерному фактору, по симметрии, подвижности, типу нелинейности и т. д. Так говорят о нульмерных, одномерных, двумерных и трехмерных возбуждениях. Удастся получить как стационарные, так и движущиеся дискретные бризеры [Cuevas-Maraver, Chacon, Palmero, 2016]. По типу нелинейности выделяют ДБ с жестким и мягким типом. К первому относятся возбуждения, когда с ростом амплитуды растет частота колебаний. Такие ДБ могут быть обнаружены в виде мод выше оптической ветви фононного спектра либо при возбуждениях высокоамплитудных колебаний тяжелой компоненты решетки и отщеплении частоты колебаний от акустической ветви в запрещенную зону спектра [Korznikova et al., 2020].

В контексте рассматриваемой проблематики говорить о дискретных бризерах в сложных системах, как в реальных, так и модельных, нужно с некоторой оговоркой. Дело в том, что строго периодический во времени объект получается при численном моделировании или натурном эксперименте лишь в случае идеальной настройки начальных условий задачи Коши на некоторое многообразие малой размерности в многомерном пространстве всех возможных начальных значений координат отдельных частиц и их скоростей [Chechin, Dzhelauhova, Mehonoshina, 2006]. Такую точную настройку трудно осуществить даже при проведении вычислительного эксперимента. Тем более это практически невозможно сделать при постановке любых физических экспериментов, особенно в тех случаях, когда бризероподобные объекты возникают спонтанно [Ryabov et al., 2020; Shepelev et al., 2020; Sato, Hubbard, Sievers, 2006]. Более подробно о природе дискретных бризеров можно ознакомиться в обзорных работах по данной тематике, например в работе [Дмитриев и др., 2016].

Таким образом, F. Geniet и J. Leon подчеркивают роль локализованных возбуждений в передаче энергии вглубь системы от очага периодического воздействия. Развивая данную тематику

в своих последующих работах [Geniet, Leon, 2003; Leon, 2003; Leon, Spire, 2004; Leon, 2007], авторы делают вывод о том, что выявленный эффект обладает универсальностью и может быть распространен на любые дискретные системы с запрещенной частотной зоной различной природы. Супратрансмиссия не зависит от интегрируемости системы, устойчива к демпфированию и различным классам граничных условий. Кроме того, нелинейная дискретная среда при некоторых общих условиях, накладываемых на структуру нелинейности, может создавать неустойчивость затухающего профиля, обусловленного внешним периодическим воздействием. Эта неустойчивость является порождающим процессом, лежащим в основе нелинейной супратрансмиссии. Это возможно, когда система поддерживает нелинейные моды различной природы.

Более расширенно подход к нелинейным дискретным структурам осуществлен в работе о численных методах со свойствами согласованности в области энергий для класса диссипативных нелинейных волновых уравнений с приложениями к краевой задаче Дирихле [Macías-Díaz, 2009]. Здесь показано, что процесс нелинейной супратрансмиссии отсутствует в средах, описываемых незатухающими радиально-симметричными уравнениями синус-Гордона, таким образом доказано, что не каждая нелинейная система с запрещенной зоной может поддерживать этот процесс. Далее произведено обобщение на N -мерные нелинейные уравнения, которые различными способами выражают количественную модель, описывающую дискретные массивы, состоящие из связанных гармонических осцилляторов. Путем использования нелинейной супратрансмиссии можно добиться контролируемого распространения волновых сигналов. С развитием данного направления были изучены нелинейные системы самой разнообразной природы, построено большое количество моделей и теорий, к которым мы обратимся в следующих разделах данного обзора.

2. Математические модели и сущность эффекта супратрансмиссии для различных дискретных систем

Первые модели представляли собой простейшие одномерные цепочки осцилляторов. В работе [Geniet, Leon, 2002] рассматривается цепочка син-Гордона:

$$\ddot{u}_n - c^2(u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}) + \sin u_n = 0. \quad (1)$$

Граничные условия налагались следующие: $n > 0$ (т. е. полубесконечная прямая), $u_0(t)$ — гармоническая функция внешнего воздействия на край цепочки осцилляторов, $u_n(0)$ — начальные координаты, $\dot{u}_n(0)$ — скорости. При данных условиях уравнение имеет точное стационарное решение в виде бризера, найденное с помощью обратной задачи рассеяния [Захаров и др., 1980]:

$$u = 4 \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{1-w^2} \cos(wt)}{w \operatorname{ch}(\sqrt{1-w^2}x)} \right), \quad (2)$$

для которого дисперсионное соотношение будет иметь вид $w^2 = 1 + 2c^2(1 - \cos(k))$.

Варьируя начальные условия, можно добиться ситуации, при которой будет возникать передача энергии на запрещенных частотах для данной системы. Важно отметить, что дискретные бризеры аккумулируют энергию внешнего воздействия. Возникновение эффекта супратрансмиссии возможно при значениях амплитуды, превышающих некоторое пороговое значение.

Аналогичные результаты получены для нелинейной цепочки Клейна – Гордона, где система описывается гамильтонианом:

$$H_n = \frac{1}{2} \dot{u}_n^2 + \frac{c^2}{2} (u_{n+1} - u_n)^2 + V(u_n). \quad (3)$$

Здесь авторы работ [Geniet, Leon, 2002; Geniet, Leon, 2003] показали, что имеет место эффект супратрансмиссии, несмотря на то что модель не имеет точного решения в виде дискретного бризера. В работе [Leon, 2003] в качестве причин проявления данного эффекта говорится о неустойчивом состоянии, порожденном внешним периодическим воздействием. Эта неустойчивость является порождающим процессом, лежащим в основе нелинейной супратрансмиссии. В этой работе рассмотрен ряд моделей, опирающихся на экспоненциальный потенциал и потенциал Экарта, а также ранее рассмотренную модель \sin -Гордона. Как в этой работе, так и последующей [Leon, Spire, 2004] продолжается обсуждение появления неустойчивости и, как следствие, возникновения солитоноподобного возмущения.

В 2021 году впервые было показано, что явление НСТ присутствует в дробных по времени уравнениях \sin -Гордона с демпфированием. Однако полностью в дробном варианте волны, прошедшей в среду, затухает, даже когда проявляется эффект НСТ [Macías-Díaz, 2021; Macías-Díaz, Bountis, 2021]. Для близкой по смыслу модели [Pechas, Frazier, 2021] численно исследуем явление НСТ в активной нелинейной системе, моделируемой одномерным/двумерным дискретным уравнением синус-Гордон с нелокальной обратной связью. Авторами выявлено, что могут проявляться два режима. Один — с единственным порогом по амплитуде, второй, в случае включения нелокальной обратной связи, показывает наличие нескольких порогов по амплитуде для проявления супратрансмиссии.

Выводы, сделанные в работах [Geniet, Leon, 2003; Leon, 2003; Leon, Spire, 2004; Leon, 2007], привели к моделям на базе дискретного нелинейного уравнения Шрёдингера [Khomeriki, 2004; Susantot, 2008; Tchintang Tchameu, Tchawoua, Togueu Motcheyo, 2016], а также к перспективам практического применения данного эффекта в оптических волноводах. Показано, что решетка оптических волноводов может стать прозрачной для пучка, если его интенсивность будет превышать некоторое пороговое значение. Рассмотрим более подробно полученные результаты для этого случая. Запишем уравнение Шрёдингера:

$$i\frac{\partial\psi_j}{\partial z} + \psi_{j+1} + \psi_{j-1} + 2|\psi_j|^2\psi_j = 0, \quad \psi_0 = Ae^{i\Delta z}, \quad (4)$$

где z — время, A — амплитуда, Δ — частота внешнего воздействия [Khomeriki, 2004].

Моделируя предложенную систему, варьируя параметры внешнего воздействия [Khomeriki, 2004], авторы получили соответствующие зависимости, свидетельствующие о нескольких возможных сценариях эволюции системы. Если частота воздействия не входила в запрещенную область, то возмущение распространялось в системе, постепенно угасая. В случае частоты запрещенной области, но не при достаточно большой амплитуде возбуждались дискретные бризеры вблизи внешнего воздействия, без проникновения в отдаленные области решетки оптических волноводов. Таким образом, эффект супратрансмиссии через запрещенную зону существует, если в системе есть динамические локализованные решения. Этими объектами могут быть движущиеся дискретные бризеры [Khomeriki, 2004; Mandelik et al., 2003].

Усложнение моделей физических систем, с одной стороны, приводит к невозможности аналитического поиска решения, которое позволило бы явно предсказать и с помощью математического моделирования изучить для таких систем эффект НСТ; с другой стороны, более сложные системы включают в себя большее многообразие форм и особенностей нелинейных эффектов. В работе [Anghel-Vasilescu et al., 2010] также рассматривается уравнение Шрёдингера. На его примере показывается эффективность предложенного асимптотического метода исследования свойств супратрансмиссии и солитонов. Это позволило решить задачу определения порога НСТ в неинтегрируемых N -компонентных системах путем получения асимптотического решения на основе линейного затухающего профиля солитона, который зависит от N параметров, а также обнулением якобиана для такой системы. Развивая данный подход, в работе [Yu, Wang,

Тао, 2011] авторы предлагают метод генерации и исследования динамики пространственных световых солитонов в двулучепреломляющей среде с квадратичной нелинейностью. В качестве примера рассмотрен кристалл LiGaTe_2 . Генерация двулучепреломляющего солитона проявляется как особый нелинейный эффект, который позволяет свету проникать и распространяться в форме локализованных лучей. В работе [Togueu Motcheyo et al., 2017] впервые показано, что порог супратрансмиссии может быть найден для дискретного нелинейного уравнения Шрёдингера, моделирующего массивы оптических волноводов с керровской нелинейностью посредством использования подхода двумерной карты. Последние исследования систем на базе дискретного уравнения Шрёдингера посвящены изучению формирования темных солитонов [Togueu Motcheyo et al., 2019]. Подчеркивается возможность создания устройств для генерации дискретных щелевых солитонов.

Следующей важной моделью является рассмотрение джозефсоновских контактов. На данный момент изучение эффекта сверхпередачи энергии в таких системах подробно рассмотрена в трех работах [Chevriaux, Khomeriki, Leon, 2006; Macías-Díaz, Puri, 2008b; Macías-Díaz, 2017b]. Содержательно рассмотрим модель работы [Macías-Díaz, Puri, 2008b]. В ней изучается дифференциальное уравнение, являющееся вариацией уравнения (1):

$$\ddot{u}_n - c^2 \Delta u_n + \gamma_n \dot{u}_n + \sin u_n = \mu, \quad (5)$$

где предполагается, что γ и c — положительные действительные числа. По своей сути γ является внешним коэффициентом демпфирования, а c называют коэффициентом связи. Модель содержит N джозефсоновских контактов, на которые накладываются граничные условия $u_n(0) = 0$, $\frac{du_n}{dt}(0) = 0$ для $1 \leq n \leq N$ и $u_0 - u_1 = \frac{\phi(t)}{c^2}$, $u_{n-1} - u_N = 0$ для $t \in (0, +\infty)$. При этом $\gamma_n = \gamma$ для $n < N$, $\gamma_N = \gamma + \frac{1}{R}$. R — выходное сопротивление. Значение N достаточно велико, чтобы представить массив контактов как бесконечный. Численное решение осуществлялось двумя разными методами, которые дали хорошее согласие. Кроме того, получено аналитическое выражение для минимальной амплитуды, при которой проявляется эффект НСТ: $A_s = 2c(1 - \omega^2)$. Авторами также обнаружена инфратрансмиссия, возможность которой впервые предсказана в работе [Chevriaux, Khomeriki, Leon, 2006], по факту представляющая передачу энергии в систему на амплитудах несколько меньших, чем для супратрансмиссии. По полученным данным для рассматриваемой системы разница составила порядка 28% [Macías-Díaz, Puri, 2008c].

Дальнейшее развитие исследований эффекта супратрансмиссии в джозефсоновских контактах представлено в работах [Macías-Díaz, 2017a; Piña-Villalpando, Macías-Díaz, Kurmyshev, 2019], где производится обобщение с использованием дискретных дифференциальных операторов Рисса. В результате моделирования обнаружено наличие нелинейных петель гистерезиса для различных нецелых порядков дробной производной. Это показывает, что нелинейный бистабильный режим в классической джозефсоновской линии передачи сохраняется при наличии дробных порядков. В качестве математического приложения явления гистерезиса авторы работы [Macías-Díaz, 2017b] предлагают использовать для управляемого распространения сигналов в дробных линиях Джозефсона. Одна из последних работ по этому направлению посвящена генерации бризеров с помощью управляемых магнитных импульсов [De Santis et al., 2022].

Важной задачей стала проблема перехода на две пространственные переменные с граничными условиями Неймана или Дирихле. Она с некоторыми вариациями обсуждается в ряде работ Macías-Díaz и соавторов [Macías-Díaz, 2008b; Macías-Díaz, 2008a; Macías-Díaz, 2008c; Macías-Díaz, Medina-Ramírez, Puri, 2009; Macías-Díaz, Ruiz-Ramírez, Flores-Oropeza, 2009; Macías-Díaz, Puri, 2008a; Macías-Díaz, 2009; Ruiz-Ramírez, Macías-Díaz, 2010; Macías-Díaz, Jerez-Galiano, 2010; Macías-Díaz, 2011; Macías-Díaz, 2017a], в целом находясь в полном согласии с одномерным случаем. Подчеркнем, что в 2020 году вышла статья [Bountis, 2020], в которой структурированы результаты ряда работ для одномерных случаев, обобщены результаты многих исследователей.

Автор говорит о том, что предстоит еще провести локальный и глобальный анализ устойчивости простых периодических колебаний для выявления областей энергии и параметров, связанных с глобально устойчивым движением, а также режимами сильного и слабого хаоса.

Поиск трактовок механизмов привел к изучению систем с более специфичными условиями, которые расширили многообразие проявлений данного эффекта. В работе [Bodo et al., 2009] рассматривается уравнение (1) для амплитуд меньше пороговых значений возникновения супратрансмиссии. Однако получен результат, свидетельствующий о возможности возникновения движущихся дискретных бризеров в случае наличия белого шума. При этом показано, что шум может запускать эффект супратрансмиссии ниже своего детерминированного порога с установленной вероятностью. Проанализировав различные параметры шума, авторы установили, что существует соответствующий уровень шума, обеспечивающий существование бризерных мод с наилучшей когерентностью [Bodo et al., 2010; Bodo, Morfi, 2013]. В модифицированных моделях Клейна–Гордона и синус–Гордона пятого порядка, включающих как классическую линейную связь, так и нелинейную связь, изучен их вклад в данный эффект [Alima et al., 2017; Malishava, Khomeriki, 2015].

Возможность передачи энергии на значительные расстояния в модельных системах и осуществление этого процесса посредством локализованных стояний в виде солитонных волн или динамических дискретных бризеров привели к идее возможности передачи тепла из менее нагретой области в более нагретую посредством явления супратрансмиссии [Ai, He, Hu, 2010]. Первая модель представляла собой цепочку Френкеля–Конторовой, на которую накладывались граничные условия, характерные для эффекта супратрансмиссии. Система в данном случае описывалась гамильтонианом:

$$H = \sum_i \frac{p_i^2}{2m} + \frac{1}{2}k(x_i - x_{i+1} - a)^2 - \frac{V}{(2\pi)^2} \cos(2\pi x_i) - \delta x_i F(t), \quad (6)$$

где x_i и p_i — соответственно положение и импульс частицы, m — масса частицы, k — константа связи, a — равновесное расстояние между частицами, V — амплитуда локального потенциала, δ — дельта-функция Дирака. Внешнее гармоническое воздействие задавалось функцией $F(t) = A_0 \sin(\omega t)$, где A_0 — амплитуда, а ω — частота. Авторами наблюдалось возникновение резонансного явления теплового потока. Установлено, что существует такое значение частоты возбуждения, при котором тепловой поток принимает максимальное значение. Естественно, значение данной частоты определяется параметрами модели.

Наиболее важным выводом в работе является то, что тепло можно перекачивать из низкотемпературной области в высокотемпературную, соответствующим образом настраивая внешнее воздействие на систему. В отличие от других моделей здесь продемонстрировано, что отсутствует порог по амплитуде для эффекта НСТ в термостате.

Продолжая вопрос кристаллических решеток, авторы [Yu, Wang, Tao, 2011] показали, что нелинейный резонанс на примесях делает локализованное возбуждение (обычно дискретный бризер) неустойчивым, что приводит к испусканию солитонов, которое выглядит совершенно иначе, чем при прямом возбуждении однородных нелинейных систем без примесей. Этот подход позволяет создавать солитоны при небольших значениях силы гармонического внешнего воздействия. Также особенностью таких возбуждений является низкая скорость их распространения, которая может регулироваться параметрами внешнего воздействия.

Модели электрических цепей также привели к обнаружению эффекта нелинейной супратрансмиссии в них. Такие модельные системы поддерживают широкий спектр явлений. В частности, в работе [Kenmogne et al., 2015], при использовании точных дискретных уравнений сети и расширенного нелинейного уравнения Шрёдингера, была обнаружена генерация солитонов, рассчитано пороговое значение амплитуды сигнала, при котором в сеть излучается импульсный

солитон. Более подробно такие системы будут рассмотрены ниже, так как хорошо поддаются натурному эксперименту.

Дальнейшее развитие моделей с электрическими цепями представлено в работах [Zheng et al., 2018; Zheng et al., 2019; Mosquera-Sánchez, De Marqui, 2021], где рассматривается пьезо-электрический метаматериал, интегрированный с бистабильными цепями. Бистабильная схема может быть описана в данном случае выражением

$$LC_p \ddot{U} + RC_p \dot{U} + P(U) = 0, \quad (7)$$

где P является функцией напряжения и в явном виде может быть задано так: $P(U) = U - gV_d$. Здесь g — коэффициент усиления одного операционного усилителя с отрицательной обратной связью и может быть вычислен как $g = 1 + \frac{R_2}{R_1}$. Выражение (7) эквивалентно уравнению механического осциллятора. При этом равновесное напряжение может быть вычислено из условия $P(U) = 0$. Дополняя данное выражение уравнениями для описания динамики модели пьезо-метаматериала, можно получить систему уравнений, описывающую элементарный участок данной цепи. Конечные выражения для компьютерного анализа являются слишком громоздкими, чтобы приводить их в данном обзоре с пояснениями, с ними целесообразно ознакомиться в работе авторов исследования [Zheng et al., 2019].

Применение электрических схем, как эквивалентов во многих системах, является эффективным инструментом. Так, в работе [Ndjomatchoua et al., 2016] посредством такого подхода исследуются микротрубочки, относящиеся к важным биологическим молекулам живых организмов. Они играют важную роль в делении клеток, транспорте органелл внутри клеток и при обработке электрических сигналов в нейронах. Модель представляет собой дискретную схему, включающую кубическое нелинейное сопротивление. Нелинейное сопротивление использовалось для представления ионного потока через нанопоры микротрубочек. В дифференциальном виде уравнение, описывающее динамику системы, может быть представлено в следующем виде:

$$\ddot{V}_n + \omega_0 (3LB_1 V_n^2 + (rC_0 - LB_2)) \dot{V}_n + rB_1 V_n^3 - rB_2 V_n = V_{n-1} - 2V_n + V_{n+1}. \quad (8)$$

Данное выражение записано с учетом законов Кирхгофа. Множители B_1 и B_2 представляют нелинейные и линейные коэффициенты, а члены, содержащие их, описывают вклад ионного потока, вносимого нелинейным сопротивлением. В свою очередь, $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC_0}}$, время определено безразмерно: $\tau = \omega_0 t$, а внешнее воздействие определялось гармонической функцией $V_0 = U \cos(\omega t)$. Система рассматривается как с диссипацией, так и без. В результате обнаружены инфратрансмиссия и супратрансмиссия, данные нелинейные эффекты вполне хорошо могут описать наблюдаемые в натуральных экспериментах процессы. Авторы подчеркивают, что с биологической точки зрения определенная интенсивность ионного потока через нанопоры микротрубочек может обеспечить высокую частоту обработки электрических сигналов нейронами. Кроме того, инфратрансмиссия в микротрубочках нейронов может быть использована для объяснения того, почему повторяющаяся стимуляция высокочастотным магнитным полем способна ослаблять двигательные признаки болезни Паркинсона.

Сущность эффекта НСТ раскрывается в дискретных структурах при нарушении периодичности. Порождение локализованных состояний происходит ввиду сочетания двух факторов: дисперсии и нелинейности. В работе [Yousefzadeh, Phani, 2016] беспорядок вносится в структуру за счет небольших изменений параметров жесткости, взятых из однородного статистического распределения. Сама система представляла собой нелинейную периодическую структуру конечной длины со слабосвязанными узлами. Авторы показали, что, хотя в отдельных случаях пороговое значение амплитуды для НСТ отличается, в целом это значение устойчиво к беспорядку

при усреднении по всему ансамблю. Для гармонического возбуждения вдали от края разрешенных частот системы увеличение беспорядка оказывает незначительное влияние на передаваемую энергию.

3. Эффект супратрансмиссии в молекулярно-динамических моделях

В этом разделе рассмотрим модели, базирующиеся на методе молекулярной динамики. Применение такого подхода позволяет исследовать многие нелинейные эффекты в реалистичных структурах, например в кристаллических решетках реальных сплавов. К первой работе в этом направлении можно отнести исследование двумерной модели сплава Pt₃Al [Медведев и др., 2011]. Взаимодействие частиц описывалось парным потенциалом Морзе: $\varphi(r_{ij}) = D\beta e^{-\alpha r_{ij}}(e^{-\alpha r_{ij}} - 2)$, где D — энергетический параметр, соответствующий глубине потенциальной ямы; α — параметр, определяющий жесткость межатомных связей; r_0 — некоторое усредненное равновесное расстояние по координационным сферам, в которых учитывается взаимодействие между атомами.

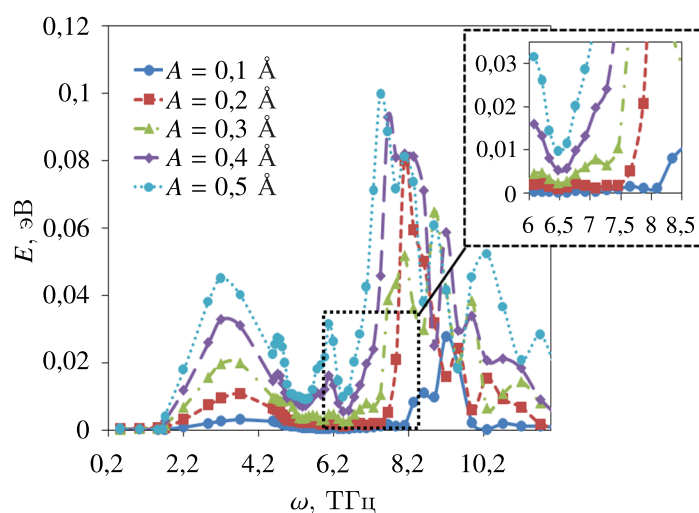


Рис. 1. Зависимость поглощенной энергии расчетной ячейкой на один атом за одну пикосекунду от частоты внешнего воздействия и амплитуды [Чердниченко и др., 2019]

Однако в этой работе явным образом не выделен эффект НСТ. При этом показано возбуждение дискретных бризеров вблизи зоны воздействия, которое осуществлялось следующим образом: $u[i] = u_x[i] + u_0 \sin(0,5\omega_b t)^2$, где $u_x[i]$ — горизонтальная составляющая скорости частиц под номером i . В результате было зафиксировано периодическое возбуждение дискретных бризеров вблизи зоны воздействия. Периодичность процесса говорит о том, что энергия отдавалась в расчетную ячейку посредством НСТ. Возвращение к модели данного сплава в 3D было осуществлено в работе [Чердниченко и др., 2019]. В данном случае расчетная ячейка содержала $3 \cdot 10^5$ частиц, взаимодействующих посредством потенциала, полученного методом погруженного атома (EAM-потенциал), для которого полная энергия E кристалла может быть выражена как $E = \frac{1}{2} \sum_{i,j, i \neq j} \varphi_{ij}(r_{ij}) + \sum_i F_i(\rho_i)$, где φ_{ij} представляет парную энергию между атомами i и j , отделенными друг от друга расстоянием r_{ij} , а F_i — энергия, связанная с вложенным атомом i в локальном местоположении с электронной плотностью ρ_i . Электронную плотность можно рассчитать по формуле $\rho_i = \sum_{j, j \neq i} f_j(r_{ij})$, где $f_j(r_{ij})$ — электронная плотность на участке атома i , находящегося на расстоянии r_{ij} от атома j . Периодическое воздействие осуществлялось по следующим законам: $Z_1(t) = A \sin(\omega t)$, $Z_2(t) = A(\sin(\omega t))^2$ и $Z_3(t) = A|\sin(\omega t)|$ по оси Z с частотами,

близкими собственным частотам бризеров (6–8 ТГц), а также с амплитудами от 0,2 до 0,3 Å. Далее анализировалось поглощение энергии оставшейся частью ячейки. Для примера на рис. 1 приведена зависимость для гармонической функции. Таким образом, для трехмерного случая получен аналогичный результат, как для двумерного. Детальное рассмотрение механизма проникновения энергии вглубь кристалла проведено в работе [Чередниченко и др., 2019].

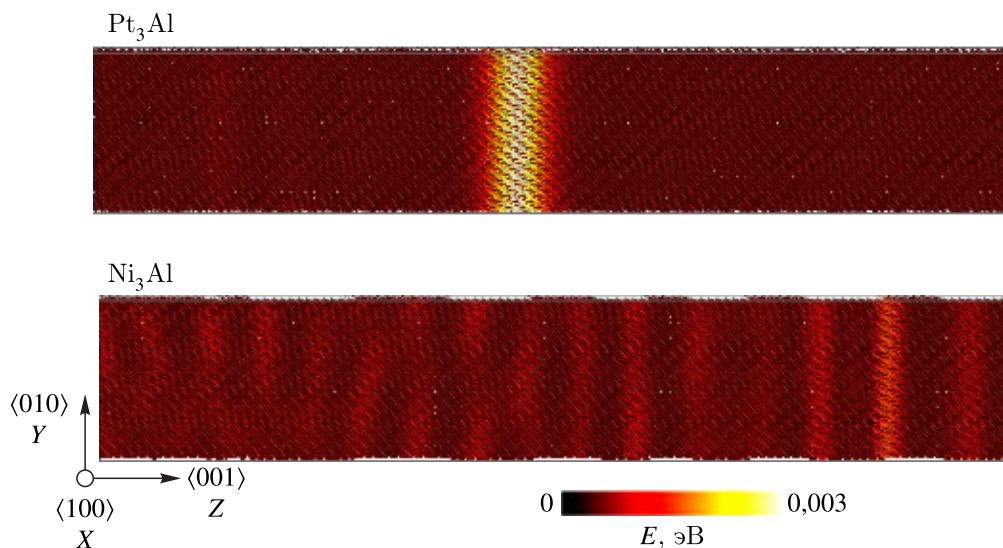


Рис. 2. Распределение кинетической энергии в кристаллах Pt_3Al и Ni_3Al

Как уже отмечалось, в результате воздействия возбуждались дискретные бризеры вблизи поверхности кристалла, которые в свою очередь порождали локальную неустойчивость, которая трансформировалась в уединенные волны, способные перемещаться по кристаллу. Для демонстрации того, что эффект НСТ возможен при наличии запрещенной зоны кристалла, был проанализирован модельный кристалл Ni_3Al . Сравнение приведено на рис. 2. В результате можно наблюдать для кристалла с запрещенной зоной в фоновом спектре возникновение уединенных волн. При этом количество возбужденных волн зависит от времени и параметров воздействия.

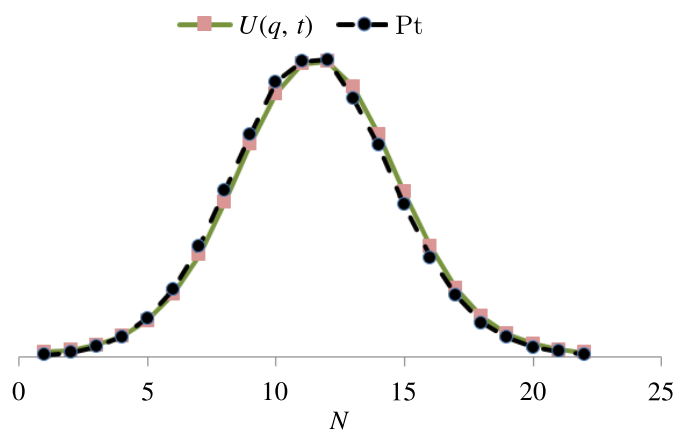


Рис. 3. Профиль солитона в Pt_3Al и профиль, описываемый функцией (9). Вдоль вертикальной оси отложена амплитуда, по горизонтальной — номер атома в ряду

Такая уединенная волна, имеющая колоколообразный вид (рис. 3), является солитоном, так как она нелинейная, распространяется с постоянной скоростью и при столкновении с другими волнами не взаимодействует с ними [Захаров, Дмитриев, Корзникова, 2021]. В теории уединен-

ных волн в твердых телах [Аэро, Булыгин, 2009] известно решение уравнения синус-Гордона вида

$$U(x, t) = \frac{2\alpha^2 \operatorname{ch} \varepsilon^2}{1 + \alpha^2 \operatorname{ch} \varepsilon^2}, \quad (9)$$

где $\varepsilon = x - Vt$, α — амплитудный множитель, x — координата, V — скорость движения солитона, t — время. При подборе соответствующих значений параметров данного решения получен профиль уединенной волны, хорошо согласующийся с профилем полученного солитона, в кристалле Pt_3Al .

В работе [Захаров и др., 2019] показано, что такие уединенные волны способны распространяться на тысячи нанометров вглубь бездефектного кристалла без изменения формы и скорости. Данный механизм транспорта энергии по кристаллу, посредством уединенных волн, видится одним из наиболее эффективных, а механизм генерации таких волн относительно прост.

Динамика таких волн и их взаимодействие с объемными дефектами в кристаллах исследуются в работах [Zakharov et al., 2020; Yousefzadeh, Phani, 2016]. Установлено, что степень рассеяния энергии на дислокации зависит от взаимной ориентации фронта волны и экстраплоскости дислокации. Было показано, что рассматриваемые волны способны преодолевать препятствия, линейные размеры которых больше их длины. Энергии таких волн достаточно для структурно-энергетических преобразований при взаимодействии с рассматриваемыми дефектами кристалла.

Примечательным является исследование методом молекулярной динамики возбуждения дискретных бризеров и эффекта НСТ в графеновой наноленте [Evazzade et al., 2017]. Однородная деформация графена может приводить к появлению щели в его фононном спектре, что обеспечивает возможность существования щелевых ДБ. Авторами получен результат, который свидетельствует об отсутствии порога амплитуды внешнего воздействия для проявления супратрансмиссии. Был рассмотрен линейный режим, т.е. с относительно небольшими амплитудами на частотах ДБ. В этом случае обнаружен диапазон частот с ненулевой мощностью. Объяснение данного эффекта заключается в том, что такое гармоническое смещение вызывает возбуждение ДБ на границе воздействия и наноленты. Это приводит к излучению низкочастотного фона из-за локального теплового расширения.

4. Прикладные аспекты НСТ и экспериментальные исследования

Практически каждая работа (в том числе первые пионерские работы), затрагивающая вопрос нелинейной супратрансмиссии, предполагала практическую реализацию и применение в научной или технической области. Одним из первых прикладных аспектов данного эффекта является построение чувствительных детекторов сверхслабых сигналов на основе матрицы джозефсоновских переходов [Chevriaux, Khomeriki, Leon, 2006]. Авторами работы предложена схема такого детектора. Работа базируется на полном аналитическом разборе бистабильности в длинном джозефсоновском контакте и в массиве коротких контактов. Впервые получен инструмент, который позволяет вычислить пороговую амплитуду, при которой устройство должно работать, чтобы стать сверхчувствительным детектором. В работе [Macías-Díaz, Puri, 2008b] доказано, что можно передавать двоичную информацию в дискретных массивах джозефсоновских контактов, используя процессы нелинейной суперпередачи и инфрапередачи. А в [Macías-Díaz, 2017b] — для управляемого распространения сигналов в дробных линиях передачи Джозефсона. В отсутствие дисперсионных и диссипативных эффектов модель показала высокую надежность для достаточно длительных периодов генерации однобитовых сигналов независимо от расстояния между источниками [Macías-Díaz, Puri, 2007]. Аналогичный подход рассмотрен в работах [Macías-Díaz, 2010; Macías-Díaz, 2008a], где изучена $(2 + 1)$ -мерная модель Френкеля – Конторовой.

Для систем, описываемых уравнением синус-Гордона, эффект может быть использован для целей обработки сигналов, чтобы улучшить обнаружение слабых зашумленных сигналов и тем

самым построить детекторы, которые будут учитывать шум [Bodo et al., 2009]. Далее в работе [Bodo et al., 2010] авторы продолжили исследование для электрической цепочки, управляемой уравнением Клейна – Гордона пятого порядка, и экспериментально показали возможность передачи сигнала на запрещенных частотах данной модели.

Интересным и перспективным приложением эффекта НСТ может стать разработка теплового насоса. Идея предложена в работе [Ai, He, Hu, 2010], которую мы уже обсуждали. Особенность практического применения заключается в том, что эффект теплового резонанса не зависит от размера рассматриваемых систем. Следовательно, можно было бы ожидать дальнейших разработок в отношении теплового резонанса и накачки в различных физических системах, например в гранулированных системах. Таким объектам посвящена одна из последних работ [Cui et al., 2022]. В ней обнаружен эффект НСТ, а также обнаружены еще 4 режима передачи энергии. Подчеркивается, что полученные результаты могут быть полезными при конструировании механических или других видов управления потоками. Также продолжают исследования физических маятников более сложной конфигурации, в виде связанных пар цепочек маятников [Kamdoum Kuitche et al., 2022]. Авторами применялись как экспериментальная методика, так и численный эксперимент. Еще более сложная конфигурация рассмотрена в работе [Adile et al., 2021], с комплексным подходом к исследованию различных режимов механической системы, вплоть до построения нелинейного уравнения Шрёдингера с помощью метода возмущений. Уравнение используется для поиска модулированных импульсных и темных солитонов в качестве аппроксимированных решений сетевого уравнения.

Важное место в обсуждении систем, поддерживающих нелинейную супратрансмиссию, занимают метастабильные модульные метаструктуры. Авторы работ [Wu, Wang, 2018; Liu, Cai, Wang, 2019; Wu, Wang, 2019; Zhang, Fang, Xu, 2020] численно и аналитически исследуют их. Показано, что в случае бифуркационной неустойчивости коэффициент передачи энергии может резко увеличиться, когда входная амплитуда превышает определенный порог. Благодаря разумной интеграции свойства сверхпередачи в нелинейную периодическую цепочку с пространственной асимметрией метастабильная структура способна реализовать невзаимное распространение волн за счет эффекта НСТ в зависимости от направления вдоль цепочки. В этой работе авторы предложили эффективную методологию, обладающую большим потенциалом для проектирования систем с желаемыми адаптируемыми характеристиками невзаимного распространения энергии волн, с использованием концепции реконфигурируемой метастабильной модульной метаструктуры.

Наиболее простыми в реализации и поддающимися простому моделированию являются электрические нелинейные системы. На возможность существования и перспективы проявления НСТ в таких системах обратил внимание целый ряд исследователей [Tao et al., 2012a; Tao et al., 2012b; Togueu Motcheyo et al., 2013; Kenmogne et al., 2015; Koon, Marquié, Dinda, 2014; Togueu Motcheyo, Tchawoua, Tchintang Tchameu, 2013].

Так, в работе [Koon, Marquié, Dinda, 2014] изучается 200-элементная электрическая линия, в ней осуществлена генерация солитонов и их распространения за счет формирования модуляционной неустойчивости на границах. Авторы отмечают, что полученным солитонам сильно мешает диссипация, возникающая из-за несовершенства компонентов электрической линии (индуктивностей). Однако диссипация не препятствует возникновению процесса модуляционной неустойчивости, но сильно влияет на его развитие и затрудняет строгое экспериментальное измерение характеристик, полученных солитонов. В частности, авторы показали, что диссипация предотвращает генерацию солитонов, когда напряжения возбуждения близки к теоретическому порогу НСТ в модели без нее. Соответственно, это накладывает ограничения на возможность генерации солитонов, для получения четкой последовательности солитонов необходимо использовать компоненты очень высокого качества с позиции диссипации. Важность этих исследова-

ний заключается в том, что удалось получить экспериментальное подтверждение эффекта НСТ в электрических цепях, состоящих всего из двух компонентов: конденсатора и катушки.

Рассмотренная выше теоретическая модель пьезоэлектрического метаматериала с бистабильными цепями была реализована в натурном эксперименте в той же работе [Zheng et al., 2019]. В отличие от нелинейных механических метаматериалов нелинейные свойства бистабильных цепей в предлагаемой пьезометаструктуре можно легко регулировать путем настройки источников постоянного напряжения или изменения коэффициентов усиления операционных усилителей с отрицательной обратной связью.

Возможность гибкой настройки может быть использована для организации адаптивной невязимной передачи сигналов. В целом рассмотренные здесь перспективы таких систем открывают новые возможности для управления передачей упругих волн.

5. Заключение

Эффект нелинейной супратрансмиссии является важным свойством многих дискретных структур. Необходимыми условиями для его существования являются дискретность и нелинейность среды. Его проявление в системах различной природы говорит о его фундаментальности и значимости. В данном обзоре рассмотрены основные работы, затрагивающие вопрос нелинейной супратрансмиссии в различных системах, преимущественно модельных.

Опираясь на описанную выше ретроспективу изучения данного явления и полученные результаты, можно сказать, что ведется активный поиск практического применения данного эффекта в различных целях, в том числе научных. Поэтапное усложнение моделей приводит к более глубокому пониманию явления супратрансмиссии, а переход к разупорядоченным и с элементами хаоса структурам позволяет говорить о более тонком проявлении данного эффекта.

Следует выделить ряд перспективных направлений дальнейших исследований. К таким направлениям в первую очередь относятся системы, не имеющие точного аналитического решения, с усложнением условий как для самой системы, так и внешнего воздействия. Однако численные асимптотические подходы позволяют исследовать НСТ в них. Также продолжится изучение всевозможных физических осцилляторов, что, несомненно, актуально для различных реальных конструкций, базирующихся на подобных системах. К этому же направлению следует отнести экспериментальные исследования электрических цепей различного состава. Важным направлением являются исследования в области нанобъектов и транспорта энергии в них посредством НСТ. Это различные молекулярные и кристаллические системы. Всё это объединяет общий тренд на поиск механизмов управления потоками энергии в различных ее проявлениях.

Список литературы (References)

- Аэро Э.Л., Булыгин А.Н.* Теория нелинейных волн в твердых телах, испытывающих кардинальную перестройку кристаллической структуры // Вычислительная механика сплошных сред. — 2009. — Т. 2, № 4. — С. 19–43.
- Aero E. L., Bulygin A. N.* Teoriya nelineynykh voln v tverdykh telakh, vstrechayushchikhsya kardinal'nyu perestroyku kristallicheskooy struktury [Theory of Nonlinear Waves in Solids Undergoing a Fundamental Restructuring of the Crystal Structure] // Vychislitel'naya mekhanika sploshnykh sred. — 2009. — Vol. 2, No. 4. — P. 19–43 (in Russian).
- Дмитриев С. В., Корзникова Е. А., Баимова Ю. А., Веларде М. Г.* Дискретные бризеры в кристаллах // УФН. — 2016. — Т. 186. — С. 471–488.
- Dmitriyev S. V., Korznikova E. A., Baimova Yu. A., Velarde M. G.* Discrete breathers in crystals // Physics-Uspekh. — 2016. — Vol. 59, No. 5. — P. 446–461. (Original Russian paper: *Dmitriyev S. V., Korznikova E. A., Baimova Yu. A., Velarde M. G.* Diskretnyye brizery v kristallakh // UFN. — 2016. — Vol. 186. — P. 471–488.)
- Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. П., Питаевский Л. П.* Теория солитонов: метод обратной задачи. — М.: Наука, 1980.
- Zakharov V. E., Manakov S. V., Novikov S. P., Pitayevskiy L. P.* Teoriya solitonov: metod obratnoy zadachi [Theory of solitons: the inverse problem method]. — Moscow: Nauka, 1980 (in Russian).

- Захаров П. В., Дмитриев С. В., Корзникова Е. А.* Молекулярно-динамический анализ транспорта энергии в кристалле Pt₃Al при воздействии в запрещенной зоне спектра // Письма о материалах. — 2021. — Т. 11, № 3. — С. 338–344.
Zakharov P. V., Dmitriev S. V., Korznikova E. A. Molekulyarno-dinamicheskiy analiz energii transporta v kristalle Pt₃Al pri vozdeystvii v zapreshchennuyu territoriyu [Molecular dynamic analysis of energy transport in a Pt₃Al crystal under the impact in the spectrum gap frequency] // Pis'ma o materialakh [Letters on Materials]. — 2021. — Vol. 11, No. 3. — P. 338–344 (in Russian).
- Захаров П. В., Дмитриев С. В., Старостенков М. Д., Ерёмин А. М., Корзникова Е. А.* Стационарные квазибризеры в моноатомных металлах с ГЦК-структурой // Журнал экспериментальной и теоретической физики. — 2017. — Т. 152, № 5. — С. 1073–1080.
Zakharov P. V., Dmitriev S. V., Starostenkov M. D., Eremin A. M., Korznikova E. A. Stationary quasi-breathers in monatomic FCC metals // Journal of Experimental and Theoretical Physics. — 2017. — Vol. 125, No. 5. — P. 913–919. (Original Russian paper: *Zakharov P. V., Dmitriyev S. V., Starostenkov M. D., Eremin A. M., Korznikova E. A.* Statsionarnyye kvazibrizery v monoatomnykh metallakh s GTSK-strukturoy // Zhurnal eksperimental'noy i teoreticheskoy fiziki. — 2017. — Vol. 152, No. 5. — P. 1073–1080.)
- Захаров П. В., Старостенков М. Д., Ерёмин А. М., Чередниченко А. И.* Дискретные бризеры в кристалле CuAu // Письма о материалах. — 2016. — Т. 6, № 4. — С. 294–299.
Zakharov P. V., Starostenkov M. D., Eremin A. M., Cherednichenko A. I. Discrete breathers in a CuAu crystal [Discrete breathers in the crystal CuAu] // Pis'ma o materialakh [Letters on Materials]. — 2016. — Vol. 6, No. 4. — P. 294–299 (in Russian).
- Захаров П. В., Старостенков М. Д., Корзникова Е. А., Еремин А. М., Луценко И. С., Дмитриев С. В.* Возбуждение волн солитонного типа в кристаллах стехиометрии A₃B // Физика твердого тела. — 2019. — Т. 61, № 11. — С. 2183–2189.
Zakharov P. V., Eremin A. M., Starostenkov M. D., Lutsenko I. S., Korznikova E. A., Dmitriev S. V. Excitation of soliton-type waves in crystals of the A₃B stoichiometry // Physics of the Solid State. — 2019. — Vol. 61, No. 11. — P. 2160–2166. (Original Russian paper: *Zakharov P. V., Starostenkov M. D., Korznikova E. A., Eremin A. M., Lutsenko I. S., Dmitriyev S. V.* Vozbuzhdeniye volny solitonnoogo tipa v kristallakh stekhiometrii A₃B // Fizika tverdogo tela. — 2019. — Vol. 61, No. 11. — P. 2183–2189.)
- Медведев Н. Н., Старостенков М. Д., Захаров П. В., Пожидаева О. В.* Локализованные колебательные моды в двумерной модели упорядоченного сплава Pt₃Al // Письма в Журнал технической физики. — 2011. — Т. 37, № 3. — С. 7–15.
Medvedev N. N., Starostenkov M. D., Zakharov P. V., Pozhidayeva O. V. Localized oscillating modes in two-dimensional model of regulated Pt₃Al alloy // Technical Physics Letters. — 2011. — Vol. 37, No. 2. — P. 98–101. (Original Russian paper: *Medvedev N. N., Starostenkov M. D., Zakharov P. V., Pozhidayeva O. V.* Lokalizovannyye kolebatel'nyye mody v dvumernoy modeli Sorbtzionnogo splava Pt₃Al // Pis'ma v Zhurnal tekhnicheskoy fiziki. — 2011. — Vol. 37, No. 3. — P. 7–15.)
- Чередниченко А. И., Захаров П. В., Старостенков М. Д., Сысоева М. О., Ерёмин А. М.* Нелинейная супратрансмиссия в кристалле Pt₃Al при интенсивном внешнем воздействии // Компьютерные исследования и моделирование. — 2019. — Т. 11, № 1. — С. 109–117.
Cherednichenko A. I., Zakharov P. V., Starostenkov M. D., Syssoeva M. O., Eremin A. M. Nelineynaya supratransmissiya v kristalle Pt₃Al pri intensivnom vneshnem vozdeystvii [Nonlinear supratransmission in a Pt₃Al crystal at intense external influence] // Computer Research and Modeling. — 2019. — Vol. 11, No. 1. — P. 109–117 (in Russian).
- Abdullina D. U., Semenova M. N., Semenov A. S., Korznikova E. A., Dmitriev S. V.* Stability of delocalized nonlinear vibrational modes in graphene lattice // European Physical Journal B. — 2019. — Vol. 92, No. 11. — P. 249.
- Adile A. D., Kenmogne F., Tewa A. K. S., Simo H., Tahir A. M., Kumar S.* Dynamics of a mechanical network consisting of discontinuous coupled system oscillators with strong irrational nonlinearities: Resonant states and bursting waves // International Journal of Non-Linear Mechanics. — 2021. — Vol 137. — P. 103812.
- Ai B.-Q., He D., Hu B.* Heat conduction in driven Frenkel–Kontorova lattices: Thermal pumping and resonance // Physical Review E – Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics. — 2010. — Vol. 81, No. 3. — 031124.
- Alima R., Morfu S., Marquié P., Bodo B., Essimbi B. Z.* Influence of a nonlinear coupling on the supratransmission effect in modified sine-Gordon and Klein–Gordon lattices // Chaos, Solitons and Fractals. — 2017. — Vol. 100. — P. 91–99.

- Anghel-Vasilescu P., Dorignac J., Geniet F., Leon J., Taki A.* Generation and dynamics of quadratic birefringent spatial gap solitons // *Physical Review A – Atomic, Molecular, and Optical Physics.* – 2011. – Vol. 834. – 043836.
- Anghel-Vasilescu P., Dorignac J., Geniet F., Leon J., Taki M.* Nonlinear supratransmission in multicomponent systems // *Physical Review Letters.* – 2010. – Vol. 105, No. 7. – 074101.
- Aubry S.* Breathers in nonlinear lattices: Existence, linear stability and quantization // *Physica D.* – 1997. – Vol. 103. – P. 201–250.
- Bodo B., Morfu S.* Noise effect in a sine-Gordon lattice // *22nd International Conference on Noise and Fluctuations: ICNF.* – Montpellier, 2013. – P. 1–4.
- Bodo B., Morfu S., Marquié P., Essimbi B. Z.* Noise induced breather generation in a sine-Gordon chain // *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment.* – 2009. – P01026.
- Bodo B., Morfu S., Marquié P., Rossé M.* Klein–Gordon electronic network exhibiting supratransmission effect // *Electronics Letters.* – 2010. – Vol. 46, No. 2. – P. 123–124.
- Bountis A.* Complex dynamics and statistics of 1-d hamiltonian lattices: Long range interactions and supratransmission // *Nonlinear Phenomena in Complex Systems.* – 2020. – Vol. 23, No. 2. – P. 133–148.
- Caputo J.-G., Leon J.* Spire nonlinear energy transmission in the gap // *Phys. Lett. A.* – 2001. – Vol. 283. – P. 129–135.
- Chechin G. M., Dzhelauhova G. S., Mehonoshina E. A.* Quasibreathers as a generalization of the concept of discrete breathers // *Physical Review E.* – 2006. – Vol. 74. – P. 036608.
- Chevriaux D., Khomeriki R., Leon J.* Theory of a Josephson junction parallel array detector sensitive to very weak signals // *Physical Review B – Condensed Matter and Materials Physics.* – 2006. – Vol. 73, No. 21. – 214516.
- Cuevas-Maraver J., Chacon R., Palmero F.* Impulse-induced generation of stationary and moving discrete breathers in nonlinear oscillator networks // *Physical review E.* – 2016. – Vol. 94. – P. 062206.
- Cui J.-G., Yang T., Niu M.-Q., Chen L.-Q.* Interaction effects of driving amplitudes and frequencies on transitivity in a granular chain // *Journal of Sound and Vibration.* – 2022. – Vol. 529. – P. 116966.
- De Santis D., Guarcello C., Spagnolo B., Carollo A., Valenti D.* Generation of travelling sine-Gordon breathers in noisy long Josephson junctions // *Chaos, Solitons and Fractals.* – 2022. – Vol. 158. – P. 112039.
- Evazzade I., Lobzenko I. P., Korznikova E. A., Ovid'ko I. A., Roknabadi M. R., Dmitriev S. V.* Energy transfer in strained graphene assisted by discrete breathers excited by external ac driving // *Physical Review B.* – 2017. – Vol. 95, No. 3. – P. 035423.
- Flach S., Gorbach A. V.* Discrete breathers – Advances in theory and applications // *Phys. Rep.* – 2008. – Vol. 467. – P. 1–116.
- Flach S., Willis C. R.* Discrete Breathers // *Phys. Rep.* – 1998. – Vol. 295. – P. 181–264.
- Frazier M. J., Kochmann D. M.* Band gap transmission in periodic bistable mechanical systems // *Journal of Sound and Vibration.* – 2017. – Vol. 388. – P. 315–326.
- Geniet F., Leon J.* Energy transmission in the forbidden band gap of a nonlinear chain // *Physical Review Letters.* – 2002. – Vol. 89, No. 13. – 134102. – P. 1341021–1341024.
- Geniet F., Leon J.* Nonlinear supratransmission // *Journal of Physics Condensed Matter.* – 2003. – Vol. 15, No. 17. – P. 2933–2949.
- Kamdoum Kuitche A., Togueu Motcheyo A. B., Kanaa T., Tchawoua C.* Supratransmission in transversely connected nonlinear pendulum pairs // *Chaos, Solitons and Fractals.* – 2022. – Vol. 160. – P. 112196.

- Kenmogne F., Ndombou G. B., Yemélé D., Fomethe A.* Nonlinear supratransmission in a discrete nonlinear electrical transmission line: Modulated gap peak solitons // *Chaos, Solitons and Fractals*. — 2015. — Vol. 75. — 7616. — P. 263–271.
- Khomeriki R.* Nonlinear Band Gap Transmission in Optical Waveguide Arrays // *Physical Review Letters*. — 2004. — Vol. 92, No. 6. — P. 063905.
- Khomeriki R., Leon J.* Gap soliton dynamics in an optical lattice as a parametrically driven pendulum // *Physical Review A – Atomic, Molecular, and Optical Physics*. — 2009. — Vol. 80, No. 3. — P. 033822.
- Khomeriki R., Lepri S., Ruffo S.* Nonlinear supratransmission and bistability in the Fermi–Pasta–Ulam model // *Physical Review E – Statistical Physics, Plasmas, Fluids, and Related Interdisciplinary Topics*. — 2004. — Vol. 70, No. 6. — P. 7.
- Koon K. T. V., Marquié P., Dinda P. T.* Experimental observation of the generation of cutoff solitons in a discrete LC nonlinear electrical line // *Physical Review E – Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*. — 2014. — Vol. 90, No. 5. — P. 052901.
- Korzniikova E. A. et al.* Equilibration of sinusoidal modulation of temperature in linear and nonlinear chains // *Physical Review E*. — 2020. — Vol. 102, No. 6. — P. 062148.
- Leon J.* Nonlinear supratransmission as a fundamental instability // *Physics Letters, Section A: General, Atomic and Solid State Physics*. — 2003. — Vol. 319, No. 1–2. — P. 130–136.
- Leon J.* Slow-light solitons in two-level media generated by evanescent fields // *Physical Review A – Atomic, Molecular, and Optical Physics*. — 2007. — Vol. 75, No. 6. — P. 063811.
- Leon J., Spire A.* Gap soliton formation by nonlinear supratransmission in Bragg media // *Physics Letters, Section A: General, Atomic and Solid State Physics*. — 2004. — Vol. 327, No. 5–6. — P. 474–480.
- Liu X., Cai G., Wang K. W.* Nonreciprocal wave transmission in metastable modular metastructures utilizing asymmetric dual-threshold snap-through // *Conference on Smart Materials, Adaptive Structures and Intelligent Systems: SMASIS 2019*. — Louisville, 2019. — V001T03A007.
- Macías-Díaz J. E.* Bistability of a two-dimensional Klein–Gordon system as a reliable means to transmit monochromatic waves: A numerical approach // *Physical Review E – Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*. — 2008a. — Vol. 78, No. 5. — P. 056603.
- Macías-Díaz J. E.* Bit propagation in $(2 + 1)$ -dimensional systems of coupled sine-Gordon equations // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. — 2009. — Vol. 14, No. 4. — P. 1025–1031.
- Macías-Díaz J. E.* Nonlinear wave transmission in harmonically driven hamiltonian sine-Gordon regimes with memory effects // *Chaos, Solitons and Fractals*. — 2021. — Vol. 142. — P. 110362.
- Macías-Díaz J. E.* Numerical study of the process of nonlinear supratransmission in Riesz space-fractional sine-Gordon equations // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. — 2017a. — Vol. 46. — P. 89–102.
- Macías-Díaz J. E.* Numerical study of the transmission of energy in discrete arrays of sine-Gordon equations in two space dimensions // *Physical Review E – Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*. — 2008b. — Vol. 77, No. 1. — P. 016602.
- Macías-Díaz J. E.* On the bifurcation of energy in media governed by $(2 + 1)$ -dimensional modified Klein–Gordon equations // *Applied Mathematics and Computation*. — 2008c. — Vol. 206, No. 1. — P. 221–235.
- Macías-Díaz J. E.* On the controlled propagation of wave signals in a sinusoidally forced two-dimensional continuous Frenkel–Kontorova model // *Wave Motion*. — 2011. — Vol. 48, No. 1. — P. 13–23.

- Macías-Díaz J. E.* On the simulation of the energy transmission in the forbidden band-gap of a spatially discrete double sine-Gordon system // *Computer Physics Communications*. — 2010. — Vol. 181, No. 11. — P. 1842–1849.
- Macías-Díaz J. E.* Persistence of nonlinear hysteresis in fractional models of Josephson transmission lines // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. — 2017b. — Vol. 53. — P. 31–43.
- Macías-Díaz J. E., Bountis A.* Nonlinear supratransmission in quartic hamiltonian lattices with globally interacting particles and on-site potentials // *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*. — 2021. — Vol. 16, No. 2. — P. 021001.
- Macías-Díaz J. E., Jerez-Galiano S.* Two finite-difference schemes that preserve the dissipation of energy in a system of modified wave equations // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. — 2010. — Vol. 15, No. 3. — P. 552–563.
- Macías-Díaz J. E., Medina-Ramírez I. E.* Nonlinear supratransmission and nonlinear bistability in a forced linear array of anharmonic oscillators: A computational study // *International Journal of Modern Physics C*. — 2009. — Vol. 20, No. 12. — P. 1911–1923.
- Macías-Díaz J. E., Medina-Ramírez I. E., Puri A.* On the generation of localized nonlinear modes in a linear array of anharmonic oscillators // *International Journal of Modern Physics C*. — 2009. — Vol. 20, No. 8. — P. 1187–1198.
- Macías-Díaz J. E., Puri A.* A numerical method with properties of consistency in the energy domain for a class of dissipative nonlinear wave equations with applications to a Dirichlet boundary-value problem // *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*. — 2008a. — Vol. 88, No. 10. — P. 828–846.
- Macías-Díaz J. E., Puri A.* An application of nonlinear supratransmission to the propagation of binary signals in weakly damped, mechanical systems of coupled oscillators // *Physics Letters, Section A: General, Atomic and Solid State Physics*. — 2007. — Vol. 366, No. 4–5. — P. 447–450.
- Macías-Díaz J. E., Puri A.* An energy-based computational method in the analysis of the transmission of energy in a chain of coupled oscillators // *Journal of Computational and Applied Mathematics*. — 2008b. — Vol. 214, No. 2. — P. 393–405.
- Macías-Díaz J. E., Puri A.* On the transmission of binary bits in discrete Josephson-junction arrays // *Physics Letters, Section A: General, Atomic and Solid State Physics*. — 2008c. — Vol. 372, No. 30. — P. 5004–5010.
- Macías-Díaz J. E., Ruiz-Ramírez J., Flores-Oropeza L. A.* Computational study of the transmission of energy in a two-dimensional lattice with nearest-neighbor interactions // *International Journal of Modern Physics C*. — 2009. — Vol. 20, No. 12. — P. 1933–1943.
- MacKay R. S., Aubry S.* Proof of existence of breathers for time-reversible or Hamiltonian networks of weakly coupled oscillators // *Nonlinearity*. — 1994. — Vol. 7. — P. 1623–1643.
- Malishava M., Khomeriki R.* All-phononic digital transistor on the basis of gap-soliton dynamics in an anharmonic oscillator ladder // *Physical Review Letters*. — 2015. — Vol. 115, No. 10. — P. 104301.
- Mandelik D., Eisenberg H. S., Silberberg Y., Morandott R., Aitchinson J. S.* Band-gap structure of waveguide arrays and excitation of Floquet–Bloch solitons // *Phys. Rev. Lett.* — 2003. — Vol. 90. — P. 253902.
- Manley M. E.* Impact of intrinsic localized modes of atomic motion on materials properties // *Acta Mater.* — 2010. — Vol. 58. — P. 2926–2935.
- Mosquera-Sánchez J. A., De Marqui C.* Dynamics and wave propagation in nonlinear piezoelectric metastructures // *Nonlinear Dynamics*. — 2021. — Vol. 105, No. 4. — P. 2995–3023.
- Ndjomatchoua F. T., Tchawoua C., Kakmeni F. M. M., Le Ru B. P., Tonnang H. E. Z.* Waves transmission and amplification in an al model of microtubules // *Chaos*. — 2016. — Vol. 26, No. 5. — P. 053111.

- Nesterenko V.F., Daraio C., Herbold E.B., Jin S.* Anomalous wave reflection at the interface of two strongly nonlinear granular media // *Phys. Rev. Lett.* — 2005. — Vol. 95. — P. 158702.
- Pechac J.E., Frazier M.J.* Non-reciprocal supratransmission in mechanical lattices with non-local feedback control interactions // *Crystals.* — 2021. — Vol. 11, No. 2. — P. 94.
- Piña-Villalpando L.E., Macías-Díaz J.E., Kurmyshev E.* Nonlinear supratransmission in fractional wave systems // *Journal of Mathematical Chemistry.* — 2019. — Vol. 57, No. 3. — P. 790–811.
- Ruiz-Ramírez J., Macías-Díaz J.E.* On the propagation of binary signals in a two-dimensional nonlinear lattice with nearest-neighbor interactions // *Journal of Nonlinear Mathematical Physics.* — 2010. — Vol. 17, No. 2. — P. 127–136.
- Ryabov D.S. et al.* Delocalized nonlinear vibrational modes of triangular lattices // *Nonlinear Dynamics.* — 2020. — Vol. 102, No. 4. — P. 2793–2810.
- Sato M., Hubbard B.E., Sievers A.T.* Nonlinear energy localization and its manipulation in micromechanical oscillator arrays // *Reviews of Modern Physics.* — 2006. — Vol. 78. — P. 13.
- Savin A.V., Korznikova E.A., Dmitriev S.V.* Plane vibrational modes and localized nonlinear excitations in carbon nanotube bundle // *Journal of Sound and Vibration.* — 2022. — Vol. 520. — P. 116627.
- Shepelev I.A., Chetverikov A.P., Dmitriev S.V., Korznikova E.A.* Shock waves in graphene and boron nitride // *Computational Materials Science.* — 2020. — Vol. 177. — P. 109549.
- Singh M. et al.* Effect of discrete breathers on the specific heat of a nonlinear chain // *Journal of Nonlinear Science.* — 2021. — Vol. 31, No. 1. — P. 12.
- Susantot H.* Boundary driven waveguide arrays: Supratransmission and saddle-node bifurcation // *SIAM Journal on Applied Mathematics.* — 2008. — Vol. 69, No. 1. — P. 111–125.
- Tao F., Chen W., Pan J., Xu W., Du S.* Experimental observation on asymmetric energy flux within the forbidden frequency band in the LC transmission line // *Chaos, Solitons and Fractals.* — 2012a. — Vol. 45, No. 6. — P. 810–814.
- Tao F., Chen W.-Z., Xu W., Du S.-D.* The study of asymmetric energy transmission based on the nonlinear supratransmission // *Wuli Xuebao/Acta Physica Sinica.* — 2012b. — Vol. 61, No. 13. — P. 134103.
- Tchinang Tchameu J.D., Tchawoua C., Togueu Motcheyo A.B.* Nonlinear supratransmission of multibreathers in discrete nonlinear Schrödinger equation with saturable nonlinearities // *Wave Motion.* — 2016. — Vol. 65. — P. 112–118.
- Togueu Motcheyo A.B., Kimura M., Doi Y., Tchawoua C.* Supratransmission in discrete one-dimensional lattices with the cubic–quintic nonlinearity // *Nonlinear Dynamics.* — 2019. — Vol. 95, No. 3. — P. 2461–2468.
- Togueu Motcheyo A.B., Tchawoua C., Siewe Siewe M., Tchinang Tchameu J.D.* Supratransmission phenomenon in a discrete electrical lattice with nonlinear dispersion // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation.* — 2013. — Vol. 18, No. 4. — P. 946–952.
- Togueu Motcheyo A.B., Tchawoua C., Tchinang Tchameu J.D.* Supratransmission induced by waves collisions in a discrete electrical lattice // *Physical Review E – Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics.* — 2013. — Vol. 88, No. 4. — P. 040901.
- Togueu Motcheyo A.B., Tchinang Tchameu J.D., Siewe Siewe M., Tchawoua C.* Homoclinic nonlinear band gap transmission threshold in discrete optical waveguide arrays // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation.* — 2017. — Vol. 50. — P. 29–34.
- Wu Z., Wang K.W.* On the wave propagation analysis and supratransmission prediction of a metastable modular metastructure for non-reciprocal energy transmission // *Journal of Sound and Vibration.* — 2019. — Vol. 458. — P. 389–406.
- Wu Z., Wang K.W.* Supratransmission in a metastable modular metastructure for tunable non-reciprocal wave transmission // *The International Society for Optical Engineering: Proceedings of SPIE.* — Colorado, 2018. — Vol. 10595. — P. 1059514.

- Yousefzadeh B., Phani A. S.* Supratransmission in a disordered nonlinear periodic structure // *Journal of Sound and Vibration*. — 2016. — Vol. 380. — P. 242–266.
- Yu G., Wang X., Tao Z.* Resonant emission of solitons from impurity-induced localized waves in nonlinear lattices // *Physical Review E – Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*. — 2011. — Vol. 83, No. 2. — 026605.
- Zakharov P. V., Korznikova E. A., Dmitriev S. V.* Surface discrete breathers in the Pt₃Al intermetallic alloy // *Materials Physics and Mechanics*. — 2017. — Vol. 33, No. 1. — P. 69–79.
- Zakharov P. V., Starostenkov M. D., Lucenko I. S., Kochkin A. S.* Interaction of a soliton wave with nanopores in stoichiometry crystals A₃B // *Journal of Physics: Conference Series*. — 2020. — Vol. 1697, No. 1. — P. 012076.
- Zhang Q., Fang H., Xu J.* Programmable stopbands and supratransmission effects in a stacked Miura-origami metastructure // *Physical Review E*. — 2020. — Vol. 101, No. 4. — P. 042206.
- Zheng Y., Wu Z., Zhang X., Wang K. W.* A piezo-metastructure with bistable circuit shunts for adaptive nonreciprocal wave transmission // *Smart Materials and Structures*. — 2019. — Vol. 28, No. 4. — P. 045005.
- Zheng Y., Wu Z., Zhang X., Wang K. W.* A piezoelectric metamaterial with bistable circuit shunts for adaptive non-reciprocal elastic wave transmission // *Conference on Smart Materials, Adaptive Structures and Intelligent Systems: SMASIS 2018*. — San Antonio, 2018. — V001T03A003.