

УДК: 519.8(075)

Использование функций обратных связей для решения задач параметрического программирования

А. Е. Умнов^а, Е. А. Умнов

Московский физико-технический институт (Национальный исследовательский университет),
Россия, 141700, Московская область, г. Долгопрудный, Институтский пер., д. 9

E-mail: ^а mail@umnov.ru

Получено 17.06.2023, после доработки — 25.07.2023.

Принято к публикации 18.08.2023.

Рассматривается конечномерная оптимизационная задача, постановка которой, помимо искомым переменных, содержит параметры. Ее решение есть зависимость оптимальных значений переменных от параметров. В общем случае такие зависимости не являются функциями, поскольку могут быть неоднозначными, а в функциональном случае — быть недифференцируемыми. Кроме того, область их существования может оказаться уже области определения функций в условии задачи. Эти свойства затрудняют решение как исходной задачи, так и задач, в постановку которых входят данные зависимости. Для преодоления этих затруднений обычно применяются методы типа недифференцируемой оптимизации.

В статье предлагается альтернативный подход, позволяющий получать решения параметрических задач в форме, лишенной указанных свойств. Показывается, что такие представления могут исследоваться стандартными алгоритмами, основанными на формуле Тейлора. Данная форма есть функция, гладко аппроксимирующая решение исходной задачи. При этом величина погрешности аппроксимации регулируется специальным параметром. Предлагаемые аппроксимации строятся с помощью специальных функций, устанавливающих обратные связи между переменными и множителями Лагранжа. Приводится краткое описание этого метода для линейных задач с последующим обобщением на нелинейный случай.

Построение аппроксимации сводится к отысканию седловой точки модифицированной функции Лагранжа исходной задачи. Показывается, что необходимые условия существования такой седловой точки подобны условиям теоремы Каруша–Куна–Таккера, но не содержат в явном виде ограничений типа неравенств и условий дополняющей нежесткости. Эти необходимые условия аппроксимацию определяют неявным образом. Поэтому для вычисления ее дифференциальных характеристик используется теорема о неявных функциях. Эта же теорема применяется для уменьшения погрешности аппроксимации.

Особенности практической реализации метода функций обратных связей, включая оценки скорости сходимости к точному решению, демонстрируются для нескольких конкретных классов параметрических оптимизационных задач. Конкретно: рассматриваются задачи поиска глобального экстремума функций многих переменных и задачи на кратный экстремум (максимин-минимакс). Также рассмотрены оптимизационные задачи, возникающие при использовании многокритериальных математических моделей. Для каждого из этих классов приводятся демонстрационные примеры.

Ключевые слова: задача нелинейного программирования с параметрами, функция обратных связей, модифицированная функция Лагранжа, поиск глобального экстремума, минимакс, многокритериальная модель

UDC: 519.8(075)

Using feedback functions to solve parametric programming problems

A. E. Umnov^a, E. A. Umnov

Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University),
9 Institutskiy per., Dolgoprudny, Moscow region, 141700, Russia

E-mail: ^a mail@umnov.ru

Received 17.06.2023, after completion — 25.07.2023.

Accepted for publication 18.08.2023.

We consider a finite-dimensional optimization problem, the formulation of which in addition to the required variables contains parameters. The solution to this problem is a dependence of optimal values of variables on parameters. In general, these dependencies are not functions because they can have ambiguous meanings and in the functional case be non-differentiable. In addition, their domain of definition may be narrower than the domains of definition of functions in the condition of the original problem. All these properties make it difficult to solve both the original parametric problem and other tasks, the statement of which includes these dependencies. To overcome these difficulties, usually methods such as non-differentiable optimization are used.

This article proposes an alternative approach that makes it possible to obtain solutions to parametric problems in a form devoid of the specified properties. It is shown that such representations can be explored using standard algorithms, based on the Taylor formula. This form is a function smoothly approximating the solution of the original problem for any parameter values, specified in its statement. In this case, the value of the approximation error is controlled by a special parameter. Construction of proposed approximations is performed using special functions that establish feedback (within optimality conditions for the original problem) between variables and Lagrange multipliers. This method is described for linear problems with subsequent generalization to the nonlinear case.

From a computational point of view the construction of the approximation consists in finding the saddle point of the modified Lagrange function of the original problem. Moreover, this modification is performed in a special way using feedback functions. It is shown that the necessary conditions for the existence of such a saddle point are similar to the conditions of the Karush–Kuhn–Tucker theorem, but do not contain constraints such as inequalities and conditions of complementary slackness. Necessary conditions for the existence of a saddle point determine this approximation implicitly. Therefore, to calculate its differential characteristics, the implicit function theorem is used. The same theorem is used to reduce the approximation error to an acceptable level.

Features of the practical implementation feedback function method, including estimates of the rate of convergence to the exact solution are demonstrated for several specific classes of parametric optimization problems. Specifically, tasks searching for the global extremum of functions of many variables and the problem of multiple extremum (maximin-minimax) are considered. Optimization problems that arise when using multicriteria mathematical models are also considered. For each of these classes, there are demo examples.

Keywords: nonlinear programming problem with parameters, feedback function, modified Lagrange function, search for a global extremum, minimax, multicriteria model

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2023, vol. 15, no. 5, pp. 1125–1151 (Russian).

1. Введение

Рассмотрим задачу параметрического программирования:

$$\begin{aligned} & \text{максимизировать } F(x, v) \text{ по } x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in E^n \\ & \text{для фиксированного вектора параметров } v = (v_1, v_2, \dots, v_K)^T \in \Upsilon, \\ & \text{где } \Upsilon \text{ есть некоторая область в } E^K, \\ & \text{при условиях } x \in \Theta_v: \{x \mid f_i(x, v) \leq 0 \forall i = \overline{1, m}\}. \end{aligned} \quad (1)$$

Решением задачи (1) будем считать x_v^* — зависимость вектора $\operatorname{argmax}_{x \in \Theta_v} F(x, v)$ от v .

Задачи вида (1), а также сводящиеся к ним или связанные с ними, рассматривались в большом числе как зарубежных, так и отечественных исследований, детальный обзор которых можно найти, например, в [Измаилов, 2006].

Помимо параметров, в постановке задачи (1) существенно наличие ограничений типа «неравенство», в силу чего

- область определения зависимости x_v^* может быть уже (по v) области определения функций $F(x, v)$, $f_i(x, v)$,
- зависимость x_v^* может быть нефункциональной (неоднозначной),
- зависимость x_v^* может быть недифференцируемой.

Эти свойства могут усложнять процедуру решения как задачи (1), так и задач, в постановках которых используются x_v^* .

К настоящему времени разработано значительное число алгоритмов решения параметрических задач, например, методами недифференцируемой оптимизации и теории чувствительности, например, [Danskin, 1967; Rockafellar, 1970; Демьянов, Васильев, 1981; Демьянов, Малоземов, 1972; Гольштейн, Третьяков, 1989; Нурминский, 1991; Измаилов, 2006]. Эти алгоритмы позволяют преодолевать вычислительные затруднения, порождаемые особенностями зависимости x_v^* .

Однако при этом практический интерес также представляют традиционные методы решения задач вида (1), основанные на разложениях по формуле Тейлора. К настоящему времени варианты подобных алгоритмов были предложены, например, в [Fiasso, McCormick, 1968; Гермейер, 1969; Умнов, 1974; Федоров, 1979; Fiasso, 1983; Скарин, 2010; Умнов, Умнов, 2014; Умнов, Умнов, 2018].

В данной статье рассматривается подход, относящийся ко второму направлению. Предлагается метод построения гладкой функции $\bar{x}(\tau, v)$, аппроксимирующей зависимость x_v^* . То есть такой функции, для которой предельное равенство $\lim_{\tau \rightarrow +0} F(\bar{x}(\tau, v), v) = F(x_v^*, v)$ выполняется $\forall v \in \Upsilon$. В случае однозначности x_v^* это равенство усиливается до $\lim_{\tau \rightarrow +0} \bar{x}(\tau, v) = x_v^*$. Кроме того, предлагаемая аппроксимация позволяет преодолевать также и другие, отмеченные выше, вычислительные затруднения, возникающие при решении задач вида (1).

Конкретно: в качестве $\bar{x}(\tau, v)$ предлагается использовать седловую точку модифицированной специальным образом функции Лагранжа для задачи (1). Эта специфика такова, что для $\bar{x}(\tau, v)$ гарантируются существование, функциональность и гладкость $\forall v \in \Upsilon$.

В предлагаемом подходе функция $\bar{x}(\tau, v)$ определяется в неявном виде. Однако использование классической теоремы о системе неявных функций позволяет преодолевать это затруднение и строить для $\bar{x}(\tau, v)$ тейлоровские многочлены нужных порядков.

Процедура модификации функции Лагранжа и поиска ее седловой точки, называемая *методом функций обратных связей*, предложена и обоснована в [Умнов, Умнов, 2019] для линейной задачи (1), нелинейный случай рассмотрен в [Umnov, Umnov, 2022].

В данной статье предлагаемый подход рассматривается для решения сводящихся к виду (1) задач:

- поиска глобального экстремума,
- нахождения кратного экстремума и/или минимакса,
- оптимизации,

возникающих при использовании многокритериальных моделей.

В заключение отметим, что в предлагаемом методе гладкость аппроксимации сочетается с возможностью регулирования ее погрешности путем подбора значения инструментального параметра τ .

Откуда следует возможность применения рассматриваемого подхода в комбинации с другими методами. То есть приближенные оценки решений исходной задачи, полученные с помощью функций обратных связей, используются в качестве начальных приближений для алгоритмов альтернативных типов.

2. Метод функций обратных связей

Приведем вначале краткое описание метода функций обратных связей. Это описание целесообразно начать с более наглядного линейного случая.

Пусть функции $F(x)$, $f_i(x) \forall i = \overline{1, n}$ линейны, а E_+^n и E_+^m суть неотрицательные ортанты евклидовых пространств E^n и E^m . Рассмотрим задачу (1) вида

$$F(x) = \sum_{j=1}^n \sigma_j x_j \rightarrow \max, \quad x \in E_+^n, \quad \text{при условиях } f_i(x) = -\beta_i + \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x_j \leq 0 \quad \forall i = \overline{1, m}. \quad (2)$$

Сформулируем также задачу, двойственную к (2):

$$G(\lambda) = \sum_{i=1}^m \sigma_i \lambda_i \rightarrow \min \quad \text{при условиях } g_j(\lambda) = -\sigma_j + \sum_{i=1}^m \alpha_{ij} \lambda_i \geq 0 \quad \forall j = \overline{1, n}, \quad (3)$$

где $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)^T \in E_+^m$.

Применим для решения задач (2) и (3) вариант метода *гладких штрафных функций* [Умнов, 1974], который для задачи (2) состоит в последовательной (по $\tau \rightarrow +0$) максимизации по x вспомогательной функции $A_P(\tau, x) = F(x) - \sum_{i=1}^m P(\tau, f_i(x)) - \sum_{j=1}^n P(\tau, (-x_j))$, где функция $P(\tau, s)$, определяющая величину «штрафа» за нарушение ограничения $s \leq 0$, удовлетворяет следующим условиям.

$$2-1^\circ. \quad \lim_{\tau \rightarrow +0} P(\tau, s) = \begin{cases} +\infty, & s > 0, \\ 0, & s < 0. \end{cases}$$

2-2°. Функция $P(\tau, s)$ имеет непрерывные частные производные по всем своим аргументам до второго порядка включительно.

2-3°. Для всех $\tau > 0$ и $\forall s$ выполнены неравенства $\frac{\partial P}{\partial s} > 0$, $\frac{\partial^2 P}{\partial s^2} > 0$.¹

Отметим, что из 2-3° следует равномерная сходимость по $s \forall \varepsilon > 0$ на множествах $s \leq -\varepsilon$ и $s \geq \varepsilon$ для предельных переходов в 2-1°.

Для задачи (3) подлежащая последовательной минимизации вспомогательная функция будет иметь вид

$$A_D(\tau, \lambda) = G(\lambda) + \sum_{j=1}^n P(\tau, -g_j(\lambda)) + \sum_{i=1}^m P(\tau, (-\lambda_i)).$$

Пусть $\{\bar{x}(\tau), \bar{\lambda}(\tau)\}$ и $\{\check{x}(\tau), \check{\lambda}(\tau)\}$ суть соответственно стационарные точки функций $A_P(\tau, x)$ и $A_D(\tau, \lambda)$, определяемые при фиксированном $\tau > 0$ уравнениями

$$\operatorname{grad}_x A_P(\tau, \bar{x}(\tau)) = o \quad \text{и} \quad \operatorname{grad}_\lambda A_D(\tau, \check{\lambda}(\tau)) = o.$$

Если предположить дополнительно, что задачи (2) и (3) имеют единственные решения $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)^T$ и $\lambda^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_m^*)^T$, то оказываются верными равенства

$$\begin{aligned} x_j^* &= \lim_{\tau \rightarrow +0} \bar{x}_j(\tau) & \forall j = \overline{1, n}, & \quad \lambda_i^* &= \lim_{\tau \rightarrow +0} \check{\lambda}_i(\tau) & \quad \forall i = \overline{1, m}, \\ \lambda_i^* &= \lim_{\tau \rightarrow +0} \frac{\partial P}{\partial s}(\tau, f_i(\bar{x}(\tau))) & \quad \forall i = \overline{1, m}, & \quad x_j^* &= \lim_{\tau \rightarrow +0} \frac{\partial P}{\partial s}(\tau, -g_j(\check{\lambda}(\tau))) & \quad \forall j = \overline{1, n}, \end{aligned}$$

поскольку для задач (2), (3) компоненты вектора x^* являются множителями Лагранжа в задаче (3), а компоненты вектора λ^* суть множители Лагранжа в задаче (2).

При этом $\forall \tau > 0$, в общем случае,

$$\frac{\partial P}{\partial s}(\tau, f_i(\bar{x}(\tau))) \neq \check{\lambda}_i(\tau) \quad \forall i = \overline{1, m} \quad \text{и} \quad \frac{\partial P}{\partial s}(\tau, -g_j(\check{\lambda}(\tau))) \neq \bar{x}_j(\tau) \quad \forall j = \overline{1, n}. \quad (4)$$

Соотношения (4) будут верными равенствами лишь в пределе, при $\tau \rightarrow +0$. Однако формально их, записав как *равенства*, можно объединить в одну систему уравнений $\forall \tau > 0$. В [Умнов, Умнов, 2019] показано, что для любых (то есть без предположений о совместности или однозначной разрешимости) линейных задач (2), (3) существуют вектор-функции $\bar{x}(\tau)$ и $\bar{\lambda}(\tau)$, являющиеся решениями такой объединенной системы уравнений

$$\begin{cases} \bar{\lambda}_i(\tau) = \frac{\partial P}{\partial s}(\tau, f_i(\bar{x}(\tau))) & \forall i = \overline{1, m}, \\ \bar{x}_j(\tau) = \frac{\partial P}{\partial s}(\tau, -g_j(\bar{\lambda}(\tau))) & \forall j = \overline{1, n}, \end{cases} \quad (5)$$

для которых (в случае совместности задач (2), (3)) верно $\lim_{\tau \rightarrow +0} F(\bar{x}(\tau)) = \lim_{\tau \rightarrow +0} G(\bar{\lambda}(\tau)) = F^*$, а при единственности x^* и λ^* справедливы, кроме того, равенства

$$\lambda_i^* = \lim_{\tau \rightarrow +0} \frac{\partial P}{\partial s}(\tau, f_i(\bar{x}(\tau))) \quad \forall i = \overline{1, m}, \quad x_j^* = \lim_{\tau \rightarrow +0} \frac{\partial P}{\partial s}(\tau, -g_j(\bar{\lambda}(\tau))) \quad \forall j = \overline{1, n}.$$

Отметим также, что система (5) не содержит в явном виде условий неотрицательности компонент векторов $\bar{x}(\tau)$ и $\bar{\lambda}(\tau)$, поскольку $\frac{\partial P}{\partial s} > 0$ в силу условия 2-3°.

¹ Заметим, что, например, стандартная квадратичная штрафная функция $P(\tau, s) = \begin{cases} \frac{s^2}{2\tau} & \text{при } s \geq 0, \\ 0 & \text{при } s < 0 \end{cases}$ не удовлетворяет этим условиям.

Теперь воспользуемся тем, что в сделанных предположениях функция $\frac{\partial P}{\partial s}(\tau, s)$, как непрерывно дифференцируемая и строго монотонно возрастающая по аргументу $s \forall s \in R$, имеет обратную функцию, которая также непрерывно дифференцируемая и строго монотонно возрастающая на $(0, +\infty)$. В силу чего система (5) может быть записана так

$$\left\{ \begin{array}{l} f_i(\tau, \bar{x}(\tau)) = Q(\tau, \bar{\lambda}_i(\tau)) \quad \forall i = \overline{1, m}, \\ -g_j(\tau, \bar{\lambda}(\tau)) = Q(\tau, \bar{x}_j(\tau)) \quad \forall j = \overline{1, n}, \end{array} \right. \quad \text{или} \quad \left\{ \begin{array}{l} -\beta_i + \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \bar{x}_j = Q(\tau, \bar{\lambda}_i) \quad \forall i = \overline{1, m}, \\ \sigma_j - \sum_{i=1}^m \alpha_{ij} \bar{\lambda}_i = Q(\tau, \bar{x}_j) \quad \forall j = \overline{1, n}, \end{array} \right. \quad (6)$$

где функция $Q(\tau, s) = \text{inv}_s \left(\frac{\partial P}{\partial s}(\tau, s) \right)$ — обратная по s к функции $\frac{\partial P}{\partial s}(\tau, s)$.

Из (6) следует, что функция $Q(\tau, s)$ реализует обратную связь между прямыми и двойственными переменными в условиях оптимальности для задач (2) и (3). Иначе говоря, малые по модулю значения функции $Q(\tau, s)$ в правых частях уравнений (6) являются индикатором активности соответствующих ограничений задач (2) и (3) в точках x^* и λ^* . Это оправдывает использование для $Q(\tau, s)$ термина *функция обратных связей*.

Наконец, переход к нелинейному случаю выполним путем введения вспомогательной функции вида

$$U(\tau, x, \lambda) = \sum_{j=1}^n (\sigma_j x_j - R(\tau, x_j)) + \sum_{i=1}^m (\beta_i \lambda_i + R(\tau, \lambda_i)) - \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \alpha_{ij} x_j \lambda_i, \quad (7)$$

где $R(\tau, s) = \int_{\alpha(\tau)}^s Q(\tau, u) du$, а значение $\alpha(\tau)$ находится из уравнения $Q(\tau, \alpha(\tau)) = 0$. Это уравнение $\forall \tau > 0$ имеет (и притом единственное) решение, поскольку функция $Q(\tau, s)$ строго монотонно возрастающая по s и не ограниченная как снизу, так и сверху $\forall s \in (0, +\infty)$.

В силу (7) решения системы (6), то есть векторы $\bar{x}(\tau)$ и $\bar{\lambda}(\tau)$, суть *стационарные точки* функции $U(\tau, x, \lambda)$ по совокупности $\{x; \lambda\}$, а сама функция (7) может быть представлена как некоторая *модификация функции Лагранжа* [Гольштейн, Третьяков, 1989; Жадан, 2015]:

$$U(\tau, x, \lambda) = L(x, \lambda) - \sum_{j=1}^n R(\tau, x_j) + \sum_{i=1}^m R(\tau, \lambda_i), \quad (8)$$

где $L(x, \lambda)$ — регулярная функция Лагранжа задачи (2), имеющая вид

$$L(x, \lambda) = \sum_{j=1}^n \sigma_j x_j - \sum_{i=1}^m \lambda_i \left(-\beta_i + \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x_j \right) = F(x) - \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i(x).$$

Такая форма записи функции Лагранжа для задачи (2) не зависит от того, линейны функции $F(x)$, $f_i(x) \forall i = \overline{1, m}$ или нет. Поэтому равенство (8) можно использовать как основу *определения* вспомогательной функции $U(\tau, x, \lambda, \nu)$ для нелинейной задачи (1).

3. Сглаживающее свойство функций обратных связей

Рассмотрим условия применимости функций обратных связей для решения *параметрической* задачи (1) с конечным значением F_v^* и, быть может, с неоднозначной точкой x_v^* . Будем предполагать, что все сформулированные ниже условия выполнены $\forall v \in \Upsilon$.

Предположим, что в рассматриваемой задаче функция Лагранжа регулярна и также существуют компактные, с непустой внутренностью множества $\Omega_x \subset E^n$ и $\Omega_\lambda \subset E^m$, для которых найдется хотя бы одна пара векторов $x_v^* \in \Omega_x$ и $\lambda_v^* \in \Omega_\lambda$ такая, что $L(x_v^*, \lambda_v^*, v) = F_v^*$.

Пусть функция *обратных связей* $Q(\tau, s)$ определена $\forall \tau > 0$ и $\forall s \in (0, +\infty)$ по построению обладает следующими свойствами:

3-1°. $Q(\tau, s)$ строго монотонно возрастает по s , и при этом для любого фиксированного $\tau > 0$
 $\lim_{s \rightarrow +0} Q(\tau, s) = -\infty, \lim_{s \rightarrow +\infty} Q(\tau, s) = +\infty.$

3-2°. $\forall s > 0 \lim_{\tau \rightarrow +0} Q(\tau, s) = 0$, причем этот предельный переход *равномерный* по s на $[\varepsilon_0, +\infty)$
 $\forall \varepsilon_0 > 0.$

3-3°. В области определения функция $Q(\tau, s)$ непрерывно дифференцируема по совокупности всех своих аргументов.

В качестве примера функций обратных связей можно привести функции $Q(\tau, s) = \tau \ln s$ или $Q(\tau, s) = \frac{\tau}{2} \left(s - \frac{1}{s} \right).$

Введем $\forall s \in (0, +\infty)$ функцию $R(\tau, s)$ такую, что $R(\tau, s) = \int_{\alpha(\tau)}^s Q(\tau, u) du$, где $\alpha(\tau)$ есть решение уравнения $Q(\tau, \alpha(\tau)) = 0$ (в сделанных предположениях такое $\alpha(\tau)$ существует и единственно $\forall \tau > 0$). Из определения $R(\tau, s)$ также следует, что верно равенство $\frac{\partial R}{\partial s} = Q(\tau, s).$

Взяв формулу (8) за *определение*, построим для нелинейной задачи (1), дополненной условием $x \in E_+^n$, вспомогательную функцию

$$U(\tau, x, \lambda, v) = L(x, \lambda, v) + W(\tau, x, \lambda), \quad \text{где} \quad W(\tau, x, \lambda) = - \sum_{j=1}^n R(\tau, x_j) + \sum_{i=1}^m R(\tau, \lambda_i). \quad (9)$$

При этом если условия неотрицательности наложены *не на все* компоненты вектора x или некоторые ограничения являются *равенствами*, то в выражение (9) для $W(\tau, x, \lambda)$ соответствующие слагаемые *не включаются*. Например, для задачи (1) $W(\tau, x, \lambda) = \sum_{i=1}^m R(\tau, \lambda_i).$

Опишем теперь свойства функции $U(\tau, x, \lambda, v)$ для фиксированного вектора $v \in Y$.

В [Umnov, Umnov, 2022] показано, что при сделанных выше предположениях и фиксированном векторе параметров справедливы следующие утверждения.

Теорема 1. $\forall \tau > 0$ функция $U(\tau, x, \lambda, v)$ имеет $\{\bar{x}(\tau, v); \bar{\lambda}(\tau, v)\}$ – единственную седловую точку внутри $\Omega_x \times \Omega_\lambda$, где векторы $\bar{x}(\tau, v)$ и $\bar{\lambda}(\tau, v)$ – решения системы уравнений

$$\begin{cases} \text{grad}_x U(\tau, \bar{x}, \bar{\lambda}, v) = 0, \\ \text{grad}_\lambda U(\tau, \bar{x}, \bar{\lambda}, v) = 0. \end{cases} \quad (10)$$

Например, для задачи (1) система уравнений (10) имеет вид

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^m \bar{\lambda}_i(\tau, v) \frac{\partial f_i}{\partial x_j} = 0 & \forall j = \overline{1, n}, \\ f_i(\bar{x}(\tau, v)) = -Q(\tau, \bar{\lambda}_i(\tau, v)) & \forall i = \overline{1, m}, \end{cases} \quad (11)$$

который по структуре подобен условиям теоремы Каруша – Куна – Таккера, но не содержит явных условий неотрицательности множителей Лагранжа и условий дополняющей нежесткости.

Заметим, что определяемые неявно системой (10) вектор-функции $\bar{x}(\tau, v)$ и $\bar{\lambda}(\tau, v)$ задают в $\Omega_x \times \Omega_\lambda$ параметрически (по τ) линию, которую (по аналогии с экстремальной траекторией в методе штрафных функций) можно назвать *седловой траекторией задачи* (1).

Теорема 2. На седловой траектории задачи (1)

$$\lim_{\tau \rightarrow +0} U(\tau, \bar{x}(\tau, v), \bar{\lambda}(\tau, v), v) = F_v^*, \quad (12)$$

а в случае локальной единственности решения задачи (1) справедливы также равенства

$$\lim_{\tau \rightarrow +0} \bar{x}(\tau, v) = x_v^* \quad \text{и} \quad \lim_{\tau \rightarrow +0} \bar{\lambda}(\tau, v) = \lambda_v^*. \quad (13)$$

Теорема 3. На седловой траектории вектор-функции $\{\bar{x}(\tau, v); \bar{\lambda}(\tau, v)\}$ непрерывно дифференцируемы по всем своим аргументам $\forall \tau > 0 \forall v \in \Upsilon$.

Найдя из (10) для конкретных $\tau > 0$ и $v \in \Upsilon$ значения вектор-функций $\bar{x}(\tau, v)$ и $\bar{\lambda}(\tau, v)$ и применив затем к системе (10) теорему о неявных функциях, получим $\forall r = \overline{1, K}$ системы линейных уравнений

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 U}{\partial x_p \partial x_j} \frac{\partial \bar{x}_j}{\partial v_r} + \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 U}{\partial x_p \partial \lambda_i} \frac{\partial \bar{\lambda}_i}{\partial v_r} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x_p \partial v_r} & \forall p = \overline{1, n}, \\ \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 U}{\partial \lambda_q \partial x_j} \frac{\partial \bar{x}_j}{\partial v_r} + \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 U}{\partial \lambda_q \partial \lambda_i} \frac{\partial \bar{\lambda}_i}{\partial v_r} = -\frac{\partial^2 U}{\partial \lambda_q \partial v_r} & \forall q = \overline{1, m}, \end{cases} \quad (14)$$

которые определяют значения производных от компонент вектор-функций $\bar{x}(\tau, v)$ и $\bar{\lambda}(\tau, v)$ по компонентам вектора v .

При необходимости, усилив очевидным образом предположения о свойствах функций обратных связей, равно как и функций, входящих в условие задачи (1), по аналогичной схеме можно найти частные производные и более высокого порядка.

Теоремы 1, 2 и 3 позволяют использовать вектор-функцию $\bar{x}(\tau, v)$ как аппроксимацию зависимости x_v^* , допускающую применение вычислительных процедур, основанных на формуле Тейлора.

Из теоремы 2 следует, что погрешность метода функций обратных связей уменьшается при $\tau \rightarrow +0$. Однако если для конкретного значения τ она неприемлемо велика, то можно применить теорему о неявных функциях также и для уменьшения погрешности аппроксимации.

Действительно, если правые части системы уравнений (14) заменить на $-\frac{\partial^2 U}{\partial x_p \partial \tau}$ и $-\frac{\partial^2 U}{\partial \lambda_i \partial \tau}$, то ее решениями окажутся значения производных от $\{\bar{x}(\tau, v), \bar{\lambda}(\tau, v)\}$ по параметру τ . Значения этих производных для достаточно малых $\tau > 0$ позволяют повысить точность аппроксимации, например, по формулам

$$\widehat{x}_j = \bar{x}_j(\tau, v) - \tau \frac{\partial \bar{x}_j}{\partial \tau} \quad \forall j = \overline{1, n} \quad \text{и} \quad \widehat{\lambda}_i = \bar{\lambda}_i(\tau, v) - \tau \frac{\partial \bar{\lambda}_i}{\partial \tau} \quad \forall i = \overline{1, m}. \quad (15)$$

В [Умнов, Умнов, 2022] показано, что хотя точка $\{\widehat{x}, \widehat{\lambda}\}$ не принадлежит седловой траектории, тем не менее уточнение по формулам (15) может выполняться итеративно в несколько шагов. Для этого достаточно заменить скалярный параметр τ на векторный, превратив седловую траекторию в пучок таких траекторий.

Применение метода функций обратных связей проиллюстрируем на примере решения следующей задачи, с неотрицательным фиксированным p .

Задача 1.

Максимизировать px по $x \in \mathbb{R}$
 при условиях $x \geq 0$, $x \leq 5$, $x \leq 5v$ для фиксированного $v \in \mathbb{R}$. (16)

Решения этой задачи в случае $p > 0$ и, соответственно, $p = 0$ имеют вид

$$x_v^* = \begin{cases} \text{не суц.} & \text{при } -\infty < v < 0, \\ 5v & \text{при } 0 \leq v \leq 1, \\ 5 & \text{при } v > 1, \end{cases} \quad x_v^* = \begin{cases} \text{не суц.} & \text{при } -\infty < v < 0, \\ [0, 5v] & \text{при } 0 \leq v \leq 1, \\ [0, 5] & \text{при } v > 1. \end{cases}$$

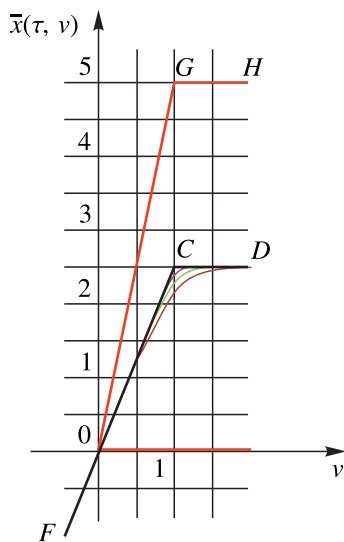
Иначе говоря, при $v < 0$ зависимость x_v^* не определена, в точке $v = 1$ производная у x_v^* не существует, а для $p = 0$ при $v > 0$ зависимость x_v^* определена неоднозначно и, значит, функцией не является.

Построим гладкую аппроксимацию зависимости x_v^* для задачи 1, взяв $Q(\tau, s) = \tau \ln s$ в качестве функции обратной связи. Вспомогательная функция (9) в этом случае будет иметь вид

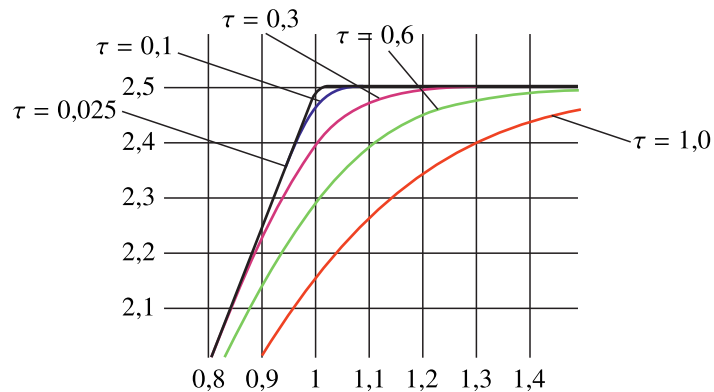
$$U(\tau, x, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, v) = px - \lambda_1(-x) - \lambda_2(-5 + x) - \lambda_3(-5v + x) + R(\tau, \lambda_1) + R(\tau, \lambda_2) + R(\tau, \lambda_3),$$

а условия ее стационарности (система (10)) имеют вид

$$\begin{cases} p + \bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_3 = 0, \\ \bar{x} + \tau \ln \bar{\lambda}_1 = 0, \\ -\bar{x} + 5 + \tau \ln \bar{\lambda}_2 = 0, \\ -\bar{x} + 5v + \tau \ln \bar{\lambda}_3 = 0. \end{cases}$$



(а)



(б)

Рис. 1. Графическое представление функций $\bar{x}(\tau, v)$ для задачи 1

Опуская очевидные преобразования, приведем итоговый вид искомой аппроксимации зависимости x_v^* :

$$\bar{x}(\tau, v) = -\tau \ln \left(\sqrt{\frac{p^2}{4} + e^{-\frac{5}{\tau}} + e^{-\frac{5v}{\tau}}} - \frac{p}{2} \right).$$

Эта функция определена $\forall \tau > 0$ и $\forall v \in \mathbb{R}$ и имеет в каждой точке производную любого порядка. Раскрытие неопределенностей в случае $p > 0$ дает $\lim_{\tau \rightarrow +0} \bar{x}(\tau, v) = 5v$ при $0 \leq v \leq 1$ и $\lim_{\tau \rightarrow +0} \bar{x}(\tau, v) = 5$ при $v > 1$.

Теперь найдем значения предела $\lim_{\tau \rightarrow +0} \bar{x}(\tau, v) = x_v^*$ для v , при которых x_v^* определена неоднозначно. При $p = 0$ и $0 < v < 1$ имеем

$$\lim_{\tau \rightarrow +0} \bar{x}(\tau, v) = -\frac{1}{2} \lim_{\tau \rightarrow +0} \tau \ln \left(e^{-\frac{5}{\tau}} + e^{-\frac{5v}{\tau}} \right) = -\frac{1}{2} \lim_{\tau \rightarrow +0} \left(\tau \ln e^{-\frac{5v}{\tau}} + \tau \ln \left(1 + e^{\frac{5v-5}{\tau}} \right) \right) = \frac{5v}{2}.$$

Для $v \geq 1$ результат $\lim_{\tau \rightarrow +0} \bar{x}(\tau, v) = \frac{5}{2}$ получается аналогично.

Далее заметим, что задача 1 несовместна $\forall v < 0$ в силу противоречивости ограничений $x \geq 0$ и $x \leq 5v$. В этом случае имеем $\lim_{\tau \rightarrow +0} \bar{x}(\tau, v) = \frac{5v}{2}$. Данное значение можно рассматривать как некоторый компромисс для конфликтующих условий.

На рис. 1, а ломаная $FOGH$ есть график решения задачи 1 для $p > 0$, ломаная FCD — решения при $p = 0$. Здесь также показаны графики функций $\bar{x}(\tau, v)$ для $\tau = 1; 0,6; 0,3; 0,1; 0,025$. На рис.1, б приведены в большем масштабе те же графики в окрестности точки $v = 1$, где зависимость x_v^* недифференцируема.

4. Экстремум функции многих переменных

Рассмотрим теперь применение метода функций обратных связей в задачах, которые сводятся к задачам параметрического программирования.

Покажем вначале, что аппроксимации при помощи функций обратных связей могут быть использованы для решения задачи отыскания экстремума в конечном наборе чисел.

Пусть дан набор чисел $v = \{v_1, v_2, \dots, v_K\}$. Значение максимального из них есть решение задачи линейного программирования со скалярной переменной $f \in \mathbb{R}$ и с параметрами v_1, v_2, \dots, v_K :

$$\begin{aligned} & \text{минимизировать } f \\ & \text{при условиях } f \geq v_i \quad \forall i = \overline{1, K}. \end{aligned} \quad (17)$$

Приняв во внимание, что f не ограничена по знаку, построим для этой задачи вспомогательную функцию (10):

$$U(\tau, f, \lambda, v) = -f - \sum_{i=1}^K \lambda_i (v_i - f) + \sum_{i=1}^K R(\tau, \lambda_i). \quad (18)$$

Если в качестве функции обратной связи взять $Q(\tau, s) = \tau \ln s$, то система уравнений (10) будет иметь вид

$$\begin{cases} -1 + \sum_{i=1}^K \bar{\lambda}_i = 0, \\ v_i - \bar{f} = \tau \ln \bar{\lambda}_i \quad \forall i = \overline{1, K} \end{cases} \implies \begin{cases} \bar{\lambda}_i = e^{\frac{v_i - \bar{f}}{\tau}} \quad \forall i = \overline{1, K}, \\ \text{где } \bar{f} = \tau \ln \left(\sum_{i=1}^K e^{\frac{v_i}{\tau}} \right). \end{cases} \quad (19)$$

Откуда решение задачи (17), то есть значение максимального (а также и минимального) из чисел в наборе $\{v_1, v_2, \dots, v_K\}$, будет равно

$$f_{\max}^* = \lim_{\tau \rightarrow +0} \tau \ln \left(\sum_{i=1}^K e^{\frac{v_i}{\tau}} \right) \implies f_{\min}^* = - \lim_{\tau \rightarrow +0} \tau \ln \left(\sum_{i=1}^K e^{-\frac{v_i}{\tau}} \right). \quad (20)$$

Пусть переход к пределу в (20) не выполняется, но τ — малое положительное число. Оценим возникающую при этом погрешность. Без потери общности можно считать, что числа в наборе $\{v_1, v_2, \dots, v_K\}$ упорядочены в порядке убывания и первые M из них равны f^* , где $1 \leq M < K$. Тогда имеем

$$\begin{aligned} \bar{f}(\tau) - f^* &= \tau \ln \left(\sum_{i=1}^K e^{\frac{v_i}{\tau}} \right) - \tau \ln e^{\frac{f^*}{\tau}} = \tau \ln \left(\sum_{i=M+1}^K e^{\frac{v_i - f^*}{\tau}} \right) = \tau \ln \left(M + \sum_{i=1}^K e^{\frac{v_i - f^*}{\tau}} \right) \leq \\ &\leq \tau \ln \left(M + (K - M)e^{\frac{A - f^*}{\tau}} \right) = \tau \ln M + \tau \ln \left(1 + \frac{K - M}{M} e^{\frac{A - f^*}{\tau}} \right) \leq \tau \ln M + \tau e^{\frac{A - f^*}{\tau}}, \end{aligned}$$

где $A = v_{M+1}$.

Из этого неравенства следует, что порядок малости погрешности определяется слагаемым $\tau \ln M$ в случае, когда $M > 1$ (то есть в исследуемом наборе максимальное число не единственное). При $M = 1$ порядок погрешности определяется слагаемым $\tau e^{\frac{A - f^*}{\tau}}$, что заметно лучше при $\tau \rightarrow +0$.

То, что для системы (19) удалось получить решение в виде (20), конечно, исключение, а не правило. Например, если использовать функцию обратной связи $Q(\tau, s) = \frac{\tau}{2} \left(s - \frac{1}{s} \right)$, то система уравнений (10) будет иметь вид

$$\begin{cases} -1 + \sum_{i=1}^K \bar{\lambda}_i = 0, \\ v_i - \bar{f} = \frac{\tau}{2} \left(\bar{\lambda}_i - \frac{1}{\bar{\lambda}_i} \right) \quad \forall i = \overline{1, K}, \end{cases} \quad (21)$$

для которого возможно лишь численное решение.

Для иллюстрации в табл. 1 приведены результаты решения системы (19) для набора чисел

$$\{v_1 = 5, v_2 = -2, v_3 = 4, v_4 = 7, v_5 = 0\}$$

при различных значениях параметра τ .

Таблица 1. Решения системы (19) для различных значений параметра τ

τ	$\bar{f}(\tau)$	$\bar{\lambda}_1(\tau)$	$\bar{\lambda}_2(\tau)$	$\bar{\lambda}_3(\tau)$	$\bar{\lambda}_4(\tau)$	$\bar{\lambda}_5(\tau)$
$10^{-0,00}$	7,170719212	0,114095529	$1,0404 \cdot 10^{-4}$	0,041973399	0,843058261	$7,6877 \cdot 10^{-4}$
$10^{-0,25}$	7,018454440	0,027615558	$1,0841 \cdot 10^{-7}$	$4,6651 \cdot 10^{-3}$	0,967715479	$3,7990 \cdot 10^{-6}$
$10^{-0,50}$	7,000590038	$1,7884 \cdot 10^{-3}$	$4,355 \cdot 10^{-13}$	$7,5703 \cdot 10^{-5}$	0,998135874	$2,430 \cdot 10^{-10}$
$10^{-0,75}$	7,000002329	$1,3048 \cdot 10^{-5}$	$4,355 \cdot 10^{-13}$	$4,7135 \cdot 10^{-8}$	0,999986904	0,000000000
$10^{-1,00}$	7,000000000	$2,0612 \cdot 10^{-9}$	0,000000000	$9,358 \cdot 10^{-14}$	0,999999998	0,000000000
$10^{-1,25}$	7,000000000	0,000000000	0,000000000	0,000000000	1,000000000	0,000000000

В табл. 2 для сравнения приведены численные решения системы (21) для набора чисел $\{v_1 = 5, v_2 = 5, v_3 = 4, v_4 = 5, v_5 = 0\}$ также при различных значениях параметра τ .

Рассмотрим теперь задачу отыскания экстремальных значений для числовых множеств мощности континуум.

Пусть дана непрерывная на компакте с не пустой внутренней частью $\Omega \subset E^n$ функция $f(x)$. Заменяя в формуле (20) операцию суммирования интегрированием, получим оценку значения

Таблица 2. Решения системы (21) для различных значений параметра τ

τ	$\bar{f}(\tau)$	$\bar{\lambda}_1(\tau)$	$\bar{\lambda}_2(\tau)$	$\bar{\lambda}_3(\tau)$	$\bar{\lambda}_4(\tau)$	$\bar{\lambda}_5(\tau)$
$10^{-1,00}$	5,109862742	0,333328289	0,333328289	$1,5133 \cdot 10^{-5}$	0,333328289	0,000000000
$10^{-1,20}$	5,069317752	0,333333319	0,333333319	$4,3629 \cdot 10^{-8}$	0,333333319	0,000000000
$10^{-1,50}$	5,034741173	0,333333333	0,333333333	0,000000000	0,333333333	0,000000000
$10^{-2,00}$	5,010986124	0,333333333	0,333333333	0,000000000	0,333333333	0,000000000
$10^{-4,00}$	5,000109861	0,333333333	0,333333333	0,000000000	0,333333333	0,000000000
$10^{-7,00}$	5,000000110	0,333333333	0,333333333	0,000000000	0,333333333	0,000000000

глобального максимума функции многих переменных, в которой параметрами являются значения этой функции,

$$f_{\max}^* = \lim_{\tau \rightarrow +0} \tau \ln \int_{\Omega} e^{\frac{f(x)}{\tau}} dx. \quad (22)$$

Справедливость (22) следует из условия $f(x) \leq f^*$ и оценок

$$\begin{aligned} \lim_{\tau \rightarrow +0} \tau \ln \int_{\Omega} e^{\frac{f(x)}{\tau}} dx &= \lim_{\tau \rightarrow +0} \tau \ln e^{\frac{f^*}{\tau}} \int_{\Omega} e^{\frac{f(x)-f^*}{\tau}} dx = f^* + \lim_{\tau \rightarrow +0} \tau \ln \int_{\Omega} e^{\frac{f(x)-f^*}{\tau}} dx, \\ 0 &\leq \lim_{\tau \rightarrow +0} \tau \ln \int_{\Omega} e^{\frac{f(x)-f^*}{\tau}} dx \leq \lim_{\tau \rightarrow +0} \tau \ln \text{mes } \Omega = 0. \end{aligned}$$

Связь операций интегрирования и поиска экстремума ранее использовалась для решения задач разных классов: в методе перевала, описанном, например, в [Федорюк, 1977], или при поиске максимина в игровых задачах [Федоров, 1979].

Следующий пример иллюстрируют применение формулы (22).

Задача 2. Найти глобальные экстремумы по $x \in \Omega \subseteq E^2$ для функции $f(x) = |x_1| + |x_2|$, где $\Omega = \begin{cases} -3 \leq x_1 \leq 4, \\ -2 \leq x_2 \leq 1. \end{cases}$

Решение. Для глобального максимума имеем

$$f_{\max}^* = \lim_{\tau \rightarrow +0} \tau \ln \iint_{\Omega} e^{\frac{|x_1|+|x_2|}{\tau}} dx_1 dx_2 = \lim_{\tau \rightarrow +0} \tau \ln \left[\tau^2 \left(e^{\frac{4}{\tau}} + e^{\frac{3}{\tau}} - 2 \right) \left(e^{\frac{2}{\tau}} + e^{\frac{1}{\tau}} - 2 \right) \right] = 6.$$

Он достигается на границе области Ω при $x_1 = 4$ и $x_2 = -2$.

Глобальный минимум здесь внутренний, негладкий, в точке $x_1 = x_2 = 0$

$$f_{\min}^* = - \lim_{\tau \rightarrow +0} \tau \ln \iint_{\Omega} e^{-\frac{|x_1|+|x_2|}{\tau}} dx_1 dx_2 = - \lim_{\tau \rightarrow +0} \tau \ln \left[\tau^2 \left(e^{-\frac{4}{\tau}} + e^{-\frac{3}{\tau}} - 2 \right) \left(e^{-\frac{2}{\tau}} + e^{-\frac{1}{\tau}} - 2 \right) \right] = 0.$$

Отметим также, что оптимальное значение целевой функции в задаче математического программирования

$$\begin{aligned} &\text{максимизировать } F(x), \quad x \in E^n, \\ &\text{при условии } x \in \Omega \subseteq E^n \end{aligned}$$

может быть представлено (при соответствующих предположениях о свойствах $F(x)$ и Ω) как $F^* = \lim_{\tau \rightarrow +0} \tau \ln \int_{\Omega} e^{\frac{F(x)}{\tau}} dx$.

5. Задачи кратного экстремума и минимакса

Сглаженные оценки решений задач параметрического программирования могут также оказаться полезными для исследования свойств суперпозиций операторов поиска экстремума. Отметим, что аналогичный подход, основанный на использовании внешних штрафных функций, был предложен в [Гермейер, 1969], обоснован и развит в [Федоров, 1979].

Рассмотрим следующую минимаксную задачу:

$$\begin{aligned} & \text{найти минимум } F(x) \text{ по } x \\ & \text{при условии } x \in \Omega, \text{ где } \Omega \subseteq E^n \text{ — компакт, а } F(x) = \max_{k \in [1, K]} \{f_k(x)\}, \end{aligned} \quad (23)$$

предполагая, что $\forall k \in [1, K]$ функции $f_k(x)$ непрерывно дифференцируемые на Ω .

В случае когда множество Ω задается системой неравенств вида $y_i(x) \leq 0$, $i = [1, m]$, задача (23) равносильна задаче математического программирования:

$$\begin{aligned} & \text{максимизировать } -V \text{ по } \{x, V\} \\ & \text{при условиях } f_k(x) - V \leq 0 \quad \forall k = [1, K] \text{ и } y_i(x) \leq 0 \quad \forall i = [1, m]. \end{aligned} \quad (24)$$

Здесь мы также предполагаем, что $\forall i \in [1, m]$ функции $y_i(x)$ непрерывно дифференцируемые на множестве Ω .

Зависимость V_x^* в сделанных предположениях является непрерывной, но недифференцируемой во всей своей области определения функцией. Поэтому для решения задачи (24) применим метод функций обратных связей со вспомогательной функцией

$$U(\tau, x, \Lambda, V) = -V - \sum_{k=1}^K \lambda_k (f_k(x) - V) - \sum_{i=1}^m \mu_i y_i(x) + \sum_{k=1}^K R(\tau, \lambda_k) + \sum_{i=1}^m R(\tau, \mu_i), \quad (25)$$

где $\Lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_K, \mu_1, \dots, \mu_m\}$.

Условия стационарности для функции (25) можно записать в виде системы уравнений:

$$\left\{ \begin{aligned} & \sum_{k=1}^K \bar{\lambda}_k \cdot \operatorname{grad}_x f_k(\bar{x}) + \sum_{i=1}^m \bar{\mu}_i \cdot \operatorname{grad}_x y_i(\bar{x}) = 0, \\ & -f_k(\bar{x}) + \bar{V} + Q(\tau, \bar{\lambda}_k) = 0 \quad \forall k = \overline{1, K}, \\ & -y_i(\bar{x}) + Q(\tau, \bar{\mu}_i) = 0 \quad \forall i = \overline{1, m}, \\ & -1 + \sum_{k=1}^K \bar{\lambda}_k = 0. \end{aligned} \right. \quad (26)$$

Если задача поиска минимакса не имеет ограничений, а функция обратных связей определена как $Q(\tau, s) = \tau \ln s$, то условия стационарности вспомогательной функции упрощаются

$$\left\{ \begin{aligned} & \sum_{k=1}^K \bar{\lambda}_k \cdot \operatorname{grad}_x f_k(\bar{x}) = 0, \\ & \bar{\lambda}_k = e^{\frac{f_k(\bar{x}) - \bar{V}}{\tau}} \quad \forall k = \overline{1, K}, \\ & -1 + \sum_{k=1}^K \bar{\lambda}_k = 0. \end{aligned} \right. \quad (27)$$

Заметим, что из двух последних равенств мы получаем сглаженную аппроксимацию функции максимума $\bar{V}(x) = \tau \ln \sum_{k=1}^K e^{\frac{f_k(x)}{\tau}}$, в то время как первые два равенства в (27) являются необходимыми условиями стационарности для $\bar{V}(x)$ по x .

В качестве иллюстративных примеров рассмотрим две задачи.

Задача 3. Найти минимум функции $V(x) = \max \{x^2; \sin 4x\}$.

Решение. Данная задача сводится к задаче математического программирования

$$\begin{aligned} & \text{максимизировать } -V \text{ по } \{x, V\} \\ & \text{при условиях } x^2 - V \leq 0, \sin 4x - V \leq 0. \end{aligned}$$

Используя (27), получим, что аппроксимация функции максимума имеет вид

$$\bar{V}(x) = \tau \ln \left(e^{\frac{x^2}{\tau}} + e^{\frac{\sin 4x}{\tau}} \right), \quad (28)$$

а ее стационарные точки суть корни уравнения

$$\bar{x} e^{\frac{\bar{x}^2}{\tau}} + 2e^{\frac{\sin 4\bar{x}}{\tau}} \cos 4\bar{x} = 0. \quad (29)$$

Уравнение (29) имеет три корня, являющихся приближением к точкам

$$x_1^* = 0, \quad x_2^* = \frac{\pi}{8} = 0,392699082 \quad \text{и} \quad x_3^* = 0,669283188,$$

последняя из которых есть ненулевой корень уравнения $x^2 = \sin 4x$.

Решения уравнения (29) для разных значений параметра τ приведены в табл. 3, а графики функции $\bar{V}(x)$ показаны на рис. 2.

Таблица 3. Решения уравнения (29) для различных значений параметра τ

τ	$\bar{x}_1(\tau)$	$\bar{x}_2(\tau)$	$\bar{x}_3(\tau)$
0,50	-0,166596357	0,413732397	0,723794952
0,25	-0,124388280	0,398475953	0,704617207
0,10	-0,077449382	0,392845484	0,688202392
0,05	-0,046509302	0,392699415	0,679216477
Точное решение	0	0,392699082	0,669283188

В качестве второй иллюстрации рассмотрим минимаксную задачу, возникающую в процессе поиска методом дихотомии экстремума функции n переменных по заданному направлению в E^n .

Пусть дана непрерывная унимодальная (то есть имеющая единственный экстремум) на отрезке $[\alpha, \beta]$ функция одной переменной $f(x)$. Требуется найти на этом отрезке две точки, значения $f(x)$ в которых позволяют построить новый отрезок минимально возможной длины, содержащий точку экстремума.

Обозначим искомые точки как x_1 и x_2 . Тогда из свойств унимодальности следует, что эти точки есть решение следующей задачи.

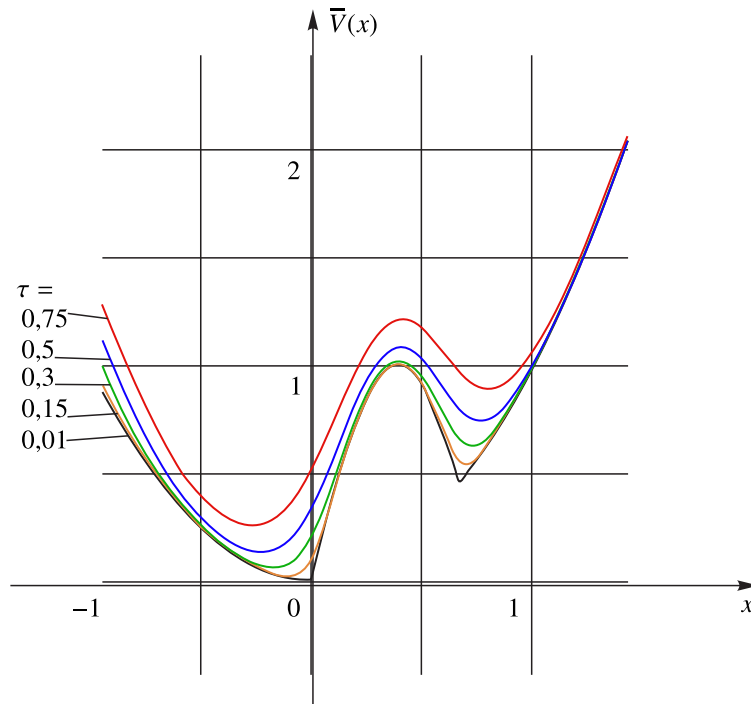


Рис. 2. Графическая интерпретация задачи 3

Задача 4. Найти минимум $\max\{x_2 - \alpha, \beta - x_1\}$ по $\{x_1, x_2\}$ при условии $x_1 \leq x_2$.

Решение. Эта минимаксная задача сводится к задаче параметрического программирования следующего вида:

найти максимум $-v$ по $\{v, x_1, x_2\}$
при условиях $x_2 - \alpha \leq v, \beta - x_1 \leq v, x_1 - x_2 \leq 0$.

Вспомогательная функция (10) для этой задачи будет иметь вид

$$U(\tau, x, \lambda, v) = -v - \lambda_1(x_2 - \alpha - v) - \lambda_2(\beta - x_1 - v) - \lambda_3(x_1 - x_2) + R(\tau, \lambda_1) + R(\tau, \lambda_2) + R(\tau, \lambda_3),$$

а условия стационарности последовательно по $v, x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2$ и λ_3 с функцией обратной связи $Q(\tau, s) = \tau \ln s$:

$$\begin{cases} -1 + \bar{\lambda}_1 + \bar{\lambda}_2 = 0, \\ \bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_3 = 0, \\ -\bar{\lambda}_1 + \bar{\lambda}_3 = 0, \\ -\bar{x}_2 + \alpha + \bar{v} + \tau \ln(\bar{\lambda}_1) = 0, \\ -\beta + \bar{x}_1 + \bar{v} + \tau \ln(\bar{\lambda}_2) = 0, \\ -\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \tau \ln(\bar{\lambda}_3) = 0. \end{cases} \quad (30)$$

Из (30) получаем $\bar{v} = \tau \ln \left(e^{\frac{\bar{x}_2 - \alpha}{\tau}} + e^{\frac{-\bar{x}_1 + \beta}{\tau}} \right)$ и $\bar{x}_2 - \bar{x}_1 = \tau \ln 2 > 0$, что дает для зависимости v_{x_1} аппроксимацию $\bar{v}(\tau, x_1) = \tau \ln \left(2e^{\frac{x_1 - \alpha}{\tau}} + e^{\frac{-x_1 + \beta}{\tau}} \right)$, график которой показан для значений параметров $\alpha = 1, \beta = 5$ и $\tau = 0,5; 0,2; 0,01$ на рис. 3, а.

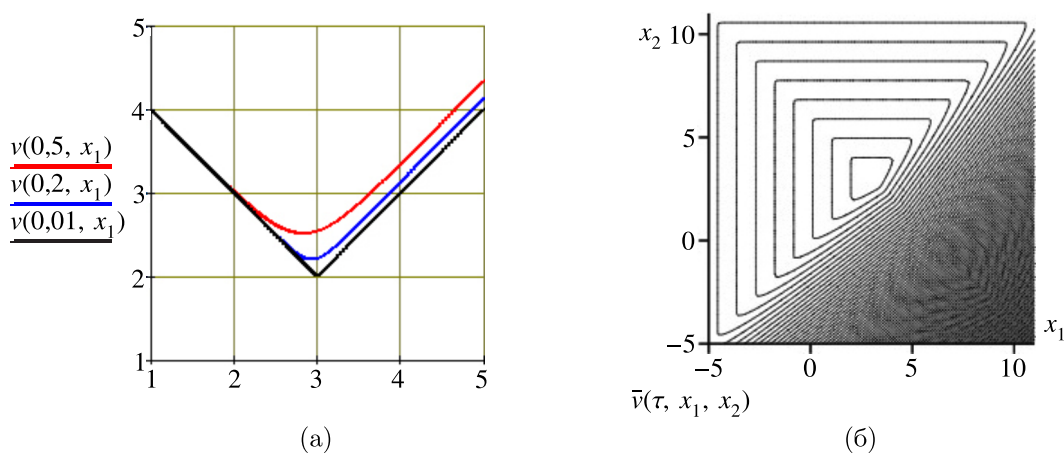


Рис. 3. Графическое представление сглаженных аппроксимаций для задачи 4

В заключение заметим, что использование в описанной схеме для учета ограничения $x_1 \leq x_2$ какой-либо достаточно гладкой штрафной функции позволяет также получать аппроксимацию двумерной зависимости v_{x_1, x_2} . Вид системы изолиний для такой аппроксимации при $\alpha = -5$, $\beta = 11$ и $\tau = 0,05$ показан на рис. 3, б.

6. Использование функций обратных связей в задачах для многокритериальных моделей

Из вышеизложенного следует, что найти в явном виде функцию, аппроксимирующую зависимость x_v^* , удастся лишь в исключительных случаях. Однако часто оказывается достаточным построение лишь ее тейлоровского многочлена. То есть достаточно вычисления $\forall v \in \Upsilon$ как значения аппроксимирующей функции $\bar{x}(\tau, v)$, так и ее частных производных до некоторого порядка.

Покажем, что такой вариант метода функций обратных связей применим при решении задач параметрической оптимизации для многокритериальных математических моделей.

В математическом моделировании, как известно, при формировании критериев качества состояний моделируемого объекта часто возникает несколько независимых друг от друга целевых функций. Допустим, что при этом имеются ограничения на аргументы таких целевых функций.

Конкретно под термином *многокритериальная модель* в данной статье понимается совокупность подлежащих максимизации по $x \in E^n$ функций, зависящих также и от вектора параметров $v \in \Upsilon \subseteq E^K$

$$F_k(x, v) \quad \forall k = \overline{1, N}, \quad (31)$$

при выполнении условий вида

$$f_i(x, v) \leq 0 \quad \forall i = \overline{1, m}. \quad (32)$$

Будем также считать, что все функции $F_k(x, v)$ и $f_i(x, v)$ дважды непрерывно дифференцируемы.

При использовании многокритериальных моделей в процессе принятия управленческих решений естественным образом возникают различные оптимизационные задачи.

Действительно, одновременное достижение всеми целевыми функциями (31) экстремумов в некоторой точке множества, определяемого системой неравенств (32), в общем случае невозможно. Поэтому полезными оказываются решения задач, в которых ищутся допустимые состояния модели, являющиеся в определенном смысле компромиссом для набора критериев (31).

Основой для построения компромисса могут служить решения однокритериальных задач следующего вида:

$$\begin{aligned} & \text{максимизировать } F_k(x, v) \text{ по } x \in E^n \\ & \text{при условиях } f_i(x, v) \leq 0 \quad \forall i = \overline{1, m}. \end{aligned} \quad (33)$$

Решение каждой из этих задач (вектор $x_{(k)v}^*$ и число $F_{(k)v}^* = F_k(x_{(k)v}^*, v)$) $\forall k = \overline{1, N}$ есть наилучшее с точки зрения k -го критерия допустимое состояние модели (31)–(32). Рассмотрим случай, когда задача определения компромиссного состояния заключается в поиске допустимой точки x_v^{**} , которая есть экстремум некоторой количественной оценки «качества компромисса».

Такой оценкой, например, может служить минимум по x , удовлетворяющий ограничениям (32), максимальной из разностей $F_{(k)v}^* - F_k(x_v^{**}, v)$ $\forall k = \overline{1, N}$, то есть решение следующей задачи:

$$\begin{aligned} & \text{максимизировать } -\rho \text{ по } \{x \in E^n; \rho \geq 0\} \\ & \text{при условиях } f_i(x, v) \leq 0 \quad \forall i = \overline{1, m}, \quad F_{(k)v}^* - F_k(x, v) - \rho \leq 0 \quad \forall k = \overline{1, N}. \end{aligned} \quad (34)$$

Решения задачи (34) обозначим как ρ_v^{**} и x_v^{**} . Отметим, что величина зависимости ρ_v^{**} может интерпретироваться как мера *рассогласованности* системы целевых функций в многокритериальной модели (31)–(32).

Для краткости в дальнейшем будем называть задачи (33) задачами *первого уровня*, а задачу (34) — поиска компромиссного состояния многокритериальной модели x_v^{**} — задачей *второго уровня*.

Примерами задач второго уровня, в постановке которой используются решения задач (33), могут также служить известные [Лотов, Поспелова, 2008] в практике математического моделирования методы *свертки целевых функций* (31), методы *поиска равновесия по Парето*, методы *идеальной точки*.

Отметим, что минимаксное значение величины ρ , как решение задачи (34), является некоторой зависимостью от вектора параметров v . У этой зависимости есть отмеченные ранее особенности, осложняющие решение оптимизационных задач, в условие которых она входит.

Наконец, представляется естественной постановка для модели (31)–(32) оптимизационной задачи *третьего уровня*, например такой:

$$\text{найти экстремум } \rho_v^{**} \text{ по } v \in \Upsilon \subseteq E^K. \quad (35)$$

Решением этой задачи будут являться вектор $v^{***} \in \Upsilon$ и число $\rho^{***} = \rho_{v^{***}}^{**}$, то есть экстремум минимакса в задаче (34).

Метод функций обратных связей решения оптимизационных задач для многокритериальных моделей

Одной из причин вычислительных трудностей решения задачи (35) является использование в ее постановке зависимости ρ_v^{**} . Для их преодоления применим метод функций обратных связей, позволяющий строить функцию $\bar{\rho}(\tau, v)$ — гладкую аппроксимацию зависимости ρ_v^{**} .

Предположим, что при поиске локального решения задачи (35) применяется метод второго порядка. То есть для его реализации достаточно иметь значения $\bar{\rho}(\tau, v)$ и всех ее частных производных до второго порядка включительно.

Согласно § 3 значения $\bar{\rho}(\tau, v)$ находятся из условий стационарности для вспомогательной функции (10). Значения же производных могут быть вычислены с помощью теоремы о неявных функциях, примененной к этим условиям стационарности.

Рассмотрим данный подход подробнее для случая многокритериальной модели.

Вначале заметим, что зависимость ρ_v^{**} является решением задачи (34), постановка которой содержит негладкие зависимости $F_{(k)v}^* \forall k = \overline{1, N}$ — решения задач (33). Поэтому сглаживающим свойством метода функций обратных связей воспользуемся не только при решении задач второго уровня (34), но также и для задач (33).

Вспомогательная функция для k -й задачи первого уровня (33) выглядит так:

$$U_k(\tau, x, \Lambda, v) = F_k(x, v) - \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i(x, v) + \sum_{i=1}^m R(\tau, \lambda_i). \quad (36)$$

Условия стационарности функции (36) имеют вид

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial U_k}{\partial x_p} = 0 \quad \forall p = \overline{1, n}, \\ \frac{\partial U_k}{\partial \lambda_i} = 0 \quad \forall i = \overline{1, m} \end{array} \right. \quad \text{или} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{grad}_x F_k(\bar{x}_{(k)}, v) - \sum_{i=1}^m \bar{\lambda}_{(k)i} \text{grad}_x f_i(\bar{x}_{(k)}, v) = o, \\ -f_i(\bar{x}_{(k)}, v) + Q(\tau, \bar{\lambda}_{(k)i}) = 0 \quad \forall i = \overline{1, m}. \end{array} \right. \quad (37)$$

Решение системы (37) позволяет построить

$$\bar{U}_{(k)}(\tau, v) = U_{(k)}(\tau, \bar{x}_{(k)}(\tau, v), \bar{\lambda}_{(k)}(\tau, v), v) \quad (38)$$

— гладкую функцию, которую можно использовать как аппроксимацию зависимостей $F_{(k)v}^*$ в условии задачи второго уровня (34).

Применение теоремы о системе функций, заданных неявно, к условиям стационарности вспомогательной функции (36), дает систему линейных уравнений для производных от функций $\bar{x}(\tau, v)$ и $\bar{\lambda}(\tau, v)$ по параметру $v_t \forall t = \overline{1, k}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{q=1}^n \frac{\partial^2 U_k}{\partial x_p \partial x_q} \frac{\partial \bar{x}_q}{\partial v_t} + \sum_{q=1}^m \frac{\partial^2 U_k}{\partial x_p \partial \lambda_q} \frac{\partial \bar{\lambda}_q}{\partial v_t} = -\frac{\partial^2 U_k}{\partial x_p \partial v_t} \quad \forall p = \overline{1, n}, \\ \sum_{q=1}^n \frac{\partial^2 U_k}{\partial \lambda_i \partial x_q} \frac{\partial \bar{x}_q}{\partial v_t} + \sum_{q=1}^m \frac{\partial^2 U_k}{\partial \lambda_i \partial \lambda_q} \frac{\partial \bar{\lambda}_q}{\partial v_t} = -\frac{\partial^2 U_k}{\partial \lambda_i \partial v_t} \quad \forall i = \overline{1, m}. \end{array} \right. \quad (39)$$

Основная матрица системы линейных уравнений (38) есть матрица Гессе для вспомогательной функции (36), элементы которой, равно как и компоненты столбца правых частей, вычисляются в стационарной точке $\{\bar{x}_{(k)}(\tau, v), \bar{\lambda}_{(k)}(\tau, v)\}$.

Применим теперь метод функций обратных связей для решения задачи *второго уровня* (34).

Запишем условие этой задачи в форме более удобной для построения вспомогательной функции, введя функции $Y_k(\rho, x, v) = \bar{U}_{(k)}(\tau, v) - F_k(x, v) - \rho \forall k = \overline{1, N}$. Тогда условие задачи второго уровня примет следующий вид:

$$\begin{array}{l} \text{максимизировать} \quad -\rho \text{ по } \{x \in E^n; \rho \geq 0\} \\ \text{при условиях } f_i(x, v) \leq 0 \quad \forall i = \overline{1, m}, Y_k(\rho, x, v) \leq 0 \quad \forall k = \overline{1, N}. \end{array}$$

Вспомогательная функция (10) для этой задачи второго уровня выглядит так:

$$U(\tau, \rho, x, \lambda, \mu, v) = -\rho - \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i(x, v) - \sum_{k=1}^N \mu_k Y_k(\rho, x, v) - R(\tau, \rho) + \sum_{i=1}^m R(\tau, \lambda_i) + \sum_{k=1}^N R(\tau, \mu_k). \quad (40)$$

Условия стационарности этой функции имеют вид

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial U}{\partial \rho} = 0, \\ \frac{\partial U}{\partial x_j} = 0 \quad \forall j = \overline{1, n}, \\ \frac{\partial U}{\partial \lambda_i} = 0 \quad \forall i = \overline{1, m}, \\ \frac{\partial U}{\partial \mu_k} = 0 \quad \forall k = \overline{1, N} \end{array} \right. \quad \text{или} \quad \left\{ \begin{array}{l} -1 + \sum_{k=1}^N \bar{\mu}_k - Q(\tau, \bar{\rho}) = 0, \\ -\sum_{i=1}^m \bar{\lambda}_i \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\bar{x}, v) - \sum_{k=1}^N \bar{\mu}_k \frac{\partial Y_k}{\partial x_j}(\bar{\rho}, \bar{x}, v) = 0 \quad \forall j = \overline{1, n}, \\ -f_i(\bar{x}, v) + Q(\tau, \bar{\lambda}_i) = 0 \quad \forall i = \overline{1, m}, \\ -Y_k(\bar{\rho}, \bar{x}, v) + Q(\tau, \bar{\mu}_k) = 0 \quad \forall k = \overline{1, N}; \end{array} \right. \quad (41)$$

здесь $\{\bar{\rho}, \bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}\}$ — стационарная точка вспомогательной функции (40).

Применение теоремы о неявных функциях для условий стационарности вспомогательной функции (40) дает систему линейных уравнений, аналогичную системе (14):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 U}{\partial \rho^2} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial v_t} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 U}{\partial \rho \partial x_j} \frac{\partial \bar{x}_j}{\partial v_t} + \sum_{q=1}^m \frac{\partial^2 U}{\partial \rho \partial \lambda_q} \frac{\partial \bar{\lambda}_q}{\partial v_t} + \sum_{k=1}^N \frac{\partial^2 U}{\partial \rho \partial \mu_k} \frac{\partial \bar{\mu}_k}{\partial v_t} = -\frac{\partial^2 U}{\partial \rho \partial v_t}, \\ \frac{\partial^2 U}{\partial x_p \partial \rho} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial v_t} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 U}{\partial x_p \partial x_j} \frac{\partial \bar{x}_j}{\partial v_t} + \sum_{q=1}^m \frac{\partial^2 U}{\partial x_p \partial \lambda_q} \frac{\partial \bar{\lambda}_q}{\partial v_t} + \sum_{k=1}^N \frac{\partial^2 U}{\partial x_p \partial \mu_k} \frac{\partial \bar{\mu}_k}{\partial v_t} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x_p \partial v_t} \quad \forall p = \overline{1, n}, \\ \frac{\partial^2 U}{\partial \lambda_i \partial \rho} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial v_t} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 U}{\partial \lambda_i \partial x_j} \frac{\partial \bar{x}_j}{\partial v_t} + \sum_{q=1}^m \frac{\partial^2 U}{\partial \lambda_i \partial \lambda_q} \frac{\partial \bar{\lambda}_q}{\partial v_t} + \sum_{k=1}^N \frac{\partial^2 U}{\partial \lambda_i \partial \mu_k} \frac{\partial \bar{\mu}_k}{\partial v_t} = -\frac{\partial^2 U}{\partial \lambda_i \partial v_t} \quad \forall i = \overline{1, m}, \\ \frac{\partial^2 U}{\partial \mu_s \partial \rho} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial v_t} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 U}{\partial \mu_s \partial x_j} \frac{\partial \bar{x}_j}{\partial v_t} + \sum_{q=1}^m \frac{\partial^2 U}{\partial \mu_s \partial \lambda_q} \frac{\partial \bar{\lambda}_q}{\partial v_t} + \sum_{k=1}^N \frac{\partial^2 U}{\partial \mu_s \partial \mu_k} \frac{\partial \bar{\mu}_k}{\partial v_t} = -\frac{\partial^2 U}{\partial \mu_s \partial v_t} \quad \forall s = \overline{1, N}, \end{array} \right. \quad (42)$$

решения которой — производные от функций $\{\bar{\rho}, \bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}\}$ по параметру $v_t \forall t = \overline{1, k}$.

Напомним, что теорема о неявных функциях применима также и для вычисления производных от $\{\bar{\rho}, \bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}\}$ по параметру τ . Значения этих производных могут быть использованы в экстраполяционных процедурах для уменьшения погрешности сглаженной аппроксимации по формулам

$$\tilde{x}_j = \bar{x}_j(\tau, v) - \tau \frac{\partial \bar{x}_j}{\partial \tau} \quad \forall j = \overline{1, n} \quad \text{и} \quad \tilde{\lambda}_i = \bar{\lambda}_i(\tau, v) - \tau \frac{\partial \bar{\lambda}_i}{\partial \tau} \quad \forall i = \overline{1, m}.$$

Рассмотрим теперь задачу *третьего уровня*. В качестве гладкой аппроксимации зависимости ρ_v^{**} выберем функцию

$$\bar{U}(\tau, v) = U(\tau, \bar{\rho}(\tau, v), \bar{x}(\tau, v), \bar{\lambda}(\tau, v), \bar{\mu}(\tau, v), v). \quad (43)$$

Согласно правилу дифференцирования сложной функции частная производная от \bar{U} по v_t имеет вид

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial v_t} = \frac{\partial U}{\partial v_t} + \frac{\partial U}{\partial \rho} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial v_t} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial U}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{x}_j}{\partial v_t} + \sum_{i=1}^m \frac{\partial U}{\partial \lambda_i} \frac{\partial \bar{\lambda}_i}{\partial v_t} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial U}{\partial \mu_k} \frac{\partial \bar{\mu}_k}{\partial v_t}.$$

Все частные производные от функции $\overline{\overline{U}}$ в этой формуле берутся в точке $\{\tau, \overline{\overline{\rho}}, \overline{\overline{x}}, \overline{\overline{\lambda}}, \overline{\overline{\mu}}, v\}$. Поэтому, в силу (41), выражение для производной упрощается до

$$\frac{\partial \overline{\overline{U}}}{\partial v_t} = \frac{\partial U}{\partial v_t}(\tau, \overline{\overline{\rho}}(\tau, v), \overline{\overline{x}}(\tau, v), \overline{\overline{\lambda}}(\tau, v), \overline{\overline{\mu}}(\tau, v), v) \quad \forall t = \overline{1, K}. \quad (44)$$

Таким образом, при решении задачи третьего уровня любым методом первого порядка достаточно иметь возможность находить решения систем (37) и (41) $\forall v \in \Upsilon$. Погрешность определяется величиной параметра τ .

В случае использования методов второго порядка потребуются также значения вторых производных аппроксимирующей функции (43). Непосредственное дифференцирование формулы (44) с учетом (41) дает

$$\frac{\partial^2 \overline{\overline{U}}}{\partial v_s \partial v_t} = \frac{\partial^2 U}{\partial v_s \partial v_t} + \frac{\partial^2 U}{\partial v_s \partial \rho} \frac{\partial \overline{\overline{\rho}}}{\partial v_t} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 U}{\partial v_s \partial x_j} \frac{\partial \overline{\overline{x}}_j}{\partial v_t} + \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 U}{\partial v_s \partial \lambda_i} \frac{\partial \overline{\overline{\lambda}}_i}{\partial v_t} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 U}{\partial v_s \partial \mu_k} \frac{\partial \overline{\overline{\mu}}_k}{\partial v_t} \quad \forall s, t = \overline{1, K}. \quad (45)$$

Откуда следует, что в этом случае придется также решать и линейную систему (42).

Иллюстративный пример

Использование функций обратных связей для решения трехуровневой оптимизационной параметрической задачи проиллюстрируем следующим примером.

Хотя этот пример сравнительно прост, он достаточно полно демонстрирует особенности задач параметрической оптимизации для многокритериальных математических моделей.

Пусть подлежащие максимизации по $x \in E^3$ с $v \in E^2$ целевые функции модели имеют вид

$$F_1(x, v) = x_1, \quad F_2(x, v) = x_2, \quad F_3(x, v) = x_3.$$

Множество допустимых состояний модели задается системой неравенств

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \quad \frac{x_1}{v_1} + \frac{x_2}{v_2} + \frac{x_3}{A - v_1 - v_2} \leq 1.$$

Наконец, множество Υ определено как

$$1 \leq v_1 \leq B, \quad 1 \leq v_2 \leq B, \quad 2v_1 + v_2 \geq C,$$

где $A = 11$, $B = 5$ и $C = 7$.

В рассматриваемой модели $K = 3$, и задачи первого уровня будут иметь следующий вид:

$$\forall k = 1, 2, 3 \text{ максимизировать } F_{(k)} = x_{(k)k} \text{ по } x \in E^3 \\ \text{при условиях } x_{(k)1} \geq 0, \quad x_{(k)2} \geq 0, \quad x_{(k)3} \geq 0, \quad \frac{x_{(k)1}}{v_1} + \frac{x_{(k)2}}{v_2} + \frac{x_{(k)3}}{A - v_1 - v_2} \leq 1.$$

Для решения этих задач выберем функцию обратных связей $Q(\tau, s) = \frac{\tau}{2} \left(s - \frac{1}{s} \right)$ и, в силу (9), $R(\tau, s) = \frac{\tau}{2} \left(\frac{s^2}{2} - \ln s - \frac{1}{2} \right)$. Тогда вспомогательная функция (36) для этих задач может быть записана как

$$U_{(k)}(x, v) = x_{(k)k} - \lambda_{(k)} \left(\frac{x_{(k)1}}{v_1} + \frac{x_{(k)2}}{v_2} + \frac{x_{(k)3}}{A - v_1 - v_2} - 1 \right) - \\ - R(\tau, x_{(k)1}) - R(\tau, x_{(k)2}) - R(\tau, x_{(k)3}) + R(\tau, \lambda_{(k)}). \quad (46)$$

Соответственно, условия ее стационарности будут иметь вид

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta_{k1} - \frac{\bar{\lambda}_{(k)}}{v_1} - Q(\tau, \bar{x}_{(k)1}) = 0, \\ \delta_{k2} - \frac{\bar{\lambda}_{(k)}}{v_2} - Q(\tau, \bar{x}_{(k)2}) = 0, \\ \delta_{k3} - \frac{\bar{\lambda}_{(k)}}{A - v_1 - v_2} - Q(\tau, \bar{x}_{(k)3}) = 0, \\ \frac{\bar{x}_{(k)1}}{v_1} + \frac{\bar{x}_{(k)2}}{v_2} + \frac{\bar{x}_{(k)3}}{A - v_1 - v_2} - 1 - Q(\tau, \bar{\lambda}_{(k)}) = 0. \end{array} \right. \quad (47)$$

В свою очередь, решения системы (47) позволяют находить значения функций (38), которые в рассматриваемом примере определяются следующими из (46) и (47) формулами

$$\bar{U}_{(k)}(\tau, v) = x_{(k)k}(\tau, v) - R(\tau, \bar{x}_{(k)1}(\tau, v)) - R(\tau, \bar{x}_{(k)2}(\tau, v)) - R(\tau, \bar{x}_{(k)3}(\tau, v)) + R(\tau, \bar{\lambda}_{(k)}) - \bar{\lambda}_{(k)} Q(\tau, \bar{\lambda}_{(k)}). \quad (48)$$

Компоненты их градиентов по v суть

$$\frac{\partial \bar{U}_{(k)}}{\partial v_1} = \frac{\bar{\lambda}_{(k)} \bar{x}_{(k)1}}{v_1^2} - \frac{\bar{\lambda}_{(k)} \bar{x}_{(k)3}}{(A - v_1 - v_2)^2}, \quad \frac{\partial \bar{U}_{(k)}}{\partial v_2} = \frac{\bar{\lambda}_{(k)} \bar{x}_{(k)2}}{v_2^2} - \frac{\bar{\lambda}_{(k)} \bar{x}_{(k)3}}{(A - v_1 - v_2)^2} \quad \forall k = \overline{1, K}. \quad (49)$$

Применим теперь метод функций обратных связей для решения задачи второго уровня.

В формулировке этой задачи вместо зависимостей $F_{(k)v}^*$ используем их сглаженные аппроксимации $\bar{U}_{(k)}(\tau, v_1, v_2) \quad \forall k = 1, 2, 3$. Тогда задача второго уровня для рассматриваемой модели примет следующий вид:

максимизировать $-\rho$

при условиях $\rho \geq 0, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0,$

$$\frac{x_1}{v_1} + \frac{x_2}{v_2} + \frac{x_3}{A - v_1 - v_2} \leq 1, \quad (50)$$

$$\bar{U}_{(1)}(\tau, v_1, v_2) - x_1 - \rho \leq 0,$$

$$\bar{U}_{(2)}(\tau, v_1, v_2) - x_2 - \rho \leq 0,$$

$$\bar{U}_{(3)}(\tau, v_1, v_2) - x_3 - \rho \leq 0.$$

Вспомогательная функция задачи второго уровня будет иметь вид

$$\begin{aligned} U(\tau, \rho, x, \lambda, \mu) = & -\rho - \lambda \left(\frac{x_1}{v_1} + \frac{x_2}{v_2} + \frac{x_3}{A - v_1 - v_2} - 1 \right) - \\ & - \mu_1 (\bar{U}_{(1)}(\tau, v_1, v_2) - x_1 - \rho) - \mu_2 (\bar{U}_{(2)}(\tau, v_1, v_2) - x_2 - \rho) - \mu_3 (\bar{U}_{(3)}(\tau, v_1, v_2) - x_3 - \rho) - \\ & - R(\tau, \rho) - R(\tau, x_1) - R(\tau, x_2) - R(\tau, x_3) + R(\tau, \lambda) + R(\tau, \mu_1) + R(\tau, \mu_2) + R(\tau, \mu_3), \end{aligned}$$

где λ и $\mu = \{\mu_1, \mu_2, \mu_3\}$ — множители Лагранжа четырех последних ограничений в (50).

Откуда условия, определяющие стационарные точки вспомогательной функции, суть

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial U}{\partial \rho} = 0, \\ \frac{\partial U}{\partial x_1} = 0, \\ \frac{\partial U}{\partial x_2} = 0, \\ \frac{\partial U}{\partial x_3} = 0, \\ \frac{\partial U}{\partial \lambda} = 0, \\ \frac{\partial U}{\partial \mu_1} = 0, \\ \frac{\partial U}{\partial \mu_2} = 0, \\ \frac{\partial U}{\partial \mu_3} = 0 \end{array} \right. \quad \text{или} \quad \left\{ \begin{array}{l} -1 + \bar{\mu}_1 + \bar{\mu}_2 + \bar{\mu}_3 - Q(\tau, \bar{\rho}) = 0, \\ -\frac{\bar{\lambda}}{v_1} + \bar{\mu}_1 - Q(\tau, \bar{x}_1) = 0, \\ -\frac{\bar{\lambda}}{v_2} + \bar{\mu}_2 - Q(\tau, \bar{x}_2) = 0, \\ -\frac{\bar{\lambda}}{A - v_1 - v_2} + \bar{\mu}_3 - Q(\tau, \bar{x}_3) = 0, \\ \frac{\bar{x}_1}{v_1} + \frac{\bar{x}_2}{v_2} + \frac{\bar{x}_3}{A - v_1 - v_2} - 1 - Q(\tau, \bar{\lambda}) = 0, \\ \bar{U}_{(1)}(\tau, v_1, v_2) - \bar{x}_1 - \bar{\rho} - Q(\tau, \bar{\mu}_1) = 0, \\ \bar{U}_{(2)}(\tau, v_1, v_2) - \bar{x}_2 - \bar{\rho} - Q(\tau, \bar{\mu}_2) = 0, \\ \bar{U}_{(3)}(\tau, v_1, v_2) - \bar{x}_3 - \bar{\rho} - Q(\tau, \bar{\mu}_3) = 0. \end{array} \right. \quad (51)$$

Получив решения системы (51), можно построить сглаживающую аппроксимацию для зависимости ρ_v^{**} , которая используется в постановке задачи третьего уровня. В качестве такой аппроксимации возьмем функцию

$$\begin{aligned} \bar{U}(\tau, v) &= U(\tau, \bar{\rho}(\tau, v), \bar{x}(\tau, v), \bar{\lambda}(\tau, v), \bar{\mu}(\tau, v)) = \\ &= -\bar{\rho} - \bar{\lambda}Q(\tau, \bar{\lambda}) - \bar{\mu}_1Q(\tau, \bar{\mu}_1) - \bar{\mu}_2Q(\tau, \bar{\mu}_2) - \bar{\mu}_3Q(\tau, \bar{\mu}_3) - \\ &\quad - R(\tau, \bar{\rho}) - R(\tau, \bar{x}_1) - R(\tau, \bar{x}_2) - R(\tau, \bar{x}_3) + \\ &\quad + R(\tau, \bar{\lambda}) + R(\tau, \bar{\mu}_1) + R(\tau, \bar{\mu}_2) + R(\tau, \bar{\mu}_3), \end{aligned}$$

компоненты градиента которой, согласно (44), равны

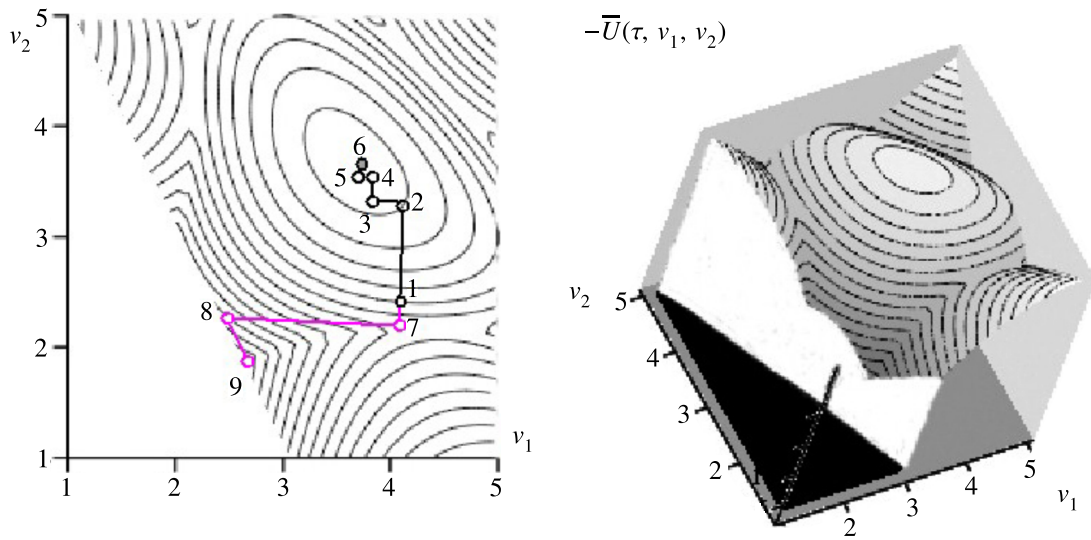
$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{U}}{\partial v_1} &= \frac{\bar{\lambda}\bar{x}_1}{v_1^2} - \frac{\bar{\lambda}\bar{x}_3}{(A - v_1 - v_2)^2} - \bar{\mu}_1 \frac{\partial \bar{U}_{(1)}}{\partial v_1} - \bar{\mu}_2 \frac{\partial \bar{U}_{(2)}}{\partial v_1} - \bar{\mu}_3 \frac{\partial \bar{U}_{(3)}}{\partial v_1}, \\ \frac{\partial \bar{U}}{\partial v_2} &= \frac{\bar{\lambda}\bar{x}_2}{v_2^2} - \frac{\bar{\lambda}\bar{x}_3}{(A - v_1 - v_2)^2} - \bar{\mu}_1 \frac{\partial \bar{U}_{(1)}}{\partial v_2} - \bar{\mu}_2 \frac{\partial \bar{U}_{(2)}}{\partial v_2} - \bar{\mu}_3 \frac{\partial \bar{U}_{(3)}}{\partial v_2}, \end{aligned} \quad (52)$$

где значения частных производных в правых частях определяются из (49).

Для большей наглядности рассмотрим легко проверяемый вариант задачи третьего уровня: найти локальные экстремальные значения зависимости ρ_v^{**} в случае, когда множество $\Upsilon \subset E^2$

$$\text{определяется системой неравенств} \quad \begin{cases} 1 \leq v_1 \leq 5, \\ 1 \leq v_2 \leq 5, \\ 2v_1 + v_2 \geq 7. \end{cases}$$

Геометрически эта задача допускает такую интерпретацию: требуется найти значения параметров v_1 и v_2 , оптимизирующих (по величине рассогласования критериев) форму множества Парето рассматриваемой многокритериальной модели. Система изолиний и пространственный график функции $-\bar{U}(v_1, v_2)$ — аппроксимации зависимости ρ_v^{**} , показаны на рис. 4.

Рис. 4. Система изолиний и 3D-график функции $-\bar{U}(\tau, v_1, v_2)$

Для поиска максимума в задаче третьего уровня применен метод *наискорейшего подъема*. В качестве направляющего вектора w использовался *нормированный градиент* функции $-\bar{U}$. Величина шага по этому направлению оценивалась из условия достижения максимума вдоль w .

Основные количественные характеристики для нескольких начальных итераций процесса решения при $\tau = 0,01$ приведены в табл. 4. Точное решение задачи третьего уровня (поиска локального максимума) (точка 6 на рис. 4) имеет вид

$$v_1^{**} = \frac{11}{3}, \quad v_2^{**} = \frac{11}{3}, \quad \rho_{v^{**}} = \frac{22}{9}.$$

Таблица 4. Решения задачи третьего уровня на максимум

Точка на рис. 4	v_1	v_2	$-\bar{U}$	Норма град.	w_1	w_2	Шаг
1	4,000000000	2,500000000	2,292876919	0,292812466	0,117759800	0,993042109	0,925000000
2	4,108927815	3,418563950	2,427442369	0,070259924	-0,993862751	0,110620212	0,360000000
3	3,751137224	3,458387226	2,440214361	0,041937320	0,104185521	0,994557880	0,151750000
4	3,766947377	3,609311384	2,443407623	0,017053825	-0,994280382	0,106801322	0,080651500
5	3,686757173	3,617925071	2,4444096417	0,009512746
Точное решение	3,666666667	3,666666667	2,444444444				

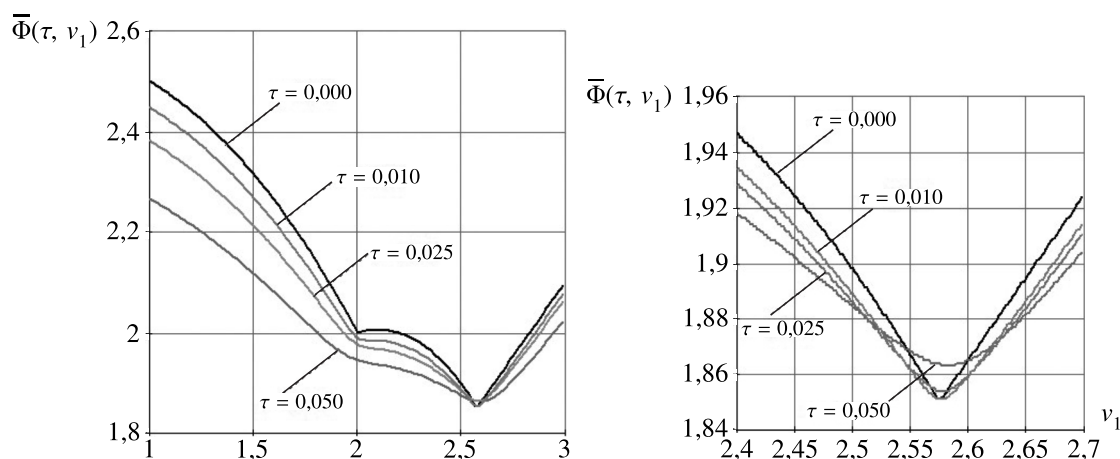
Локальный минимум в задаче третьего уровня определялся методом *проекции антиградиента*. Количественные характеристики первых трех шагов соответствующего итерационного процесса при $\tau = 0,01$ приведены в табл. 5. Точное решение задачи в этом примере (точка 9 на рис. 4) имеет вид

$$v_1^{**} = \frac{1 + \sqrt{141}}{5}, \quad v_2^{**} = \frac{33 - 2\sqrt{141}}{5}, \quad \rho_{v^{**}} = \frac{33 - 2\sqrt{141}}{5}.$$

Для демонстрации сглаживающего свойства метода функций обратных связей на рис. 5 приведены графики функции $\bar{\Phi}(\tau, v_1) = -\bar{U}(\tau, v_1, 7 - 2v_1)$ при $\tau = 0,05; 0,025; 0,01$, а также $\tau \rightarrow +0$.

Таблица 5. Решения задачи третьего уровня на минимум

Точка на рис. 4	v_1	v_2	$-\bar{U}$	Норма град.	w_1	w_2	Шаг
1	4,000000000	2,500000000	2,292876919	0,292812466	-0,117759800	-0,993042109	0,320363750
7	3,962274029	2,181865306	2,181828016	0,085751139	-0,993052354	0,117673374	1,662578285
8	2,311246750	2,377506503	1,976736712	0,433886194	0,447213595	-0,894427191	0,589481987
9	2,574871109	1,850257785	1,850234349
Точное решение	2,574868417	1,850263165	1,850263165				

Рис. 5. Графики функции $\bar{\Phi}(\tau, v_1)$

7. Заключение

В данной статье описана схема решения задач параметрического программирования, допускающая при своей реализации использование представления функций по формуле Тейлора.

Основой предлагаемой схемы является построение гладкой аппроксимации зависимости оптимальных значений переменных от параметров. Построение аппроксимации сводится к поиску седловых точек у модифицированной специальным образом функции Лагранжа.

Специфика применяемой модификации заключается в использовании функций, устанавливающих обратные связи между прямыми переменными и множителями Лагранжа в условиях оптимальности.

При этом поиск седловых точек сводится к решению системы уравнений, аналогичной по структуре условиям оптимальности в теореме Каруша – Куна – Таккера, но без ограничений неотрицательности и дополняющей нежесткости.

Приводятся описания свойств функций обратных связей, обеспечивающих требуемую гладкость аппроксимации, а также оценивается ее погрешность.

Варианты использования предлагаемого подхода иллюстрируются решениями некоторых классов задач, содержащих параметры, или сводящихся к ним.

Сравнивая предлагаемый подход с другими алгоритмами решения задач (1), использующих тейлоровские разложения, можно отметить следующее.

Методологически этот подход подобен как методу штрафных функций, так и методам модификации функции Лагранжа.

Основное сходство заключается в том, что задача математического программирования сводится к решению систем нелинейных уравнений с последовательно устремляемым к предельному значению некоторым инструментальным параметром.

При этом отдельные типы функций обратных связей могут быть получены некоторым преобразованием непосредственно из штрафных функций специального класса. Верно также, что из функций обратных связей можно получать и некоторые типы штрафных функций.

Наконец, являющаяся основой метода функций обратных связей система нелинейных уравнений (10) (реализующая обратную связь между оценками прямых переменных и множителями Лагранжа) оказывается одновременно и необходимым условием стационарности для модифицированной функции Лагранжа задачи (1).

Между упомянутыми методами и методом функций обратных связей имеется также и существенное различие: для основных стандартных типов штрафных или модифицирующих функций (таких как функции-срезки, кусочно-гладкие или барьерные функции) построение функций обратных связей невозможно.

Накопленный к настоящему времени опыт позволяет дать следующие оценки целесообразности практического использования метода функций обратных связей.

1. В рассматриваемом подходе гладкость аппроксимации сочетается с возможностью регулирования ее погрешности (путем подбора значения инструментального параметра τ). Откуда следует целесообразность применения рассматриваемого подхода для предварительной приближенной оценки решений, которые можно затем использовать в качестве начальных приближений в других методах.

2. Предлагаемый алгоритм является частным случаем прямодвойственных методов решения задачи (1), эффективность которых известна [Жадан, 2015]. Особенно наглядно это демонстрирует процедура решения системы (10) в случае, когда одна из задач в двойственной линейной паре плохо обусловлена, а вторая переопределена [Умнов, Умнов, 2018, § 4.3].

3. С другой стороны, описанное в § 4 сведение процедуры решения задачи (1) к интегрированию с последующим предельным переходом, очевидно, не самое эффективное с вычислительной точки зрения. Однако использование функций обратных связей в интегральной форме может оказаться полезным в теоретических исследованиях.

Укажем теперь некоторые возможные направления дальнейшего развития предлагаемого подхода.

Первое из них — оценка эффективности практического использования метода функций обратных связей и подобных вычислительных схем. Хотя, по мнению авторов, такая оценка выходит за рамки данной статьи и представляется предметом самостоятельного исследования, тем не менее некоторые соображения можно высказать уже здесь.

Например, можно избежать необходимости специального контроля за выполнением условия $s > 0$ при вычислении значений функции обратных связей в пробных точках процесса решения системы (10) и снизить его зависимость от выбора начальных приближений. Для этого достаточно заменить неотрицательные неизвестные в (10) их абсолютными величинами. Иначе говоря, решать не систему (10), а, например, систему

$$\begin{cases} \text{grad}_x U(\tau, |\bar{x}_1|, |\bar{x}_2|, \dots, |\bar{x}_n|, |\bar{\lambda}_1|, |\bar{\lambda}_2|, \dots, |\bar{\lambda}_m|, \nu) = 0, \\ \text{grad}_\lambda U(\tau, |\bar{x}_1|, |\bar{x}_2|, \dots, |\bar{x}_n|, |\bar{\lambda}_1|, |\bar{\lambda}_2|, \dots, |\bar{\lambda}_m|, \nu) = 0, \end{cases} \quad (53)$$

в которой левые части уравнений являются четными функциями компонент векторов \bar{x} и $\bar{\lambda}$.

В этом случае процесс решения (53) может завершиться в любом ортанте $E^n \otimes E^m$, однако решение системы (10), очевидно, получатся из решения (53) простой заменой найденных значений компонент \bar{x} и $\bar{\lambda}$ их абсолютными величинами.

Перспективным, по мнению авторов, является также исследование сходимости процедуры решения системы (10) в случае, когда одна из задач в двойственной паре плохо обусловлена, а вторая переопределена.

Другим возможным направлением для дальнейших исследований представляется расширение класса функций обратных связей. Речь может идти, скажем, о функциях $Q(\tau, s)$, определенных $\forall s \in R$. Действительно, непосредственной проверкой можно, например, убедиться в том, что $Q(\tau, s) = \tau s - \exp\left(-\frac{s}{\tau}\right)$, определенная $\forall s \in R$, обладает всеми необходимыми свойствами функции обратных связей.

Наконец, также представляет интерес рассмотрение новых классов задач, которые сводятся к постановке (1) и для решения которых метод функций обратных связей может оказаться эффективным.

Например, метод функций обратных связей можно применить при решении оптимизационных задач для комплекса математических моделей или же в случае, когда превращение некоторого подмножества переменных в параметры позволяет свести решение нелинейной задачи к серии линейных. Аналогичные подходы с использованием метода гладких штрафных функций (метод *распределенного моделирования* и схема *параметрической линеаризации*) рассмотрены в [Умнов, Умнов, 2018].

Список литературы (References)

- Гермейер Ю. Б. Приближенное сведение с помощью штрафных функций задачи определения максимина к задаче определения максимума // ЖВМ-МФ. — 1969. — Т. 9, № 3. — С. 730–731.
Germeyyer Yu. B. Approximate reduction using penalty functions of the problem of determining the maximin to the problem of determining the maximum // USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 1969. — Vol. 9, Issue 3. — P. 325–328. — DOI: [https://doi.org/10.1016/0041-5553\(69\)90086-X](https://doi.org/10.1016/0041-5553(69)90086-X) (Original Russian paper: Germeyyer Yu. B. Priblizhennoye svedeniye s pomoshch'yu shtrafnykh funktsiy zadachi opredeleniya maksimina k zadache opredeleniya maksimuma // ZHVM-MF. — 1969. — Vol. 9, No. 3. — P. 730–731.)
- Гольштейн Е. Г., Третьяков Н. В. Модифицированные функции Лагранжа. — М.: Наука, 1989. — С. 400.
Gol'shteyn E. G., Tret'yakov N. V. Modifitsirovannyye funktsii Lagranzha [Modified Lagrange functions]. — Moscow: Nauka, 1989. — P. 400 (in Russian).
- Демьянов В. Ф., Васильев Л. В. Недифференцируемая оптимизация. — М.: Наука, 1981. — С. 384.
Dem'yanov V. F., Vasil'yev L. V. Nedifferentsiruyemaya optimizatsiya [Non-differentiable optimization]. — Moscow: Nauka, 1981. — P. 384 (in Russian).
- Демьянов В. Ф., Малоземов В. Н. Введение в минимакс. — М.: Наука, 1972. — С. 368.
Dem'yanov V. F., Malozemov V. N. Vvedeniye v minimaks [Introduction to minimax]. — Moscow: Nauka, 1972. — P. 368 (in Russian).
- Жадан В. Г. Методы оптимизации. Ч. 2. Численные алгоритмы. § 7.2. — М.: МФТИ, 2015. — 320 с.
Zhadan V. G. Metody optimizatsii. Ch. 2. Chislennyye algoritmy. § 7.2 [Optimization methods. Part 2. Numerical algorithms]. — Moscow: MFTI, 2015. — 320 p. (in Russian).
- Измаилов А. Ф. Чувствительность в оптимизации. — М.: Физматлит, 2006. — 245 с.
Izmailov A. F. Chuvstvitel'nost' v optimizatsii [Sensitivity in optimization]. — Moscow: Fizmatlit, 2006. — 245 p. (in Russian).
- Лотов А. В., Поспелова И. И. Многокритериальные задачи принятия решений. — М.: МАКС Пресс, 2008. — 197 с.
Lotov A. V., Pospelova I. I. Mnogokriterial'nyye zadachi prinyatiya resheniy [Multicriteria decision making problems]. — Moscow: MAKS Press, 2008. — 197 p. (in Russian).
- Нурминский Е. А. Численные методы выпуклой оптимизации. — М.: Наука, 1991. — 168 с.
Nurminskiy E. A. Chislennyye metody vypukloy optimizatsii [Numerical methods for convex optimization]. — Moscow: Nauka, 1991. — 168 p. (in Russian).
- Скарин В. Д. Об одном общем подходе в оптимальной коррекции несобственных задач выпуклого программирования // Труды Института математики и механики УрО РАН. — 2010. — Т. 16, № 3. — С. 265–275.
Skarin V. D. Ob odnom obshchem podkhode v optimal'noy korrektsii nesobstvennykh zadach vypuklogo programmirovaniya [On a general approach to optimal correction of improper convex programming problems] // Trudy Instituta matematiki i mekhaniki UrO RAN. — 2010. — Vol. 16, No. 3. — P. 265–275 (in Russian).

- Умнов А. Е. Многошаговая линейная экстраполяция в методе штрафных функций // ЖВМ-МФ. — 1974. — Т. 14, № 6. — С. 1451–1463.
*Umnov A. E. Multi-step linear extrapolation in the penalty function method // USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 1974. — Vol. 14, Issue 6. — P. 77–89. — DOI: [https://doi.org/10.1016/0041-5553\(74\)90171-2](https://doi.org/10.1016/0041-5553(74)90171-2) (Original Russian Paper: *Umnov A. E. Mnogoshagovaya lineynaya ekstrapolyatsiya v metode shtrafnyykh funktsiy // ZhVM-MF. — 1974. — Vol. 14, No. 6. — P. 1451–1463.*)*
- Умнов А. Е., Умнов Е. А. Использование функций обратных связей в задачах линейного программирования // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 2019. — Т. 59, № 10. — С. 1681–1694.
*Umnov A. E. Using feedback functions in linear programming problems // Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 2019. — Vol. 59, Issue 10. — P. 1626–1638. — DOI: <https://doi.org/10.1134/S0965542519100142> (Original Russian paper: *Umnov A. E., Umnov E. A. Ispol'zovaniye funktsiy obratnykh svyazey v zadachakh lineynogo programmirovaniya // Zh. vychisl. matem. i matem. fiz. — 2019. — Vol. 59, No. 10. — P. 1681–1694.*)*
- Умнов Е. А., Умнов А. Е. Параметрические задачи в математическом программировании. — М.: МФТИ, 2018. — 297 с. — www.umnov.ru
Umnov E. A., Umnov A. E. Parametricheskiye zadachi v matematicheskom programmirovanii [Parametric problems in mathematical programming]. — Moscow: MFTI, 2018. — 297 p. — www.umnov.ru (in Russian).
- Умнов Е. А., Умнов А. Е. Параметрический анализ в задачах математического программирования // Труды МФТИ. — 2014. — Т. 6, № 3. — С. 73–83.
Umnov E. A., Umnov A. E. Parametricheskij analiz v zadachakh matematicheskogo programmirovaniya [Parametric analysis in problems of mathematical programming] // Trudy MFTI. — 2014. — Vol. 6, No. 3. — P. 73–83 (in Russian).
- Федоров В. В. Численные методы максимина. — М.: Наука, 1979. — 279 с.
Fedorov V. V. Chislennyye metody maksimina [Numerical methods of maximin]. — Moscow: Nauka, 1979. — 279 p. (in Russian).
- Федорюк М. В. Метод перевала. — М.: Наука, 1977. — 368 с.
Fedoryuk M. V. Metod perevala [Pass method]. — Moscow: Nauka, 1977. — 368 p. (in Russian).
- Danskin J. The theory of max-min and its application to weapons allocation problems. — NY: Springer, 1967.
- Fiacco A. V. Introduction to sensitivity and stability analysis in nonlinear programming. — NY: Academic Press, 1983.
- Fiacco A. V., McCormick G. P. Nonlinear programming: sequential unconstrained minimization techniques. — NY: John Wiley and Sons, 1968. — 210 p.
- Rockafellar T. Convex analysis. — Princeton University Press, 1970. — Vol. 3.
- Umnov A. E., Umnov E. A. Feedback functions in problems of nonlinear programming // SCIREA Journal of Mathematics. — 2022. — Vol. 7, Issue 5. — P. 67–82. — DOI: [10.54647/mathematics11348](https://doi.org/10.54647/mathematics11348)