

УДК: 519.63

## Бикомпактные схемы для HOLO-алгоритма решения уравнения переноса излучения совместно с уравнением энергии

Е. Н. Аристова<sup>1,a</sup>, Н. И. Караваева<sup>1,2,b</sup>

<sup>1</sup>Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша,  
Россия, 125047, г. Москва, Миусская пл., д. 4

<sup>2</sup>Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет),  
Россия, 141701, Московская область, г. Долгопрудный, Институтский переулок, д. 9

E-mail: <sup>a</sup> aristovaen@mail.ru, <sup>b</sup> karavaeva@phystech.edu

Получено 30.06.2023, после доработки — 30.09.2023.

Принято к публикации 03.10.2023.

Численное решение системы уравнений высокотемпературной радиационной газовой динамики (ВРГД) является вычислительно трудоемкой задачей, так как взаимодействие излучения с веществом нелинейно и нелокально. Коэффициенты поглощения излучения зависят от температуры, а поле температур определяется как газодинамическими процессами, так и переносом излучения. Обычно для решения системы ВРГД используется метод расщепления по физическим процессам, выделяется блок решения уравнения переноса совместно с уравнением баланса энергии вещества при известных давлениях и температурах. Построенные ранее разностные схемы, используемые для решения этого блока, обладают порядками сходимости не выше второго. Так как даже на современном уровне развития вычислительной техники имеются ограничения по памяти, то для решения сложных технических задач приходится применять не слишком подробные сетки. Это повышает требования к порядку аппроксимации разностных схем. В данной работе впервые реализованы бикомпактные схемы высокого порядка аппроксимации для алгоритма совместного решения уравнения переноса излучения и уравнения баланса энергии. Предложенный метод может быть применен для решения широкого круга практических задач, так как обладает высокой точностью и подходит для решения задач с разрывами коэффициентов. Нелинейность задачи и использование неявной схемы приводит к итерационному процессу, который может медленно сходиться. В данной работе используется мультипликативный HOLO-алгоритм — метод квазидиффузии В. Я. Гольдина. Ключевая идея HOLO-алгоритмов состоит в совместном решении уравнений высокого порядка (high order, HO) и низкого порядка (low order, LO). Уравнением высокого порядка (HO) является уравнение переноса излучения, которое решается в многогрупповом приближении, далее уравнение осредняется по угловой переменной и получается система уравнений квазидиффузии в многогрупповом приближении (LO<sub>1</sub>). Следующим этапом является осреднение по энергии, при этом получается эффективная одногрупповая система уравнений квазидиффузии (LO<sub>2</sub>), которая решается совместно с уравнением энергии. Решения, получаемые на каждом этапе HOLO-алгоритма, оказываются тесно связанными, что в итоге приводит к ускорению сходимости итерационного процесса. Для каждого из этапов HOLO-алгоритма предложены разностные схемы, построенные методом прямых в рамках одной ячейки и обладающие четвертым порядком аппроксимации по пространству и третьим порядком по времени. Схемы для уравнения переноса были разработаны Б. В. Роговым и его коллегами, схемы для уравнений LO<sub>1</sub> и LO<sub>2</sub> разработаны авторами. Предложен аналитический тест, на котором демонстрируются заявленные порядки сходимости. Рассматриваются различные варианты постановки граничных условий и исследовано их влияние на порядок сходимости по времени и пространству.

Ключевые слова: уравнение переноса, метод квазидиффузии, HOLO-алгоритмы решения уравнения переноса, диагонально-неявные методы Рунге–Кутты

UDC: 519.63

## Bicompact schemes for the HOLO algorithm for joint solution of the transport equation and the energy equation

E. N. Aristova<sup>1,a</sup>, N. I. Karavaeva<sup>1,2,b</sup>

<sup>1</sup>Keldysh Institute of Applied Mathematics,  
4 Miusskaya sq., Moscow, 125047, Russia

<sup>2</sup>Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University),  
9 Institutskiy per., Dolgoprudny, Moscow Region, 141701, Russia

E-mail: <sup>a</sup> aristovaen@mail.ru, <sup>b</sup> karavaeva@phystech.edu

Received 30.06.2023, after completion — 30.09.2023.

Accepted for publication 03.10.2023.

The numerical solving of the system of high-temperature radiative gas dynamics (HTRGD) equations is a computationally laborious task, since the interaction of radiation with matter is nonlinear and non-local. The radiation absorption coefficients depend on temperature, and the temperature field is determined by both gas-dynamic processes and radiation transport. The method of splitting into physical processes is usually used to solve the HTRGD system, one of the blocks consists of a joint solving of the radiative transport equation and the energy balance equation of matter under known pressure and temperature fields. Usually difference schemes with orders of convergence no higher than the second are used to solve this block. Due to computer memory limitations it is necessary to use not too detailed grids to solve complex technical problems. This increases the requirements for the order of approximation of difference schemes. In this work, bicompact schemes of a high order of approximation for the algorithm for the joint solution of the radiative transport equation and the energy balance equation are implemented for the first time. The proposed method can be applied to solve a wide range of practical problems, as it has high accuracy and it is suitable for solving problems with coefficient discontinuities. The non-linearity of the problem and the use of an implicit scheme lead to an iterative process that may slowly converge. In this paper, we use a multiplicative HOLO algorithm named the quasi-diffusion method by V. Ya. Goldin. The key idea of HOLO algorithms is the joint solving of high order (HO) and low order (LO) equations. The high-order equation (HO) is the radiative transport equation solved in the energy multigroup approximation, the system of quasi-diffusion equations in the multigroup approximation (LO<sub>1</sub>) is obtained by averaging HO equations over the angular variable. The next step is averaging over energy, resulting in an effective one-group system of quasi-diffusion equations (LO<sub>2</sub>), which is solved jointly with the energy equation. The solutions obtained at each stage of the HOLO algorithm are closely related that ultimately leads to an acceleration of the convergence of the iterative process. Difference schemes constructed by the method of lines within one cell are proposed for each of the stages of the HOLO algorithm. The schemes have the fourth order of approximation in space and the third order of approximation in time. Schemes for the transport equation were developed by B. V. Rogov and his colleagues, the schemes for the LO<sub>1</sub> and LO<sub>2</sub> equations were developed by the authors. An analytical test is constructed to demonstrate the declared orders of convergence. Various options for setting boundary conditions are considered and their influence on the order of convergence in time and space is studied.

Keywords: transport equation, quasi-diffusion method, HOLO algorithms for transport equation solving, diagonally implicit Runge – Kutta method

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2023, vol. 15, no. 6, pp. 1429–1448 (Russian).

## Введение

В широком классе научных и технических задач возникает необходимость моделировать высокотемпературные газодинамические явления. Процессы, происходящие в звездных атмосферах, при прохождении мощного лазерного излучения или электрического разряда в газах, при вхождении космических аппаратов в атмосферу, описываются при помощи уравнений динамики излучающего газа [Зельдович, Райзер, 1966; Михалас, 1982]. При решении задач радиационной газовой динамики в рамках расщепления по физическим процессам выделяют блок решения уравнений динамики газа и блок решения уравнения переноса излучения совместно с уравнением баланса энергии [Четверушкин, 1985]. Решение уравнений второго блока позволяет описать процессы поглощения, излучения и переноса фотонов.

Моделирование сложных газодинамических течений, сопровождающихся активным переносом излучения, сопряжено с рядом трудностей [Четверушкин, 1985]. Во-первых, уравнение переноса излучения в общем случае зависит от временной координаты, трех пространственных, направления полета фотона и его энергии. Во-вторых, при высоких давлениях и температурах параметры поля излучения и газодинамические параметры оказываются тесно связанными, причем взаимодействие излучения с веществом нелинейно и нелокально. В-третьих, коэффициенты поглощения, входящие в уравнение переноса, также зависят от энергии фотонов, причем вид этой зависимости многорезонансный, а значения коэффициентов могут меняться на несколько порядков. Использование явных схем при численном решении уравнения переноса приводит к существенному ограничению на шаг сетки по времени и, соответственно, к высоким временным затратам при расчете. Поэтому преимущество отдается неявным схемам, позволяющим получить результат за разумное время. Так как коэффициент поглощения может сильно меняться от ячейки к ячейке, а также может терпеть разрыв, то обычно выбираются схемы в рамках одной ячейки, что также упрощает организацию вычислений вблизи границы расчетной области.

В данной работе для численного решения уравнения переноса излучения совместно с уравнением энергии предлагаются неявные схемы высокого порядка аппроксимации на двухточечном шаблоне. Схемы конструируются на основе бикомпактных схем, предложенных Б. В. Роговым для уравнения переноса [Рогов, Михайловская, 2011a; Рогов, Михайловская, 2011b; Рогов, Михайловская, 2010; Рогов, Михайловская, 2008; Чикиткин, Рогов, Аристова, 2016; Брагин, Рогов, 2017; Аристова, Рогов, Чикиткин, 2016]. Для эффективного понижения размерности задачи используется HОLO-алгоритм, который заключается в совместном решении уравнений высокой размерности (high order, HO) и низкой размерности (low order, LO) и позволяет организовать эффективную связь решения уравнения переноса с параметрами среды [Гольдин, 1982; Гольдин, 1964; Гольдин, Четверушкин, 1972; Adams, Larsen, 2002; Chacón et al., 2017; Wiesequist, Anistratov, Morel, 2014; Aristova, 2008; Аристова, Байдин, 2012a; Аристова, Байдин, 2012b]. Одним из вариантов HОLO-алгоритма является метод квазидиффузии В. Я. Гольдина [Гольдин, 1982; Гольдин, 1964]. Нелинейность уравнений приводит к необходимости организации итерационного процесса. Предложенные бикомпактные схемы четвертого порядка аппроксимации по пространству и третьего порядка аппроксимации по времени для HОLO-алгоритма применяются для решения модельной задачи. Исследуется влияние способа постановки граничных условий на порядок сходимости схемы.

## Постановка задачи

При решении системы уравнений газовой динамики выделяют блок решения уравнения переноса излучения совместно с уравнением энергии. При этом газодинамические поля плотности и скорости считаются известными. Рассмотрим перенос излучения в одномерном плоском

слое, введем декартову систему координат (см. рис. 1). Угол между направлением полета фотона  $\vec{\Omega}$  и осью  $x$  обозначим как  $\alpha_1$ , а угол между проекцией вектора  $\vec{\Omega}$  на плоскость  $(y, z)$  и осью  $y$  обозначим как  $\alpha_2$ .

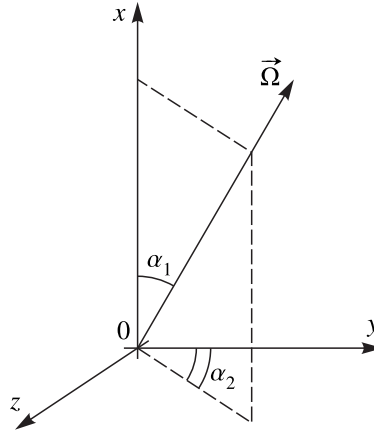


Рис. 1. Направление полета фотона  $\vec{\Omega}$  определяется полярным углом  $\alpha_1$  и азимутальным углом  $\alpha_2$ , привязанными к введенной декартовой системе координат

Пусть изменение параметров среды (температуры вещества  $T(x, t)$ , спектрального коэффициента поглощения излучения с поправкой на вынужденное испускание  $\kappa'_\nu(T, \nu)$ , зависящего от температуры вещества  $T$  и частоты фотона  $\nu$ ) происходит только вдоль координаты  $x$ . Решение уравнения переноса излучения (1) совместно с уравнением энергии (2) позволяет найти  $I_\nu(x, t, \mu, \nu)$  — спектральную интенсивность излучения, проинтегрированную по азимутальному углу  $\alpha_2$ . Уравнения имеют вид

$$\frac{1}{c} \frac{\partial I_\nu}{\partial t} + \mu \frac{\partial I_\nu}{\partial x} + \kappa'_\nu I_\nu = \kappa'_\nu I_\nu^{Pl}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \int_0^\infty \int_{-1}^1 \kappa'_\nu (I_\nu - I_\nu^{Pl}) d\nu d\mu, \quad (2)$$

где  $\varepsilon(T)$  — внутренняя энергия вещества,  $I_\nu^{Pl}(T, \nu)$  — спектральная интенсивность равновесного излучения, проинтегрированная по азимутальному углу,  $c$  — скорость света,  $\mu = \cos \alpha_1$  — косинус угла направления полета частицы, составленного с направлением оси  $x$ .

Уравнение переноса (1) и уравнение энергии (2) дополняются уравнением состояния:

$$\varepsilon = \varepsilon(T), \quad (3)$$

а также начальными и граничными условиями:

$$T(x, 0) = T^*(x), \quad (4)$$

$$I_\nu(x, 0, \mu, \nu) = \psi(x, \mu, \nu), \quad (5)$$

$$I_\nu(x, t, \mu, \nu)|_{x=0} = \varphi_0(t, \mu, \nu) \quad \text{при } \mu > 0, \quad (6)$$

$$I_\nu(x, t, \mu, \nu)|_{x=L} = \varphi_L(t, \mu, \nu) \quad \text{при } \mu < 0.$$

Задача (1)–(6) может быть решена в многогрупповом приближении, тогда уравнения (1), (2), начальные (5) и граничные условия (6) примут вид

$$\frac{1}{c} \frac{\partial I^p}{\partial t} + \mu \frac{\partial I^p}{\partial x} + \kappa_U^p I^p = \kappa_{Pl}^p I_{Pl}^p,$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \int_{-1}^1 \sum_{p=1}^P (\kappa_U^p I^p - \kappa_{Pl}^p I_{Pl}^p) d\mu, \tag{7}$$

$$I^p(x, 0, \mu) = \psi^p(x, \mu), \quad p = 1, \dots, P, \tag{8}$$

$$I^p(x, t, \mu)|_{x=0} = \varphi_0^p(t, \mu) \quad \text{при } \mu > 0, \tag{9}$$

$$I^p(x, t, \mu)|_{x=L} = \varphi_L^p(t, \mu) \quad \text{при } \mu < 0,$$

где  $p$  — номер группы,

$$I^p(x, t, \mu) = \int_{\nu_p}^{\nu_{p+1}} I_\nu(x, t, \mu, \nu) d\nu, \quad I_{Pl}^p(T) = \int_{\nu_p}^{\nu_{p+1}} I_\nu^{Pl}(T, \nu) d\nu,$$

$$\psi^p(x, \mu) = \int_{\nu_p}^{\nu_{p+1}} \psi(x, \mu, \nu) d\nu, \quad \varphi_0^p(t, \mu) = \int_{\nu_p}^{\nu_{p+1}} \varphi_0(t, \mu, \nu) d\nu, \quad \varphi_L^p(t, \mu) = \int_{\nu_p}^{\nu_{p+1}} \varphi_L(t, \mu, \nu) d\nu,$$

$$\kappa_{Pl}^p(T) = \frac{\int_{\nu_p}^{\nu_{p+1}} \kappa'_\nu(T, \nu) I_\nu^{Pl}(T, \nu) d\nu}{\int_{\nu_p}^{\nu_{p+1}} I_\nu^{Pl}(T, \nu) d\nu}, \quad \kappa_U^p(T, \theta^p) = \frac{\int_{\nu_p}^{\nu_{p+1}} \kappa'_\nu(T, \nu) I_\nu^{Pl}(\theta^p, \nu) d\nu}{\int_{\nu_p}^{\nu_{p+1}} I_\nu^{Pl}(\theta^p, \nu) d\nu},$$

$I^p(x, t, \mu)$  — групповая интенсивность излучения,  $\theta^p$  — эффективная температура излучения [Гольдин и др., 1986],  $\kappa_U^p, \kappa_{Pl}^p$  — коэффициенты поглощения в  $p$ -й группе.

В данной работе предлагается модельная задача, на которой тестируется алгоритм решения задачи (1)–(6), поэтому вместо (1) будет рассматриваться уравнение

$$\frac{1}{c} \frac{\partial I_\nu}{\partial t} + \mu \frac{\partial I_\nu}{\partial x} + \kappa'_\nu I_\nu = Q_\nu, \tag{10}$$

которое при переходе к многогрупповому приближению примет вид

$$\frac{1}{c} \frac{\partial I^p}{\partial t} + \mu \frac{\partial I^p}{\partial x} + \kappa_U^p I^p = Q^p, \tag{11}$$

где  $Q^p = \int_{\nu_p}^{\nu_{p+1}} Q_\nu d\nu$ . Правая часть уравнения (10) будет определена при построении аналитического теста.

В рамках HOLO-алгоритма размерность исходной задачи, состоящей из уравнения (11) и начальных (8) и краевых условий (9), понижается сначала за счет осреднения по угловой переменной. Вводятся групповые плотность  $U^p(x, t) = \int_{-1}^1 I^p(x, t, \mu) d\mu$  и поток излучения  $W^p(x, t) = \int_{-1}^1 \mu I^p(x, t, \mu) d\mu$ , уравнение (11) интегрируют по  $\mu$  с весами 1 и  $\mu$ . В результате получается

многогрупповая система уравнений квазидиффузии (уравнения LO<sub>1</sub>):

$$\begin{cases} \frac{1}{c} \frac{\partial U^p}{\partial t} + \frac{\partial W^p}{\partial x} + \kappa_U^p U^p = Q_1^p, \\ \frac{1}{c} \frac{\partial W^p}{\partial t} + \frac{\partial(D^p U^p)}{\partial x} + \kappa_R^p W^p = Q_2^p, \end{cases} \quad (12)$$

где  $Q_1^p = \int_{-1}^1 Q^p d\mu$ ,  $Q_2^p = \int_{-1}^1 \mu Q^p d\mu$ ,  $\kappa_R^p$  — коэффициент поглощения, осредненный по Росселанду [Гольдин и др., 1986], в  $p$ -й группе с эффективной температурой  $\theta^p$ . В систему (12) входит групповой коэффициент квазидиффузии

$$D^p(x, t) = \frac{\int_{-1}^1 \mu^2 I^p(x, t, \mu) d\mu}{\int_{-1}^1 I^p(x, t, \mu) d\mu}, \quad (13)$$

замыкающий систему уравнений [Гольдин, 1964] и являющийся дробно-линейным функционалом от решения НО-части. Начальные условия для системы (12) также получаются интегрированием условий (8) по  $\mu$  с весами 1 и  $\mu$ :

$$U^p(x, 0) = \int_{-1}^1 \psi^p(x, \mu) d\mu, \quad W^p(x, 0) = \int_{-1}^1 \mu \psi^p(x, \mu) d\mu, \quad p = 1, \dots, P.$$

Классический вариант краевых условий реализуется посредством введения дробно-линейных функционалов:

$$\begin{aligned} \frac{W^p - W_{in}^p}{U^p - U_{in}^p} \Big|_{x=0} &= c_0^p, & \frac{W^p - W_{in}^p}{U^p - U_{in}^p} \Big|_{x=L} &= c_L^p, \quad p = 1, \dots, P, \\ U_{in,0}^p &= U_{in}^p \Big|_{x=0} = \int_0^1 \varphi_0^p(t, \mu) d\mu, & W_{in,0}^p &= W_{in}^p \Big|_{x=0} = \int_0^1 \mu \varphi_0^p(t, \mu) d\mu, \\ U_{in,L}^p &= U_{in}^p \Big|_{x=L} = \int_{-1}^0 \varphi_L^p(t, \mu) d\mu, & W_{in,L}^p &= W_{in}^p \Big|_{x=L} = \int_{-1}^0 \mu \varphi_L^p(t, \mu) d\mu, \end{aligned} \quad (14)$$

где коэффициенты  $c_0^p$ ,  $c_L^p$  рассчитываются по выходящей из области функции распределения:

$$c_0^p = \frac{\int_0^1 \mu I^p(0, t, \mu) d\mu}{\int_{-1}^0 I^p(0, t, \mu) d\mu}, \quad c_L^p = \frac{\int_0^1 \mu I^p(L, t, \mu) d\mu}{\int_0^1 I^p(L, t, \mu) d\mu}. \quad (15)$$

Теперь получим одногрупповую систему уравнений квазидиффузии (уравнения LO<sub>2</sub>) осреднением по энергии. Для этого введем одногрупповую плотность излучения  $U = \sum_{p=1}^P U^p$  и поток

излучения  $W = \sum_{p=1}^P W^p$ . Просуммируем уравнения (12) по группам и получим

$$\begin{cases} \frac{1}{c} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial W}{\partial x} + \kappa_U U = Q_U, \\ \frac{1}{c} \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial(DU)}{\partial x} + \kappa_R W + \zeta U = Q_W, \end{cases} \quad (16)$$

$$Q_U = \int_{-1}^1 d\mu \int_0^\infty Q_\nu d\nu, \quad Q_W = \int_{-1}^1 \mu d\mu \int_0^\infty Q_\nu d\nu,$$

$$D = \frac{\sum_{p=1}^P D^p U^p}{\sum_{p=1}^P U^p}, \quad \kappa_U = \frac{\sum_{p=1}^P \kappa_U^p U^p}{\sum_{p=1}^P U^p}, \quad (17)$$

$$\kappa_R = \frac{\sum_{p=1}^P \kappa_R^p |W^p|}{\sum_{p=1}^P |W^p|}, \quad \zeta = \frac{\sum_{p=1}^P (\kappa_R^p - \kappa_U) W^p}{\sum_{p=1}^P U^p},$$

где  $D$  — коэффициент квазидиффузии,  $\zeta$  — функционал, введенный для корректировки осреднения  $\kappa_R^p$  с возможно знакопеременной весовой функцией  $W^p$ . Начальные условия для (16) также получаются суммированием групповых значений плотности и потока излучения

$$U(x, 0) = \sum_{p=1}^P U^p(x, 0), \quad W(x, 0) = \sum_{p=1}^P W^p(x, 0).$$

Аналогично поступают с граничными условиями. Введем

$$U_{in,0} = U_{in}|_{x=0} = \sum_{p=1}^P U_{in,0}^p, \quad W_{in,0} = W_{in}|_{x=0} = \sum_{p=1}^P W_{in,0}^p,$$

$$U_{in,L} = U_{in}|_{x=L} = \sum_{p=1}^P U_{in,L}^p, \quad W_{in,L} = W_{in}|_{x=L} = \sum_{p=1}^P W_{in,L}^p, \quad (18)$$

$$c_0 = \frac{\sum_{p=1}^P c_0^p (U^p(0, t) - U_{in,0})}{\sum_{p=1}^P (U^p(0, t) - U_{in,0})}, \quad c_L = \frac{\sum_{p=1}^P c_L^p (U^p(L, t) - U_{in,L})}{\sum_{p=1}^P (U^p(L, t) - U_{in,L})}.$$

Тогда граничные условия примут вид

$$\frac{W - W_{in}}{U - U_{in}} \Big|_{x=0} = c_0, \quad \frac{W - W_{in}}{U - U_{in}} \Big|_{x=L} = c_L. \quad (19)$$

Система (16) решается совместно с уравнением энергии (7), которое записывается в виде

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \kappa_U U - Q_U \quad (20)$$



и дополняется начальным условием (4). Для замыкания системы уравнений (16), (20) она дополняется уравнением состояния (3) в виде [Анистратов, Аристова, Гольдин, 1996]

$$\varepsilon = aT. \quad (21)$$

Коэффициенты поглощения  $\kappa_U$ ,  $\kappa_R$  и правая часть  $Q_U$  являются нелинейными функциями температуры. Уравнение состояния (3) также может представлять собой нелинейную функцию температуры.

HOLO-алгоритм позволяет организовать эффективное взаимодействие между уравнениями высокого порядка (НО) и низкого порядка ( $LO_1$  и  $LO_2$ ). По решению уравнения переноса (НО) (11) получают коэффициенты граничных условий и групповой коэффициент квазидиффузии для каждой группы для системы (12). Решая многогрупповую систему уравнений квазидиффузии ( $LO_1$ ) (12), получают граничные условия и значения коэффициента квазидиффузии для (16). При решении одногрупповой системы уравнений квазидиффузии ( $LO_2$ ) (16) совместно с уравнением энергии (3) получают значения температуры на новом слое по времени, которые необходимы для нахождения коэффициентов и правых частей уравнений (11), (12).

## Построение схемы для HOLO-алгоритма

Построение разностной схемы для HOLO-алгоритма решения уравнения переноса излучения совместно с уравнением энергии включает в себя построение разностных схем для уравнения переноса в многогрупповом приближении (11), для многогрупповой (12) и одногрупповой (16) систем уравнений квазидиффузии, а также для уравнения баланса энергии (20). Для уравнений (11), (12), (16) предлагается использовать бикомпактные схемы, которые строятся на минимальном двухточечном шаблоне и обладают четвертым порядком аппроксимации по пространству. Уравнения (11), (12), (16), (20) интегрируются по времени с третьим порядком аппроксимации. Схемы строятся методом прямых, поэтому возможно проинтегрировать уравнения НО,  $LO_1$ ,  $LO_2$ , а также уравнение энергии и с более высоким порядком аппроксимации по времени. Построение схемы будет рассмотрено на равномерной сетке с шагом  $h$  на отрезке  $[0, L]$ .

Бикомпактные схемы для уравнения переноса излучения в многогрупповом приближении представляют собой схемы, предложенные Б. В. Роговым [Рогов, Михайловская, 2011a; Рогов, Михайловская, 2011b; Рогов, Михайловская, 2010; Рогов, Михайловская, 2008; Чикиткин, Рогов, Аристова, 2016; Брагин, Рогов, 2017; Аристова, Рогов, Чикиткин, 2016]. Подробное описание способа построения разностной схемы для уравнения переноса приводится в [Рогов, Михайловская, 2011a; Рогов, Михайловская, 2011b; Рогов, Михайловская, 2010; Рогов, Михайловская, 2008; Чикиткин, Рогов, Аристова, 2016; Брагин, Рогов, 2017; Аристова, Рогов, Чикиткин, 2016; Аристова, Караваева, 2019b]; в рамках этой работы перечислим только ключевые этапы построения бикомпактных схем. Для достижения четвертого порядка аппроксимации на двухточечном шаблоне расширяется список неизвестных, в него включают, помимо узловых значений  $I_i^p$ , еще и интегральные средние по ячейке  $\bar{I}_i^p = \frac{1}{h} \int_{x_i}^{x_{i+1}} I^p dx$ . Уравнение (11) и его первое дифференциальное следствие интегрируют по ячейке, для замыкания системы используется формула Эйлера–Маклорена, которая и определяет четвертый порядок аппроксимации по пространству. В результате получается система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{1}{c} \frac{d\bar{I}_i^p}{dt} + \frac{\mu}{h} (I_{i+1}^p - I_i^p) + \overline{\kappa_U I^p} = \bar{Q}_i^p, \\ \frac{1}{c} \frac{d(I_{i+1}^p - I_i^p)}{dt} + \frac{6\mu}{h} (I_{i+1}^p - 2\bar{I}_i^p + I_i^p) + (\kappa_U I^p)_{i+1} - (\kappa_U I^p)_i = Q_{i+1}^p - Q_i^p, \end{cases} \quad (22)$$



где  $\overline{Q}_i^p = \frac{1}{h} \int_{x_i}^{x_{i+1}} Q^p dx$ . Для завершения построения аппроксимации по пространству необходимо

указать способ вычисления средних от произведения двух множителей  $\overline{\kappa_{Ui}^p I_i^p}$ . При использовании формулы Симпсона это возможно сделать с четвертым порядком аппроксимации по пространству. Выражение примет вид

$$\overline{\kappa_{Ui}^p I_i^p} = (\kappa_{Ui}^p - \kappa_{Ui+1/2}^p) \frac{I_i^p}{6} + \kappa_{Ui+1/2}^p \overline{I_i^p} + (\kappa_{Ui+1}^p - \kappa_{Ui+1/2}^p) \frac{I_{i+1}^p}{6}. \tag{23}$$

Так как в (23) необходимо знать значение коэффициента поглощения в полуцелом узле, то в дальнейшем необходимо будет организовать расчет температуры в полуцелых узлах. Интегральное среднее правой части  $\overline{Q}_i^p$  может быть неизвестно аналитически, в таком случае для вычисления  $\overline{Q}_i^p$  необходимо также воспользоваться формулой Симпсона в рамках одной ячейки.

Система (22) с учетом (23) интегрируется по времени любым удобным методом Рунге – Кутты. В данной работе используется L-устойчивый диагонально-неявный метод Рунге – Кутты третьего порядка аппроксимации с таблицей Бутчера:

$$\begin{array}{c|c} \mathbf{c} & \mathbf{A} \\ \hline & \mathbf{b}^T \end{array} = \begin{array}{c|cc} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \\ 1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{3} \\ \hline & \frac{3}{4} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{3} \end{array}. \tag{24}$$

Преимуществом в реализации метода Рунге – Кутты с такой таблицей Бутчера является то, что каждая стадия этого метода может быть представлена как неявный метод Эйлера [Аристова, Рогов, 2012]. Решение для спектральной интенсивности излучения в  $p$ -й группе находится в режиме бегущего счета.

Бикомпактные схемы для многогрупповой системы уравнений квазидиффузии (12) строятся аналогично и предложены авторами в [Аристова, Караваева, 2019b; Аристова, Караваева, 2018]. Список неизвестных, помимо узловых значений плотности  $U_i^p$  и потока излучения  $W_i^p$  в  $p$ -й группе, включает в себя интегральные средние по ячейке:  $\overline{U}_i^p = \frac{1}{h} \int_{x_i}^{x_{i+1}} U^p dx$ ,  $\overline{W}_i^p = \frac{1}{h} \int_{x_i}^{x_{i+1}} W^p dx$ . Уравнения (12) и их первые дифференциальные следствия интегрируются по ячейке, и система замыкается при помощи формулы Эйлера – Маклорена. Система, полученная методом прямых, принимает вид

$$\begin{cases} \frac{1}{c} \frac{d\overline{U}_i^p}{dt} + \frac{1}{h} (W_{i+1}^p - W_i^p) + \overline{\kappa_U^p U_i^p} = \overline{Q}_{1,i}^p, \\ \frac{1}{c} \frac{d\overline{W}_i^p}{dt} + \frac{1}{h} (D_{i+1}^p U_{i+1}^p - D_i^p U_i^p) + \overline{\kappa_R^p W_i^p} = \overline{Q}_{2,i}^p, \\ \frac{1}{c} \frac{d(U_{i+1}^p - U_i^p)}{dt} + \frac{6}{h} (W_{i+1}^p - 2\overline{W}_i^p + W_i^p) + (\kappa_U^p U^p)_{i+1} - (\kappa_U^p U^p)_i = Q_{1,i+1}^p - Q_{1,i}^p, \\ \frac{1}{c} \frac{d(W_{i+1}^p - W_i^p)}{dt} + \frac{6}{h} (D_{i+1}^p U_{i+1}^p - 2\overline{D}_i^p U_i^p + D_i^p U_i^p) + (\kappa_R^p W^p)_{i+1} - (\kappa_R^p W^p)_i = Q_{2,i+1}^p - Q_{2,i}^p, \end{cases}$$

где  $\overline{Q}_{1,i}^p = \frac{1}{h} \int_{x_i}^{x_{i+1}} Q_1^p dx$ ,  $\overline{Q}_{2,i}^p = \frac{1}{h} \int_{x_i}^{x_{i+1}} Q_2^p dx$ .

Средние  $\overline{\kappa_U^p U_i^p}$  и  $\overline{\kappa_R^p W_i^p}$  вычисляются аналогично (23) с четвертым порядком аппроксимации. Так как групповой коэффициент квазидиффузии  $D_i^p$  не является независимой внешней функцией, а получается из решения уравнения НО-этапа, то для кинетической согласованности схем среднее от произведения  $\overline{D_i^p U_i^p}$  вычисляется по формуле:  $\overline{D_i^p U_i^p} = \overline{D_i^p} \cdot \overline{U_i^p}$ . Интегрирование по времени снова производится при помощи метода Рунге – Кутты с таблицей Бутчера (24), однако теперь для нахождения значений групповых плотности и потока на новом слое по времени необходимо будет решать СЛАУ, что можно эффективно сделать при помощи метода потоковой прогонки. Подробности реализации базовой схемы по времени (неявного метода Эйлера) можно найти в [Аристова, Караваева, 2018].

Построение бикомпактной схемы для решения одnogрупповой системы уравнений квазидиффузии (16) отличается от описанного выше только тем, что появляются слагаемые, представляющие собой поправки осреднения, и подробно проделано авторами в [Караваева, 2023]. Приведем сразу получающуюся систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{1}{c} \frac{d\bar{u}_i}{dt} + \frac{1}{h} (W_{i+1} - W_i) + \overline{\kappa_U U_i} = \overline{Q_{U,i}}, \\ \frac{1}{c} \frac{d\bar{w}_i}{dt} + \frac{1}{h} (D_{i+1} U_{i+1} - D_i U_i) + \overline{\kappa_R W_i} = \overline{Q_{W,i}}, \\ \frac{1}{c} \frac{d(U_{i+1} - U_i)}{dt} + \frac{6}{h} (W_{i+1} - 2\bar{w}_i + W_i) + (\kappa_U U)_{i+1} - (\kappa_U U)_i = Q_{U,i+1} - Q_{U,i}, \\ \frac{1}{c} \frac{d(W_{i+1} - W_i)}{dt} + \frac{6}{h} (D_{i+1} U_{i+1} - 2\overline{D_i U_i} + D_i U_i) + \\ + (\kappa_R W)_{i+1} - (\kappa_R W)_i + (\zeta U)_{i+1} - (\zeta U)_i = Q_{W,i+1}^p - Q_{W,i}, \end{cases}$$

где  $\bar{u}_i = \frac{1}{h} \int_{x_i}^{x_{i+1}} U dx$ ,  $\bar{w}_i = \frac{1}{h} \int_{x_i}^{x_{i+1}} W dx$ ,  $\overline{Q_{U,i}} = \frac{1}{h} \int_{x_i}^{x_{i+1}} Q_U dx$ ,  $\overline{Q_{W,i}} = \frac{1}{h} \int_{x_i}^{x_{i+1}} Q_W dx$ . Вычисление всех средних, кроме  $\overline{D_i U_i}$ , проведем с четвертым порядком аппроксимации. Среднее  $\overline{D_i U_i}$  вычислим по формуле  $\overline{D_i U_i} = \overline{D_i} \cdot \bar{u}_i$ , что, ввиду кинетической согласованности схем, приведет к общему четвертому порядку сходимости по пространству.

Как было показано в [Аристова, Рогов, 2012], использование граничных условий вида (9) для уравнения переноса позволяет достичь только второго порядка сходимости по времени вместо третьего для метода (24). В [Аристова, Рогов, 2012] также предлагается способ постановки граничных условий без понижения порядка сходимости метода по времени. Граничные условия задаются в виде, реализующем неявный метод Эйлера на каждой стадии:

$$\begin{aligned} I^p(x, t, \mu)|_{x=0} &= I^p(0, t - \Delta t, \mu) + \Delta t (I_{ex}^p)'(0, t, \mu) \quad \text{при } \mu > 0, \\ I^p(x, t, \mu)|_{x=L} &= I^p(L, t - \Delta t, \mu) + \Delta t (I_{ex}^p)'(L, t, \mu) \quad \text{при } \mu < 0, \end{aligned} \quad (25)$$

где  $(I_{ex}^p)'$  – значение производной по времени точного решения для спектральной интенсивности излучения в  $p$ -й группе.

Аналогично: при использовании граничных условий вида (14) для многогрупповой системы уравнений квазидиффузии (или (19) для одnogрупповой системы уравнений квазидиффузии) порядок сходимости понижается до второго. На примере одnogрупповой системы уравнений квазидиффузии приведем способ постановки граничного условия с сохранением третьего порядка сходимости по времени [Аристова, Караваева, 2019а]. Граничные условия записываются в виде

$$\begin{aligned} \mu_0(t)U(0, t) + \tau_0(t)W(0, t) &= \eta_0(t), \\ \mu_L(t)U(L, t) + \tau_L(t)W(L, t) &= \eta_L(t), \end{aligned} \quad (26)$$

а коэффициенты выбираются следующим образом:

$$\begin{aligned} \mu_0 = 1, \quad \tau_0 = 0, \quad \eta_0(t) &= U(0, t - \Delta t) + \Delta t \cdot U'_{ex}(0, t), \\ \mu_L = 1, \quad \tau_L = 0, \quad \eta_L(t) &= U(L, t - \Delta t) + \Delta t \cdot U'_{ex}(L, t), \end{aligned} \quad (27)$$

где  $U'_{ex}$  — производная по времени точного решения для плотности излучения. Недостатком такого способа постановки граничных условий является то, что значения производной по времени точного решения не всегда известны.

Ниже будет предложен аналитический тест и будут рассмотрены различные варианты постановки граничных условий.

Уравнение баланса энергии (20) интегрируется по времени при помощи того же метода Рунге–Кутты (24), что и уравнения HO, LO<sub>1</sub>, LO<sub>2</sub>. Неявный метод Эйлера, который является базовой схемой при использовании метода Рунге–Кутты (24), в применении к уравнению (20) с учетом (21) примет вид [Караваяева, 2023]

$$a \frac{\widehat{T}_i - T_i}{\Delta t} = \widehat{\kappa}_{U,i} \widehat{U}_i - \widehat{Q}_{U,i}, \quad (28)$$

где  $\widehat{T}_i = T_i^{n+1}$ ,  $\widehat{\kappa}_{U,i} = \kappa_U(T_i^{n+1})$ ,  $\widehat{U}_i = U_i^{n+1}$ ,  $\widehat{Q}_{U,i} = Q_U(T_i^{n+1})$ . Температура также будет вычисляться в полущелых узлах, разностная схема и в этом случае соответствует виду (28).

Для нахождения значений температур на новом слое по времени необходимо организовать итерационный процесс, так как коэффициент поглощения и правая часть уравнения (20) могут быть нелинейными функциями температуры. Коэффициент квазидиффузии  $D$  также зависит от решения и находится итерационно.

## Итерационный процесс

Рассмотрим детально организацию итерационного процесса для блока решения уравнения переноса излучения совместно с уравнением энергии в рамках HOLO-алгоритма. Для получения решения на новом слое по времени на каждой стадии метода (24) необходимо, чтобы сошлись внешние итерации, в процессе которых пересчитываются групповые значения плотности и потока излучения, и чтобы сошлись внутренние (квазиньютоновские) итерации, в процессе которых определяется поле температуры. Пусть  $s$  — номер внешней итерации,  $l$  — номер внутренней итерации. При расчете первой стадии метода (24) в качестве начального приближения для величин, рассчитываемых в процессе внешних итераций, возьмем величины, полученные на предыдущем шаге по времени (или заданные в качестве начального распределения). За начальное приближение для величин, получаемых в ходе внутренних итераций, будем брать значения с последней рассчитанной внешней итерации. Для второй и третьей стадий в качестве начального приближения для внешних итераций возьмем величины, полученные на предыдущей стадии. Опишем более подробно, какие этапы расчета происходят в процессе внешних и внутренних итераций на каждой стадии метода (24).

*Внешние итерации.* Пока не выполнено условие сходимости  $\max |U^{(s)} - U^{(s-1)}| < \varepsilon_1$  повторяются следующие действия.

### I. Внутренние итерации.

Пока не выполнено условие сходимости  $\max |T^{(s,l)} - T^{(s,l-1)}| < \varepsilon_2$ , повторяются следующие действия.

1. Решается система уравнений LO<sub>2</sub>:

$$\begin{cases} \frac{1}{c} \frac{\partial U^{(s,l)}}{\partial t} + \frac{\partial W^{(s,l)}}{\partial x} + \kappa_U^{(s,l-1)} U^{(s,l)} = Q_U^{(s,l-1)}, \\ \frac{1}{c} \frac{\partial W^{(s,l)}}{\partial t} + \frac{\partial D^{(s-1)} U^{(s,l)}}{\partial x} + \kappa_R^{(s-1)} W^{(s,l)} + \zeta^{(s-1)} U^{(s,l)} = Q_W^{(s,l-1)}, \end{cases}$$

из которой находятся узловые значения  $U_i^{(s,l)}$  и  $W_i^{(s,l)}$ , а также интегральные средние  $\bar{u}_i^{(s,l)}$  и  $\bar{w}_i^{(s,l)}$ .

2. Решается уравнение баланса энергии (20):

$$a \frac{\widehat{T}_i^{(s,l)} - T_i}{\Delta t} = \widehat{\kappa}_{U,i}^{(s,l)} \widehat{U}_i^{(s,l)} - \widehat{Q}_{U,i}^{(s,l)}$$

для целых и полуцелых пространственных индексов, находят  $\widehat{T}_i^{(s,l)}$ . Коэффициент  $\widehat{\kappa}_{U,i}^{(s,l)}$  и функцию правой части  $\widehat{Q}_{U,i}^{(s,l)}$  линеаризуют в окрестности  $\widehat{T}_i^{(s,l)}$ :

$$\begin{aligned} \widehat{\kappa}_{U,i}^{(s,l)} &= \widehat{\kappa}_{U,i}^{(s,l-1)} + \left. \frac{\delta \kappa_U}{\delta T} \right|_{T=\widehat{T}_i^{(s-1)}} \cdot (\widehat{T}_i^{(s,l)} - \widehat{T}_i^{(s,l-1)}), \\ \widehat{Q}_{U,i}^{(s,l)} &= \widehat{Q}_{U,i}^{(s,l-1)} + \left. \frac{dQ_U}{dT} \right|_{T=\widehat{T}_i^{(s-1)}} \cdot (\widehat{T}_i^{(s,l)} - \widehat{T}_i^{(s,l-1)}), \end{aligned} \quad (29)$$

где производная  $\left. \frac{dQ_U}{dT} \right|_{T=\widehat{T}_i^{(s-1)}}$  вычисляется аналитически, в выражение подставляется температура, полученная на предыдущей внешней итерации, а производная  $\left. \frac{\delta \kappa_U}{\delta T} \right|_{T=\widehat{T}_i^{(s-1)}}$  может быть вычислена приближенно-разностно по формуле

$$\left. \frac{\delta \kappa_U}{\delta T} \right|_{T=\widehat{T}_i^{(s-1)}} = \frac{\kappa_{U,i}^{(s-1)} - \kappa_{U,i}^{(s-2)}}{\widehat{T}_i^{(s-1)} - \widehat{T}_i^{(s-2)}}. \quad (30)$$

Заметим, что групповые коэффициенты  $\kappa_U^p$  являются функциями термодинамических параметров среды в ячейке (температуры, плотности). Осредненный по энергии коэффициент  $\kappa_U$  (17) зависит не только от групповых коэффициентов поглощения  $\kappa_U^p$ , но и от групповых плотностей излучения  $U^p$ , которые в свою очередь зависят от поля температуры. Тогда производная осредненного коэффициента  $\kappa_U$  по локальной температуре (30) определяется как изменением каждого из групповых коэффициентов в зависимости от температуры, так и перестройкой спектра.

При вычислении значений  $\widehat{T}_{i+1/2}^{(s,l)}$  необходимо использовать значения  $U_{i+1/2}^{(s,l)}$ , рассчитанные по узловым значениям  $U_i^{(s,l)}$  и интегральным средним по ячейке  $\bar{u}_i^{(s,l)}$  по формуле Симпсона:

$$U_{i+1/2}^{(s,l)} = 0,25 (\bar{u}_i^{(s,l)} - U_i^{(s,l)} - U_{i+1}^{(s,l)}).$$

3. Вычисляются  $\widehat{\kappa}_{U,i}^{(s,l)}$  в целых и полуцелых индексах в соответствии с (29).

II. По полученным в п. I значениям температуры  $\widehat{T}_i^{(s)}$  и известным с предыдущей итерации значениям эффективной температуры  $\theta_i^{(s-1)}$  рассчитывают групповые коэффициенты  $\kappa_U^{p(s)}$ ,  $\kappa_R^{p(s)}$  по таблицам или аналитическим формулам.

III. Решается уравнение НО для  $p = 1, \dots, P$ :

$$\frac{1}{c} \frac{\partial I^{p(s)}}{\partial t} + \mu \frac{\partial I^{p(s)}}{\partial x} + \kappa_U^{p(s)} I^{p(s)} = Q^{p(s)}.$$

По найденным значениям  $I^{p(s)}$  находят групповые коэффициенты граничных условий (15) и групповой коэффициент квазидиффузии (13).

IV. Решается уравнение LO<sub>1</sub> для  $p = 1, \dots, P$ :

$$\begin{cases} \frac{1}{c} \frac{\partial U^{p(s)}}{\partial t} + \frac{\partial W^{p(s)}}{\partial x} + \kappa_U^{p(s)} U^{p(s)} = Q_1^{p(s)}, \\ \frac{1}{c} \frac{\partial W^{p(s)}}{\partial t} + \frac{\partial D^{p(s)} U^{p(s)}}{\partial x} + \kappa_R^{p(s)} W^{p(s)} = Q_2^{p(s)}, \end{cases}$$

из которого находят  $U^{p(s)}$  и  $W^{p(s)}$ . По групповым значениям плотности и потока излучения находят осредненные коэффициенты  $\kappa_U^{(s)}$ ,  $\kappa_R^{(s)}$ ,  $\zeta^{(s)}$ ,  $D^{(s)}$  по формулам (17),  $c_0^{(s)}$  и  $c_L^{(s)}$  в соответствии с (18), а значения производной  $\left. \frac{\delta \kappa_U}{\delta T} \right|_{T=\bar{T}_i^{(s)}}$  — по (30). Найденные величины будут использованы для решения эффективной одnogрупповой системы уравнений квазидиффузии LO<sub>2</sub> на новой итерации.

V. *Вычисление эффективной температуры  $\theta_i^{(s)}$ .* В данной работе для предлагаемого аналитического теста этот этап не требуется, поэтому не будет обсуждаться подробно.

Предложенный алгоритм будет протестирован на аналитическом решении, описанном в следующем разделе.

### Аналитический тест для HOLO-алгоритма

Пусть  $x \in [0, 1]$ ,  $c = 2$ ,  $a = 1$ ,  $\varepsilon_1 = 10^{-12}$ ,  $\varepsilon_2 = 10^{-13}$ ; предложим аналитический тест для демонстрации порядков сходимости по времени и пространству.

Выберем в качестве решения уравнения (10) функцию спектральной интенсивности излучения в виде

$$I_\nu = (1 + \mu) \exp\left(-\frac{\nu}{T}\right), \tag{31}$$

где  $\nu$  — частота излучения (кэВ),  $T$  — температура (кэВ). Коэффициент поглощения зададим в виде

$$\kappa'_\nu = \kappa_0 T^2, \quad \kappa_0 = 0,1. \tag{32}$$

Так как коэффициент поглощения не зависит от частоты  $\nu$  и косинуса угла направления полета частицы  $\mu$ , то при осреднении по угловой и энергетической переменным мы получим выражения, совпадающие с правой частью (32):

$$\kappa_U^p = \kappa_R^p = \kappa_U = \kappa_R = \kappa_0 T^2.$$

Получим выражение для групповой интенсивности излучения  $I^p$ , проинтегрировав (31) по частоте от  $\nu^p$  до  $\nu^{p+1}$ . Введем обозначение

$$\Upsilon^p = \int_{\nu^p}^{\nu^{p+1}} \exp\left(-\frac{\nu}{T}\right) d\nu = T \left( \exp\left(-\frac{\nu^p}{T}\right) - \exp\left(-\frac{\nu^{p+1}}{T}\right) \right).$$

Тогда

$$I^p = \int_{\nu^p}^{\nu^{p+1}} I_\nu d\nu = (1 + \mu) \Upsilon^p. \tag{33}$$

Для получения групповых значений плотности ( $U^p$ ) и потока ( $W^p$ ) излучения проинтегрируем (33) по  $\mu$  с весами 1 и  $\mu$ :

$$U^p = \int_{-1}^1 I^p d\mu = 2\Upsilon^p, \quad W^p = \int_{-1}^1 \mu I^p d\mu = \frac{2\Upsilon^p}{3}.$$

Групповой коэффициент квазидиффузии получим по (13):

$$D^p = \frac{\int_{-1}^1 \mu^2 I^p d\mu}{\int_{-1}^1 I^p d\mu} = \frac{1}{3}.$$

Далее получим решения эффективной одногрупповой системы уравнений квазидиффузии (16):

$$U = \int_{-1}^1 \int_0^\infty I_\nu dv d\mu = 2T, \quad W = \int_{-1}^1 \mu \int_0^\infty I_\nu dv d\mu = \frac{2T}{3} \quad (34)$$

а также коэффициент квазидиффузии  $D = \frac{1}{3}$ . Так как все групповые потоки  $W^p$  являются неотрицательными функциями температуры, то поправки осреднения  $\zeta = 0$ . Правые части (11), (12), (16) могут быть получены по формулам

$$\begin{aligned} Q^p &= \frac{1}{c} \frac{\partial I^p}{\partial t} + \mu \frac{\partial I^p}{\partial x} + \kappa_U^p I^p, \\ Q_1^p &= \frac{1}{c} \frac{\partial U^p}{\partial t} + \frac{\partial W^p}{\partial x} + \kappa_U^p U^p, \quad Q_2^p = \frac{1}{c} \frac{\partial W^p}{\partial t} + \frac{\partial(D^p U^p)}{\partial x} + \kappa_R^p W^p, \\ Q_U &= \frac{1}{c} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial W}{\partial x} + \kappa_U U, \quad Q_W = \frac{1}{c} \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial(DU)}{\partial x} + \kappa_R W + \zeta U. \end{aligned}$$

Теперь найдем решения уравнения баланса энергии (20) с учетом (21), подставив в него выражения (34):

$$a \frac{\partial T}{\partial t} = \kappa_U U - Q_U = \kappa_U \cdot 2T - \left( \frac{1}{c} \frac{\partial(2T)}{\partial t} + \frac{\partial\left(\frac{2T}{3}\right)}{\partial x} + \kappa_U \cdot 2T \right).$$

После преобразований мы получим линейное однородное уравнение переноса:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \beta \frac{\partial T}{\partial x} = 0, \quad \beta = \frac{2c}{3ac + 6},$$

решением которого является произвольная функция  $T(x, t) = T(x - \beta t)$ . Для удобства выберем

$$T = \exp(x - \beta t). \quad (35)$$

Предложенная функция принимает только положительные значения и является бесконечно дифференцируемой.

Так как в предложенном тесте коэффициент  $\kappa_U$  и его производная по температуре известны точно ( $\kappa_U' = 2\kappa_0 T$ ), то верификация алгоритма будет производиться в два этапа. На первом этапе верификации будут использоваться аналитические значения  $\kappa_U$ ,  $\kappa_U'$ , а на втором этапе будут использоваться их приближенные значения, получаемые в пункте IV внешних итераций. Также алгоритм будет тестироваться при различных граничных условиях.

*Граничные условия 1.* Граничные условия, задаваемые через производные по времени точного решения в соответствии с (25) для уравнения переноса и (26), (27) для однопроводной системы уравнений квазидиффузии и аналогично для многопроводной системы уравнений квазидиффузии, которые обеспечивают третий порядок сходимости по времени.

*Граничные условия 2.* Классические граничные условия, которые ставятся через дробно-линейные функционалы (14) и (19) для LO<sub>1</sub>- и LO<sub>2</sub>-уравнений. Используются краевые условия (9) для уравнения переноса. Коэффициенты  $c_0, c_L, c_0^p, c_L^p$ , входящие в (14), (19), могут быть получены аналитически по формулам (15) и (18):

$$c_0 = c_0^p = -\frac{1}{3}, \quad c_L = c_L^p = \frac{5}{9}.$$

При этом выделим еще следующие варианты.

*Граничные условия 2.1.* Величины  $U_{in}^p, W_{in}^p$  рассчитываются аналитически по (14) через точные значения температуры:

$$\begin{aligned} U_{in,0}^p &= \frac{3\Upsilon^p}{2}, & W_{in,0}^p &= \frac{5\Upsilon^p}{6}, \\ U_{in,L}^p &= \frac{\Upsilon^p}{2}, & W_{in,L}^p &= -\frac{\Upsilon^p}{6}, \end{aligned} \tag{36}$$

величины  $U_{in}, W_{in}$  получаются суммированием по (18).

*Граничные условия 2.2.* Величины  $U_{in}^p, W_{in}^p$  выбираются в соответствии с (36), так же как и в граничных условиях 2.1. Для величин  $U_{in}, W_{in}$  используются аналитические выражения

$$\begin{aligned} U_{in,0} &= \frac{3T}{2}, & W_{in,0} &= \frac{5T}{6}, \\ U_{in,L} &= \frac{T}{2}, & W_{in,L} &= -\frac{T}{6}, \end{aligned} \tag{37}$$

причем в (37) подставляются точные значения температуры из (35).

*Граничные условия 2.3* аналогичны граничным условиям 2.2, за исключением того, что в (9), (36), (37) подставляются расчетные стадийные значения температуры, в итоге граничные условия пересчитываются на каждой внутренней итерации.

В тестах будет использоваться 18-групповое приближение, сетка по частоте (кэВ) состоит из точек [0, 0,25, 0,5, 0,75, 1, 1,25, 1,5, 1,75, 2, 2,5, 3, 3,5, 4, 5, 6, 9, 12, 25, 65]. Сетка по угловой переменной представляет собой набор узлов квадратур Гаусса с 10 точками, по 5 точек на каждом из отрезков [-1, 0] и [0, 1].

Сначала продемонстрируем достижение третьего порядка сходимости по времени и четвертого порядка по пространству при использовании граничных условий 1 (см. табл. 1, 2). В тесте используются аналитические значения  $\kappa_U, \kappa'_U$  (отключен пункт IV внешних итераций), решения для уравнений HO, LO<sub>1</sub> и LO<sub>2</sub> сходятся с одинаковыми порядками. Для аналогичного теста при включенном пункте IV величины ошибок и порядок сходимости для уравнений HO и LO<sub>1</sub> не изменятся, погрешности решения для LO<sub>2</sub> незначительно уменьшатся, что продемонстрировано в табл. 3, порядок сходимости по времени остается третьим, а по пространству сохраняется четвертый порядок сходимости.

Теперь покажем, что при использовании граничных условий 2.2 порядок сходимости по времени падает до второго, это демонстрирует табл. 4. Интересно заметить, что при использовании граничных условий 2.3 за счет вычисления граничных условий LO<sub>2</sub> через стадийные значения температуры можно достичь третьего порядка сходимости по времени решения системы LO<sub>2</sub>, однако это не влияет на второй порядок сходимости по времени решений уравнений HO и LO<sub>1</sub> (см. табл. 5). Даже если граничные условия для уравнений HO и LO<sub>1</sub> также вычислять через стадийные значения температуры, повышения порядка сходимости достичь не удастся.



Таблица 1. Погрешности численного решения и порядок сходимости по времени для теста с граничными условиями 1 при  $\frac{\Delta t}{h} = 0,7$ ,  $t \in [0, \frac{7}{30}]$ . В тесте используются точные значения для коэффициентов системы  $LO_2$  и производной  $\kappa'_U$

$N_x$	$N_t$	$U, W, T$		$U^p, W^p$		$I^p$	
		$\  [u]_{\tau h} - y \ _C$	$p$	$\  [u]_{\tau h} - y \ _C$	$p$	$\  [u]_{\tau h} - y \ _C$	$p$
60	20	$9,01 \cdot 10^{-08}$	2,89	$3,42 \cdot 10^{-08}$	2,89	$4,74 \cdot 10^{-08}$	2,93
120	40	$1,22 \cdot 10^{-08}$	2,92	$4,60 \cdot 10^{-09}$	2,94	$6,23 \cdot 10^{-09}$	2,96
240	80	$1,60 \cdot 10^{-09}$	2,95	$5,99 \cdot 10^{-10}$	2,97	$7,98 \cdot 10^{-10}$	2,98
480	160	$2,08 \cdot 10^{-10}$		$7,64 \cdot 10^{-11}$		$1,01 \cdot 10^{-10}$	

Таблица 2. Погрешности численного решения и порядок сходимости по пространству для теста с граничными условиями 1 при  $\Delta t = 10^{-4}$ ,  $N_t = 20$ . В тесте используются точные значения для коэффициентов системы  $LO_2$  и производной  $\kappa'_U$

$N_x$	$N_t$	$U, W, T$		$U^p, W^p$		$I^p$	
		$\  [u]_{\tau h} - y \ _C$	$p$	$\  [u]_{\tau h} - y \ _C$	$p$	$\  [u]_{\tau h} - y \ _C$	$p$
40	20	$4,83 \cdot 10^{-09}$	4,18	$1,24 \cdot 10^{-08}$	4,14	$1,01 \cdot 10^{-08}$	3,89
80	20	$2,66 \cdot 10^{-10}$	4,06	$7,02 \cdot 10^{-10}$	3,97	$6,81 \cdot 10^{-10}$	4,32
160	20	$1,60 \cdot 10^{-11}$	3,70	$4,47 \cdot 10^{-11}$	3,95	$3,41 \cdot 10^{-11}$	4,10
320	20	$1,23 \cdot 10^{-12}$		$2,89 \cdot 10^{-12}$		$1,99 \cdot 10^{-12}$	

Таблица 3. Погрешности численного решения и порядок сходимости для  $U, W, T$  по времени и по пространству для теста с граничными условиями 1. В тесте используются значения для коэффициентов системы  $LO_2$ , полученные на этапе IV внешних итераций, и точные значения производной  $\kappa'_U$

Сходимость по времени для $U, W, T$ при фиксированном $\frac{\Delta t}{h} = 0,7$ , $t \in [0, \frac{7}{30}]$				Сходимость по пространству для $U, W, T$ при $\Delta t = 10^{-4}$ , $N_t = 20$		
$N_x$	$N_t$	$\  [u]_{\tau h} - y \ _C$	$p$	$N_x$	$\  [u]_{\tau h} - y \ _C$	$p$
60	20	$5,62 \cdot 10^{-08}$	2,91	20	$5,64 \cdot 10^{-08}$	3,76
120	40	$7,49 \cdot 10^{-09}$	2,72	40	$4,15 \cdot 10^{-09}$	3,62
240	80	$1,14 \cdot 10^{-09}$		80	$3,37 \cdot 10^{-10}$	

Таблица 4. Погрешности численного решения и порядок сходимости по времени для теста с граничными условиями 2.2 при  $\frac{\Delta t}{h} = 0,7$ ,  $t \in [0, \frac{7}{30}]$ . В тесте используются точные значения для коэффициентов системы  $LO_2$  и производной  $\kappa'_U$

$N_x$	$N_t$	$U, W, T$		$U^p, W^p$		$I^p$	
		$\  [u]_{\tau h} - y \ _C$	$p$	$\  [u]_{\tau h} - y \ _C$	$p$	$\  [u]_{\tau h} - y \ _C$	$p$
60	20	$3,81 \cdot 10^{-07}$	1,97	$1,34 \cdot 10^{-07}$	1,99	$3,68 \cdot 10^{-07}$	1,99
120	40	$9,73 \cdot 10^{-08}$	1,99	$3,37 \cdot 10^{-08}$	2,00	$9,24 \cdot 10^{-08}$	2,00
240	80	$2,46 \cdot 10^{-08}$	1,99	$8,45 \cdot 10^{-09}$	2,00	$2,31 \cdot 10^{-08}$	2,00
480	160	$6,17 \cdot 10^{-09}$		$2,11 \cdot 10^{-09}$		$5,79 \cdot 10^{-09}$	

Приведем результат теста для полного алгоритма, описанного в предыдущем разделе, взаимодействие этапов в котором наиболее близко к реализуемому при решении прикладных задач. Теперь коэффициенты системы  $LO_2$  получаются в результате суммирования на этапе IV внешних итераций, также подключается вычисление разностной производной  $\left. \frac{\delta \kappa_U}{\delta T} \right|_{T=\widehat{T}_i^{(s)}}$ . Используются граничные условия 2.1, в которых коэффициенты одногрупповой системы получены в результате суммирования по группам. Порядок сходимости по времени для решения уравнения  $LO_2$

Таблица 5. Погрешности численного решения и порядок сходимости по времени для теста с граничными условиями 2.3 при  $\frac{\Delta t}{h} = 0,7$ ,  $t \in [0, \frac{7}{30}]$ . В тесте используются точные значения для коэффициентов системы  $LO_2$  и производной  $\kappa'_U$

$N_x$	$N_t$	$U, W, T$		$U^p, W^p$		$I^p$	
		$\  [u]_{\tau h} - y \ _C$	$p$	$\  [u]_{\tau h} - y \ _C$	$p$	$\  [u]_{\tau h} - y \ _C$	$p$
60	20	$7,15 \cdot 10^{-08}$	2,93	$9,40 \cdot 10^{-08}$	2,01	$2,54 \cdot 10^{-07}$	2,00
120	40	$9,37 \cdot 10^{-09}$	2,97	$2,33 \cdot 10^{-08}$	2,00	$6,34 \cdot 10^{-08}$	2,00
240	80	$1,20 \cdot 10^{-09}$	3,02	$5,82 \cdot 10^{-09}$	2,00	$1,59 \cdot 10^{-08}$	2,00
480	160	$1,48 \cdot 10^{-10}$		$1,45 \cdot 10^{-09}$		$3,97 \cdot 10^{-09}$	

Таблица 6. Погрешности численного решения и порядок сходимости для  $U, W, T$  по времени для теста с граничными условиями 2.1 при  $\frac{\Delta t}{h} = 0,7$ ,  $t \in [0, \frac{7}{30}]$ . В тесте используются значения для коэффициентов системы  $LO_2$  и производной  $\kappa'_U$ , полученные на IV этапе внешних итераций

$N_x$	$N_t$	$U, W, T$	
		$\  [u]_{\tau h} - y \ _C$	$p$
60	20	$4,05 \cdot 10^{-07}$	1,99
120	40	$1,02 \cdot 10^{-07}$	2,00
240	80	$2,55 \cdot 10^{-08}$	2,00
480	160	$6,38 \cdot 10^{-09}$	

равен второму и продемонстрирован в табл. 6. Ошибки и порядок сходимости для решений уравнений HO и  $LO_1$  не изменились по сравнению с результатами, представленными в табл. 4.

## Заключение

При решении задач радиационной газовой динамики в рамках метода расщепления по физическим процессам выделяют блок совместного решения уравнения переноса излучения с уравнениями, описывающими состояние среды (1)–(3). Для численного решения уравнений (1)–(3) могут применяться HOLO-алгоритмы, их преимущество состоит в том, что размерность задачи эффективно понижается и достигается ускорение сходимости итераций за счет тесного взаимодействия решений, полученных на разных этапах HOLO-алгоритма. В рассматриваемой задаче в рамках HOLO-алгоритма решается уравнение переноса излучения в многогрупповом приближении (11) (уравнение высокого порядка, high order, HO), многогрупповая система уравнений квазидиффузии (12) (low order 1,  $LO_1$ ) и эффективная одnogрупповая система уравнений квазидиффузии (16) (low order 2,  $LO_2$ ), решаемая совместно с уравнением баланса энергии (20).

Для уравнений HO,  $LO_1$  и  $LO_2$  предложены бикомпактные схемы третьего порядка аппроксимации по времени и четвертого порядка аппроксимации по пространству. Схемы строятся методом прямых в рамках одной ячейки. Уравнение баланса энергии интегрируется по времени тем же диагонально-неявным методом Рунге – Кутты третьего порядка, что и уравнения HO,  $LO_1$  и  $LO_2$ . Так как коэффициенты уравнений HO,  $LO_1$  и  $LO_2$  не являются линейными функциями температуры, то для нахождения решения на новом слое по времени организован итерационный квазиньютоновский процесс.

Предложен аналитический тест для HOLO-алгоритма, в котором все величины являются известными функциями температуры. В таком случае возможно рассмотрение различных вариантов постановки граничных условий при частичном и полном взаимодействии решений уравнений различных этапов HOLO-алгоритма. Показано достижение заявленных порядков сходимости по времени и пространству для варианта граничных условий, использующего точные

значения производных по времени от решений. Для постановки граничных условий, приближенной к реальной физической постановке, наблюдается понижение порядка сходимости по времени с третьего до второго. Интересно отметить, что существуют варианты постановки граничных условий, при которых отличаются порядки сходимости по времени для уравнений различных этапов HOLO-алгоритма.

При использовании метода расщепления по физическим процессам обычно можно рассчитывать на порядок сходимости по времени не выше второго, поэтому в дальнейших исследованиях интерес представляет изучение возможности сохранения второго порядка сходимости по времени при наличии поправок осреднения по энергии, так как в проведенных тестах эти поправки были равны нулю. Влияние этих поправок может быть исследовано при применении схем к задачам Флека, которые моделируют взаимодействие излучения с неподвижным веществом. Успех дальнейшего исследования позволит численно решать полную систему уравнений ВРГД и задачи более высокой размерности.

## Список литературы (References)

- Анистратов Д. Ю., Аристова Е. Н., Гольдин В. Я.* Нелинейный метод решения задач переноса излучения в среде // Матем. моделирование. — 1996. — Т. 8, № 12. — С. 3–28.  
*Anistratov D. Yu., Aristova E. N., Gol'din V. Ya.* Nelineinyi metod resheniya zadach perenosa izlucheniya v srede [Nonlinear method for solving problems of radiation transport in a medium] // Matem. modelirovanie. — 1996. — Vol. 8, No. 12. — P. 3–28 (in Russian).
- Аристова Е. Н., Байдин Д. Ф.* Реализация метода квазидиффузии для расчета критических параметров реактора на быстрых нейтронах в трехмерной гексагональной геометрии // Математическое моделирование. — 2012а. — Т. 24, № 8. — С. 65–80.  
*Aristova E. N., Baydin D. F.* Implementation of the quasi diffusion method for calculating the critical parameters of a fast neutron reactor in 3D hexagonal geometry // Mathematical Models and Computer Simulations. — 2013. — Vol. 5, No. 2. — P. 145–155. — DOI: 10.1134/S2070048213020026 (Original Russian paper: *Aristova E. N., Baydin D. F.* Realizatsiya metoda kvazidiffuzii dlya rascheta kriticheskikh parametrov reaktora na bystrykh neitronakh v trekhmernoii geksagonal'noi geometrii // Matematicheskoe modelirovanie. — 2012а. — Vol. 24, No. 8. — P. 65–80.)
- Аристова Е. Н., Байдин Д. Ф.* Экономичность методов квазидиффузии расчета критических параметров быстрого реактора // Математическое моделирование. — 2012б. — Т. 24, № 4. — С. 129–136.  
*Aristova E. N., Baydin D. F.* Efficiency of quasi-diffusion method for calculating critical parameters of a fast reactor // Mathematical Models and Computer Simulations. — 2012. — Vol. 4, No. 6. — P. 568–573. — DOI: 10.1134/S2070048212060026 (Original Russian paper: *Aristova E. N., Baydin D. F.* Ekonomichnost' metodov kvazidiffuzii rascheta kriticheskikh parametrov bystrogo reaktora // Matematicheskoe modelirovanie. — 2012б. — Vol. 24, No. 4. — P. 129–136.)
- Аристова Е. Н., Караваева Н. И.* Бикомпактные схемы высокого порядка аппроксимации для уравнений квазидиффузии // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша РАН. — 2018. — № 45. — 28 с.  
*Aristova E. N., Karavaeva N. I.* Bikompaktnye skhemy vysokogo poryadka approksimatsii dlya uravnenii kvazidiffuzii [Bicompact high order schemes for quasi-diffusion equations] // Preprint Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS. — 2018. — No. 45. — 28 p. (in Russian).
- Аристова Е. Н., Караваева Н. И.* Постановка граничных условий в бикомпактных схемах для HOLO-алгоритмов решения уравнения переноса // Матем. моделирование. — 2019а. — Т. 31, № 9. — С. 3–20.  
*Aristova E. N., Karavaeva N. I.* Boundary conditions in bicomcompact schemes for HOLO algorithms to solve transport equations // Mathematical Models and Computer Simulations. — 2020. — Vol. 12, No. 3. — P. 271–281. — DOI: 10.1134/S2070048220030059 (Original Russian paper: *Aristova E. N., Karavaeva N. I.* Postanovka granichnykh uslovii v bikompaktnykh skhemakh dlya HOLO-algoritmov resheniya uravneniya perenosa // Matem. modelirovanie. — 2019а. — Vol. 31, No. 9. — P. 3–20.)
- Аристова Е. Н., Караваева Н. И.* Реализация бикомпактной схемы для HOLO-алгоритмов решения уравнения переноса // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. — 2019б. — № 21. — 28 с.  
*Aristova E. N., Karavaeva N. I.* Realizatsiya bikompaktnoi skhemy dlya HOLO-algoritmov resheniya uravneniya perenosa [Implementation of the bicomcompact scheme for HOLO algorithms for solving the transport equation] // Preprint Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS. — 2019б. — No. 21. — 28 p. (in Russian).

- Аристова Е. Н., Рогов Б. В.* О реализации граничных условий в бикомпактных схемах для линейного уравнения переноса // Математическое моделирование. — 2012. — Т. 24, № 10. — С. 3–14.  
*Aristova E. N., Rogov B. V.* Boundary conditions implementation in bcompact schemes for the linear transport equation // *Mathematical Models and Computer Simulations*. — 2013. — Vol. 5, No. 3. — P. 199–208. — DOI: 10.1134/S2070048213030022 (Original Russian paper: *Aristova E. N., Rogov B. V.* O realizatsii granichnykh uslovii v bikompaktnykh skhemakh dlya lineinogo uravneniya perenosa // *Matematicheskoe modelirovanie*. — 2012. — Vol. 24, No. 10. — P. 3–14.)
- Аристова Е. Н., Рогов Б. В., Чикиткин А. В.* Оптимальная монотонизация высокоточной бикомпактной схемы для нестационарного многомерного уравнения переноса // Ж. вычисл. матем. и матем. физики. — 2016. — Т. 56, № 6. — С. 973–988.  
*Aristova E. N., Rogov B. V., Chikitkin A. V.* Optimal monotoneization of a high-order accurate bcompact scheme for the nonstationary multidimensional transport equation // *Comput. Math. and Math. Phys.* — 2016. — Vol. 56, No. 6. — P. 962–976. — DOI: 10.1134/S0965542516060038 (Original Russian paper: *Aristova E. N., Rogov B. V., Chikitkin A. V.* Optimal'naya monotonizatsiya vysokotochnoi bikompaktnoi skhemy dlya nestatsionarnogo mnogomernogo uravneniya perenosa // *Zh. vychisl. matem. i matem. fiziki*. — 2016. — Vol. 56, No. 6. — P. 973–988.)
- Брагин М. Д., Рогов Б. В.* Метод итерированной приближенной факторизации операторов высокоточной бикомпактной схемы для систем многомерных неоднородных уравнений гиперболического типа // Доклады РАН. — 2017. — Т. 473, № 3. — С. 263–267.  
*Bragin M. D., Rogov B. V.* Iterative approximate factorization for difference operators of high-order bcompact schemes for multidimensional nonhomogeneous hyperbolic systems // *Doklady Mathematics*. — 2017. — Vol. 95, No. 2. — P. 140–143. — DOI: 10.1134/S1064562417020107 (Original Russian paper: *Bragin M. D., Rogov B. V.* Metod iteriruemoi priblizhennoi faktorizatsii operatorov vysokotochnoi bikompaktnoi skhemy dlya sistem mnogomernykh neodnorodnykh uravnenii giperbolicheskogo tipa // *Doklady RAN*. — 2017. — Vol. 473, No. 3. — P. 263–267.)
- Гольдин В. Я.* Квазидиффузионный метод решения кинетического уравнения // Ж. вычисл. матем. и матем. физики. — 1964. — Т. 4, № 6. — С. 1078–1087.  
*Gol'din V. Ya.* A quasi-diffusion method of solving the kinetic equation // *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*. — 1964. — Vol. 4, No. 6. — P. 136–149. — DOI: 10.1016/0041-5553(64)90085-0 (Original Russian paper: *Gol'din V. Ya.* Kvazidiffuzionnyi metod resheniya kineticheskogo uravneniya // *Zh. vychisl. matem. i matem. fiziki*. — 1964. — Vol. 4, No. 6. — P. 1078–1087.)
- Гольдин В. Я.* О математическом моделировании задач сплошной среды с неравновесным переносом // Современные проблемы матем. физики и вычисл. матем. — М.: Наука, 1982. — С. 13–127.  
*Gol'din V. Ya.* O matematicheskom modelirovanii zadach sploshnoi sredy s neravnovesnym perenosom [On mathematical modeling of continuous medium problems with nonequilibrium transport] // *Sovremennye problemy matem. fiziki i vychisl. matem.* — Moscow: Nauka, 1982. — P. 13–127 (in Russian).
- Гольдин В. Я., Гольдина Д. А., Колпаков А. В., Шильков А. В.* Математическое моделирование газодинамических процессов при высокой плотности энергии излучения // ВАНТ, серия «Методики и программы численного решения задач математической физики». — 1986. — Вып. 2. — С. 59–66.  
*Gol'din V. Ya., Gol'dina D. A., Kolkpakov A. V., Shil'kov A. V.* Matematicheskoe modelirovanie gazodinamicheskikh protsessov pri vysokoi plotnosti energii izlucheniya [Mathematical modeling of gas-dynamic processes at high radiation energy density] // *VANT, seriya "Metodiki i programmy chislennogo resheniya zadach matematicheskoi fiziki"*. — 1986. — No. 2. — P. 59–66 (in Russian).
- Гольдин В. Я., Четверушкин Б. Н.* Методы решения одномерных задач радиационной газовой динамики // Ж. вычисл. матем. и матем. физики. — 1972. — Т. 12, № 4. — С. 990–1000.  
*Gol'din V. Ya., Chetverushkin B. N.* Methods of solving one-dimensional problems of radiation gas dynamics // *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*. — 1972. — Vol. 12, No. 4. — P. 177–189. — DOI: 10.1016/0041-5553(72)90122-X (Original Russian paper: *Gol'din V. Ya., Chetverushkin B. N.* Metody resheniya odnomernykh zadach radiatsionnoi gazovoi dinamiki // *Zh. vychisl. matem. i matem. fiziki*. — 1972. — Vol. 12, No. 4. — P. 990–1000.)
- Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П.* Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. — М.: Наука, 1966. — 688 с.  
*Zel'dovich Ya. B., Raizer Yu. P.* Physics of shock waves and high-temperature hydrodynamic phenomena. Vol. I. — Academic Press, 1966. — 488 p.; Vol. II. — Academic Press, 1967. — 478 p. (Russ. ed.: *Zel'dovich Ya. B., Raizer Yu. P.* Fizika udarnykh voln i vysokotemperaturnykh gidrodinamicheskikh yavlenii. — Moscow: Nauka, 1966. — 688 p.)
- Каравеева Н. И.* Бикомпактные схемы для решения одноразмерной системы уравнений квазидиффузии совместно с уравнением энергии // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша РАН. — 2023. — № 25. — 16 с.

- Karavaeva N.I.* Bikompaktnye skhemy dlya resheniya odnogruppyvoi sistemy uravnenii kvazidiffuzii sovmestno s uravneniem energii [Bicompact schemes for the joint solution of a one-group system of quasidiffusion equations with the energy equation] // Preprint Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS. — 2023. — No. 25. — 16 p. (in Russian).
- Михалас Д.* Звездные атмосферы. — М.: Мир, 1982. — 352 с.  
*Mihalas D.* Stellar atmospheres. — W.H. Freeman, 1978. — 632 p. (Russ. ed.: *Mikhailas D. Zvezdnye atmosfery.* — Moscow: Mir, 1982. — 352 p.)
- Рогов Б. В., Михайловская М. Н.* Бикомпактные схемы четвертого порядка аппроксимации для гиперболических уравнений // ДАН. — 2010. — Т. 430, № 4. — С. 470–474.  
*Rogov B. V., Mikhailovskaya M. N.* Fourth-order accurate bicompact schemes for hyperbolic equations // *Doklady Mathematics.* — 2010. — Vol. 81, No. 1. — P. 146–150. — DOI: 10.1134/S1064562410010400 (Original Russian paper: *Rogov B. V., Mikhailovskaya M. N.* Bikompaktnye skhemy chetvertogo poryadka approksimatsii dlya giperbolicheskikh uravnenii // ДАН. — 2010. — Vol. 430, No. 4. — P. 470–474.)
- Рогов Б. В., Михайловская М. Н.* Монотонные бикомпактные схемы для линейного уравнения переноса // ДАН. — 2011а. — Т. 436, № 5. — С. 600–605.  
*Rogov B. V., Mikhailovskaya M. N.* Monotone bicompact schemes for a linear advection equation // *Doklady Mathematics.* — 2011. — Vol. 83, No. 1. — P. 121–125. — DOI: 10.1134/S1064562411010273 (Original Russian paper: *Rogov B. V., Mikhailovskaya M. N.* Monotonnye bikompaktnye skhemy dlya lineinogo uravneniya perenosa // ДАН. — 2011а. — Vol. 436, No. 5. — P. 600–605.)
- Рогов Б. В., Михайловская М. Н.* Монотонные бикомпактные схемы для линейного уравнения переноса // Математическое моделирование. — 2011b. — Т. 23, № 6. — С. 98–110.  
*Rogov B. V., Mikhailovskaya M. N.* Monotonic bicompact schemes for linear transport equations // *Mathematical Models and Computer Simulations.* — 2012. — Vol. 4, No. 1. — P. 92–100. — DOI: 10.1134/S2070048212010103 (Original Russian paper: *Rogov B. V., Mikhailovskaya M. N.* Monotonnye bikompaktnye skhemy dlya lineinogo uravneniya perenosa // *Matematicheskoe modelirovanie.* — 2011b. — Vol. 23, No. 6. — P. 98–110.)
- Рогов Б. В., Михайловская М. Н.* О сходимости компактных разностных схем // Математическое моделирование. — 2008. — Т. 20, № 1. — С. 99–116.  
*Rogov B. V., Mikhailovskaya M. N.* On the convergence of compact difference schemes // *Mathematical Models and Computer Simulations.* — 2009. — Vol. 1, No. 1. — P. 91–104. — DOI: 10.1134/S2070048209010104 (Original Russian paper: *Rogov B. V., Mikhailovskaya M. N.* O skhodimosti kompaktnykh raznostnykh skhem // *Matematicheskoe modelirovanie.* — 2008. — Vol. 20, No. 1. — P. 99–116.)
- Четверушкин Б. Н.* Математическое моделирование задач динамики излучающего газа. — М.: Наука, 1985. — 303 с.  
*Chetverushkin B. N.* *Matematicheskoe modelirovanie zadach dinamiki izluchayushchego gaza* [Mathematical modeling of problems in the dynamics of a radiating gas]. — Moscow: Nauka, 1985. — 303 p. (in Russian).
- Чикиткин А. В., Рогов Б. В., Аристова Е. Н.* Высокоточные бикомпактные схемы для многомерного неоднородного уравнения переноса и их эффективная параллельная реализация // Доклады Академии наук. Сер. Математика. — 2016. — Т. 469, № 4. — С. 1–6.  
*Chikitkin A. V., Rogov B. V., Aristova E. N.* High-order accurate bicompact schemes for solving the multidimensional inhomogeneous transport equation and their efficient parallel implementation // *Doklady Mathematics.* — 2016. — Vol. 94, No. 2. — P. 516–521. — DOI: 10.1134/S1064562416040189 (Original Russian paper: *Chikitkin A. V., Rogov B. V., Aristova E. N.* Vysokotochnye bikompaktnye skhemy dlya mnogomernogo neodnorodnogo uravneniya perenosa i ikh effektivnaya parallel'naya realizatsiya // *Doklady Akademii nauk. Ser. Matematika.* — 2016. — Vol. 469, No. 4. — P. 1–6.)
- Adams M. L., Larsen E. W.* Fast iterative methods for discrete-ordinates particle transport calculations // *Progress in Nuclear Energy.* — 2002. — Vol. 40, No. 1. — P. 3–159. — DOI: 10.1016/S0149-1970(01)00023-3
- Aristova E. N.* Simulation of radiation transport in channel on the basis of quasi-diffusion method // *Transport Theory and Statistical Physics.* — 2008. — Vol. 37, No. 05–07. — P. 483–503. — DOI: 10.1080/00411450802522912
- Chacón L., Chen G., Knoll D. A., Newman C., Park H. et al.* Multiscale high-order/low-order (HOLO) algorithms and applications // *J. Comp. Phys.* — 2017. — Vol. 330. — P. 21–45. — DOI: 10.1016/j.jcp.2016.10.069
- Wiesequist W. A., Anistratov D. Y., Morel J. E.* A cell-local finite difference discretization of the low order of the quasidiffusion equations for neutral particle transport on unstructured quadrilateral meshes // *J. Comp. Phys.* — 2014. — Vol. 273. — P. 343–357. — DOI: 10.1016/j.jcp.2014.05.011