

УДК: 519.8

## Модель управления потреблением воды в регионах с малой водообеспеченностью

М. А. Решитько<sup>а</sup>, А. Б. Усов<sup>б</sup>, Г. А. Угольницкий<sup>с</sup>

Южный федеральный университет,  
Россия, 344002, г. Ростов-на-Дону, ул. Б. Садовая, д. 105/42

E-mail: <sup>а</sup> reshitko@sfedu.ru, <sup>б</sup> abusov@sfedu.ru, <sup>с</sup> gaugolnickiy@sfedu.ru

Получено 27.02.2023.

Принято к публикации 03.05.2023.

В статье рассматривается проблема рационального использования водных ресурсов на уровне региона. Приводится обзор существующих методов контроля качества и количества водных ресурсов на различных уровнях — от отдельных домохозяйств до мирового. В самой работе проблема рассматривается для регионов России с малой водообеспеченностью — количеством воды на человека в год. Особое внимание уделяется регионам, в которых данный показатель мал из-за природных особенностей региона, а не большого числа жителей. В таких регионах много ресурсов выделяется на различную водную инфраструктуру, в том числе водохранилища, переброску воды из соседних регионов. При этом основными потребителями воды являются промышленность и сельское хозяйство. В работе представлена динамическая двухуровневая модель, сопоставляющая потребление регионом воды и объем производства в регионе (валовой региональный продукт, ВРП). На верхнем уровне модели находится администрация региона (центр), назначающая плату за использование воды, а на нижнем — предприятия региона (агенты). Проведены аналитическое исследование и идентификация модели. Аналитическое исследование позволяет с помощью принципа максимума Понтрягина найти оптимальные управления агентов. Идентификация модели позволяет, используя статистические данные для региона, определить коэффициенты модели таким образом, чтобы она соответствовала данному региону. Для идентификации модели используются данные Росстата. Далее следует численное исследование модели для конкретных регионов с использованием алгоритма trust region reflective.

Для ряда регионов РФ с низким уровнем водообеспеченности приведены результаты идентификации модели на основе данных Росстата, а также возможные значения ВРП и потребления воды в зависимости от выбранной стратегии центра. Для многих регионов расчеты показывают возможность существенного (>20 %) сокращения потребления воды при некотором сокращении производства (≈10 %).

Приведенная в работе модель позволяет рассчитывать размер дополнительной платы за использование воды для достижения оптимального соотношения экономических и экологических последствий.

Ключевые слова: оптимальное управление, имитационное моделирование, распределение водных ресурсов

UDC: 519.8

## Water consumption control model for regions with low water availability

M. A. Reshitko<sup>a</sup>, A. B. Usov<sup>b</sup>, G. A. Ougolnitsky<sup>c</sup>

Southern Federal University,  
105/42 B. Sadovaya st., Rostov-on-Don, Russia, 344002

E-mail: <sup>a</sup> reshitko@sfedu.ru, <sup>b</sup> abusov@sfedu.ru, <sup>c</sup> gaugolnickiy@sfedu.ru

*Received 27.02.2023.*

*Accepted for publication 03.05.2023.*

This paper considers the problem of water consumption in the regions of Russia with low water availability. We provide a review of the existing methods to control quality and quantity of water resources at different scales — from households to worldwide. The paper itself considers regions with low “water availability” parameter which is amount of water per person per year. Special attention is paid to the regions, where this parameter is low because of natural features of the region, not because of high population. In such regions many resources are spend on water processing infrastructure to store water and transport water from other regions. In such regions the main water consumers are industry and agriculture.

We propose dynamic two-level hierarchical model which matches water consumption of a region with its gross regional product. On the top level there is a regional administration (supervisor) and on the lower level there are region enterprises (agents). The supervisor sets fees for water consumption. We study the model with Pontryagin’s maximum principle and provide agents’s optimal control in analytical form. For the supervisor’s control we provide numerical algorithm. The model has six free coefficients, which can be chosen so the model represents a particular region. We use data from Russia Federal State Statistics Service for identification process of a model. For numerical analysis we use trust region reflective algorithms. We provide calculations for a few regions with low water availability. It is shown that it is possible to reduce water consumption of a region more than by 20 % while gross regional product drop is less than 10 %.

**Keywords:** optimal control, simulation modeling, water resource allocation

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2023, vol. 15, no. 5, pp. 1395–1410 (Russian).

## Введение

Проблема нехватки воды становится все более актуальной во всем мире. Это связано как с ростом потребления воды из-за роста населения и промышленности, так и с уменьшением объема доступной воды надлежащего качества из-за ее загрязнения в ходе антропогенной деятельности. Способы решения данной проблемы предлагаются во многих работах [Wang et al., 2013; Augeraud-Véron, Boucekkine, Veliov, 2019]. Проблема рассматривается как на международном [Wada et al., 2016; Gani, Scrimgeour, 2014], государственном [Chen, Zhu, Shen, 2020; Niu, Tian, Xue, 2016], региональном [Кулик, 2010; Wang et al., 2014; He et al., 2007; Tran, Schwabe, Jassby, 2016] уровнях, так и на уровне отдельных водных объектов [Пряжинская, 2009; Alvarez-Vázquez et al., 2009; Volk et al., 2008], городов [Goyal, Kumar, 2020; Aybuğa, Yücel Isildar, 2017] и предприятий [Puigjaner, Espuna, Almato, 2008]. Для улучшения качества воды предлагаются, в частности, различные методы государственного регулирования [Helmer, Hespanhol, WHO, 1997; Niu, Tian, Xue, 2016; Chen, Zhu, Shen, 2020; Gani, Scrimgeour, 2014], а также концепция экономики замкнутого цикла [Stanchev et al., 2017; Smol, Adam, Preisner, 2017]. В качестве мер государственного регулирования выделяют административные и экономические меры [Helmer, Hespanhol, WHO, 1997]. Первые предполагают законодательные ограничения на сброс и использование воды для потребителей. Недостатком этого метода является необходимость контролировать выполнение ограничений потребителями. Второй метод предполагает экономическое воздействие на потребителей, в частности назначение платы за сброс загрязняющих веществ в воду и за потребление чистой воды, поощрение совершенствования технологических процессов в сторону уменьшения расхода воды. Такой подход позволит стимулировать потребителя к определенной стратегии использования вод, но требует более точного моделирования эколого-экономической ситуации в контролируемой области. Экономика замкнутого цикла предполагает стремление к максимально возможному повторному использованию ресурсов, в частности воды [Boysen et al., 2020; Goyal, Kumar, 2020; Puigjaner, Espuna, Almato, 2008]. Для улучшения качества доступной воды важно как уменьшение ее загрязнения, так и сокращение потребления. Более того, кроме экологических целей улучшения качества воды следует учитывать экономические интересы различных субъектов эколого-экономической системы. В частности, предприятия могут стремиться к максимизации прибыли, государства — к росту уровня производства, а домовладельцы — к доступной по цене и приемлемой по качеству воде. Таким образом, при моделировании такой эколого-экономической системы на любом уровне, от уровня отдельных предприятий и домохозяйств до международного, возникает задача моделирования не только водной системы, но и интересов заинтересованных сторон, которые необходимо учитывать. Разные авторы подходят к данной проблеме с различных сторон, в частности, используя модель межотраслевого баланса [Chen, Zhu, Shen, 2020; Кулик, 2010] и другие статические [Niu, Tian, Xue, 2016] и динамические [Shah et al., 2018] модели. В любом случае речь, как правило, идет об оптимальном соотношении экономической выгоды и экологических последствий, которое и необходимо оценить.

При рассмотрении водных ресурсов региона важным показателем является удельная душевая водообеспеченность [Измайлова, 2019]. Под ней понимается количество водных ресурсов на одного человека в год. Водные ресурсы региона складываются из местного стока и притока из приграничных территорий. Согласно [Измайлова, 2019] почти 20 % площади РФ находится в зоне недостаточного увлажнения. В этой зоне величина выпадающих осадков меньше количества испаряющейся воды. Такие регионы испытывают недостаток местного стока и в значительной степени зависят от притока воды извне. В этом случае вода может распределяться в регионе неравномерно, создавая дефицит вдали от крупных рек. Еще одним фактором недостатка воды является высокая плотность населения в регионе. По данным [Измайлова, 2019], катастрофически низкой водообеспеченностью характеризуются Севастополь и Республика Крым, а также Москва и Московская область, очень низкой водообеспеченностью отличаются Ставропольский

край и Белгородская область, а низкая водообеспеченность отмечается еще в 13 субъектах РФ. Проблема нехватки воды в регионах решается, в частности, за счет переброски воды из соседних регионов [О состоянии окружающей среды . . . в Ставропольском крае] и создания системы водохранилищ для распределения внешнего притока воды. Таким образом, поддержание необходимых запасов воды в вышеперечисленных регионах требует постоянных затрат, а также зависит от глобальной доступности воды и обстановки в соседних регионах.

В настоящей статье предложена модель стимулирования предприятий региона к уменьшению потребления воды. С ее помощью руководство региона может прогнозировать влияние снижения потребления воды на уровень производства. В отличие от [Боронина, Абуова, 2019; Жамьянов, Дойникова, Банзаракаев, 2021; Брусницина, 2014; Кулик, 2010], в которых рассматриваются отдельные регионы, в данной работе исследование разделяется на два этапа: исследование обобщенной модели для регионов и идентификация модели для анализа конкретного региона. Такое разделение позволяет получить обобщенные аналитические результаты для большого круга задач, а затем проводить анализ каждого региона отдельно с учетом имеющихся данных. Например, для Ростовской области проведены расчеты с учетом потребления воды группами предприятий по видам экономической деятельности [Решитько, Усов, 2021], поскольку данные для таких расчетов были доступны.

Снижение потребления воды предприятиями в регионах с низкой водообеспеченностью позволит уменьшить зависимость экономики региона от внешних факторов. Предложенная модель позволяет рассматривать водопотребление как всех предприятий региона, так и отдельных групп по видам экономической деятельности в зависимости от доступных данных. Возможно также рассмотрение отдельных предприятий при наличии фактических данных по водопотреблению и производству. В работе для идентификации модели используются данные из открытых источников [Регионы России. Социально-экономические показатели]. Также приводятся примеры расчетов для некоторых регионов РФ с низкими показателями водообеспеченности.

## Описание модели

При разработке модели, с одной стороны, учитывалась необходимость создать универсальную эколого-экономическую модель потребления водных ресурсов разными регионами. С другой стороны, модель разрабатывалась с учетом доступных в открытых источниках данных о регионах и потреблении воды, чтобы расширить область практического применения модели.

Предлагаемая модель учитывает два уровня управления: на верхнем находится руководство региона (центр), а на нижнем — предприятия (агенты). Взаимодействие центра и агентов имеет иерархический характер. Центр, как ведущий игрок, выбирает свое управление первым и сообщает его предприятиям. Предприятия выбирают свои управления, когда выбор центра уже известен.

Основными информационными регламентами для описания взаимодействий в таких двухуровневых иерархических системах с точки зрения теории игр являются игра Гермейера Г1t (игра Штакельберга) [Гермейер, Ватель, 1974; Dockner et al., 2000; Угольницкий, 2016] и игра Гермейера Г2t [Гермейер, Ватель, 1974; Dockner et al., 2000; Угольницкий, 2016]. В обоих случаях предполагается, что центру известно поведение агента (его возможные управления, а также целевая функция) и центр имеет приоритет в принятии решения, то есть выбирает свое управление первым и сообщает его агенту. Отличия регламентов заключаются в том, какой вид имеет сообщаемое управление. В случае игры Г1 управление центра есть функция от времени и состояния системы. Таким образом, центр может стимулировать поведение агента как экономически (в нашем случае — вводя плату за использование единицы воды), так и административным путем (вводя ограничение на количество использованной воды). В игре Г2 центр гораздо сильнее ограничивает агента — управление центра, передаваемое агенту, является функцией от управления

самого агента, то есть центр диктует агенту стратегию поведения. В этом случае агент вынужден подчиняться центру под угрозой применения наихудшей для агента стратегии (минимизирующей его целевую функцию даже в ущерб центру). Такая модель поведения не характерна для взаимодействия предприятий и администрации региона в условиях рыночной экономики. Другие игры (ГЗ) также слишком нереалистично ограничивают агентов, поэтому в работе используется регламент игры Г1.

Сам агент может представлять собой как отдельное предприятия, так и обобщенную по региону группу предприятий или по отраслям промышленности в регионе. Конкретное представление агента выбирается в зависимости от доступных данных для исследуемого региона. В модели для описания агента предлагается использовать три показателя: величину основных фондов  $K$ , объем производства  $Q$  и объем использованной воды  $W$ . Выбор этих показателей связан с эколого-экономической ориентированностью модели, а выбор относительно малого числа параметров, данные о значениях которых в то же время доступны для большинства регионов России, позволяет применять модель повсеместно.

Рассмотрим эти показатели подробнее. Величина основных фондов  $K$  характеризует производственные мощности агента, его производственный потенциал. Объем потребленной воды  $W$  одновременно влияет как на экологическое состояние региона, так и на производственный потенциал агента, поскольку водные ресурсы широко используются в производстве. Чтобы связать параметры  $K$  и  $W$  с объемом производства  $Q$  предлагается использовать производственную функцию, в которой  $K$  и  $W$  являются факторами производства. Хотя изначально производственная функция использовалась для моделирования экономики государств, сегодня ее используют гораздо шире, в частности для моделирования экономики и экологии регионов. Примером могут служить работы [Howitt, Kristin, Siwa, 2001; Zhang et al., 2017]. В первой работе производственная функция с тремя факторами производства, включая потребление воды, используется для моделирования экономики сельского хозяйства штата Калифорния. Во второй работе производственная функция с двумя факторами производства, включая потребление воды, используется для оптимального распределения водных ресурсов в уезде Миньцинъ на северо-западе Китая. Также в [Суворов и др., 2020] производственная функция используется для моделирования промышленности Республики Башкортостан.

Таким образом, хотя использование производственной функции накладывает ограничения на модель, задавая вид динамики моделируемой системы, производственная функция используется в решении множества эколого-экономических задач, при этом необходимая гибкость модели достигается за счет использования реальных данных и подбора свободных коэффициентов модели на основе этих данных. Процесс подбора коэффициентов описан в разделе «Идентификация модели».

Таким образом, агенты характеризуются величиной основных фондов  $K$  и объемом производства  $Q$ . Пусть для  $i$ -го агента за период времени  $t$  объем производства выражается следующим образом:

$$Q_i^t = A_i (K_i^t)^{a_i} (W_i^t)^{b_i}. \quad (1)$$

Здесь  $A_i$ ,  $a_i$ ,  $b_i$  — положительные коэффициенты,  $K_i^t$  — величина основных фондов  $i$ -го агента на начало периода  $t$ ,  $W_i^t$  — потребление воды за период  $t$ , которое устанавливается агентом. Также вспомним, что использование воды в качестве фактора производства, а также отсутствие ограничения  $a_i + b_i = 1$ , характерного для производственной функции, уже применялись ранее [Howitt, Kristin, Siwa, 2001; Zhang et al., 2017].

В рамках исследуемой эколого-экономической проблемы величина основных фондов  $K$  характеризует производственный потенциал агента, на который агент не влияет напрямую, он является результатом его предыдущего развития. Уровень же потребления воды агент может устанавливать независимо от предыдущего выбора, исходя из собственных производственных

целей и ограничений центра. Иначе говоря, в терминах теории игр величина  $K$  описывает динамику исследуемой системы, а величина  $W$  является управлением агента. Величина  $Q$  вычисляется из (1) в фиксированный момент времени.

Рассмотрим уравнение динамики системы, из которого возможно получить значение  $K$  в следующий момент времени из значений текущих параметров  $K$ ,  $W$  и  $Q$ . Зависимость  $K_{t+1}$  от  $K_t$  положим линейной с дисконтирующим коэффициентом. Это соответствует естественной деградации производственных фондов вследствие инфляции и устаревания. Уровень производства  $Q$  в конечном счете определяет прибыль, полученную предприятием, поэтому  $K_{t+1}$  зависит от  $Q_t$  линейно с обобщенным коэффициентом, отражающим конверсию производства в прибыль предприятия, а также долю от прибыли, вкладываемой предприятием в развитие производственных фондов. Также в уравнение динамики включено  $W$  в качестве затрат на забор, обработку и использование водных ресурсов. Здесь берется квадратичная зависимость от  $W$ , что описывает нелинейный рост стоимости очистных сооружений и обработки воды. Также в уравнение динамики включена плата за использование водных ресурсов, которую устанавливает центр. Таким образом, динамика системы имеет следующий вид:

$$K_i^{t+1} = c_i K_i^t + d_i Q_i^t - h_i (W_i^t)^2 - F_i^t(W). \quad (2)$$

Здесь  $c_i$ ,  $d_i$ ,  $h_i$  — положительные коэффициенты, смысл которых описан выше. Первые два слагаемых уравнения (2) выписаны на основе отечественных работ, в которых строятся модели динамики фондов предприятий. В частности, в [Гребнева и др., 2015; Ларионов, Кузнецова, 2012; Соколова, Калужная, Сергеев, 2019] зависимость динамики фондов от текущего значения полагается линейной. Дополнительно в [Гребнева и др., 2015] динамика фондов линейно зависит как от текущего значения фондов, так и от инвестиций в основные фонды, что отражено и в нашей модели. Третье слагаемое (2) выписано на основе [Niu, Tian, Xue, 2016], где обсуждаются различные виды функций затрат/поощрения за использование природных ресурсов, в частности потребление воды / сброс загрязняющих веществ в воду. Затраты, равные квадрату потребленной воды, являются одной из часто используемых функций, при этом такой вид функции не требует использования дополнительных величин из реальных данных, поэтому является наиболее подходящим с точки зрения простоты модели.

Управление центра в общем виде имеет вид  $F_i^t(W)$ , и вид функции  $F$  отвечает за различные стратегии поощрения агентов центром за уменьшение потребления воды. В примерах ниже используется квадратичная функция поощрения  $v_i^t (W_i^t)^2$  аналогично выбранному виду затрат на использование воды. В этом случае управление центра для  $i$ -го агента задается в виде коэффициентов  $v_i^t$ , а потери производственных фондов от платы за потребление воды в момент времени  $t$  вычисляются по формуле  $v_i^t (W_i^t)^2$ . Вычисленные с помощью идентифицированной модели коэффициенты  $v_i^t$  задают оптимальную стратегию поощрения агентов для центра.

Задачей агентов является максимизация производства на рассматриваемом временном отрезке при сохранении своих фондов, то есть стремление к максимизации прибыли от производства и сохранение ресурсов для получения прибыли в дальнейшем, что необходимо в условиях рыночной экономики:

$$\max_{W_i^t} \left( K_i^{t_1} + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} Q_i^t \right), \quad (3)$$

$$0 < W_i^t < W_{i \max}.$$

Задачей центра является как максимизация производства, так и минимизация потребления воды в рамках стабильного эколого-экономического развития управляемого региона. Поскольку

данные цели являются частично взаимоисключающими, вводится величина  $p$ ,  $0 \leq p \leq 1$ , отражающая текущие предпочтения центра между производством и потреблением воды. При  $p = 0$  центр стремится только к уменьшению потребления воды, при  $p = 1$  — только к увеличению производства. Для нормализации различных величин используются нормирующие коэффициенты  $k_1, k_2$ . В работе предполагается, что функция  $F_i^t(W)$  имеет вид  $v_i^t (W_i^t)^2$ . Тогда управление центра для  $i$ -го агента ищется в виде коэффициентов  $v_i^t$ . Таким образом, целевая функция центра выглядит следующим образом:

$$\max_{v^t} \left( \sum_{t=t_0}^{t_1-1} p k_1 Q(t) - (1-p) k_2 W(t) \right), \quad p \in [0, 1], \tag{4}$$

$$0 < v_i^t < v_{\max},$$

$$v^t = (v_1^t, v_2^t, \dots, v_n^t).$$

Для модели (1)–(4) далее приведен алгоритм исследования для одного условного агента, то есть для всего множества предприятий региона. Случай, когда агентов несколько, предполагает разделение предприятий внутри региона на группы по определенному признаку, например по видам экономической деятельности [Решитько, Усов, 2021]. В таком случае в дополнение к приведенному ниже алгоритму исследования модели может понадобиться нахождение равновесия Нэша в игре агентов. В данной работе рассматривается случай одного агента, что позволяет исследовать множество регионов России, поскольку необходимая информация предоставляется Росстатом. Поскольку далее рассматривается случай одного агента, коэффициент  $i$  будем опускать.

### Исследование модели

Таким образом, рассматривается двухуровневая система управления водопотреблением (1)–(4). Как обсуждалось выше, в данной модели принят информационный регламент игры Гермейера Г1. Алгоритм построения решения игры Г1 для модели (1)–(4) состоит в следующем.

1. В результате решения задачи агента (3) при фиксированном управлении центра определяется оптимальное управление агента  $W^*$ .
2. Найденное на первом шаге алгоритма управление агента  $W^*$  подставляется в (4).
3. Решается задача центра (4) с учетом  $W^*$ .

На первом шаге алгоритма рассматривается задача (1)–(3), то есть решается задача максимизации целевого функционала агента (3) при фиксированном управлении центра. Для такой постановки задача (3) решается аналитически с помощью принципа максимума Понтрягина [Hwang, Fan, 1967]. Задача принимает вид

$$\max_{W^t} H, \tag{5}$$

$$W^t \in [0, W_{\max}], \tag{6}$$

$$H = A (K^t)^a (W^t)^b + \lambda^{t+1} (cK^t + dA (K^t)^a (W^t)^b - (h + v^t)(W^t)^2),$$

$$K^{t+1} = cK^t + dQ^t - h(W^t)^2 - v^t (W^t)^2, \tag{7}$$

$$\lambda^t = Aa (K^t)^{a-1} (W^t)^b + \lambda^{t+1} (c + dAa (K^t)^{a-1} (W^t)^b). \tag{8}$$

Задача (5) решается аналитически, находится оптимальное управление агента:

$$W^t = e^{-\frac{D}{b-2}}, \quad D = -\ln(2) - \ln\left(\frac{\lambda^{t+1}(h+v^t)}{Ab(1+d\lambda^{t+1})}\right) + a \ln(K^t). \quad (9)$$

Оптимальное управление агента в момент  $t$  описывается выражением (9) в случае отрицательности второй производной (5) по  $W$ . В противном случае из концов отрезка  $[0, W_{\max}]$  выбирается управление, максимизирующее (5). Таким образом, оптимальное управление агента описывается формулой

$$W^t = \begin{cases} W^t, & \frac{\partial^2 H}{\partial W^2} < 0, \\ W_{\max}, & \frac{\partial^2 H}{\partial W^2} > 0 \quad \& \quad H(W_{\max}) > H(0), \\ 0, & \frac{\partial^2 H}{\partial W^2} > 0 \quad \& \quad H(W_{\max}) < H(0). \end{cases} \quad (10)$$

Далее для решения задачи центра выражение (10) подставляется в (4) вместо управления агента. Затем задача центра (1), (2), (4) решается методом качественно репрезентативных сценариев имитационного моделирования [Ougolnitsky, Usov, 2018].

Суть метода заключается в том, что множество всех возможных управлений центра (состоящее в данном случае из коэффициентов  $v^t$ ) сокращается до относительно небольшого числа стратегий, позволяющих качественно представить разные пути развития системы «центр – агент». При использовании этого метода строится так называемое множество качественно репрезентативных сценариев (QRS). Данное множество содержит набор стратегий центра  $\{v^t\}$ , где  $v^t = (v^t_0, \dots, v^t_1)$ , для которых выполняются следующие условия.

1. Для любых двух стратегий  $v^t_i, v^t_j \in QRS$  выполняется  $|J^i_0 - J^j_0| > \delta$ . Здесь  $J^i_0$  – значение выигрыша центра (4) при применении  $i$ -й стратегии.
2. Для любой стратегии  $v^t_k \notin QRS$  существует стратегия  $v^t_j \in QRS$ , для которой  $|J^k_0 - J^j_0| \leq \delta$ , где  $\delta > 0$  – малое число, выбираемое из расчета требуемой точности и доступных вычислительных ресурсов.

Здесь  $J^i_0$  – значение выигрыша центра (4) при применении  $i$ -й стратегии. Поскольку оптимальное управление агента уже найдено аналитически (10), для любой стратегии центра  $i \in QRS$  можно вычислить его выигрыш  $J^i_0$ . При этом следует заметить, что, хотя стратегии центра представляются векторами вещественных чисел  $v^t \in \mathbb{R}^n$ , их число сокращается до конечного, если учесть, что в реальности центр способен устанавливать свое управление только с некоторой точностью. Множество QRS можно строить итеративно, взяв некоторое подмножество стратегий центра как начальное приближение, с учетом доступных вычислительных ресурсов. Затем для выбранного множества проверяются условия 1 и 2, при этом условие 1 позволяет исключить из множества часть управлений для ускорения расчетов, а условие 2 позволяет оценить, требуется ли расширение множества QRS. Алгоритм и примеры расчетов доступны в [Решитько, Угольницкий, Усов, 2020]. Таким образом, задача центра решается следующим образом.

1. Проводится идентификация модели, определяется множество возможных управлений центра, формируется множество QRS.
2. Перебором стратегий центра из множества QRS находится наилучшая стратегия, максимизирующая (4).



## Идентификация модели

Перед проведением численных расчетов необходимо провести идентификацию модели. На данном этапе находятся коэффициенты  $A, a, b, c, d, h$  таким образом, чтобы модель соответствовала конкретному региону. Для этого используются статистические данные по величине фондов и региональному продукту [Регионы России. Социально-экономические показатели]. Коэффициенты  $A, a, b, c, d, h$  подбираются методом наименьших квадратов [Kariya, Kurata, 2004]. Поясним, как это делается.

Для нахождения коэффициентов  $A, a, b$  рассматривается выражение (1). Из статистических данных берутся значения  $Q^t, K^t, W^t$  для различных значений времени  $t$ . Тогда коэффициенты  $A, a, b$  находятся из решения задачи

$$\min_{A,a,b} \sum_t \left( Q^t - A (K^t)^a (W^t)^b \right)^2.$$

Коэффициенты  $c, d, h$  находятся из выражения (2) с учетом полученных  $A, a, b$  и  $F^t(W) = 0$ . Из статистических данных берутся значения  $W^t, K^t$  и  $K^{(t+1)}$  для различных значений времени  $t$ . Коэффициенты  $c, d, h$  находятся из решения задачи

$$\min_{A,a,b} \sum_t \left( K^{t+1} - cK^t - dQ^t + h(W^t)^2 \right)^2.$$

Для решения данной задачи используется библиотека `scipy` языка Python [Scipy.optimize.least\_squares]. В ней для решения оптимизационной задачи используются алгоритмы `trust region reflective` [Conn, Gould, Toint, 2000]. Примеры найденных коэффициентов для различных регионов приведены в таблице 1.

Таблица 1. Коэффициенты модели для различных регионов

	$a$	$b$	$A$	$c$	$d$	$h$
Белгородская область	0,776	0,081	8,624	0,377	1,239	0,08
Краснодарский край	0,451	0,621	13,582	0,566	1,467	0,042
Курганская область	1,129	0,09	0,036	0,754	1,015	0,162
Курская область	0,964	0,092	0,492	0,321	1,589	0,135
Липецкая область	1,022	0,089	0,212	0,899	0,456	0,09
Пензенская область	0,832	0,09	2,452	0,09	2,506	0,09
Ростовская область	1,072	0,224	0,032	0,899	0,777	0,09
Ставропольский край	0,26	1,142	1,463	0,899	0,973	0,029
Тамбовская область	0,832	0,09	2,584	0,09	2,443	0,106
Тульская область	1,189	0,09	0,025	0,899	0,379	0,09
Республика Дагестан	0,517	0,541	5,633	0,66	1,198	0,014
Челябинская область	1,076	0,083	0,089	0,899	0,405	0,009
Чеченская Республика	1,052	0,090	0,112	0,69	1,193	0,09

Таким образом, исследование модели состоит из этапа идентификации, на котором находятся коэффициенты  $A, a, b, c, d, h$ , а также этапа нахождения решения игры Г1, на котором рассматриваются задачи агента и центра.

## Примеры расчетов

Расчеты проведены для ряда регионов с низкой и очень низкой водообеспеченностью. В результате применения процедуры идентификации модели найдены коэффициенты для ряда регионов. Использовались данные за период 2012–2018 годов.

При проведении расчетов с увеличением коэффициента  $p$ , который отражает предпочтения центра между уровнем производства и потреблением воды, наблюдается уменьшение управлений центра вместе с увеличением потребления воды и производства. Ниже представлены фрагменты расчетов при таких  $p$ , что потребление воды сопоставимо с реальным потреблением региона. Моделирование проводится с конца 2016 года, рассматривается промежуток в два года. Значение  $W_{\max}$  берется как десятикратное значение от максимального потребления воды в регионе за период 2012–2018 годов. При расчетах задачи центра методом качественно-репрезентативных сценариев за максимальное значение управления центра принимается 25, что соответствует 25-кратному штрафу за единицу использованной воды. Это соответствует ряду величин максимальных штрафных коэффициентов, принятых в РФ, в частности за сброс загрязняющих веществ.

### **Белгородская область**

Расчеты позволяют выбрать стратегию влияния на предприятия; например, при  $p = 0,9$  суммарно за два года будет использовано на 12 % меньше воды. При этом валовый региональный продукт сократится на 5 %. Данные для других значений  $p$  приведены в таблице 2.

Таблица 2. Результаты исследования модели для Белгородской области

$p$	$v_{2018}$	$v_{2017}$	$dW, \%$	$dQ, \%$
0,7	24,992	19,059	22,309	82,675
0,725	24,985	14,704	24,038	83,357
0,75	24,915	11,176	26,144	84,089
0,775	19,957	8,333	30,001	85,258
0,8	14,453	5,892	35,723	86,766
0,825	10,0	4,167	42,902	88,378
0,85	6,901	2,795	52,351	90,168
0,875	4,269	1,761	66,455	92,367
0,9	2,483	0,991	87,963	95,026

Здесь и в последующих таблицах  $v_{2017}$ ,  $v_{2018}$  обозначают управления центра в соответствующий год,  $dW$ ,  $dQ$  обозначают изменение потребления воды и производства при применении данных управлений центра относительно фактических значений из данных.

Белгородская область является регионом с очень низкой водообеспеченностью. Используя данную модель, центр способен сократить потребление воды на 44 % (при  $p = 0,875$ ). При этом валовый региональный продукт сократится только на 8 %.

### **Челябинская область**

Челябинская область является регионом с низкой водообеспеченностью. При этом в регионе развита промышленность, особенно металлургия [Самуратова, 2017]. В этой ситуации центр может принять решение в пользу развития промышленности (выбирая  $p > 0,85$ ). Результаты расчетов приведены в таблице 3.

### **Курганская область**

Результаты расчетов приведены в таблице 4. Курганская область является еще одним регионом юга Урала с низкой водообеспеченностью. Несмотря на довольно развитый агропромышленный комплекс [Федотова, Соколова, 2018], расчеты показывают, что даже небольшой рост производства (на 2 %) связан с существенным увеличением расхода воды (на 24 %).

Таблица 3. Результаты исследования модели для Челябинской области

$p$	$v_{2018}$	$v_{2017}$	$dW, \%$	$dQ, \%$
0,7	1,402	0,788	37,361	93,537
0,725	1,052	0,593	43,286	94,793
0,75	0,809	0,467	49,223	95,905
0,775	0,601	0,337	57,745	97,306
0,8	0,442	0,248	67,484	98,695
0,825	0,314	0,176	80,179	100,255
0,85	0,21	0,115	98,481	102,151

Таблица 4. Результаты исследования модели для Курганской области

$p$	$v_{2018}$	$v_{2017}$	$dW, \%$	$dQ, \%$
0,925	24,994	24,994	49,67	93,171
0,95	24,915	14,968	57,063	94,638
0,975	6,016	3,056	124,146	102,594

### **Курская область**

Курская область является регионом центральной России с низкой водообеспеченностью. В регионе развиты сельское хозяйство, добыча железной руды и легкая промышленность [Бурлак, Вишнякова, Канищева, 2019]. Результаты расчетов приведены в таблице 5. При определенных значениях  $p$  ( $p = 0,925$ ) возможно сокращение потребления воды почти на 25 % при уменьшении производства менее чем на 4 %.

Таблица 5. Результаты исследования модели для Курской области

$p$	$v_{2018}$	$v_{2017}$	$dW, \%$	$dQ, \%$
0,75	24,992	23,039	18,718	80,995
0,775	24,989	17,061	20,354	81,956
0,8	24,98	12,331	22,421	83,008
0,825	24,85	8,631	25,136	84,187
0,85	17,617	5,755	30,649	86,194
0,875	11,172	3,542	39,117	88,736
0,9	6,25	1,982	52,49	91,912
0,925	3,118	0,899	75,896	96,076
0,95	1,152	0,272	123,802	101,934

### **Ростовская область**

Ростовская область является регионом юго-западной части России с низкой водообеспеченностью. Основой промышленности региона являются аграрная и пищевая-перерабатывающая промышленность [Брик, Плохотникова, 2020]. Результаты расчетов приведены в таблице 6. Для данного региона возможно сокращение потребления воды более чем на 40 % при сокращении производства на 6 %.

### **Заключение**

В работе предложена математическая модель, позволяющая оценить влияние потребления воды на производственные показатели региона (валовой региональный продукт и объем

Таблица 6. Результаты исследования модели для Ростовской области

$p$	$v_{2018}$	$v_{2017}$	$dW, \%$	$dQ, \%$
0,4	0,991	0,557	19,244	71,463
0,425	0,743	0,409	22,282	74,138
0,45	0,562	0,28	25,997	77,073
0,475	0,425	0,204	29,633	79,664
0,5	0,314	0,132	34,374	82,717
0,525	0,233	0,086	39,06	85,449
0,55	0,161	0,046	45,138	88,661
0,575	0,106	0,016	51,85	91,866
0,6	0,065	0,0	58,058	94,568

основных фондов). Модель позволяет учесть предпочтения администрации региона между потреблением воды и производством.

Приведены алгоритм численного исследования модели и ее идентификация. На основе данных Росстата проведены идентификация модели и расчеты для наименее водообеспеченных регионов. Приведены различные сценарии развития событий в зависимости от предпочтений центра, выделены наиболее интересные, с точки зрения улучшения показателей, сценарии. Из расчетов можно сделать вывод о состоятельности модели и возможности ее применения для анализа потребления воды и производства в регионах.

Если говорить о регионах планеты с острой нехваткой воды, таких как Средний Восток и север Китая, то исследования [Taheripour et al., 2020; Gao, Yu, 2018] показывают, что уменьшение запаса доступной воды ухудшает экономические показатели (ВВП, потребность в рабочей силе), а увеличение запасов воды, наоборот, стимулирует экономику региона. Предложенная модель позволяет производить подобный анализ для регионов России.

Например, если для Белгородской области применить управления, полученные моделью при  $p = 0,9$  за 2017–2018 гг., то суммарное потребление воды в области сократится более чем на 56 млн м<sup>3</sup>. Если взять среднюю цену за кубометр воды за этот период в 17,15 руб. [Тарифы на услуги водоснабжения и водоотведения], то получаем сокращение расходов на воду порядка 980 млн руб., что составляет 1,2 % от потерь в региональном продукте, то есть можно говорить о некоторой компенсации потерь в ВРП.

Для Челябинской области аналогичные рассуждения дают для  $p = 0,775$  уменьшение потребления воды на 564 млн м<sup>3</sup>, а потери в ВРП составляют 76 353 млн руб. Если принять за среднюю цену кубометра воды в регионе за данный период величину 22,51 руб., то получаем сокращение расходов на воду на 12 695 млн руб., что составляет уже 16 % от потерь в ВРП.

В случае Курской области для  $p = 0,925$  получаем уменьшение потребления воды на 103 млн м<sup>3</sup>, а потери в ВРП составляют 32 630 млн руб. Если принять за среднюю цену кубометра воды в регионе за данный период величину 36,18 руб., то получаем сокращение расходов на воду на 3726 млн руб., что составляет уже 11 % от потерь в ВРП.

Таким образом, для отдельных регионов модель предсказывает последствия от сокращения потребления воды в виде сокращения производства, которые в некотором смысле частично компенсируются за счет снижения расходов на обработку воды. В качестве развития предложенной модели можно предложить рассматривать соседние регионы совместно, а не по отдельности. Это позволит моделировать объединенные общими проблемами нехватки воды регионы и рассматривать различные модели взаимодействия между ними. Также возможно применение нейросетевых методов [Решитько, Усов, 2022] для исследования данной модели.

## Список литературы (References)

- Боронина Л. В., Абуова Г. Б.* Водные ресурсы Астраханской области — источники водоснабжения // *Естественные науки*. — 2011. — № 3 (36).  
*Boronina L. V., Abuova G. B.* Vodnye resursy Astrakhanskoi oblasti — istochniki vodosnabzheniya [Water resources of the Astrakhan region — sources of water supply] // *Estestvennye nauki*. — 2011. — No. 3 (36) (in Russian).
- Брик А. Д., Плохотникова Г. В.* Экономика Ростовской области: основные тенденции и нормативно-правовые инструменты стимулирования развития // *Московский экономический журнал*. — 2020. — № 11. — 22 с.  
*Brik A. D., Plokhotnikova G. V.* Ekonomika Rostovskoi oblasti: osnovnye tendentsii i normativno-pravovye instrumenty stimulirovaniya razvitiya [Economics of the Rostov region: main trends and regulatory instruments to stimulate development] // *Moskovskii ekonomicheskii zhurnal*. — 2020. — No. 11. — 22 p. (in Russian).
- Брусницина Н. В.* Влияние различных хозяйственных мероприятий на речной сток Урала // *Современные исследования природных и социально-экономических систем. Инновационные процессы и проблемы развития естественнонаучного образования*. — 2014. — С. 21–32.  
*Brusnitsina N. V.* Vliyanie razlichnykh khozyaistvennykh meropriyatii na rechnoi stok Urala [The impact of various economic activities on the river runoff of the Urals] // *Sovremennye issledovaniya prirodnykh i sotsial'no-ekonomicheskikh sistem. Innovatsionnye protsessy i problemy razvitiya estestvennauchnogo obrazovaniya*. — 2014. — P. 21–32 (in Russian).
- Бурлак С. Г., Вишнякова А. М., Канищева Е. М.* Позиционирование Курской области при долгосрочном стратегическом планировании // *Экономический рост как основа устойчивого развития России*. — 2019. — Т. 1. — Р. 149–153.  
*Burlak S. G., Vishnyakova A. M., Kanishcheva E. M.* Pozitsionirovanie Kurskoi oblasti pri dolgosrochnom strategicheskom planirovanii [Positioning of the Kursk region in long-term strategic planning] // *Ekonomicheskii rost kak osnova ustoychivogo razvitiya Rossii*. — 2019. — Vol. 1. — P. 149–153 (in Russian).
- Гермейер Ю., Вател И.* Игры с иерархическим вектором интересов // *Известия АН СССР. Техническая кибернетика*. — 1974. — № 3. — С. 54–69.  
*Germeier Yu., Vatel I.* Iгры s ierarkhicheskim vektorom interesov [Games with a hierarchical vector of interests] // *Izvestiya AN SSSR. Tekhnicheskaya kibernetika*. — 1974. — No. 3. — P. 54–69 (in Russian).
- Гребнева Е. А. и др.* Внедрение импульсного управления в динамическую модель основных производственных фондов // *Современные проблемы науки и образования*. — 2015. — № 1.  
*Grebneva E. A. et al.* Vnedrenie impul'snogo upravleniya v dinamicheskuyu model' osnovnykh proizvodstvennykh fondov [Implementation of impulse control in a dynamic model of fixed production assets] // *Sovremennye problemy nauki i obrazovaniya*. — 2015. — No. 1 (in Russian).
- Жамьянов Д. Ц.-Д., Дойникова Е. Е., Банзаракцаев З. Е.* Эколого-экономические особенности водопользования приграничных районов России и Монголии // *Трансграничные территории востока России: факторы, возможности и барьеры развития*. — 2021. — С. 261–265.  
*Zham'yanov D. Ts.-D., Doinikova E. E., Banzaraksayev Z. E.* Ekologo-ekonomicheskie osobennosti vodopol'zovaniya prigranichnykh raionov Rossii i Mongolii [Ecological and economic features of water use border regions of Russia and Mongolia] // *Transgranichnye territorii vostoka Rossii: faktory, vozmozhnosti i bar'ery razvitiya*. — 2021. — P. 261–265 (in Russian).
- Измайлова А. В.* Удельная водообеспеченность и озерный фонд регионов водного дефицита // *Водное хозяйство России*. — № 5. — 2019.  
*Izmailova A. V.* Udel'naya vodoobespechennost' i ozernyi fond regionov vodnogo defitsita [Specific water supply and lake fund of regions of water deficit] // *Vodnoe khozyaistvo Rossii*. — 2019. — No. 5. (in Russian).
- Кузнецова Я. Г., Титова О. В.* Социально-экономическое развитие Липецкой области // *Образовательная система: вопросы продуктивного взаимодействия наук в рамках технического прогресса*. — 2019. — С. 302–304.  
*Kuznetsova Ya. G., Titova O. V.* Sotsial'no-ekonomicheskoe razvitie Lipetskoi oblasti [Socio-economic development of the Lipetsk region] // *Obrazovatel'naya sistema: voprosy produktivnogo vzaimodeistviya nauk v ramkakh tekhnicheskogo progressa*. — 2019. — P. 302–304 (in Russian).
- Кулик В. С.* Математическая модель анализа потребления водных ресурсов и прогнозирования экологического ущерба // *Региональная экономика: теория и практика*. — 2010.  
*Kulik V. S.* Matematicheskaya model' analiza potrebleniya vodnykh resursov i prognozirovaniya ekologicheskogo ushcherba [Model for consumption of water resources and ecological damage estimation] // *Regional'naya ekonomika: teoriya i praktika*. — 2010 (in Russian).
- Ларионов А. С., Кузнецова И. А.* Об одной математической модели динамики фондов на предприятиях // *Вестник гражданских инженеров*. — 2012. — № 5 (34). — С. 240–242.  
*Larionov A. S., Kuznetsova I. A.* Ob odnoi matematicheskoi modeli dinamiki fondov na predpriyatiyakh [On one mathematical model of the dynamics of funds at enterprises] // *Vestnik grazhdanskikh inzhenerov*. — 2012. — No. 5 (34). — P. 240–242 (in Russian).

- О состоянии окружающей среды и природопользовании в Ставропольском крае. — [Электронный ресурс]. — [www.mpr26.ru/deyatelnost/otchety-doklady/o-sostoyanii-okruzhayushchey-sredy-i-prirodopolzovanii-v-stavropolskom-krae](http://www.mpr26.ru/deyatelnost/otchety-doklady/o-sostoyanii-okruzhayushchey-sredy-i-prirodopolzovanii-v-stavropolskom-krae) (дата обращения: 26.06.22). O sostoyanii okruzhayushchei sredy i prirodopol'zovanii v Stavropol'skom krae [On the state of the environment and natural resource management in the Stavropol Territory]. — [Electronic resource]. — [www.mpr26.ru/deyatelnost/otchety-doklady/o-sostoyanii-okruzhayushchey-sredy-i-prirodopolzovanii-v-stavropolskom-krae](http://www.mpr26.ru/deyatelnost/otchety-doklady/o-sostoyanii-okruzhayushchey-sredy-i-prirodopolzovanii-v-stavropolskom-krae) (accessed: 26.06.22, in Russian).
- Пряжинская В. Г. Математические модели управления качеством природных вод // Вестник Томского государственного университета. — 2009. — № 4 (8).  
*Pryazhinskaya V. G. Matematicheskie modeli upravleniya kachestvom prirodnykh vod [Model for water quality control] // Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. — 2009 — No. 4 (8) (in Russian).*
- Регионы России. Социально-экономические показатели. — [Электронный ресурс]. — <https://rosstat.gov.ru/folder/210/document/13204> (дата обращения: 26.06.22).  
*Regiony Rossii. Sotsial'no-ekonomicheskie pokazateli [Regions of Russia. Socio-economic indicators]. — [Electronic resource]. — <https://rosstat.gov.ru/folder/210/document/13204> (accessed: 26.06.22, in Russian).*
- Решитько М. А., Угольницкий Г. А., Усов А. Б. Численный метод нахождения равновесий Нэша и Штакельберга в моделях контроля качества речных вод // Компьютерные исследования и моделирование. — 2020. — Т. 12, № 3. — С. 653–667.  
*Reshitko M. A., Ougolnitsky G. A., Usov A. B. Chislennyi metod nakhozheniya ravnovesii Nesha i Shtakel'berga v modelyakh kontrolya kachestva rechnykh vod [Numerical method for finding Nash and Shtakelberg equilibria in river water quality control models] // Computer Research and Modeling. — 2020. — Vol. 12, No. 3. — P. 653–667 (in Russian).*
- Решитько М. А., Усов А. Б. Нейросетевой подход к исследованию задач оптимального управления // Компьютерные исследования и моделирование. — 2022. — Т. 14, № 3. — С. 539–557.  
*Reshitko M. A., Usov A. B. Neurosetevoi podkhod k issledovaniyu zadach optimal'nogo upravleniya [Neural network methods for optimal control problems] // Computer Research and Modeling. — 2022. — Vol. 14, No. 3. — P. 539–557 (in Russian).*
- Решитько М. А., Усов А. Б. Управление потреблением воды предприятиями Ростовской области // Экология. Экономика. Информатика. Сер. Системный анализ и моделирование экономических и экологических систем. — 2021. — Т. 1, № 6. — С. 57–62.  
*Reshitko M. A., Usov A. B. Upravlenie potrebleniem vody predpriyatiyami Rostovskoi oblasti [Management of water consumption by enterprises of the Rostov region] // Ekologiya. Ekonomika. Informatika. Ser. Sistemyi analiz i modelirovanie ekonomicheskikh i ekologicheskikh sistem. — 2021. — Vol. 1, No. 6. — P. 57–62 (in Russian).*
- Самуратова Э. Н. Металлургическая промышленность в Челябинской области: состояние и перспективы // Актуальные вопросы развития России в исследованиях студентов: управленческий, правовой и социально-экономический аспекты. — 2017. — С. 74–78.  
*Samuratova E. N. Metallurgicheskaya promyshlennost' v Chelyabinskoi oblasti: sostoyanie i perspektivy [Metallurgical industry in the Chelyabinsk region: state and prospects] // Aktual'nye voprosy razvitiya Rossii v issledovaniyakh studentov: upravlencheskii, pravovoi i sotsial'no-ekonomicheskii aspekty. — 2017. — P. 74–78 (in Russian).*
- Соколова И. В., Калюжная Т. Я., Сергеев А. Э. Обобщенная математическая модель динамики развития малого предприятия // Colloquium-journal. — 2019. — № 14-6 (38). — С. 153–158.  
*Sokolova I. V., Kaluzhnaya T. Ya., Sergeev A. E. Obobshchennaya matematicheskaya model' dinamiki razvitiya malogo predpriyatiya [Generalized mathematical model of small business development dynamics] // Colloquium-journal. — 2019. — No. 14-6 (38). — P. 153–158 (in Russian).*
- Суворов Н. В., Ахунув Р. Р., Губарев Р. В., Дзюба Е. И., Файзуллин Ф. С. Применение производственной функции Кобба–Дугласа для анализа промышленного комплекса региона // Экономика региона. — 2020. — Т. 16, вып. 1. — С. 187–200.  
*Suvorov N. V., Akhunov R. R., Gubarev R. V., Dzyuba E. I., Faizullin F. S. Primenenie proizvodstvennoi funktsii Kobba–Duglasa dlya analiza promyshlennogo kompleksa regiona [Applying the Cobb–Douglas production function for analysing the region's industry] // Ekonomika regiona. — 2020. — Vol. 16, No. 1. — P. 187–200 (in Russian).*
- Тарифы на услуги водоснабжения и водоотведения. Белоблводоканал. — [Электронный ресурс]. — [https://belwater.ru/clients\\_to/tarif/tarify-na-uslugi/](https://belwater.ru/clients_to/tarif/tarify-na-uslugi/) (дата обращения: 26.06.22).  
*Tarify na uslugi vodosnabzheniya i vodootvedeniya. Beloblvodokanal [Tariffs for water supply and sanitation services. Beloblvodokanal]. — [Electronic resource]. — [https://belwater.ru/clients\\_to/tarif/tarify-na-uslugi/](https://belwater.ru/clients_to/tarif/tarify-na-uslugi/) (accessed 26.06.22, in Russian).*
- Угольницкий Г. Управление устойчивым развитием активных систем. — Ростов н/Д: Издательство Южного федерального университета, 2016. — 940 с.  
*Ugolnitskiy G. Upravlenie ustoichivym razvitiem aktivnykh sistem [Management of sustainable development of active systems]. — Rostov-na-Donu: Izdatel'stvo Yuzhnogo federal'nogo universiteta, 2016. — 940 p. (in Russian).*

- Федотова Е. Н., Соколова Е. С.* Обзор текущего состояния и государственной поддержки АПК Курганской области // *Современные проблемы финансового регулирования и учета в агропромышленном комплексе.* — 2018. — С. 537–541.
- Fedotova E. N., Sokolova E. S.* Obzor tekushchego sostoyaniya i gosudarstvennoi podderzhki APK Kurganskoi oblasti [Review of the current state and state support of the agro-industrial complex of the Kurgan region] // *Sovremennye problemy finansovogo regulirovaniya i ucheta v agropromyshlennom komplekse.* — 2018. — P. 537–541 (in Russian).
- Alvarez-Vázquez L. J. et al.* An application of optimal control theory to river pollution remediation // *Applied Numerical Mathematics.* — 2009. — No. 59. — P. 845–858.
- Augeraud-Véron E., Boucekkine R., Veliov V. M.* Distributed optimal control models in environmental economics: a review // *Math. Model. Nat. Phenom.* — 2019. — Vol. 14. — 14 p.
- Aybuğa K., Yücel Isildar G.* An evaluation on rain water harvesting and grey water reuse potential for Ankara // *Sigma J. Eng. Nat. Sci.* — 2017. — P. 209–216.
- Chen X., Zhu Y., Shen J.* Input-output dynamic model for optimal environmental pollution control // *Applied Mathematical Modelling.* — 2020. — Vol. 83. — P. 301–321.
- Conn A. R., Gould N. I. M., Toint P. L.* Trust region methods. — SIAM, 2000.
- Boysen B. et al.* Economic and environmental assessment of water reuse in industrial parks: case study based on a model industrial park // *Journal of Water Reuse and Desalination.* — 2020. — Vol. 10. — No. 4.
- Dockner E., Jorgensen S., Long N. V., Sorger G.* Differential games in economics and management science. — Cambridge University Press, 2000.
- Gani A., Scrimgeour F.* Modeling governance and water pollution using the institutional ecological economic framework // *Economic Modeling.* — 2014. — Vol. 42. — P. 363–373.
- Gao Y., Yu M.* Assessment of the economic impact of South-to-North water diversion project on industrial sectors in Beijing // *Economic Structures.* — 2018. — No. 7.
- Goyal K., Kumar A.* A modelling approach to assess wastewater reuse potential for Delhi city // *Water Supply.* — 2020. — Vol. 20, No. 5.
- He H. et al.* Estimating water quality pollution impacts based on economic loss models in urbanization process in Xi'an, China // *Journal of urban planning and development.* — 2007. — Vol. 133, No. 3. — P. 151–160.
- Helmer R., Hespanhol I., World Health Organization* Water pollution control: a guide to the use of water quality management principles. — E & FN Spon, 1997. — 510 p.
- Howitt R., Kristin B. W., Siwa M.* Statewide water and agricultural production model. — 2001. — <https://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.184.3027&rep=rep1&type=pdf> (data access: 26.06.22).
- Hwang C. L., Fan L. T.* A discrete version of Pontryagin's maximum principle // *Operations Research.* — 1967. — Vol. 15, No. 1. — P. 139–146.
- Kariya T., Kurata H.* Generalized least squares. — Wiley, 2004.
- Niu K., Tian Zh., Xue J.* Pollutant emission reduction effect through effluent tax, concentration-based effluent standard, or both // *Chinese Journal of Population Resources and Environment.* — 2016.
- Ougolnitsky G. A., Usov A. B.* Computer simulations as a solution method for differential games // *Computer simulations: advances in research and applications / eds. M. D. Pfeffer and E. Bachmaier.* — N. Y.: Nova Science Publishers, 2018. — P. 63–106.
- Puigjaner L., Espuna A., Almato M.* Minimizing water and energy use in the batch and semi-continuous processes in the food and beverage industry // *Handbook of water and energy management in food processing.* — Woodhead Publishing Series in Food Science, Technology and Nutrition, 2008. — P. 256–303.
- Scipy.optimize.least\_squares documentation. — [https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.optimize.least\\_squares.html](https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.optimize.least_squares.html) (data access: 26.06.22).

- Shah N.H. et al.* Optimal control for transmission of water pollutants // International Journal of Mathematical, Engineering and Management Sciences. — 2018. — Vol. 3, No. 4. — P. 381–391.
- Smol M., Adam C., Preisner M.* Circular economy model framework in the European water and wastewater sector // Journal of Material Cycles and Waste Management. — 2017. — No. 22. — P. 682–697.
- Stanchev P. et al.* Measuring the circular economy of water sector in the three-fold linkage of water, energy and materials // 5th International Conference on Sustainable Solid Waste Management. — 2017.
- Taheripour F. et al.* Water in the balance: the economic impacts of climate change and water scarcity in the Middle East. — Washington, D. C.: World Bank, 2020.
- Tran Q. K., Schwabe K. A., Jassby D.* Waste water reuse for agriculture: development of a regional water reuse decision-support model (RWRM) for cost-effective irrigation sources // Environ. Sci. Technol. — 2016. — Vol. 50, No. 17. — P. 9390–9399.
- Volk M. et al.* Integrated ecological-economic modelling of water pollution abatement management options in the Upper Ems River Basin // Ecological Economics. — 2008. — No. 66. — P. 66–76.
- Wada Y. et al.* Modeling global water use for the 21st century: the water futures and solutions (WFaS) initiative and its approaches // Geoscientific Model Development. — 2016. — No. 9. — P. 175–222.
- Wang J. et al.* An integrated model for simulating regional water resources based on total evapotranspiration control approach // Advances in Meteorology. — 2014. — 10 p.
- Wang Q., Li Sh., Jia P., Qi Ch., Ding F.* A review of surface water quality models // The Scientific World Journal. — 2013. — Vol. 2013. — 7 p.
- Zhang et al.* A regional water optimal allocation model based on the Cobb–Douglas production function under multiple uncertainties // Water. — 2017. — No. 8 (12).