

УДК: 519.6; 539.3

Прогнозирование потери несущей способности пологих выпуклых оболочек на основе анализа нелинейных колебаний

В. А. Грачев^а, Ю. С. Найштут^б

Архитектурно-строительная академия Самарского государственного технического университета,
Россия, 443001, г. Самара, ул. Молодогвардейская, д. 194

E-mail: ^а grach_va@rambler.ru, ^б neustadt99@mail.ru

Получено 16.01.2023, после доработки — 25.03.2023.

Принято к публикации 10.07.2023.

Задачи потери устойчивости тонких упругих оболочек снова стали актуальными, так как в последние годы обнаружено несоответствие между стандартами многих стран по определению нагрузок, вызывающих потерю несущей способности пологих оболочек, и результатами экспериментов по испытаниям тонкостенных авиационных конструкций, изготовленных из высокопрочных сплавов. Основное противоречие состоит в том, что предельные внутренние напряжения, при которых наблюдается потеря устойчивости (хлопок) оболочек, оказываются меньше тех, которые предсказывает принятая теория расчета, отраженная в стандартах США и Европы. Действующие нормативные акты основаны на статической теории пологих оболочек, предложенной в 1930-е годы: в рамках нелинейной теории упругости для тонкостенных структур выделяются устойчивые решения, значительно отличающиеся от форм равновесия, присущих небольшим начальным нагрузкам. Минимальная величина нагрузки, при которой существует альтернативная форма равновесия (низшая критическая нагрузка), принималась в качестве предельно допустимой. В 1970-е годы было установлено, что такой подход оказывается неприемлемым при сложных нагружениях. Подобные случаи ранее не встречались на практике, сейчас они появились на более тонких изделиях, эксплуатируемых в сложных условиях. Поэтому необходим пересмотр исходных теоретических положений по оценке несущей способности. Основой теории могут служить недавние математические результаты, установившие асимптотическую близость расчетов по двум схемам: трехмерной динамической теории упругости и динамической теории пологих выпуклых оболочек. В предлагаемой работе вначале формулируется динамическая теория пологих оболочек, которая затем сводится к одному разрешающему интегро-дифференциальному уравнению (после построения специальной функции Грина). Показано, что полученное нелинейное уравнение допускает разделение переменных, имеет множество периодических по времени решений, которые удовлетворяют уравнению Дуффинга «с мягкой пружиной». Это уравнение хорошо изучено, его численный анализ позволяет находить амплитуду и период колебаний в зависимости от свойств функции Грина. Если вызвать колебания оболочки с помощью пробной гармонической по времени нагрузки, то можно измерить перемещения точек поверхности в момент максимальной амплитуды. Предлагается экспериментальная установка, в которой генерируются резонансные колебания пробной нагрузкой, направленной по нормали к поверхности. Экспериментальные измерения перемещений оболочки, а также амплитуды и периода колебаний дают возможность рассчитать коэффициент запаса несущей способности конструкции неразрушающим методом в условиях эксплуатации.

Ключевые слова: динамические уравнения пологих оболочек, нелинейные колебания, тензор Грина, уравнение Дуффинга, коэффициент запаса, прогноз потери устойчивости

UDC: 519.6; 539.3

Buckling prediction for shallow convex shells based on the analysis of nonlinear oscillations

V. A. Grachev^a, Yu. S. Nayshtut^b

Academy of Building and Architecture Samara State Technical University,
194 Molodogvardeiskaya st., Samara, 443001, Russia

E-mail: ^a grach_va@rambler.ru, ^b neustadt99@mail.ru

Received 16.01.2023, after completion — 25.03.2023.

Accepted for publication 10.07.2023.

Buckling problems of thin elastic shells have become relevant again because of the discrepancies between the standards in many countries on how to estimate loads causing buckling of shallow shells and the results of the experiments on thin-walled aviation structures made of high-strength alloys. The main contradiction is as follows: the ultimate internal stresses at shell buckling (collapsing) turn out to be lower than the ones predicted by the adopted design theory used in the USA and European standards. The current regulations are based on the static theory of shallow shells that was put forward in the 1930s: within the nonlinear theory of elasticity for thin-walled structures there are stable solutions that significantly differ from the forms of equilibrium typical to small initial loads. The minimum load (the lowest critical load) when there is an alternative form of equilibrium was used as a maximum permissible one. In the 1970s it was recognized that this approach is unacceptable for complex loadings. Such cases were not practically relevant in the past while now they occur with thinner structures used under complex conditions. Therefore, the initial theory on bearing capacity assessments needs to be revised. The recent mathematical results that proved asymptotic proximity of the estimates based on two analyses (the three-dimensional dynamic theory of elasticity and the dynamic theory of shallow convex shells) could be used as a theory basis. This paper starts with the setting of the dynamic theory of shallow shells that comes down to one resolving integro-differential equation (once the special Green function is constructed). It is shown that the obtained nonlinear equation allows for separation of variables and has numerous time-period solutions that meet the Duffing equation with “a soft spring”. This equation has been thoroughly studied; its numerical analysis enables finding an amplitude and an oscillation period depending on the properties of the Green function. If the shell is oscillated with the trial time-harmonic load, the movement of the surface points could be measured at the maximum amplitude. The study proposes an experimental set-up where resonance oscillations are generated with the trial load normal to the surface. The experimental measurements of the shell movements, the amplitude and the oscillation period make it possible to estimate the safety factor of the structure bearing capacity with non-destructive methods under operating conditions.

Keywords: dynamic equations for shallow shells, nonlinear oscillations, Green tensor, Duffing equation, safety factor, buckling prediction

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2023, vol. 15, no. 5, pp. 1189–1205 (Russian).

1. Введение

Задачи потери устойчивости тонких упругих оболочек снова стали актуальными [Hilburger, 2012; Lovejoy et al., 2021; Yadav et al., 2021]. Проблемы обозначились при испытаниях тонких авиационных оболочек, изготовленных из высокопрочных сплавов. Основное противоречие состоит в следующем: предельные внутренние напряжения, при которых наблюдается потеря устойчивости (хлопок) оболочек (в процессе медленного приложения пропорционально увеличивающейся по времени нагрузки), оказываются меньше тех, которые предсказывает современная теория, отраженная в стандартах США и Европы. Поясним ситуацию подробнее.

Рассмотрим оболочку: трехмерное тело, ограниченное поверхностями S_0, S_1 , расстояние между которыми не более h (толщина оболочки). Оболочка тонкая, $\frac{h}{R} \ll 1$, где R — минимальный радиус кривизны любой поверхности S_0, S_1 . Точки x_i гладких поверхностей S_0 и S_1 наделяются криволинейными координатами α_1, α_2 так, что в фиксированной трехмерной декартовой системе отсчета $x_i = \psi_i(\alpha_1, \alpha_2)$, где ψ_i — функции двух переменных, имеющих непрерывные частные производные $D^n(\psi_i)$ по переменным α_1, α_2 до третьего порядка включительно. То есть функции ψ_i ограничены по норме:

$$\|\psi_i\| = \sum_{0 \leq n \leq 3} \max D^n(\psi_i), \quad D^n(\psi_i) = \frac{\partial^{\beta_1 + \beta_2}(\psi_i)}{\partial^{\beta_1}(\alpha_1) \partial^{\beta_2}(\alpha_2)}, \quad 0 \leq \beta_1 + \beta_2 \leq 3, \quad D^0(\psi_i) = \psi_i.$$

Наряду с поверхностями S_0, S_1 рассмотрим различные близкие оболочки с поверхностями $S_{0i} = S_0 + \delta S_{0i}, S_{1i} = S_1 + \delta S_{1i}$. Для декартовых координат точек поверхностей S_{0i}, S_{1i} имеют место представления $x_{0i} = x_i + \delta\psi_i$, где $\delta\psi_i$ — малые по норме гладкие функции. Они отвечают допустимым погрешностям (дефектам) при изготовлении оболочек.

Испытания несущей способности оболочек проводятся по двум схемам. В первом случае в начальный момент времени к поверхностям S_0, S_1 прикладывается векторная функция нагрузки $q_i(\alpha_1, \alpha_2)$, вызывающая упругие внутренние напряжения. Затем нагрузка увеличивается по мере медленного (начиная с единицы) монотонного роста переменной t в формуле $Q_i(\alpha_1, \alpha_2) = q_i(\alpha_1, \alpha_2)t$.

При изменении t оболочка деформируется, и пока $1 \leq t < t_u$, координаты x_i точек поверхностей S_0, S_1 определяются единственным образом. Когда достигается значение t_u , происходит бифуркация форм равновесия: координаты x_i растут практически неограниченно. Бифуркация резко изменяет форму оболочки и сопровождается «звуковым хлопком». Параметр t_u называют верхним критическим значением нагрузки.

При испытаниях по второй схеме поверхности S_{0i}, S_{1i} загружаются той же нагрузкой $Q_i(\alpha_1, \alpha_2)$. Пока $t < t_l$, наблюдается непрерывный рост деформаций оболочек с несовершенствами $\delta S_{0i}, \delta S_{1i}$. При $t = t_l$ происходит бифуркация геометрических форм, появляются большие необратимые деформации на «наиболее уязвимых» к потере устойчивости образцах оболочек. Самыми чувствительными оказываются изделия, нормы $\|\delta\psi_i\|$ которых максимально отличаются от соответствующих выражений $\|x_i\|$ для бездефектных оболочек. Число t_l называют нижним критическим значением нагрузки. Существенно, что для идеально выполненных гладких оболочек (представимых в декартовых координатах аналитическими функциями) $t_l \ll t_u$. Поэтому технические стандарты всех стран при назначении предельных нагрузок до последнего времени ориентировались на низшее значение t_l [Royer, Hutchinson, Pellegrino, 2022]. Такой подход поддерживался теоретическим анализом устойчивости оболочек, имеющим давнюю историю, а также тем обстоятельством, что бездефектных оболочек практически не бывает.

Основные результаты теории устойчивости оболочек таковы. При любом подходе трехмерная задача упругого деформирования сводится к двумерной [Вольмир, 1963]. Определяется

срединная поверхность $S = \frac{S_0 + S_1}{2}$, так что любая точка тонкой оболочки описывается криволинейными координатами α_1, α_2 этой поверхности и третьей координатой α_3 , отсчитываемой по нормали к S в точке (α_1, α_2) . Внешняя нагрузка считается приложенной к S . Перемещение точек с начальными координатами x_i в положение x_i^+ в процессе нагружения (на вектор $w_i = x_i^+ - x_i$) происходит в согласии с гипотезой Кирхгофа–Лява [Кабриц и др., 2002]: точки, лежавшие до приложения сил на нормалях к S , после силового воздействия располагаются на нормалях образовавшейся поверхности S_+ , координата α_3 не меняется. Деформирование оболочек идеальной формы при $m < m_u$ изучается в предположении малых перемещений на основе статического принципа минимума полной энергии $\Pi(w_i, q_i) = W + A$, где второй член справа — работа внешних сил, приложенных к срединной поверхности $A = \int_S q_i w_i dS$, первый член — $W = \frac{1}{2} \int_D E_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} dx$ — упругая внутренняя энергия трехмерной среды оболочки. Здесь D — объем оболочки, dx — дифференциал объема, dS — дифференциал площади поверхности S , E_{ijkl} — тензор модулей упругости, ε_{ij} — тензор деформаций, зависящий от вектора w_i . В формулах для W удерживаются квадраты первых и вторых производных функций w_i , а в выражении для A — только перемещения w_i . В этом случае обеспечивается единственность решения задачи деформирования оболочки и внутренние напряжения σ_i определяются однозначно. Верхнее критическое значение m_u постулируется критерием Эйлера: статическая нагрузка $m_u q_i$ вызывает дополнительные упругие перемещения w_i^+ и напряжения σ_i^+ , которые уравниваются на смещениях w_i^+ внутренними напряжениями σ_i . Принцип минимума Π применительно к перемещениям w_i^+ приводит к линейной задаче на собственные значения, а минимальное собственное число определяет параметр m_u .

Для вычисления m_l принят иной путь. Разыскивается минимум функции $\Pi(w_i, q_i)$, но в формулах для W тензор $\varepsilon_{ij}(w_i)$ принимается в нелинейной форме путем введения ковариантной производной вектора перемещений w_i — $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\nabla_i w_j + \nabla_j w_i - \nabla_i w_k \nabla_j w^k)$. Предполагается также выполнение гипотезы Кирхгофа–Лява и отсутствие динамических эффектов. Переход от задачи $\min \Pi(w_i, q_i)$ к дифференциальным уравнениям порождает нелинейную систему с неединственным решением. Появляются устойчивые и неустойчивые ветви. Число m_l находится по условию: m_l — это минимальное значение, при котором существует устойчивое решение нелинейной системы, соответствующей $\min \Pi(w_i, q_i)$. Следует сказать, что численный анализ системы довольно сложен. Поэтому уравнения упрощались многими авторами путем отбрасывания малых членов, которые возникают в задачах для часто встречающихся на практике гладких оболочек. Наиболее известный вариант относится к пологим выпуклым оболочкам и принадлежит [Karman, Tsien, 1941], которые применили к оболочкам соображения [Förpl, 1907]; по этой причине вариант часто называют Кармана–Феппля. Существенное дополнение внес [Койтер, 1960]. Дело в том, что при вычислении m_l для гладких оболочек получаются большие значения w_i (порядка десяти толщин). Экспериментально такой результат трудно проверить, поскольку изготовить оболочки идеальной формы не удастся. Если же рассматриваются оболочки с начальными несовершенствами w_i^0 , то при вычислении получаются величины m_l^0 , мало отличающиеся от m_l , а «видимые перемещения» $(w_i - w_i^0)$ практически наблюдаются при испытаниях оболочек с поверхностями $S + \delta S$. Поэтому реальные значения m_l получают, основываясь на анализе уравнений Кармана–Феппля, примененных к оболочкам с начальными дефектами δS . Вычисления многих авторов, начиная с 1930-х годов, относятся к наиболее распространенным на практике оболочкам — гладким поверхностям, нагруженным гладкой нагрузкой. В этих случаях прослеживалась близость теоретических и экспериментальных результатов для величины низшего критического параметра m_l . Но в последние 20 лет применяются более прочные и более тонкие оболочки, при этом нагрузки не являются столь гладкими, как было ранее. В ходе испытаний отмечаются значения m_l , которые значительно ниже вычисленных по модели Кармана–Феппля. Нужно отме-

тять, что теоретически такая возможность предсказана давно, так как для статической системы Кармана – Феппля отсутствует единственность решений, что равносильно $m_l = 0$ для ненулевой нагрузки q_i (конкретный пример построен в [Срубщик, 1972; Ворович, 1980]). Недавно близкий результат был численно обнаружен [Hutchinson, 2016] для сферической оболочки, нагруженной сосредоточенными силами. Стало ясно, что статические уравнения Кармана – Феппля требуют корректировки. Были предприняты многочисленные попытки уточнить двумерные статические и динамические уравнения теории оболочек на основе анализа присутствующих в системе малых параметров. Основные малые параметры теории таковы: $\varepsilon_1 = \frac{h}{L}$, $\varepsilon_2 = \frac{L}{R}$, где L – габарит оболочки, а R – наименьший радиус кривизны одной из координатных линий. При разложении трехмерных динамических уравнений теории упругости по степеням полиномов $\varepsilon_1^{p_1} \varepsilon_2^{p_2}$ получаются различные уточнения теории пологих оболочек [Аннин, Волчков, 2016; Димитриенко, Губарева, Шалыгин, 2015]. Отметим, что при любых уточнениях, когда $p_1 + p_2 \leq 6$, образуются системы, которые близки по строению к динамическим уравнениям Кармана – Феппля. По принятой классификации, система нелинейных уравнений в частных производных относится к гиперболическому типу. Для таких систем естественно ставить две краевые задачи: задачу Коши и смешанную краевую задачу. При решении задачи Коши, когда в неограниченном пространстве выделяется поверхность, на которой в начальный момент задаются перемещения и скорости, были обнаружены уединенные волны (солитоны), которые распространяются практически без искажения [Киселев, Долгих, 2013]. Этот факт можно использовать для прогноза потери устойчивости, если воспроизвести солитон искусственно при нагрузке ниже критической [Neustadt, Grachev, 2019]. Но такой подход трудно практически реализовать, так как экспериментальная область распространения солитона достаточно велика. Другой недостаток асимптотического разложения по малым параметрам состоит в отсутствии строгого доказательства сходимости процесса, имеются лишь рассуждения на «физическом уровне строгости». Точные математические результаты получены сравнительно недавно [Lewicka, Mora, Pakzad, 2010; Hornung, Velcic, 2015]. Изучается поведение вектора $w_i(x)$, определенного в трехмерном объеме оболочки $x \in D$, в течение времени t из интервала H , как объекта пространства Соболева $M = L_2(H) \times W_2^1(D)$. Норму в этом пространстве обозначим как $\|w_i\|_M$. Оболочка выпуклая и тонкая, $\varepsilon = \frac{h}{R} \ll 1$. Доказано следующее: если в пространстве M существует решение динамической задачи теории упругости, то при асимптотическом стремлении $\varepsilon \rightarrow 0$ в смысле Г-сходимости [De Giorgi, Franzoni, 1975; Dal Maso, 1993] оно отличается от решения задачи для оболочки (со срединной поверхностью S), рассчитанной по уравнениям Кармана – Феппля, не более чем на $\varepsilon a \|w_i\|_M$, где $a = \text{const}$. Требуемая теорема существования доказана в работах [Ball, 1977; Вильке, 1980; Marcellini, 1986], так что полученная оценка может быть использована для анализа поведения оболочек при больших динамических перемещениях, когда наблюдаются недопустимые для нормальной работы деформации. Следовательно, для системы Кармана – Феппля можно поставить смешанную краевую задачу: пусть подобласть оболочки $S_l \subset S$ нагружена периодической по времени t пробной нагрузкой $q_i(S_l) \cos \omega t$, $\omega = \text{const}$, направленной по нормали к поверхности. Граница области S закреплена, амплитуда внешнего нагружения выбирается так, чтобы при статическом приложении сил $q_i(S_l)$ внутренние напряжения в оболочке были значительно ниже предела текучести материала вне зависимости от частоты ω . Произведем эксперимент, соответствующий описанной задаче, определим резонансную частоту ω^* и амплитуду колебаний точек оболочки $w_i^*(x_i, q_i, \sigma_{oi})$. Здесь σ_{oi} – уровень внутренних предварительных напряжений во время испытаний. Знание функции $w_i^*(x_i, q_i, \sigma_{oi})$ позволяет построить картину перемещений оболочки $w_i^*(x_i, q_i, n\sigma_{oi})$ при напряжениях $n\sigma_{oi}$ и указать, при каком значении n деформации становятся недопустимыми. Цель последующего текста – подробно обосновать высказанное утверждение. Вначале приводится механическая формулировка динамических уравнений Кармана – Феппля. Затем на этой основе изучаются вынужденные нелинейные волны в пологих оболочках, нагруженных периодической

по времени, приложенной нормально к поверхности нагрузкой. Анализ колебаний позволяет предложить экспериментальную установку, помогающую оценить коэффициент запаса несущей способности оболочки неразрушающим методом в условиях эксплуатации.

2. Динамические уравнения Кармана – Феппля

Рассматриваются пологие оболочки, для которых срединная поверхность S описывается в неподвижной декартовой системе координатах x_i , $i = 1, 2, 3$, формулой $x_3 = \psi(x_1, x_2)$, где ψ — гладкая, третьего порядка функция двух переменных (рис. 1), причем

$$\frac{\partial x_3}{\partial x_1} \ll 1, \quad \frac{\partial x_3}{\partial x_2} \ll 1. \quad (1)$$

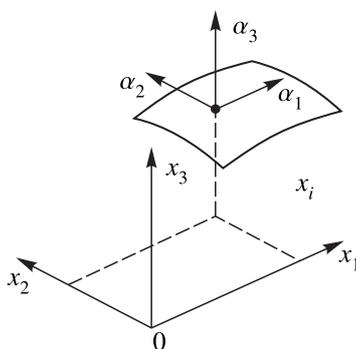


Рис. 1. Фрагмент срединной поверхности пологой оболочки с лагранжевыми ортогональными координатами $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Неподвижная ортогональная система отсчета x_1, x_2, x_3 , в которой фиксируется точка срединной поверхности x_i^1

Эта формула позволяет ввести для любой точки α на S ортогональные координаты α_1, α_2 так, чтобы линии $\alpha_1 = \text{const}, \alpha_2 = \text{const}$ были параллельны $x_1 = \text{const}, x_2 = \text{const}$, а коэффициенты первой квадратичной формы $A_1 = A_2 = 1$. Направление нормали к поверхности S в точке α обозначим как α_3 . Всем внутренним точкам трехмерной оболочки припишем лагранжевы координаты $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ (рис. 2). Кривизны k_1, k_2 координатных линий поверхности S выразим через радиусы кривизны $k_1 = \frac{1}{R_1}, k_2 = \frac{1}{R_2}$.

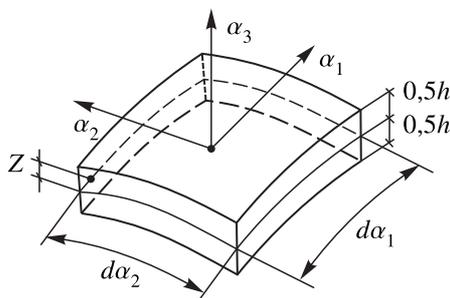


Рис. 2. Бесконечно малый элемент оболочки, выделяемый на расстояниях $d\alpha_1, d\alpha_2$ поверхностями, параллельными координатным плоскостям $\alpha_1\alpha_3$ и $\alpha_2\alpha_3$. Для точек элемента, расположенных на боковых гранях, принимается $z = \alpha_3$

Движение любой точки оболочки из положения $x_{0i}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ в положение $x_i(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ описывает вектор $w_i(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = x_i(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) - x_{0i}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$. В дальнейшем изложении будем

применять традиционные обозначения $\alpha_3 = z$, $w_3 = w$. Перемещение точек происходит в соответствии с гипотезой Кирхгофа – Лява: точки, первоначально лежавшие на нормали к срединной поверхности, остаются на нормали к деформированной поверхности S (гипотеза прямых нормалей). Теория Кирхгофа – Лява теоретически обоснована [Новожилов, 1948; Кабриц и др., 2002], показано, что гипотеза прямых нормалей эквивалентна предположению о том, что в гибких телах удлинения и сдвиги малы по сравнению с поворотами при определении направления волокон. Метрика исходной срединной поверхности записывается в виде $ds^2 = g_{ik} d\alpha_i d\alpha_k$, $i, k = 1, 2$, а метрика после деформирования – в виде $ds_1^2 = g_{ik}^1 d\alpha_i d\alpha_k$, $i, k = 1, 2$. Деформации срединной поверхности ε_{ik} определяются по формуле

$$ds_1^2 - ds^2 = \varepsilon_{ik} d\alpha_i d\alpha_k.$$

Учитывая гипотезу прямых нормалей, получаются такие выражения:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{\partial w_1}{\partial \alpha_1} - k_1 w + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial \alpha_1} \right)^2, \\ \varepsilon_{22} &= \frac{\partial w_2}{\partial \alpha_2} - k_2 w + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial \alpha_2} \right)^2, \\ \varepsilon_{12} &= \frac{\partial w_1}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial w_2}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial w}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial w}{\partial \alpha_2}. \end{aligned} \tag{2}$$

Исключая из (2) путем дифференцирования компоненты w_1 , w_2 , представим уравнение неразрывности деформаций в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial \alpha_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial \alpha_1^2} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} &= -\frac{1}{2} L(w, w) - \nabla_k w, \\ L(w, u) &= \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_1^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha_1^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_2^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha_2^2} - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2}, \quad \nabla_k w = k_2 \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_1^2} + k_1 \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_2^2}. \end{aligned} \tag{3}$$

Гипотеза прямых нормалей позволяет также вычислить изменение кривизн χ_{11} , χ_{22} координатных линий $\alpha_1 = \text{const}$, $\alpha_2 = \text{const}$ и изменение кривизны поверхности χ_{12} :

$$\begin{aligned} \chi_{11} &= -\frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{\partial w_1}{R_1} + \frac{1}{A_1} \frac{\partial w}{\partial \alpha_1} \right) - \frac{1}{A_1 A_2} \left(\frac{w_2}{R_2} + \frac{1}{A_2} \frac{\partial w}{\partial \alpha_2} \right) \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}, \\ \chi_{22} &= -\frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\frac{\partial w_2}{R_2} + \frac{1}{A_2} \frac{\partial w}{\partial \alpha_2} \right) - \frac{1}{A_1 A_2} \left(\frac{w_1}{R_1} + \frac{1}{A_1} \frac{\partial w}{\partial \alpha_1} \right) \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}, \\ \chi_{12} &= -\frac{1}{2} \left(\frac{A_2}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{w_2}{A_2 R_2} + \frac{1}{A_2^2} \frac{\partial w}{\partial \alpha_2} \right) + \frac{A_1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\frac{w_1}{A_1 R_1} + \frac{1}{A_1^2} \frac{\partial w}{\partial \alpha_1} \right) \right). \end{aligned} \tag{4}$$

Деформации в любой точке, отстоящей о срединной поверхности на расстояние z , запишутся в виде

$$\varepsilon_{11}(z) = \varepsilon_{11} + z\chi_{11}, \quad \varepsilon_{22}(z) = \varepsilon_{22} + z\chi_{22}, \quad \varepsilon_{12}(z) = \varepsilon_{12} + z\chi_{12}.$$

Для изотропной упругой оболочки с модулем Юнга E и коэффициентом Пуассона μ связь между напряжениями и деформациями такова:

$$\sigma_{11}(z) = \frac{E}{1 - \mu^2} (\varepsilon_{11} + \mu \varepsilon_{22}(z)), \quad \sigma_{22}(z) = \frac{E}{1 - \mu^2} (\varepsilon_{22} + \mu \varepsilon_{11}(z)), \quad \sigma_{12}(z) = \frac{E}{2(1 - \mu^2)} \varepsilon_{12}(z). \tag{5}$$

Действующие по граням элемента оболочки напряжения сводятся к равнодействующим погонным усилиям и моментам (рис. 3), приложенным к срединной поверхности S , путем интегрирования по координате z :

$$N_{11} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{11}(z) \left(1 - \frac{z}{R_2}\right) dz, \quad (6)$$

$$M_{11} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{11}(z) \left(1 - \frac{z}{R_2}\right) z dz.$$

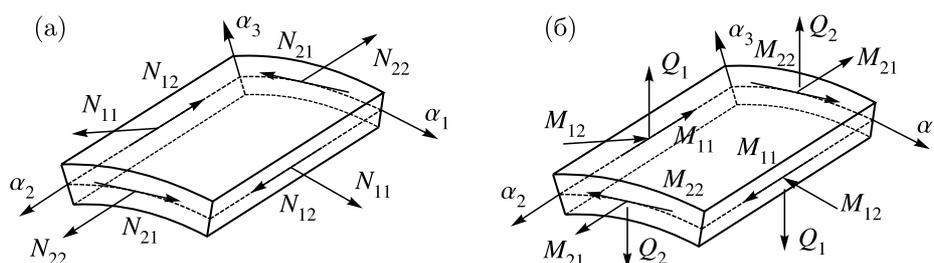


Рис. 3. а) Равнодействующие внутренних сил (N_{11} , N_{22} , $N_{12} = N_{21}$), отнесенные к срединной поверхности и расположенные в плоскости $\alpha_1 \alpha_2$; б) равнодействующие внутренних поперечных сил Q_1 , Q_2 , изгибающих и крутящих моментов (M_{11} , M_{22} , $M_{12} = M_{21}$), приложенные к боковым граням элемента оболочки

Остальные погонные усилия N_{ij} , M_{ij} вычисляются аналогично с заменой индекса 1 на 2. Подставляя выражения (5) в (6), запишем все погонные усилия:

$$N_{11} = \frac{Eh}{1-\mu^2}(\varepsilon_{11} + \mu\varepsilon_{22}), \quad N_{22} = \frac{Eh}{1-\mu^2}(\varepsilon_{22} + \mu\varepsilon_{11}), \quad N_{12} = \frac{Eh}{2(1+\mu)}\varepsilon_{12}, \quad (7)$$

$$M_{11} = D(\chi_{11} + \mu\chi_{22}), \quad M_{22} = D(\chi_{22} + \mu\chi_{11}), \quad M_{12} = D(1-\mu)\chi_{12}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}.$$

Значения N_{ij} , M_{ij} должны удовлетворять уравнениям движения. Далее рассматривается движение, когда присутствуют только нормальные силы q (рис. 3). Равновесие плоских сил (первая строка в (7)) равносильно двум уравнениям:

$$\frac{\partial N_{11}}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial N_{12}}{\partial \alpha_2} = 0, \quad \frac{\partial N_{22}}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial N_{12}}{\partial \alpha_1} = 0. \quad (8)$$

Из системы (8) следует существование функции напряжений Φ со свойствами

$$N_{11} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \alpha_2^2}, \quad N_{22} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \alpha_1^2}, \quad N_{12} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2}. \quad (9)$$

После подстановки зависимостей (9) в первые три уравнения (7) можно выразить деформации ε_{ij} через функцию напряжений. Уравнение (3) записывается в виде

$$\frac{1}{Eh} \nabla^4 \Phi = -\frac{1}{2} (L(w, w) - \nabla_k^2(w)). \quad (10)$$

Символ ∇^2 обозначает оператор Лапласа $\nabla^2 = \frac{1}{A_1 A_2} \left(\frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{A_2}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\frac{A_1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \right) \right)$. Другое уравнение движения получается на основе анализа сил по рис. 3, б. Равенство нулю моментов всех

внутренних и внешних сил относительно осей α_1, α_2 (относительно оси α_3 равенство выполняется автоматически) позволяет выразить Q_1, Q_2 через M_{ij} и их производные:

$$\begin{aligned} Q_1 &= \frac{1}{A_1 A_2} \left(\frac{\partial(A_1 M_{11})}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial(A_1 M_{12})}{\partial \alpha_2} - M_{12} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} + M_{12} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \right), \\ Q_2 &= \frac{1}{A_1 A_2} \left(\frac{\partial(A_2 M_{22})}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial(A_2 M_{12})}{\partial \alpha_1} - M_{12} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} + M_{12} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \right). \end{aligned} \quad (11)$$

Равенство нулю проекций внутренних и инерционных сил вдоль оси α_3 приводит к равенству

$$\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial Q_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial Q_2}{\partial \alpha_2} + N_{11} \left(k_1 + \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_1^2} \right) + N_{22} \left(k_2 + \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_2^2} \right) + 2N_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} + q = 0. \quad (12)$$

Учтя (2), (4), (7), (11), получим второе основное уравнение системы Кармана – Феппля:

$$\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + D \nabla^4 w - L(w, \Phi) - \nabla_k \Phi + q = 0. \quad (13)$$

Буквой t обозначается время, а ρ – плотность материала оболочки. Уравнения (10) и (13) образуют полную систему, позволяющую изучить движения пологих оболочек, когда одна из компонент вектора перемещений w превосходит остальные. Подобная ситуация характеризует «глобальную» потерю устойчивости: при высоких внутренних безмоментных напряжениях наблюдаются значительные изменения формы оболочки на большом фрагменте поверхности. Поэтому функции w, Φ определяются в односвязной области S_L с границей L , на которой выполняются четыре условия:

$$w(L) = \frac{\partial w}{\partial n}(L) = 0, \quad N_n(L) = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \alpha_s^2}, \quad N_s(L) = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \alpha_n \partial \alpha_s}. \quad (14)$$

Функции $N_n(L), N_s(L)$ – известные безмоментные напряжения; символы n, s – направления нормали и касательной к линии L .

Уравнения (10) и (13) с граничными условиями (14) можно свести к одному интегродифференциальному уравнению относительно функции $w(\alpha, t)$, если предварительно построить функцию Грина $G(\alpha, \beta)$ для бигармонического уравнения с двумя граничными условиями:

$$\frac{1}{Eh} \nabla^4 G(\alpha, \beta) = -\delta(\beta), \quad \frac{\partial^2 G(\alpha, \beta)}{\partial \alpha_s^2} = N_n(L), \quad \frac{\partial^2 G(\alpha, \beta)}{\partial \alpha_n \partial \alpha_s} = N_s(L).$$

Здесь α, β – произвольные различные внутренние точки поверхности S_L , а $\delta(\beta)$ – функция Дирака в точке β , оператор ∇^4 вычисляется в точке α .

Последовательность построения тензора Грина такова. Вначале находится функция $\varphi(\alpha)$ по условиям

$$\nabla^4 \varphi(\alpha) = 0, \quad \frac{\partial^2 \varphi(\alpha)}{\partial \alpha_s^2} = N_n(L), \quad \frac{\partial^2 \varphi(\alpha)}{\partial \alpha_n \partial \alpha_s} = N_s(L).$$

Такая функция существует, так как она является решением плоской задачи теории упругости с известными напряжениями на контуре L [Мусхелишвили, 1966]. Определим значения найденной функции на контуре L – $\varphi(L)$ и величину нормальной производной $\frac{\partial \varphi}{\partial n}(L)$. Далее, вычислим на контуре L граничные значения функций:

$$r^2 \ln r(\alpha, L) = \varphi_1(\alpha, L), \quad \frac{\partial (r^2 \ln r(\alpha, L))}{\partial n} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial n}(L).$$

Здесь $r(\alpha, \beta)$ – декартово расстояние между точками α, β . Построим функцию $\varphi_2(\alpha)$ по условиям

$$\nabla^4 \varphi_2(\alpha) = 0, \quad \varphi_2(L) = \varphi(L) - \varphi_1(\alpha, L), \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial n}(L) = \frac{\partial \varphi}{\partial n}(L) - \frac{\partial \varphi_1}{\partial n}(L).$$

В силу того, что $r(\alpha, \beta)$ – бигармоническая функция по любой переменной α, β , имеет место равенство $G(\alpha, \beta) = r^2 \ln r(\alpha, \beta) + \varphi_2(\alpha)$. Свойства введенной функции Грина позволяют переписать равенство (10) в виде

$$\Phi(w, \alpha) = \frac{1}{2} \iint_{S_L} G(\alpha, \beta) (L(w(\beta), w(\beta)) - \nabla_k^2 w(\beta)) A_1 A_2 d\beta_1 d\beta_2. \quad (15)$$

Подставив выражение (15) в (13), получим в итоге интегро-дифференциальное уравнение, для которого проведем дальнейший анализ:

$$\rho h \frac{\partial^2 w(\alpha, t)}{\partial t^2} + D \nabla^4 w(\alpha, t) - L(w(\alpha, t), \Phi(\alpha, t)) - \nabla_k \Phi(\alpha, t) + q(\alpha, t) = 0. \quad (16)$$

3. Деформирование пологих оболочек при периодических по времени воздействиях

Убедимся, что однородное уравнение (16) допускает образование «стоячих волн». Другими словами, возможно разделение переменных, и существуют решения вида

$$w(\alpha, t) = T(t) \times u(\alpha). \quad (17)$$

Подставим (17) в (16) (при условии $q(\alpha, t) = 0$), умножим полученную сумму на $u(\alpha)$ и проинтегрируем результат по поверхности S_L . Получается

$$a_0 \frac{d^2 T}{dt^2} + a_1 T + a_2 T^2 - a_3 T^3 = 0. \quad (18)$$

Введены обозначения:

$$\begin{aligned} a_0 &= \rho h \iint_{S_L} u^2(\alpha) dS_\alpha, \quad dS_\alpha = A_1(\alpha) A_2(\alpha) d\alpha_1 d\alpha_2, \quad dS_\beta = A_1(\beta) A_2(\beta) d\beta_1 d\beta_2, \\ a_1 &= D \iint_{S_L} u(\alpha) \times \nabla^4(\alpha) dS_\alpha - \frac{1}{2} \iint_{S_L} u(\alpha) \times \left(\iint_{S_L} \nabla_k^2 G(\alpha, \beta) u(\beta) dS_\beta \right) dS_\alpha, \\ a_2 &= \frac{1}{2} \iint_{S_L} u(\alpha) \times \left(L(u(\alpha)), \left(\iint_{S_L} G(\alpha, \beta) \nabla_k^2 u(\beta) dS_\beta \right) \right) dS_\alpha, \\ a_3 &= \frac{1}{4} \iint_{S_L} u(\alpha) \times L \left(u(\alpha), \left(\iint_{S_L} G(\alpha, \beta) L(u(\beta), u(\beta)) dS_\beta \right) \right) dS_\alpha. \end{aligned} \quad (19)$$

Функция $u(\alpha)$ принимается из класса Соболева $W_2^2(S_L)$, допускаются скачки вторых и третьих производных на внутренних линиях L_g . Поэтому первый интеграл в коэффициенте a_1 переписывается в форме $D \iint_{S_L} u(\alpha) \times \nabla^4(\alpha) dS_\alpha = \Pi + \int_{L_g} M_g \frac{\partial u}{\partial n} dl_g + \int_{L_g} Q_g u dl_g$, где буква n обозначает

нормаль к кривой L_g ; функции M_g, Q_g выражаются через скачки производных $u(\alpha)$ (обозначены прямыми линиями) по формулам

$$Q_g = D \left| \frac{\partial}{\partial n} (\nabla^2 u) \right|, \quad M_g = D \left| \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} \right|. \quad (20)$$

Потенциальная энергия Π имеет вид

$$\Pi = \frac{D}{2} \iint_{S_L} \left(\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha_2^2} \right)^2 + 2(1 - \mu) \left(\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} \right)^2 - \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha_1^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha_2^2} \right) \right) dS_\alpha.$$

Уравнение (18) хорошо изучено [Гукенхеймер, Холмс, 2002; Кузнецов, Кузнецов, Рыскин, 2011]. Оно моделирует осциллятор Дуффинга с «мягкой пружиной». Силовая и потенциальная функции осциллятора таковы:

$$f(T) = a_1 T + a_2 T^2 - a_3 T^3, \quad V(T) = \frac{1}{2} a_1 T^2 + \frac{1}{3} a_2 T^3 - \frac{1}{4} a_3 T^4.$$

Графики функций $f(T), V(T)$ показаны на рис. 4, а, б. На рис. 4, в представлены интегральные кривые уравнения (18) на фазовой плоскости $(T, \dot{T} = \frac{dT}{dt})$.

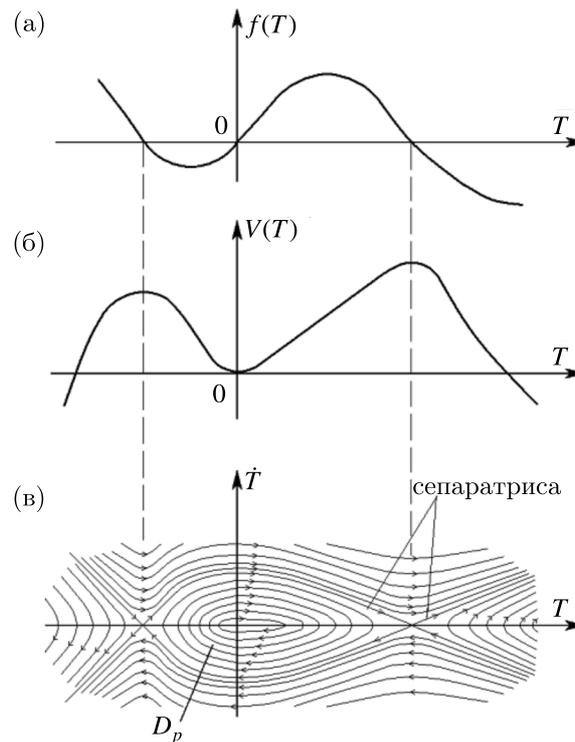


Рис. 4. а) Зависимость силового воздействия $f(T)$ из уравнения Дуффинга от функции времени T ; б) зависимость потенциала $V(T)$, связанного с уравнением Дуффинга, от функции времени T ; в) фазовая плоскость решений уравнения Дуффинга с «мягкой пружиной», область периодических решений обозначена как D_p

Внутренняя область D_p фазовой плоскости между сепаратрисами заполнена периодическими кривыми вокруг точки равновесия $T = \dot{T} = 0$. Период обращения (в отличие от линейного случая) зависит от амплитуды T_a : приближение к сепаратрисе увеличивает период, на сепаратрисе он становится бесконечным. Можно изучать вынужденные колебания, вызванные нагрузкой

вида $q(\alpha, t) = b(\alpha) \cos \omega t$ с постоянной частотой ω . Сформулированная задача равносильна поиску периодических решений уравнения

$$a_0 \frac{d^2 T}{dt^2} + a_1 T + a_2 T^2 - a_3 T^3 = b_0 \cos t\omega, \quad b_0 = \iint_{S_L} b(\alpha) u(\alpha) dS_\alpha. \quad (21)$$

Доказано [Kovacic, Brennan, 2011], что в неавтономной системе (21) возможен нелинейный резонанс на некоторой частоте ω_0 , при этом динамическое перемещение оболочки значительно превосходит перемещения от статической нагрузки $b(\alpha)$. Решения уравнения (21) в резонансной области имеют сложную многозначную структуру. Чтобы выделить однозначные решения прибегают к стробоскопическим отображениям Пуанкаре [Jordan, Smith, 2007; Кузнецов, 2013]. С этой целью переписем (21) в виде автономной системы трехмерного пространства:

$$\frac{dT}{dt} = Y, \quad a_0 \frac{dY}{dt} = -a_1 T - a_2 T^2 + a_3 T^3 - b_0 \cos Z, \quad \frac{dZ}{dt} = \omega. \quad (22)$$

Стробоскопическое отображение функции T за период колебаний $\Delta = \frac{1}{\omega}$ обозначено той же буквой и показано на рис. 5.

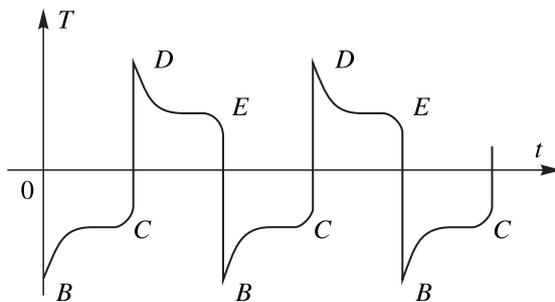


Рис. 5. График зависимости периодической функции T из уравнения Дуффинга от времени t при приближении к сепаратрисе

Существенно, что главной особенностью нелинейного резонанса являются разрывы функции T , происходящие в течение каждого периода колебаний. Величина периода колебаний в критической области, близкой к сепаратрисе, может быть оценена аналитически. Движение становится релаксационным [Мищенко, Розов, 1975], поскольку введение затухания с коэффициентом c во второе однородное уравнение (22)

$$a_0 \frac{dY}{dt} = -a_1 T - a_2 T^2 + a_3 T^3 - cY$$

и малый параметр a_0 (для тонкой оболочки) позволяют явно проинтегрировать уравнение $c \frac{dT}{dt} = -a_1 T - a_2 T^2 + a_3 T^3 = f(T)$ (рис. 6). Получается $\Delta = \int_{BC+DE} c \frac{dT}{f(T)}$. Оценка величины периода и амплитуды колебаний в области D_p по рис. 4, в возможна только численно.

4. Опыты, позволяющие оценить запас устойчивости тонких пологих оболочек

Потеря устойчивости пологих оболочек сопровождается образованием значительных вмятин срединной поверхности. Размер вмятин L_d составляет не менее трети габарита оболочки L . Движение вмятины можно наблюдать, если разместить над оболочкой магнитную катушку, вызывающую колебания по закону $q(\alpha, t) = b_0(\alpha) \cos \omega t$ (рис. 7). Величина $b_0(\alpha)$ подбирается из

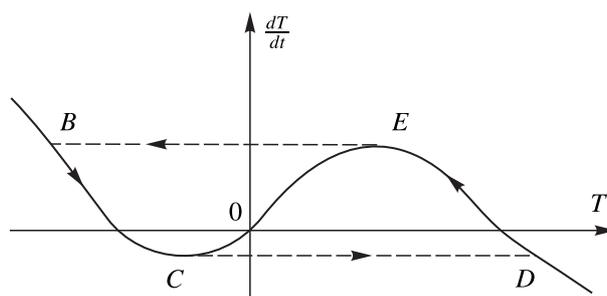


Рис. 6. Релаксационные периодические колебания (кривая BCDE) на фазовой плоскости для уравнения Дуффинга

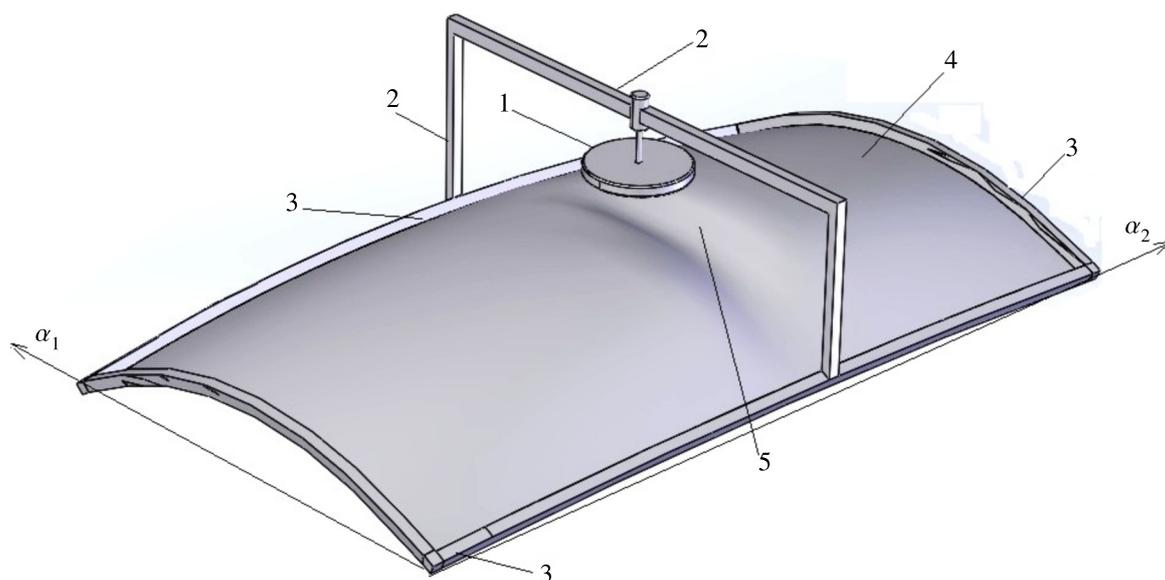


Рис. 7. Установка для измерения коэффициента запаса устойчивости: 1 – катушка возбуждения колебаний, 2 – крепление катушки к контуру усиления, 3 – контур усиления оболочки, 4 – поверхность оболочки, 5 – вмятина-«хлопун», образующая под действием периодического возбуждения

условия, чтобы напряжения, вызванные статическим приложением этой нагрузки в сумме с безмоментными напряжениями основного нагружения, были далеки от предела текучести материала.

Если изменять частоту возбуждения ω , то при некоторой величине ω_0 наступит нелинейный резонанс. Зафиксируем максимальное отклонение оболочки $u_0(\alpha)$ и период резонансных колебаний $\Delta_0 = \frac{1}{\omega_0}$. Обозначим безмоментные усилия $N_n(\alpha)$, $N_s(\alpha)$, действующие в оболочке при нормальной эксплуатации. Во время испытаний эти усилия принимают значения

$$N_{0n}(\alpha) = p_1 N_n(\alpha), \quad N_{0s}(\alpha) = p_2 N_s(\alpha). \tag{23}$$

Значения N_n , N_s обычно известны, а числа p_1 , p_2 могут быть определены на основе численного анализа уравнений (18)–(21), поскольку экспериментально найдены $u_0(\alpha)$ и ω_0 . Одновременно удастся найти по формулам (2), (4) деформации и кривизны поверхности оболочки, дополнительно возникающие во время испытаний.

Далее можно поставить такую задачу: во сколько раз следует увеличить внешнюю нагрузку (или внутренние усилия $N_{0n}(\alpha)$, $N_{0s}(\alpha)$), чтобы в оболочке возникли необратимые пластические

деформации (потеря несущей способности)? Другими словами, при каком числе n_* усилия на контуре L

$$N_{*0n}(L) = n_* p_1 N_n(L), \quad N_{*0s}(L) = n_* p_1 N_s(L) \quad (24)$$

порождают необратимые деформации, если к оболочке приложена периодическая нагрузка с малой амплитудой $b_0(\alpha)$?

Изучим ситуацию, когда возбуждение пробной нагрузкой $b_0(\alpha)$ создает дополнительные перемещения $u_0(\alpha)$, которые можно достоверно измерить. Опыты показывают, что в этом случае перемещения, при которых происходит потеря устойчивости, приближенно описываются формулой $K_0 u_0(\alpha)$.

Необратимые перемещения обычно характеризуются двояко. Если функция $u(\alpha)$ гладкая до третьего порядка, то необратимые деформации связаны с появлением напряжений, отвечающих текучести материала. Поскольку в этом случае напряжения пропорциональны изгибающим моментам M_{ij} , можно считать их пропорциональными норме вторых производных перемещения $m_1 = \sum_{i,j=1}^2 \left| \frac{\partial^2(u(\alpha))}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} \right|$. Если на некоторых линиях L_g появляется скачок вторых производных,

то предельные напряжения пропорциональны величине m_2 — скачку функции $m_2 = \sum_{i,j=1}^2 \left| \frac{\partial^2(u(\alpha))}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} \right|$. Обозначим m_1^0, m_2^0 значения m_1, m_2 применительно к функции $u_0(\alpha)$. Для гладкой функции $u_0(\alpha)$ получается $K_0 = \frac{s_1^*}{m_1^0}$, где s_1^* — деформации материала при достижении предела текучести. Если функция $u_0(\alpha)$ разрывная, то $K_0 = \frac{s_2^*}{m_2^0}$, где s_2^* — скачок деформации при появлении текучести.

Для определения n_* можно предложить следующую вычислительную процедуру. Подсчитаем коэффициенты уравнения (18) по формулам (19) при различных значениях двух параметров: $r > 1$ (в формулах усилий $N_m(\alpha) = r p_1 N_n(\alpha)$, $N_s(\alpha) = r p_2 N_s(\alpha)$) и k в представлении возможного перемещения $u_k = k u_0(\alpha)$, $1 < k \leq K_0$. Найдем периодическое решение уравнения (18) в области D (рис. 4) с амплитудой $T_a(k, r)$, являющейся функцией двух параметров k, r . В силу представления (17) потерю устойчивости (утрату несущей способности) характеризуют условия

$$n_* = \inf r, \quad T_a(k, r)k = K_0. \quad (25)$$

Отметим существенную особенность предлагаемой процедуры. Экспериментальная функция $u_0(\alpha)$ должна быть такова, чтобы при малой пробной нагрузке на резонансной частоте ω_0 прослеживался нелинейный характер колебаний: видимые на графике разрывы функции T (рис. 5). Преодолев затем некоторые вычислительные сложности [Капанагу, 2014], удастся получить реальные коэффициенты запаса n_* . Если резонансная функция T непрерывна, то запас устойчивости можно считать достаточным для будущей нормальной эксплуатации.

5. Заключение

Основной результат статьи состоит в том, что для выпуклых пологих оболочек потеря общей устойчивости оценивается на основе динамического анализа разрешающего интегро-дифференциального уравнения (16). Найденное уравнение является следствием математических достижений по асимптотическому обоснованию модели Кармана – Феппла в нелинейной теории упругости [Lewicka, Mora, Pakzad, 2011]. Сложности непосредственного численного анализа могут быть значительно сокращены, если воспользоваться результатами эксперимента по испытанию оболочки пробной периодической нагрузкой. В работе приводится принципиальная схема экспериментальной установки, а также процедура вычисления коэффициента запаса устойчивости. Таким образом, предложенный подход обобщает на произвольные выпуклые пологие оболочки анализ прогнозирования потери устойчивости, проведенный ранее для цилиндрических оболочек [Грачев, Найштут, 2020].

Список литературы (References)

- Аннин Б. Д., Волчков Ю. М. Неклассические модели теории пластин и оболочек // Прикладная механика и техническая физика. — 2016. — Т. 57, № 5. — С. 5–14.
Annin B. D., Volchkov Yu. M. Neklassicheskiye modeli teorii plastin i obolochek [Non-classical models of the theory of plates and shells] // Applied Mechanics and Technical Physics. — 2016. — Vol. 57, No. 5. — P. 5–14 (in Russian).
- Вильке В. Г. Теорема существования и единственности решений динамических задач нелинейной теории упругости // Прикладная математика и механика. — 1980. — Т. 44, вып. 4. — С. 710–719.
Vilke V. G. Teorema sushchestvovaniya i yedinstvennosti resheniy dinamicheskikh zadach nelineynoy teorii uprugosti [Existence and uniqueness theorem for solutions of dynamical problems of nonlinear elasticity theory] // Applied mathematics and mechanics. — 1980. — Vol. 44, No. 4. — P. 710–719 (in Russian).
- Вольмир А. С. Устойчивость упругих систем. — М.: Физматгиз, 1963.
Volmir A. S. Ustoichivost uprugih sistem [Stability of Elastic Systems]. — Moscow: Fizmatgiz, 1963 (in Russian).
- Ворович И. И. Математические проблемы нелинейной теории пологих оболочек. — М.: Физматгиз, 1980.
Vorovich I. I. Matematicheskie problemi nelineinoy teorii pologih obolochek [Mathematical problems of shallow shells within the nonlinear theory]. — Moscow: Fizmatgiz, 1980 (in Russian).
- Грачев В. А., Найштут Ю. С. Релаксационные колебания и устойчивость тонких оболочек // Компьютерные исследования и моделирование. — 2020. — Т. 12, № 4. — С. 807–820.
Grachev V. A., Neustadt Yu. S. Relaksatsionnye kolebaniya i ustoichivost tonkih obolochek [Relaxation oscillations and buckling of thin shells] // Computer research and modeling. — 2020. — Vol. 12, No. 4. — P. 807–820 (in Russian).
- Гукенхеймер Д., Холмс Ф. Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркация векторных полей. — М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002.
Guckenheimer J., Holmes P. Nonlinear oscillations, dynamical systems and bifurcation of vector fields. — Berlin: Springer, 1983. (Russ. ed.: Guckenheimer J., Holmes P. Nelineinye kolebaniya, dinamicheskie sistemi i bifurkatsiya vektornykh polei. — Moscow–Izhevsk: Institut komputernykh issledovaniy, 2002.)
- Димитриенко Ю. И., Губарева Е. А., Шалыгин И. С. Теория тонких оболочек, основанная на асимптотическом анализе трехмерных уравнений теории упругости // Инженерный журнал: наука и инновации. — 2015. — Вып. 5. — <http://engjournal.ru/catalog/mech/mdsb/1406>
Dimitrienko Yu. I., Gubareva E. A., Shaligin I. S. Teoriya tonkih obolochek, osnovannaya na asimptoticheskom analize trekhmernykh uravnenii teorii uprugosti [Theory of thin shells based on the asymptotic analysis of three-dimensional equations of elasticity theory] // Engineering journal: science and innovations. — 2015. — No. 5. — <http://engjournal.ru/catalog/mech/mdsb/1406> (in Russian).
- Кабриц С. А., Михайловский Е. И., Товстик П. Е., Черных К. Ф., Шамина В. А. Общая нелинейная теория упругих оболочек / ред. К. Ф. Черных.— СПб.: Изд-во Санкт-Петербургского ун-та, 2002.
Kabritz S. A., Michailovskii E. I., Tovstik P. E., Chernykh K. F., Shamina V. F. Obschaya nelineinaya teoriya uprugih obolochek [General nonlinear theory of elastic shells] / ed. K. F. Chernykh. — Saint Petersburg: Sankt-Petersburg University Publishing, 2002 (in Russian).
- Киселев В. В., Долгих Д. В. Нелинейно-упругие узоры из вмятин на поверхностях нагруженных пластин и оболочек. — М.: Физматлит, 2013.
Kiselev V. V., Dolgikh D. V. Nelineino-uprugie uzory na poverhnostyah nagruzhennykh plastin i obolochek [Nonlinear patterns of dents on the surfaces of plates and shells under load]. — Moscow: Phizmatlit, 2013 (in Russian).
- Койтер В. Т. Устойчивость и критическое поведение упругих систем // Механика. Периодич. сб. пер. иностр. лит. — М.: ИЛ, 1960. — № 5. — С. 99–110.
Koiter W. Elastic stability and post buckling behavior in nonlinear problems // Proceedings of the Symposium on Nonlinear Problems. — Madison: University of Wisconsin Press, 1963. — P. 257–275. (Russ. ed.: Koiter W. Ustoichivost i zakriticheskoe povedenie uprugih sistem // Mehanika. Sb. perev. inost. lit. — 1960. — No. 5. — P. 99–110.)
- Кузнецов А. П., Кузнецов С. П., Рыскин Н. М. Лекции по теории колебаний и волн. Нелинейные колебания. — Саратов: Изд-во Саратовского университета, 2011.
Kuznetsov A. P., Kuznetsov S. P., Ryskin N. M. Lekcii po teorii kolebaniy i voln. Nelineinye kolebaniya [Lectures on the theory of oscillations and waves. Nonlinear oscillations]. — Saratov: Saratov State University, 2011 (in Russian).
- Кузнецов С. П. Динамический хаос и гиперболические аттракторы: от математики к физике. — М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2013.
Kuznetsov S. P. Dinamicheskii haos i giperbolicheskie attraktory: ot matematiki k fizike [Dynamic chaos and hyperbolic attractors: from mathematics to physics]. — Moscow–Izhevsk: Institut komputernykh issledovaniy, 2013 (in Russian).

- Мищенко Е. Ф., Розов Н. Х.* Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания. — М.: Наука, 1975.
Mishchenko E. F., Rozov N. H. Differentsialnye uravneniya s malym parametrom i relaksatsionnye kolebaniya [Differential equations with small parameters and relaxation oscillations]. — Moscow: Nauka, 1975 (in Russian).
- Мухелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. — М.: Наука, 1966.
Muskhelishvili N. I. Nekotorye osnovnye zadachi matematicheskoi teorii uprugosti [Some basic problems of the mathematical theory of elasticity]. — Moscow: Nauka, 1966 (in Russian).
- Новожилов В. В.* Основы нелинейной теории упругости. — М.–Л.: Гостехиздат, 1948.
Novozhilov V. V. Osnovy nelineinoi teorii uprugosti [Foundations of the nonlinear theory of elasticity]. — Moscow–Leningrad: Gostehizdat, 1948 (in Russian).
- Срубщик Л. С.* К вопросу о нежесткости в нелинейной теории пологих оболочек // Изв. АН СССР. Сер. Матем. — 1972. — Т. 36, № 4. — С. 890–909.
Srubshchik L. S. K voprosu o nezhestkosti v nelineynoy teorii pologikh obolochek [On the question of nonrigidity in the nonlinear theory of shallow shells] // Izv. USSR Academy of Sciences. Ser. Mat. — 1972. — Vol. 36, No. 4. — P. 890–909 (in Russian).
- Ball J. M.* Convexity conditions and existence theorems in nonlinear elasticity // Arch. Rat. Mech. Anal. — 1977. — Vol. 63. — P. 337–403.
- Dal Maso G.* An introduction to Γ -convergence. Progress in nonlinear differential equations and their applications. — Boston, MA: Birkhauser, 1993.
- De Giorgi E., Franzoni T.* Su un tipo di convergenza variazionale // Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (8). — 1975. — Vol. 58, No. 6. — P. 842–850.
- Föppl A.* Vorlesungen über technische Mechanik. — Bd. 5. — Leipzig, Germany: B. G. Teubner, 1907.
- Hilburger M.* Developing the next generation shell buckling design factors and technologies // 53rd AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials Conference. — <https://doi.org/10.2514/6.2012-1686>
- Hornung P., Velic I.* Derivation of a homogenized von-Kármán shell theory from 3D elasticity // Ann. Inst. H. Poincaré. — 2015. — AN 32. — P. 1039–1070.
- Hutchinson J. W.* Buckling of spherical shells revisited // Proc. R. Soc. — 2016 — A 472 (2195). — 20160577.
- Jordan D. W., Smith P.* Nonlinear ordinary differential equations. — An introduction for scientists and engineers. — 4th ed. — Oxford: Oxford University Press, 2007.
- Kanamaru T.* Duffing oscillator. — [Electronic resource]. — http://scholarpedia.org/article/Duffing_oscillator (accessed: 22.10.2014).
- Karman Th., Tsien H. S.* The buckling of cylindrical shells under axial compression // Journal of Aeron. Soc. — 1941. — Vol. 8, No. 8. — P. 303–312.
- Kovacic I., Brennan M. J.* (eds.) The Duffing equation: nonlinear oscillators and their behaviour. — Chichester, UK: Wiley & Sons Ltd., 2011.
- Lewicka M., Mora M. G., Pakzad M. R.* Shell theories arising as low energy Γ -limit of 3D nonlinear elasticity // Ann. Sc. Norm. Super. Pisa, Cl. Sci. — 2010. — Vol. 5, No. 9 (2). — P. 253–295.
- Lewicka M., Mora M. G., Pakzad M. R.* The matching property of infinitesimal isometries on elliptic surfaces and elasticity of thin shells // Arch. Ration. Mech. Anal. — 2011. — Vol. 200, No. 3. — P. 1023–1050.
- Lovejoy A., Legley D. C., Hilburger M., Przekop A.* Lessons learned from large-scale aerospace structural testing // AIAA SciTech 2021 Forum 11–15 & 19–21 January 2021 VIRTUAL EVENT. — <https://doi.org/10.2514/6.2021-1619>
- Marcellini P.* Existence theorems in nonlinear elasticity // North-Holland Mathematics Studies. — 1986. — Vol. 129. — P. 241–247.
- Neustadt Yu. S., Grachev V. A.* Buckling prognosis for thin elastic shallow shells // Zeitschrift der Angewandte Math. und Physik. — 2019. — Vol. 70. — Art. 113. — <https://doi.org/10.1007/s00033-019-1151-x>

-
- Royer F., Hutchinson J.W., Pellegrino S.* Probing the stability of thin-shell space structures under bending // *International Journal of Solids and Structures*. — 2022. — <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2022.111806>
- Yadav K. K., Cuccia N. L., Viot E., Rubinstein S. M., Gerasimidis S. A.* Nondestructive technique for the evaluation of thin cylindrical shells' axial buckling capacity // *Journal of Applied Mechanics*. — 2021. — Vol. 88, No. 5. — 051003. — 10 p. — <https://doi.org/10.1115/1.4049806>