КОМПЬЮТЕРНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ И МОДЕЛИРОВАНИЕ 2023 Т. 15 № 3 С. 781–795
DOI: 10.20537/2076-7633-2023-15-3-781-795

УДК: 519.21, 517.955

Связь между дискретными финансовыми моделями и непрерывными моделями с процессами Винера и Пуассона

И. В. Мельникова[a], В. А. Бовкун[b]

Уральский федеральный университет,
Россия, 620075, г. Екатеринбург, просп. Ленина, 51

E-mail: [a] Irina.Melnikova@urfu.ru, [b] Vadim.Bovkun@urfu.ru

Получено 06.02.2023, после доработки — 25.03.2023.
Принято к публикации 26.04.2023.

Работа посвящена исследованию связей между дискретными и непрерывными моделями финансовых процессов и их вероятностных характеристик. Во-первых, установлена связь между процессами цен акций, хеджирующего портфеля и опционов в моделях, обусловленных биномиальными возмущениями и предельными для них возмущениями типа броуновского движения. Во-вторых, указаны аналоги в коэффициентах стохастических уравнений с различными случайными процессами, непрерывными и скачкообразными, и в коэффициентах соответствующих детерминированных уравнений для их вероятностных характеристик.

Изложение результатов исследования связей и нахождения аналогий, полученных в настоящей работе, привело к необходимости адекватного изложения предварительных сведений и результатов из финансовой математики, а также описания связанных с ней объектов стохастического анализа.

В работе частично новые и известные результаты изложены в доступной форме для тех, кто не является специалистом по финансовой математике и стохастическому анализу и кому эти результаты важны с точки зрения приложений. Конкретно, представлены следующие разделы.

• В одно- и n-периодных биномиальных моделях предложен единый подход к определению на вероятностном пространстве риск-нейтральной меры, с которой дисконтированная цена опциона становится мартингалом. Полученная мартингальная формула для цены опциона пригодна для численного моделирования. В следующих разделах подход на основе риск-нейтральных мер применяется для исследования финансовых процессов в моделях непрерывного времени.

• В непрерывном времени рассмотрены модели цены акций, хеджирующего портфеля и опциона в форме стохастических уравнений с интегралом Ито по броуновскому движению и по компенсированному процессу Пуассона. Изучение свойств процессов, являющихся решениями стохастических уравнений, в этом разделе опирается на один из центральных объектов стохастического анализа — формулу Ито, методике применения которой уделено особое внимание.

• Представлена знаменитая формула Блэка – Шоулза, дающая решение уравнения в частных производных для функции $v(t, x)$, которая при подстановке $x = S(t)$, где $S(t)$ — цена акций в момент времени t, дает цену опциона в модели с непрерывным возмущением броуновским движением.

• Предложен аналог формулы Блэка – Шоулза для случая модели со скачкообразным возмущением процессом Пуассона. Вывод этой формулы опирается на технику риск-нейтральных мер и лемму независимости.

Ключевые слова: броуновское движение, процесс Пуассона, биномиальная модель, стохастическое уравнение, дисконтированная цена, мартингал

Работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда № 23–21–00199.

COMPUTER RESEARCH AND MODELING
2023 VOL. 15 NO. 3 P. 781–795
DOI: 10.20537/2076-7633-2023-15-3-781-795

Ки&М

MODELS OF ECONOMIC AND SOCIAL SYSTEMS

UDC: 519.21, 517.955

Connection between discrete financial models and continuous models with Wiener and Poisson processes

I. V. Melnikova[a], V. A. Bovkun[b]

Ural Federal University,
51 Lenina ave., Ekaterinburg, 620075, Russia

E-mail: [a] Irina.Melnikova@urfu.ru, [b] Vadim.Bovkun@urfu.ru

Received 06.02.2023, after completion — 25.03.2023.
Accepted for publication 26.04.2023.

The paper is devoted to the study of relationships between discrete and continuous models financial processes and their probabilistic characteristics. First, a connection is established between the price processes of stocks, hedging portfolio and options in the models conditioned by binomial perturbations and their limit perturbations of the Brownian motion type. Secondly, analogues in the coefficients of stochastic equations with various random processes, continuous and jumpwise, and in the coefficients corresponding deterministic equations for their probabilistic characteristics.

Statement of the results on the connections and finding analogies, obtained in this paper, led to the need for an adequate presentation of preliminary information and results from financial mathematics, as well as descriptions of related objects of stochastic analysis.

In this paper, partially new and known results are presented in an accessible form for those who are not specialists in financial mathematics and stochastic analysis, and for whom these results are important from the point of view of applications. Specifically, the following sections are presented.

• In one- and n-period binomial models, it is proposed a unified approach to determining on the probability space a risk-neutral measure with which the discounted option price becomes a martingale. The resulting martingale formula for the option price is suitable for numerical simulation. In the following sections, the risk-neutral measures approach is applied to study financial processes in continuous-time models.

• In continuous time, models of the price of shares, hedging portfolios and options are considered in the form of stochastic equations with the Ito integral over Brownian motion and over a compensated Poisson process. The study of the properties of these processes in this section is based on one of the central objects of stochastic analysis — the Ito formula. Special attention is given to the methods of its application.

• The famous Black – Scholes formula is presented, which gives a solution to the partial differential equation for the function $v(t, x)$, which, when $x = S(t)$ is substituted, where $S(t)$ is the stock price at the moment time t, gives the price of the option in the model with continuous perturbation by Brownian motion.

• The analogue of the Black – Scholes formula for the case of the model with a jump-like perturbation by the Poisson process is suggested. The derivation of this formula is based on the technique of risk-neutral measures and the independence lemma.

Keywords: Brownian motion, Poisson process, binomial model, stochastic equation, discounted price, martingale

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2023, vol. 15, no. 3, pp. 781–795 (Russian).
This work was supported by Russian Science Foundation, project No. 23–21–00199.

Введение

На протяжении всего периода своего развития мировая финансовая система характеризуется высоким уровнем нестабильности. Экономические диспропорции становятся основной причиной кризисов, которые возникают с определенным постоянством и часто приобретают глобальный характер. Потребность участников финансовых рынков обезопасить себя от таких последствий кризисов, как резкий рост процентной ставки, цепные банкротства, резкое снижение стоимости ценных бумаг, падение курсов национальных валют, привела к возникновению целого научного направления — теории финансов, в основе которой лежит математический аппарат, позволяющий изучать механизмы действия финансовых инструментов и повышения их надежности.

Одним из важнейших финансовых инструментов является опцион — ценная бумага, фиксирующая право его владельца купить (опцион покупки) или продать (опцион продажи) некий актив у лица, выпустившего опцион, по заранее оговоренной цене, зависящей от случайности, через определенный период времени. Доходность опционов определяется колебаниями рыночной цены на продаваемый/покупаемый актив, что влечет серьезные риски. В связи с этим вопрос определения «справедливой цены» опциона является важным для всех участников таких сделок.

В настоящее время существует два основных подхода к ценообразованию опционов. Первый из них основан на расчете хеджирующего (страхующего) портфеля, стоимость которого совпадает со стоимостью опциона. Хеджирующий портфель составляется из базового актива и безрискового актива (например, государственных облигаций или вложений в банк). Второй подход, получивший название риск-нейтрального, основан на построении на вероятностном пространстве новой риск-нейтральной меры, относительно которой случайный процесс цены опциона становится мартингалом.

Цель данной работы: во-первых, получить формулы для цены опциона, а также связанных с ним цен базовых активов и хеджирующего портфеля, допускающие возможность сравнения в биномиальной модели и непрерывных моделях с винеровским процессом и процессом Пуассона; во-вторых, указать аналоги в коэффициентах полученных формул. На этой основе будет проведено исследование уравнений в частных производных и дифференциально-разностных уравнений для вероятностных характеристик изучаемых случайных процессов. Отметим, что для определенности в работе рассматривается цена опциона покупки как в текущий момент времени, что соответствует американскому опциону, так и в начальный момент, что соответствует европейскому опциону.

Актуальность полученных результатов сравнения, с одной стороны, обусловлена тем, что важные для вычислений формулы, полученные в дискретных, в частности биномиальных моделях, широко используются в качестве приближенных в непрерывных моделях (см., например, [Stentoft, 2011]). С другой стороны, сравнение формул для такой важной вероятностной характеристики случайных процессов, как опцион, в непрерывных во времени моделях позволяет оценить роль разных случайных возмущений — непрерывных типа броуновского движения и скачкообразных типа процессов Пуассона. Кроме того, связь между формулами для случайных процессов и их вероятностных характеристик важна для использования в современных численных методах (см., например, [Milshtein, Tretyakov, 2004]).

Связь дискретных и непрерывных моделей цены акций как базового актива. Риск-нейтральные меры

Будем рассматривать дискретные и непрерывные модели, следуя [Shreve, 2019; Shreve, 2004; Allen, 2007; Gardiner, 2009]. Начнем с N-периодной биномиальной модели для базового случайного процесса S_n — цены акций на n-м шаге, $n \leqslant N$, на который и будем рассматривать опцион в качестве деривативa. Биномиальные модели — это такие модели в дискретном времени, когда на каждом шаге происходит одно из двух случайных событий: событие H, означающее повышение цены с повышающим коэффициентом u (up), или событие T, означающее понижение цены с коэффициентом d (down)[1]. Таким образом, для любого фиксированного $t > 0$, согласно tN-периодной модели, цена акции S_{tn} на tn-м шаге, где в качестве tn берется, например, ближайшее целое к tn, определяется следующим образом: $S_{tn} = S_0 u^{H_{tn}} d^{T_{tn}}$. Чтобы определить число повышений H_{tn} и число понижений T_{tn} за период tn, введем набор независимых случайных величин:

$$\chi_i = \chi_i(\omega) = \chi_i(\omega_1, \ldots, \omega_i, \ldots) = \begin{cases} 1, & \text{если } \omega_i = H, \\ -1, & \text{если } \omega_i = T, \end{cases} \qquad i = 1, 2, \ldots,$$

с распределением $P_{\chi_i} = P(\omega\colon \chi_i(\omega) = 1) = P(\omega\colon \chi_i(\omega) = -1) = \frac{1}{2}$, образующих случайные блуждания $M_k(\omega) := \sum_{i=1}^{k} \chi_i(\omega)$, $k = 1, 2, \ldots, M_0 = 0$. Случайные блуждания имеют независимые приращения как суммы соответствующих независимых случайных величин χ_i. Для математического ожидания и дисперсии M_k имеют место равенства

$$\mathbb{E}[M_k] = 0, \quad \mathbb{E}[M_m - M_k] = 0, \quad \mathrm{Var}[M_k] = k, \quad \mathrm{Var}[M_m - M_k] = m - k, \quad m \geqslant k.$$

Отсюда получаем, что последовательность $\{M_k\}$ образует мартингал, то есть $\mathbb{E}_k[M_m] = M_k$, $m \geqslant k$. Все эти свойства случайных блужданий ложатся в основу определения процесса броуновского движения $W(t)$, $t \geqslant 0$, как предельного по распределению от процесса масштабированных случайных блужданий $W_n(t) := \frac{M_{tn}}{\sqrt{n}}$. Из определения M_{tn} получаем $H_{tn} = \frac{1}{2}(tn + M_{tn})$, $T_{tn} = \frac{1}{2}(tn - M_{tn})$. Если теперь для любого фиксированного $t > 0$ в рассматриваемой модели на tn-м шаге повышающий и понижающий коэффициенты взять с учетом ставки банка r и коэффициента σ, отражающего изменчивость (волатильность) процесса, следующим образом:

$$u_n = 1 + \frac{r}{n} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \quad d_n = 1 + \frac{r}{n} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \tag{1}$$

то, используя второй замечательный предел и центральную предельную теорему с независимыми случайными величинами χ_i, получаем, что для любого $t \geqslant 0$ последовательность случайных величин

$$S_n(t) := S_{tn} = S(0)\left(1 + \frac{r}{n} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)^{\frac{1}{2}(tn+M_{tn})} \left(1 + \frac{r}{n} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)^{\frac{1}{2}(tn-M_{tn})}$$

при $n \to \infty$ сходится по распределению к случайной величине

$$S(t) = S(0)e^{\sigma W(t) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t}. \tag{2}$$

В частности, без учета ставки банка, $S_n(t)$ сходятся к $S(t) = S(0)e^{\sigma W(t) - \frac{1}{2}\sigma^2 t}$. Процесс $\{S(t),\ t \geqslant 0\}$ при $r = 0$ называют геометрическим (экономическим) броуновским движением.

По формуле Ито проверяем, что процесс цены акций $\{S(t),\ t \geqslant 0\}$, определяемый по формуле (2), удовлетворяет стохастическому дифференциальному уравнению (СДУ)

$$dS(t) = rS(t)\,dt + \sigma S(t)\,dW(t). \tag{3}$$

Это уравнение, записанное в форме приращений, в рамках стохастического анализа понимают как интегральное уравнение с интегралом Ито по броуновскому движению. В общем случае, когда коэффициент сдвига α и коэффициент волатильности σ зависят от времени, это интегральное

[1] H — от англ. Head, T — от англ. Tail.

уравнение вида

$$S(t) - S(0) = \int_0^t \alpha(s)S(s)\,ds + \int_0^t \sigma(s)S(s)\,dW(s). \tag{4}$$

В дискретной модели стохастическое уравнение (3) аналогично следующей задаче вычисления приращения: $S_{n+1} - S_n = S_n\xi_n - S_n = S_n(\xi_n - 1)$, где случайные величины ξ_n определяются следующим образом: ξ_n берется равной u_n или d_n, определяемым по формуле (1), в зависимости от того, произошло повышение или понижение цены на n-м шаге. При таким образом выбранных ξ_n для приращения цены получаем равенство

$$S_{n+1} - S_n = r_n S_n \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}} S_n, \quad r_n = \frac{r}{n}, \tag{5}$$

где стоят знак «+», если на n-м шаге произошло повышение цены, и знак «−», если произошло понижение. На основе проведенных построений получаем следующий результат сравнения цен акций в биномиальной и непрерывной моделях.

Предложение 1. *Пусть цена акций в непрерывном времени определяется уравнением* (3)*, а в дискретном времени — уравнением* (5)*. Тогда слагаемое $r_n S_n$ — это аналог первого слагаемого в уравнении* (3)*, характеризующего сдвиг в цене акций, а слагаемое $\pm\frac{\sigma}{\sqrt{n}}S_n$, характеризующее изменчивость дискретного процесса, является аналогом слагаемого с броуновским движением.*

Перейдем к уравнениям для важных в финансовой математике процессов $\{X(t),\ 0 \leqslant t \leqslant T\}$ (изменения во времени цены хеджирующего портфеля) и $\{V(t),\ 0 \leqslant t \leqslant T\}$ (изменения цены опциона). Аналогично случаю цены акций рассмотрим для них дискретную и непрерывную модели. В биномиальной N-периодной модели цена хеджирующего портфеля X_{n+1} на $(n+1)$-м шаге, $n + 1 \leqslant N$ (для определенности составляемого для опциона покупки), составляется следующим образом: в момент времени t_n агент покупает акции в количестве Δ_n и вкладывает в банк под ставку банка r_n величину $X_n - \Delta_n S_n$. Тогда в момент t_{n+1} в портфеле получается сумма X_{n+1}, равная по определению хеджирующего портфеля цене опциона V_{n+1}:

$$X_{n+1} = \Delta_n S_{n+1} + (1 + r_n)(X_n - \Delta_n S_n) = V_{n+1}. \tag{6}$$

Полученное равенство можно записать в форме приращений:

$$X_{n+1} - X_n = \Delta_n(S_{n+1} - S_n) + r_n(X_n - \Delta_n S_n). \tag{7}$$

Чтобы, используя эти равенства, в биномиальной N-периодной модели с коэффициентами $u = u(N)$ и $d = d(N)$ и ставкой банка $r = r(N)$ получить формулу для V_n, цены опциона на n-м шаге, которая по определению хеджирующего портфеля равна X_n, вводится риск-нейтральная мера $\widetilde{P} = \widetilde{P}(\widetilde{p}, \widetilde{q})$, определяемая риск-нейтральным равенством[1]:

$$S_n(1 + r) = S_n(H)\widetilde{p} + S_n(T)\widetilde{q}.$$

Вероятности повышения $\widetilde{p}$ и понижения $\widetilde{q}$ определяются риск-нейтральным равенством следующим образом: $\widetilde{p} = \frac{1+r-d}{u-d}$, $\widetilde{q} = \frac{u-(1+r)}{u-d}$, $d < u$.

Нетрудно проверить, при решении уравнения (6) для X_n последовательно на каждом шаге, начиная с известного на последнем шаге закона опциона V_N, для цены опциона V_n на n-м шаге,

[1] Заметим, что, рассматривая предельные соотношения в биномиальных моделях, можно выбирать коэффициенты в зависимости от n, номера шага, или N, количества периодов в модели, и затем стремить к бесконечности n или N соответственно.

равного X_n, получается следующая формула, записываемая в терминах $\widetilde{\mathbb{E}}_n$, условного математического ожидания по мере $\widetilde{P}$:

$$V_n(\omega_1, \ldots, \omega_n) = \frac{1}{(r+1)^{N-n}} \widetilde{\mathbb{E}}_n[V_N](\omega_1, \ldots, \omega_n), \quad n \leqslant N. \tag{8}$$

В частности, имеем $V_0 = \frac{1}{(r+1)^N}\widetilde{\mathbb{E}}_0[V_N] = \frac{1}{(r+1)^N}\widetilde{\mathbb{E}}[V_N]$.

Полученной общей формуле (8) можно придать следующую интерпретацию: во-первых, цена опциона на n-м шаге равна дисконтированному среднему по риск-нейтральной мере от цены опциона на конечном N-м шаге; во-вторых, равенство (8), деленное на $(r+1)^n$, означает, что последовательность дисконтированных цен опциона $\frac{1}{(r+1)^n}V_n$ является мартингалом по риск-нейтральной мере. Как следствие, отсюда получаем эквивалентность существования риск-нейтральной меры и мартингальности дисконтированной цены опциона.

Аналоги дискретных уравнений для цен хеджирующего портфеля и опциона в непрерывных моделях. Мартингальность дисконтированных цен

Теперь переходим к непрерывным моделям для процессов цены хеджирующего портфеля и цены опциона. По аналогии с уравнением (7) для портфеля в биномиальной модели запишем соответствующее уравнение для хеджирующего портфеля в непрерывном времени:

$$dX(t) = \Delta(t)\,dS(t) + r(t)(X(t) - \Delta(t)S(t))\,dt. \tag{9}$$

Подставляя сюда $dS(t)$ из формулы (3), получаем стохастическое уравнение для хеджирующего портфеля:

$$\begin{aligned} dX(t) &= \Delta(t)(\sigma S(t)\,dW(t) + \alpha S(t)\,dt) + r(X(t) - \Delta(t)S(t))\,dt = \\ &= rX(t)\,dt + \Delta(t)(\alpha - r)S(t)\,dt + \Delta(t)\sigma S(t)\,dW(t), \end{aligned} \tag{10}$$

в общем случае с коэффициентами r, α, σ, зависящими от времени. Трем слагаемым во второй строке равенства (10) можно придать следующую экономическую интерпретацию:

- $rX(t)\,dt$ — это средняя ставка доходности портфеля $X(t)$ за время dt при ставке банка r;
- $\Delta(t)(\alpha - r)S(t)\,dt$ — рисковая премия от вложения в акции, которая определяется знаком разности $\alpha - r$;
- $\Delta(t)\sigma S(t)\,dW(t)$ — слагаемое, отражающее волатильность цены портфеля.

Подставим в уравнение (7) выражение для разности $S_{n+1} - S_n$ из (5), полученное через случайную величину ξ_n; тогда приходим к следующему уравнению для цены хеджирующего портфеля:

$$X_{n+1} - X_n = r_n X_n \pm \Delta_n S_n \frac{\sigma}{\sqrt{n}}. \tag{11}$$

В результате проведенных построений получаем соответствие между коэффициентами уравнения для цены хеджирующего портфеля в непрерывном и дискретном времени.

Предложение 2. *Пусть цена хеджирующего портфеля в непрерывном времени определяется уравнением* (10) *при* $\alpha = r$, *а в дискретном времени — уравнением* (11). *Тогда слагаемое* $r_n X_n$ *— это аналог первого слагаемого в уравнении* (10), *характеризующего сдвиг в цене портфеля, а слагаемое* $\pm\Delta_n S_n \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, *характеризующее изменчивость дискретного процесса, является аналогом слагаемого с броуновским движением.*

Далее, для вычисления цены опциона в непрерывной модели, подобно дискретному случаю, понадобится дисконтированная цена портфеля, совпадающая с дисконтированной ценой опциона. В дискретном случае, как видно из формулы (8), дисконтированным на n-м шаге процесс цены делает дробь $\frac{1}{(1+r)^n}$. В непрерывном случае с постоянной ставкой банка r в этой роли служит множитель e^{-rt}. По формуле Ито с функцией $f(t, x) = e^{-rt}x$ находим дифференциалы дисконтированных цен акций и портфеля:

$$d\left(e^{-rt}S(t)\right) = (\alpha - r)e^{-rt}S(t)\,dt + \sigma e^{-rt}S(t)\,dW(t), \tag{12}$$

$$d\left(e^{-rt}X(t)\right) = \Delta(t)(\alpha - r)e^{-rt}S(t)\,dt + \Delta(t)\sigma e^{-rt}S(t)\,dW(t) = \Delta(t)\,d\left(e^{-rt}S(t)\right). \tag{13}$$

Для того чтобы показать мартингальность процесса $e^{-rt}S(t)$ по новой мере, а затем, в силу равенства (13), мартингальность процесса $e^{-rt}X(t)$ и, как следствие, процесса $e^{-rt}V(t)$, проделаем преобразования в формуле (12):

$$d\left(e^{-rt}S(t)\right) = (\alpha - r)e^{-rt}S(t)\,dt + \sigma e^{-rt}S(t)\,dW(t) =$$
$$= \sigma\Theta e^{-rt}S(t)\,dt + \sigma e^{-rt}S(t)\,dW(t) =: \sigma e^{-rt}S(t)\,d\widetilde{W}(t), \quad \Theta := \frac{\alpha - r}{\sigma}.$$

Отсюда

$$d\left(e^{-rt}X(t)\right) = \Delta(t)\,d\left(e^{-rt}S(t)\right) = \Delta(t)\sigma e^{-rt}S(t)\,d\widetilde{W}(t).$$

По теореме Гирсанова [Shreve, 2004, § 5.2.1], такая риск-нейтральная мера, превращающая сумму броуновского движения с некоторым слагаемым в новое броуновское движение, существует. По этой мере приращение дисконтированной цены опциона $e^{-rt}V(t) = e^{-rt}X(t)$, совпадающее с интегралом Ито по новому броуновскому движению, является мартингалом.

Приступаем к вопросу об определении цены опциона на основе стохастического уравнения с переменными коэффициентами, получаемого в непрерывной во времени модели.

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — вероятностное пространство, на котором рассматриваются случайные процессы, изучаемые в непрерывной модели. Учитывая важность введения риск-нейтральной меры и понятия мартингала для получения формулы цены опциона в дискретных моделях, в непрерывной модели задачу ставим следующим образом. Требуется определить $V(t)$ — цену опциона в произвольный момент времени $t \geqslant 0$, в предположении, что на σ-алгебре $\mathcal{F}$ можно задать риск-нейтральную меру $\widetilde{P}$ такую, что уравнение для процесса дисконтированной цены акций, в общем случае с переменными коэффициентами, полученное на пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$:

$$d(D(t)S(t)) = (\alpha(t) - R(t))D(t)S(t)\,dt + \sigma(t)D(t)S(t)\,dW(t), \tag{14}$$

на пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \widetilde{P})$ примет вид

$$d(D(t)S(t)) = \sigma(t)D(t)S(t)\,d\widetilde{W}(t) \iff D(t)S(t) - S(0) = \int_0^t \sigma(u)D(u)S(u)\,d\widetilde{W}(u), \tag{15}$$

где $\widetilde{W}(t)$ определяется равенством

$$d\widetilde{W}(t) = dW(t) + \frac{\alpha(t) - R(t)}{\sigma(t)}\,dt =: dW(t) + \Theta(t)\,dt \tag{16}$$

и является броуновским движением по мере $\widetilde{P}$.

Таким образом, если по новой мере $\widetilde{P}$ процесс $\widetilde{W}(t) := W(t) + \int_0^t \Theta(u)\,du$ будет броуновским движением, а такая мера, по теореме Гирсанова, существует, то из уравнения (14), как и в случае уравнения с постоянными коэффициентами, исчезает слагаемое сдвига, и стохастическое уравнение для дисконтированной цены акций принимает вид (15). В силу мартингальности интеграла по броуновскому движению отсюда следует мартингальность дисконтированной цены акций. Из мартингальности дисконтированной цены акций и пропорциональности с дисконтированной ценой портфеля (13), совпадающей с дисконтированной ценой опциона, получаем мартингальность дисконтированной цены опциона, которая в данном случае означает следующее равенство:

$$D(s)V(s) = \widetilde{\mathbb{E}}[D(t)V(t) \mid \mathcal{F}_s], \quad 0 \leqslant s \leqslant t.$$

В частности,

$$D(t)V(t) = \widetilde{\mathbb{E}}[D(T)V(T) \mid \mathcal{F}_t], \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{17}$$

Полученное для дисконтированной цены опциона равенство (17) является аналогом равенства (8) в дискретной модели.

Покажем, что наряду с использованием формулы (17), практически реализовать которую в общем случае непросто, можно получить и решать уравнение для вероятностных характеристик случайных процессов, моделируемых под воздействием броуновского движения, полученного в результате предельного перехода от случайных блужданий.

Связь между стохастическими уравнениями и УрЧП для вероятностных характеристик случайных процессов

Исследование обозначенной в заголовке связи мотивируется, с одной стороны, возможностью нахождения важных вероятностных характеристик решений СДУ, с другой — возможностью численного решения УрЧП. Для того чтобы получить уравнение для вероятностных характеристик стохастического процесса цены опциона, покажем важный для этой цели факт, что цена опциона $V(t)$ в произвольный момент времени t зависит только от t и от $S(t)$. Обозначив эту зависимость функцией $v = v(t, S(t))$, получаем равенство $V(t) = v(t, S(t))$. Другими словами, покажем существование такой функции $v = v(t, x)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, $x \in \mathbb{R}$, что, подставляя $x = S(t)$, получаем $v(t, S(t)) = V(t)$. Покажем этот факт для случая цены опциона покупки $V(t)$, который мы для определенности рассматриваем на протяжении всей работы. Из доказательства будет видно, что для опциона продажи это тоже верно.

В непрерывном времени аналогом формулы (8) для европейского опциона покупки является формула

$$V(t) = \widetilde{\mathbb{E}}\left[e^{-r(T-t)}(S(T) - K)_+ \mid \mathcal{F}_t\right], \quad t \in [0, T]. \tag{18}$$

Учитывая, что $S(t)$, $t \in [0, T]$, будучи решением стохастического уравнения, является марковским процессом (см., например, [Applebaum, 2009, § 6.4.2]), получаем, что выражение в формуле (18) справа и, следовательно, цена опциона $V(t)$ зависят от t, то есть существует функция v такая, что $V(t) = v(t, S(t))$. Теперь, показав, что цена опциона в непрерывном времени является функцией, зависящей только от двух аргументов — t и $S(t)$, переходим к ее определению. Запишем по формуле Ито дифференциал от функции $v = v(t, S(t))$:

$$\begin{aligned} dv(t, S(t)) &= v_t(t, S(t))\,dt + v_x(t, S(t))\,dS(t) + \frac{1}{2}v_{xx}(t, S(t))\,dS(t)\,dS(t) = \\ &= v_t(t, S(t))\,dt + v_x(t, S(t))(\alpha S(t)\,dt + \sigma S(t)\,dW(t)) + \frac{1}{2}v_{xx}(t, S(t))\sigma^2 S^2(t)\,dt = \\ &= \left[v_t(t, S(t)) + \alpha S(t)v_x(t, S(t)) + \frac{\sigma^2}{2}S^2(t)v_{xx}(t, S(t))\right]dt + \sigma S(t)v_x(t, S(t))\,dW(t). \end{aligned}$$

Таким образом, получили стохастическое уравнение для $v(t, S(t))$. Имея это уравнение для $v(t, S(t))$, используем формулу Ито еще раз и найдем дифференциал от дисконтированной цены опциона $e^{-rt}v(t, S(t))$:

$$d\left(e^{-rt}v(t, S(t))\right) = -re^{-rt}v(t, S(t))\,dt + e^{-rt}\,dv(t, S(t)) = e^{-rt}\sigma S(t)v_x(t, S(t))\,dW(t) +$$
$$+ e^{-rt}\left[-rv(t, S(t)) + v_t(t, S(t)) + \alpha S(t)v_x(t, S(t)) + \frac{\sigma^2}{2}S^2(t)v_{xx}(t, S(t))\right]dt. \quad (19)$$

По определению хеджирующего портфеля $X(t)$, для него должно выполняться равенство

$$X(t) = v(t, S(t)) \implies d\left(e^{-rt}X(t)\right) = d\left(e^{-rt}v(t, S(t))\right). \quad (20)$$

Сравним полученное ранее уравнение (13) для дисконтированной цены хеджирующего портфеля:

$$d\left(e^{-rt}X(t)\right) = \Delta(t)(\alpha - r)e^{-rt}S(t)\,dt + \Delta(t)\sigma e^{-rt}S(t)\,dW(t)$$

с уравнением (19) для дисконтированной цены опциона. Учитывая (20), получаем равенство

$$\Delta(t)(\alpha - r)e^{-rt}S(t)\,dt + \Delta(t)\sigma e^{-rt}S(t)\,dW(t) = e^{-rt}\bigg[-rv(t, S(t)) + v_t(t, S(t)) +$$
$$+ \alpha S(t)v_x(t, S(t)) + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2(t)v_{xx}(t, S(t))\bigg]dt + e^{-rt}\sigma S(t)v_x(t, S(t))\,dW(t). \quad (21)$$

Рассмотрим условия на $v(t, S(t))$, при которых будет выполняться полученное равенство (21). Сначала приравняем коэффициенты при $dW(t)$, получим равенство

$$\Delta(t) = v_x(t, S(t)), \quad t \in [0, T), \quad (22)$$

которое является предельным аналогом равенства $\Delta_n = \frac{V_n(H)-V_n(T)}{S_n(H)-S_n(T)}$, получаемого для Δ_n в биномиальной модели с использованием обозначений $V_n(H) = V_n(\omega_1, \ldots, \omega_{n-1}, H)$. Теперь, учитывая равенство (22), приравниваем dt-слагаемые:

$$(\alpha - r)e^{-rt}S(t)v_x(t, S(t)) = -re^{-rt}v(t, S(t)) + e^{-rt}v_t(t, S(t)) +$$
$$+ e^{-rt}\alpha S(t)v_x(t, S(t)) + e^{-rt}\frac{1}{2}\sigma^2 S^2(t)v_{xx}(t, S(t)).$$

Сокращая слагаемые $e^{-rt}\alpha S(t)v_x(t, S(t))$, получаем уравнение для $v(t, S(t))$:

$$v_t(t, S(t)) = rv(t, S(t)) - rS(t)v_x(t, S(t)) - \frac{1}{2}\sigma^2 S^2(t)v_{xx}(t, S(t)),$$

которое должно выполняться для всех t от нуля до времени T исполнения опциона. Таким образом, чтобы найти $v(t, S(t))$, мы приходим к необходимости решать уравнение в частных производных, называемое уравнением Блэка – Шоулза:

$$v_t(t, x) = rv(t, x) - rxv_x(t, x) - \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 v_{xx}(t, x), \quad t \in [0, T), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (23)$$

с терминальным условием, задаваемым опционом покупки: $v(T, x) = (x - K)_+$.

Результаты настоящего раздела можно резюмировать следующим образом. Отправляясь от стохастического уравнения для цены акций $S(t)$, $t \in [0, T]$, мы получили уравнение в частных производных (23) с условием при $t = T$ для функции $v = v(t, x)$ такой, что $v(t, S(t))$ — это цена опциона в момент времени t при цене акций $S(t)$.

Отметим, во-первых, что полученная финальная задача является корректной, так как заменой переменной $\tau = T - t$ ее можно свести к задаче Коши для уравнения параболического типа; во-вторых, что современные численные методы решения таких задач основаны на взаимосвязи между стохастическими задачами для случайных процессов и задачами для вероятностных характеристик этих процессов [Milshtein, Tretyakov, 2004]. Кроме того, эта взаимосвязь активно используется при построении различных моделей, основанных на статистических данных [Allen, 2007, гл. 5], и при исследовании стохастических задач полугрупповыми методами (см., например, [Мельникова, Алексеева, Бовкун, 2021; Applebaum, 2009, гл. 3, 6]).

Решение полученной финальной задачи с постоянными коэффициентами — знаменитая формула Блэка – Шоулза — была получена с использованием леммы независимости (см., например, [Shreve, 2004, § 2.3]) и мартингальности дисконтированного процесса цены опциона. Мы приведем эту формулу в конце работы, сравнивая ее с формулой, которую получим для процессов со скачками.

Теперь, учитывая указанные аналогии между непрерывными моделями с броуновским движением и дискретными моделями, более коротко рассмотрим уравнения для процессов со скачками. Укажем аналоги в коэффициентах СДУ, построенных с учетом случайных возмущений типа броуновского движения и процесса Пуассона.

Связь между коэффициентами СДУ со случайными процессами Пуассона и броуновского движения

Подобно тому как в моделях с непрерывными случайными процессами базовым является броуновское движение, процесс Пуассона является базовым для процессов, содержащих скачки. Для определения (простого) процесса Пуассона вводится последовательность $\tau_1, \tau_2, \ldots$ независимых случайных одинаково распределенных экспоненциальных случайных величин. Процесс Пуассона $N = \{N(t),\ t \geqslant 0\}$ — это процесс, считающий количество скачков, которые произошли к моменту времени t, с учетом скачков, случившихся в моменты времени $\tau_1, \tau_2, \ldots$ В силу свойств случайных величин τ_k ожидаемое время между скачками в среднем можно определить числом $\frac{1}{\lambda}$, где чем больше λ, тем меньше времени приходится ждать наступления очередного события. Поэтому λ характеризует интенсивность событий, и среднее значение количества скачков в единицу времени равно λ. В этом случае говорят, что процесс N имеет интенсивность λ. В терминах интенсивности процесс Пуассона при каждом фиксированном $t \geqslant 0$ имеет следующее распределение: $P(N(t) = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$, $k \in \mathbb{N}_0$. Для математического ожидания и вариации процесса Пуассона имеют место равенства

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} = \lambda t, \quad \mathrm{Var}[N(t)] = \lambda t.$$

Отсюда следует $\mathbb{E}[N(t) - N(s)] = \mathrm{Var}[N(t) - N(s)] = \lambda(t - s)$, то есть приращения процесса Пуассона стационарны и, подобно случаю броуновского движения, приращения процесса Пуассона по непересекающимся промежуткам независимы.

В отличие от процесса броуновского движения, обладающего непрерывными траекториями, скачкообразный процесс Пуассона не обладает свойством мартингальности, однако, как нетрудно проверить, компенсированный процесс Пуассона $M(t) = N(t) - \lambda t$, $t \geqslant 0$, является мартингалом. Подобно интегралу Ито по броуновскому движению, по мартингалу $M(t)$ строится интеграл Ито, который в случае процессов со скачками составляет важную часть стохастических уравнений. С учетом определения интеграла Ито по процессу $M(t)$, по аналогии с уравнением для цены акций в случае броуновского движения:

$$dS(t) = \alpha S(t)\, dt + \sigma S(t)\, dW(t), \tag{24}$$

определяем стохастическое уравнение цены акций с компенсированным процессом Пуассона $M(t)$ в качестве скачкообразного (непрерывного справа) возмущения:

$$dS(t) = \alpha S(t)\,dt + \sigma S(t-)\,dM(t), \tag{25}$$

в общем случае с переменными коэффициентами $\alpha = \alpha(t)$ и $\sigma = \sigma(t)$. В уравнении (25) $S(t-)$ означает предел слева процесса S в точке t.

В случае процесса Пуассона, используя формулу Ито для процессов X со скачками (см., например, [Мельникова, Алексеева, Бовкун, 2021; Applebaum, 2009, § 4.4]):

$$f(X(t)) - f(X(0)) = \int\limits_0^t f'(X(s))\,dX_c(s) + \frac{1}{2}\int\limits_0^t f''(X(s))\,dX_c(s)\,dX_c(s) + \sum_{0<s\leqslant t}(f(X(s)) - f(X(s-))), \tag{26}$$

как и в случае броуновского движения с функцией $f(x) = e^x$, получаем, что процесс, определяемый формулой

$$S(t) = S(0)e^{N(t)\ln(\sigma+1)+(\alpha-\lambda\sigma)t}, \quad t \geqslant 0, \tag{27}$$

удовлетворяет уравнению (25). Сравнение процесса

$$S(t) = S(0)e^{\sigma W(t)+\left(\alpha-\frac{1}{2}\sigma^2\right)t}, \quad t \geqslant 0, \tag{28}$$

являющегося решением уравнения с броуновским движением, с процессом (27) позволяет установить следующие аналогии в коэффициентах решений.

Предложение 3. *Пусть цена акций в модели с броуновским движением определяется формулой* (28)*, а в модели с процессом Пуассона — формулой* (27)*. Тогда в обоих случаях при слагаемых со случайностью стоят коэффициенты, зависящие от волатильности σ. При этом в формуле* (28) *при броуновском движении стоит коэффициент σ, а в формуле* (27) *при пуассоновском процессе — коэффициент* $\ln(\sigma + 1)$*. Слагаемое, характеризующее сдвиг в формуле* (28)*, содержит выражение $\frac{1}{2}\sigma^2$, а в формуле* (27) *вместо него стоит выражение $\lambda\sigma$, учитывающее наряду с коэффициентом волатильности σ еще и интенсивность процесса Пуассона.*

Далее для нахождения формулы стоимости хеджирующего портфеля в случае модели с процессом Пуассона мы используем аналогию между уравнениями, в которых учитываются случайности в форме броуновского движения и в форме процесса Пуассона. В случае броуновского движения цена портфеля определяется равенством (9), которое после подстановки $dS(t)$ по формуле (24) принимает вид (10).

Запишем соответствующее равенству (9) равенство для случая процесса Пуассона, где вместо $\Delta(t)$ будем использовать обозначение $\Gamma(t)$ и учитывать возможность скачка:

$$dX(t) = r(X(t) - \Gamma(t)S(t))\,dt + \Gamma(t-)\,dS(t). \tag{29}$$

Подставим в уравнение (29) дифференциал $dS(t)$, определяемый формулой (25). Получаем

$$dX(t) = [rX(t) + S(t)(\alpha\Gamma(t-) - r\Gamma(t))]\,dt + \Gamma(t-)\sigma S(t-)\,dM(t). \tag{30}$$

Предложение 4. *Пусть цена хеджирующего портфеля в модели с броуновским движением определяется уравнением* (10)*, а в модели с процессом Пуассона — уравнением* (30)*. Тогда между этими уравнениями можно провести практически полную аналогию*: *в каждом из этих уравнений содержатся слагаемое, отвечающее за сдвиг процесса, и слагаемое с дифференциалом по соответствующему мартингалу W или M. Возможность скачка в процессе, который* *определяется уравнением* (30)*, обусловлена наличием процессов* S *и* Γ*, которые могут иметь разрывы в силу определения процесса* M*, отражающего скачки процесса Пуассона.*

Теперь, имея уравнение для цены хеджирующего портфеля $\{X(t),\ t \geqslant 0\}$ в случае процесса Пуассона, переходим к определению процесса цены опциона $V = \{V(t),\ t \geqslant 0\}$, совпадающего с процессом цены хеджирующего портфеля. Как и в случае броуновского движения, для определенности будем вычислять цену европейского опциона покупки в момент времени $t \in [0, T)$, для которого в конечный момент времени T выполняется закон $V(T) = (S(T) - K)_+$.

Исследование цены опциона для случая, когда возмущение в модели цены акций определяется процессом Пуассона, проведем с использованием указанной аналогии со случаем броуновского движения. В рассмотренных нами непрерывных моделях с броуновским движением для вычисления цены опциона было важно ввести риск-нейтральную меру, по которой (подобно дискретным моделям) дисконтированная цена хеджирующего портфеля и, следовательно, дисконтированная цена опциона становятся мартингалами. Это свойство мартингальности дисконтированной цены опциона по риск-нейтральной мере в случае броуновского движения позволило получить для цены опциона знаменитую формулу Блэка – Шоулза. Покажем, что и в случае скачкообразных процессов введение риск-нейтральной меры позволит получить формулу для цены опциона.

В непрерывных моделях с броуновским движением на пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ риск-нейтральная мера $\widetilde{P}$ по мере P определяется с помощью теоремы Гирсанова следующим образом:

$$\widetilde{P}(A) = \int\limits_A Z(\omega)\, dP(\omega), \quad A \in \mathcal{F}, \tag{31}$$

где случайную величину Z следует выбирать по формуле $Z = e^{-\Theta(T)W(T) - \frac{1}{2}\Theta^2(T)}$ с процессом Θ, характеризующим, по формуле (16), новое броуновское движение $\widetilde{W}$. Теорема Гирсанова имеет место и для процессов Пуассона. В этом случае Z определяется равенством $Z = e^{(\lambda - \widetilde{\lambda})T}\left(\frac{\widetilde{\lambda}}{\lambda}\right)^{N(T)}$, где $\widetilde{\lambda} = \lambda - \frac{\alpha - r}{\sigma}$ — интенсивность нового процесса Пуассона $\widetilde{N}$, который получается после замены меры на риск-нейтральную. При этом из условия положительности параметра интенсивности получаем условие на интенсивность λ, обеспечивающее существование риск-нейтральной меры: $\widetilde{\lambda} = \lambda - \frac{\alpha - r}{\sigma} > 0 \Longrightarrow \lambda > \frac{\alpha - r}{\sigma}$.

В заключительно параграфе, используя замену меры на риск-нейтральную, мы покажем, что в случае процессов Пуассона для вероятностных характеристик получаются не УрЧП, а дифференциально-разностные уравнения. И те и другие уравнения образуют подклассы во множестве более общих псевдодифференциальных уравнений. В частности, будет получено уравнение для цены опциона.

Дифференциально-разностные уравнения для вероятностных характеристик процессов со скачками

Из свойств процесса Пуассона следует, что компенсированный процесс Пуассона $M(t) = N(t) - \lambda t$ по исходной мере P является мартингалом, и процесс $\widetilde{M}(t) = \widetilde{N}(t) - \widetilde{\lambda} t$ по риск-нейтральной мере $\widetilde{P}$ также является мартингалом. Подобно тому как было сделано в случае возмущения броуновским движением, используем этот факт для получения формулы цены опциона в случае возмущения цены акций процессом Пуассона на пространстве с риск-нейтральной мерой.

Имея уравнение (25), найдем такую риск-нейтральную меру $\widetilde{P}$, чтобы цена акций на пространстве с этой мерой удовлетворяла уравнению

$$dS(t) = rS(t)\, dt + \sigma S(t-)\, d\widetilde{M}(t).$$

Тогда для дисконтированной цены акций, используя формулу Ито, как и в случае броуновского движения, получаем уравнение $d(e^{-rt}S(t)) = \sigma e^{-rt}S(t-)\,d\widetilde{M}(t)$. Дисконтированная цена акций по риск-нейтральной мере $\widetilde{P}$ является мартингалом, так как она равна интегралу Ито по мартингалу $\widetilde{M}(t) = \widetilde{N}(t) - \widetilde{\lambda}t$.

Теперь в терминах новой интенсивности $\widetilde{\lambda}$ на пространстве с риск-нейтральной мерой формула для цены акций (27) с коэффициентом α, равным ставке банка r, принимает следующий вид:

$$S(t) = S(0)e^{(r-\widetilde{\lambda}\sigma)t}(\sigma+1)^{\widetilde{N}(t)}. \tag{32}$$

По правилу хеджирующего портфеля X, в каждый момент времени он равен значению опциона: $X(t) = v(t,\, S(t))$, $t \geqslant 0$. Тогда для дисконтированных цен портфеля и опциона имеет место равенство

$$e^{-rt}X(t) = e^{-rt}v(t,\, S(t)).$$

Теперь, так же как это было сделано для случая непрерывной модели с броуновским движением, запишем и сравним дифференциалы этих величин:

$$\begin{aligned} d\left(e^{-rt}X(t)\right) &= e^{-rt}(\Gamma(t-)\,dS(t) - r\Gamma(t)S(t)\,dt) = e^{-rt}\sigma\Gamma(t-)S(t-)\,d\widetilde{M}(t),\\ d\left(e^{-rt}v(t,\, S(t))\right) &= e^{-rt}(v(t,\, (\sigma+1)S(t-)) - v(t,\, S(t-)))\,d\widetilde{M}(t). \end{aligned} \tag{33}$$

Сравнивая полученные формулы, можно видеть, что для их равенства следует положить

$$\Gamma(t-) = \frac{v(t,\, (\sigma+1)S(t-)) - v(t,\, S(t-))}{\sigma S(t-)}. \tag{34}$$

В числителе дроби (34) стоит приращение функции $v = v(t,\, x)$ по второму аргументу, а в знаменателе стоит приращение второго аргумента. В пределе при стремлении к нулю приращения второго аргумента это дает частную производную $v'_x(t,\, x)$, поэтому полученную формулу (34) можно считать аналогом равенства (22).

Как следует из равенства (33), дисконтированная цена портфеля по риск-нейтральной мере является мартингалом, тогда и равная ей дисконтированная цена опциона $e^{-rt}V(t)$ по риск-нейтральной мере тоже является мартингалом. Это означает, что для цены европейского опциона покупки имеет место равенство

$$e^{-rt}V(t) = \widetilde{\mathbb{E}}[e^{-rT}V(T) \mid \mathcal{F}_t] = \widetilde{\mathbb{E}}[e^{-rT}(S(T) - K)_+ \mid \mathcal{F}_t]. \tag{35}$$

Запишем цену акций $S(t)$, полученную в формуле (32), в момент времени $t = T$ следующим образом:

$$S(T) = S(0)e^{(r-\widetilde{\lambda}\sigma)t}(\sigma+1)^{\widetilde{N}(t)} \cdot e^{(r-\widetilde{\lambda}\sigma)(T-t)}(\sigma+1)^{\widetilde{N}(T)-\widetilde{N}(t)}.$$

Множитель $S(0)e^{(r-\widetilde{\lambda}\sigma)t}(\sigma+1)^{\widetilde{N}(t)}$ в полученном равенстве — это в точности $S(t)$, поэтому имеем представление $S(T)$ через $S(t)$:

$$S(T) = S(t)e^{(r-\widetilde{\lambda}\sigma)(T-t)}(\sigma+1)^{\widetilde{N}(T)-\widetilde{N}(t)}.$$

Подставим $S(T)$ в равенство (35), получим

$$V(t) = \widetilde{\mathbb{E}}\left[e^{-r(T-t)}(S(T) - K)_+ \;\middle|\; \mathcal{F}_t\right] = \widetilde{\mathbb{E}}\left[e^{-r(T-t)}\left(S(t)e^{(r-\widetilde{\lambda}\sigma)(T-t)}(\sigma+1)^{\widetilde{N}(T)-\widetilde{N}(t)} - K\right)_+ \;\middle|\; \mathcal{F}_t\right].$$

В полученном равенстве случайная величина $S(t)$ является $\mathcal{F}_t$-измеримой, а величина

$$e^{(r-\widetilde{\lambda}\sigma)(T-t)}(\sigma+1)^{\widetilde{N}(T)-\widetilde{N}(t)}$$

не зависит от $\mathcal{F}_t$. Поэтому можно использовать лемму независимости и тот факт, что цена опциона в момент времени t зависит только от t и от цены акций в этот же момент времени. Таким образом, получаем $V(t) = v(t, S(t))$, где

$$v(t, x) = \widetilde{\mathbb{E}}\left[e^{-r(T-t)}\left(xe^{(r-\widetilde{\lambda}\sigma)(T-t)}(\sigma+1)^{\widetilde{N}(T)-\widetilde{N}(t)} - K\right)_+\right].$$

Из этого равенства, учитывая закон распределения случайной величины $\widetilde{N}(T) - \widetilde{N}(t)$ (по риск-нейтральной мере), получаем равенство

$$v(t, x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\widetilde{\lambda}^j (T-t)^j}{j!} e^{-\widetilde{\lambda}(T-t)}\left(xe^{-\widetilde{\lambda}\sigma(T-t)}(\sigma+1)^j - Ke^{-r(T-t)}\right)_+. \tag{36}$$

Подобно проверке в случае возмущения броуновским движением, убеждаемся в том, что найденная функция удовлетворяет следующему уравнению:

$$rv(t, x) = v_t(t, x) + (r - \widetilde{\lambda}\sigma)xv_x(t, x) + \widetilde{\lambda}(v(t, (\sigma+1)x) - v(t, x)), \quad t \in [0, T), \quad x > 0. \tag{37}$$

Уравнение (37) для функции $v(t, x)$, определяемой формулой (36), получено благодаря тому, что $e^{-rt}v(t, S(t))$ является мартингалом по риск-нейтральной мере $\widetilde{P}$. Равенство (37) показывает, что в случае процесса Пуассона полученное уравнение для цены опциона — это дифференциально-разностное уравнение. Здесь вместо слагаемого с производной второго порядка в случае броуновского движения уравнение (37) включает в себя значение функции v при двух разных аргументах x и $(\sigma + 1)x$ соответственно.

Представим полученные результаты для цены опциона в модели непрерывного времени с процессом Пуассона в сравнении с формулой Блэка – Шоулза в случае модели с броуновским движением в таблице 1.

Таблица 1. Формулы для цены опциона в непрерывных моделях с процессами Винера и Пуассона

Цена опциона в модели с винеровским процессом
$V(t) = \widetilde{\mathbb{E}}\left[e^{-r\tau}\left(S(t)e^{(\sigma(\widetilde{W}(T)-\widetilde{W}(t))+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\tau)} - K\right)_+ \Big\vert\, \mathcal{F}_t\right]$; $v(t, x) = x\mathfrak{N}(d_+(\tau, x)) - Ke^{-r\tau}\mathfrak{N}(d_-(\tau, x))$, где $\tau = T - t$, $\mathfrak{N}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-y}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz$, $d_\pm(\tau, x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}}\left(\ln\frac{x}{K} + \left(r \pm \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau\right)$
Цена опциона в модели с процессом Пуассона
$V(t) = \widetilde{\mathbb{E}}\left[e^{-r\tau}\left(S(t)e^{(r-\widetilde{\lambda}\sigma)\tau}(\sigma+1)^{\widetilde{N}(T)-\widetilde{N}(t)} - K\right)_+ \Big\vert\, \mathcal{F}_t\right]$; $v(t, x) = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{\widetilde{\lambda}^j\tau^j}{j!}e^{-\widetilde{\lambda}\sigma\tau}\left(xe^{-\widetilde{\lambda}\sigma\tau}(\sigma+1)^j - Ke^{-r\tau}\right)_+$

Заключение

В данной работе получены следующие результаты, важные как с точки зрения совершенствования моделей финансовой математики, так и для их численной реализации.

1. Указаны аналоги коэффициентов уравнений для цены акций и цены хеджирующего портфеля, полученных в биномиальной модели и непрерывной модели с броуновским движением.

2. Проведены аналогии между формулами для цены акций и уравнениями для хеджирующего портфеля в непрерывной модели с винеровским процессом и непрерывной модели с процессом Пуассона.

3. Установлены аналогии между коэффициентами уравнения для цены опциона, определяемой в непрерывной модели с винеровским процессом, и уравнения для цены опциона в непрерывной модели с процессом Пуассона. На основе указанных аналогий установлена связь между структурами формул для цены опциона в этих моделях.

Список литературы (References)

Мельникова И. В., Алексеева У. А., Бовкун В. А. Уравнения, связанные со случайными процессами: полугрупповой подход и преобразование Фурье // Современная математика. Фундаментальные направления. — 2021. — Т. 67, № 2. — С. 324–348.

Melnikova I. V., Alekseeva U. A., Bovkun V. A. Uravneniya, svyazannyye so sluchaynymi protsessami: polugruppovoy podkhod i preobrazovaniye Fur'ye [Equations related to stochastic processes: semigroup approach and Fourier transform] // Sovremennaya matematika. Fundamental'nyye napravleniya. — 2021. — Vol. 67, No. 2. — P. 324–348 (in Russian).

Allen E. Modeling with Ito stochastic differential equations. — New York: Springer Science & Business Media B. V., 2007. — 230 p.

Applebaum D. Levy processes and stochastic calculus. — Cambridge: Cambridge University Press, 2009. — 492 p.

Gardiner C. Stochastic methods. A handbook for the natural and social sciences. — Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2009. — 447 p.

Milshtein G. N., Tretyakov M. V. Stochastic numerics for mathematical physics. — Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2004. — 596 p.

Shreve S. E. Stochastic calculus for finance I: The binomial asset pricing model. — New York: Springer-Verlag, 2019. — 187 p.

Shreve S. E. Stochastic calculus for finance II: Continuous-time models. — New York: Springer Science & Business Media, 2004. — 550 p.

Stentoft L. American option pricing with discrete and continuous time models: An empirical comparison // Journal of Empirical Finance. — 2011. — Vol. 18, No. 5.— P. 880–902.