

УДК: 519.633

Применение метода нулевого поля для решения двумерного нелинейного уравнения теплопроводности

О. А. Нефедова^{1,a}, Л. Ф. Спевак^{1,b}, А. Л. Казаков^{2,c}, М.-Г. Ли^{3,d}

¹Институт машиноведения имени Э. С. Горкунова Уральского отделения Российской академии наук,
Россия, 620049, г. Екатеринбург, ул. Комсомольская, д. 34

²Институт динамики систем и теории управления имени В. М. Матросова Сибирского отделения
Российской академии наук,
Россия, 664033, г. Иркутск, ул. Лермонтова, д. 134

³Университет Чунг Хуа,
Тайвань, 30012, г. Синьчжу, Секция 2, Уфу-роуд, 707

E-mail: ^a nefedova@imach.uran.ru, ^b lfs@imach.uran.ru, ^c kazakov@icc.ru, ^d mglee@chu.edu.tw

*Получено 27.12.2022, после доработки — 18.07.2023.
Принято к публикации 16.08.2023.*

В работе рассмотрена краевая задача о движении тепловой волны для вырождающегося уравнения второго порядка параболического типа со степенной нелинейностью. Краевое условие задает уравнение движения на плоскости нулевого фронта тепловой волны, имеющего форму окружности. Предложен новый численно-аналитический алгоритм, в соответствии с которым решение строится по шагам по времени при разностной схеме дискретизации времени. На каждом шаге рассматривается краевая задача для уравнения Пуассона, к которому сводится исходное уравнение. Фактически она является обратной задачей Коши, в которой исходная граница области решения свободна от граничных условий, а на текущей границе (фронте волны) заданы два условия (Неймана и Дирихле). Решение этой задачи ищется в виде суммы частного решения уравнения Пуассона и решения соответствующего уравнения Лапласа, удовлетворяющего граничным условиям. Поскольку неоднородность зависит от искомой функции и ее производных, решение строится итерационно. Частное решение ищется методом коллокаций с помощью разложения неоднородности по радиальным базисным функциям. Обратная задача Коши для уравнения Лапласа решается методом нулевого поля применительно к круговым областям с круговыми отверстиями. Для таких задач этот метод применяется впервые. Вычислительный алгоритм оптимизирован за счет распараллеливания вычислений. Распараллеливание вычислений позволило эффективно реализовать алгоритм на высокопроизводительных вычислительных системах. На базе алгоритма была создана компьютерная программа. В качестве средства распараллеливания был выбран стандарт параллельного программирования OpenMP для языка программирования C++ как наиболее подходящий для вычислительных программ с параллельными циклами. Эффективность алгоритма и работоспособность программы были проверены сравнением результатов расчетов с известным точным решением, а также с численным решением, полученным авторами ранее с помощью метода граничных элементов. Проведенный вычислительный эксперимент показал хорошую сходимость итерационных процессов и более высокую точность нового алгоритма по сравнению с разработанным ранее. Анализ решений позволил определить наиболее подходящую систему радиальных базисных функций.

Ключевые слова: нелинейное уравнение параболического типа, уравнение теплопроводности, метод нулевого поля, метод коллокаций, радиальные базисные функции, метод граничных элементов

UDC: 519.633

Solution to a two-dimensional nonlinear heat equation using null field method

O. A. Nefedova^{1,a}, L. F. Spevak^{1,b}, A. L. Kazakov^{2,c}, M.-G. Lee^{3,d}

¹Institute of Engineering Science, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences,
34 Komsomolskaya st., Ekaterinburg, 620049, Russia

²Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory, Siberian Branch of the Russian Academy of
Sciences,
134 Lermontov st., Irkutsk, 664033, Russia

³Chung Hua University, Department of Tourism and MICE, Ph.D. Program in Engineering Science,
707 Wu Fu Road, Section 2, Hsinchu, 30012, Taiwan

E-mail: ^a nefedova@imach.uran.ru, ^b lfs@imach.uran.ru, ^c kazakov@icc.ru, ^d mglee@chu.edu.tw

Received 27.12.2022, after completion – 18.07.2023.

Accepted for publication 16.08.2023.

The paper deals with a heat wave motion problem for a degenerate second-order nonlinear parabolic equation with power nonlinearity. The considered boundary condition specifies in a plane the motion equation of the circular zero front of the heat wave. A new numerical-analytical algorithm for solving the problem is proposed. A solution is constructed step-by-step in time using difference time discretization. At each time step, a boundary value problem for the Poisson equation corresponding to the original equation at a fixed time is considered. This problem is, in fact, an inverse Cauchy problem in the domain whose initial boundary is free of boundary conditions and two boundary conditions (Neumann and Dirichlet) are specified on a current boundary (heat wave). A solution of this problem is constructed as the sum of a particular solution to the nonhomogeneous Poisson equation and a solution to the corresponding Laplace equation satisfying the boundary conditions. Since the inhomogeneity depends on the desired function and its derivatives, an iterative solution procedure is used. The particular solution is sought by the collocation method using inhomogeneity expansion in radial basis functions. The inverse Cauchy problem for the Laplace equation is solved by the null field method as applied to a circular domain with a circular hole. This method is used for the first time to solve such problem. The calculation algorithm is optimized by parallelizing the computations. The parallelization of the computations allows us to realize effectively the algorithm on high performance computing servers. The algorithm is implemented as a program, which is parallelized by using the OpenMP standard for the C++ language, suitable for calculations with parallel cycles. The effectiveness of the algorithm and the robustness of the program are tested by the comparison of the calculation results with the known exact solution as well as with the numerical solution obtained earlier by the authors with the use of the boundary element method. The implemented computational experiment shows good convergence of the iteration processes and higher calculation accuracy of the proposed new algorithm than of the previously developed one. The solution analysis allows us to select the radial basis functions which are most suitable for the proposed algorithm.

Keywords: nonlinear parabolic equation, heat equation, null field method, collocation method, radial basis functions, boundary element method

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2023, vol. 15, no. 6, pp. 1449–1467 (Russian).

1. Введение

Рассмотрим нелинейное (квазилинейное) параболическое уравнение [Ладыженская, Солонников, Уральцева, 1967] теплопроводности (диффузии, фильтрации):

$$T_t = \operatorname{div}(K(T)\nabla T). \quad (1)$$

Здесь $T = T(t, \mathbf{x})$ — искомая функция: температура, концентрация, давление (в зависимости от рассматриваемого контекста), которая зависит от времени t и вектора пространственных координат \mathbf{x} ; div и ∇ — операторы дивергенции и градиента по пространственным переменным. Нелинейность уравнения обусловлена степенной зависимостью коэффициента переноса K от искомой функции.

Уравнение (1) встречается в литературе в различных вариантах, однако наиболее распространенным [Зельдович, Райзер, 1966] является случай $K(T) = \alpha T^\sigma$, где $\alpha > 0$ и $\sigma > 0$ — константы. В зарубежной литературе уравнение (1) при степенном виде коэффициента переноса называют the porous medium equation (уравнение пористой среды) [Vazquez, 2007]. Уравнение (1) посредством замены $w = K(T) = \alpha T^\sigma$ приводится к виду

$$w_t = w\Delta w + \frac{1}{\sigma}(\nabla w)^2. \quad (2)$$

Проблема построения решений уравнения (2) и будет являться далее основным объектом рассмотрения. Можно без труда убедиться, что здесь имеет место тривиальное решение $w \equiv 0$. Уравнения (1) и (2) эквивалентны при $T \geq 0$, поскольку функция $w = \alpha T^\sigma$, $\alpha > 0$, $\sigma > 0$, является в этом случае строго монотонной. Забегая вперед, отметим, что в статье далее рассматриваются только неотрицательные и непрерывные решения, поэтому возможное появление слабых разрывов, на которых единственность при отрицательных значениях искомой функции может нарушаться, не является препятствием для установления взаимно однозначного соответствия между решениями уравнений (1) и (2).

Поскольку в (2) множитель перед лапласианом равен w , на многообразии, где искомая функция обращается в нуль, параболический тип уравнения (2) вырождается. Это приводит к возникновению интересного класса решений, которые описывают возмущения, распространяющиеся по нулевому фону с конечной скоростью. Такие решения называют тепловыми (диффузионными) волнами. Известны они с середины прошлого века [Зельдович, Компанец, 1950]. В дальнейшем подобные математические объекты исследовались в научной школе ак. А. А. Самарского [Самарский и др., 1987] в контексте отыскания автомодельных решений указанного вида, а также ак. А. Ф. Сидоровым [Сидоров, 2001] и его учениками с точки зрения построения разложений в степенные ряды [Филимонов, 2003] и доказательства теорем существования и единственности в классе кусочно-аналитических функций. Большинство опубликованных работ при этом касаются плоскосимметричного случая, случаи двух и более пространственных переменных рассматриваются реже, однако подобные работы существуют. Так, в работе [Казakov, Кузнецов, 2018] доказана теорема существования и единственности решения задачи об иницировании тепловой волны в случае двух пространственных переменных при граничных условиях вида

$$w|_{b(t, \mathbf{x})=0} = f(t, \mathbf{x}), \quad (3)$$

где $b(t, \mathbf{x}) = 0$ — гиперповерхность в пространстве рассматриваемой размерности, $f(0, \mathbf{x}) = 0$, в частности, возможен случай $f(t, \mathbf{x}) \equiv 0$. Доказательство, как и в одномерных случаях, является конструктивным, аналитическое решение строится в виде кратного степенного ряда.

К сожалению, такие решения являются локальными по времени, причем оценить радиусы сходимости рядов удастся только в специальных частных случаях. Классическое решение при

этом может существовать и за пределами малой окрестности начального момента времени. В качестве инструмента, позволяющего исследовать их свойства на заданном временном промежутке, могут использоваться точные решения. Квазиодномерные обобщенно-автомодельные точные решения, зависящие от расстояния до некоторой оси или точки (осесимметричные и сферически симметричные), были предложены и исследованы в работах авторов данной статьи [Казаков, Орлов, Орлов, 2018; Казаков, 2019]. Аналогичные решения при несколько иных способах задания пространственной переменной, однако при сохранении квазиодномерности, были позднее приведены в работе [Kosov, Semenov, 2022].

Точные решения позволяют рассмотреть только частные случаи и заведомо не могут быть использованы для исследования решений (2), (3) при $b(t, \mathbf{x})$ и $f(t, \mathbf{x})$ общего вида, в отличие, например, от универсальных вычислительных алгоритмов. Авторы уже около 10 лет разрабатывают численно-аналитические методы решения нелинейных параболических уравнений на заданном конечном промежутке времени [Kazakov, Spevak, 2013; Kazakov, Spevak, 2016; Казаков, Нефедова, Спевак, 2019; Kazakov et al., 2020]. Предложенные в этих работах алгоритмы основаны на методе граничных элементов (МГЭ) [Brebbia, Telles, Wrobel, 1984] и методе двойственной взаимности (МДВ) [Nardini, Brebbia, 1983] при разностной аппроксимации по времени. В работе [Спевак, Нефедова, 2022] предложен алгоритм решения двумерной задачи с использованием МГЭ и метода коллокаций с разложением по системе радиальных базисных функций (РБФ) [Powell, 1992; Golberg, Chen, Bowman, 1999; Chen, Fu, Chen, 2013].

В данной работе вместо МГЭ используется метод нулевого поля (МНП) [Li et al., 2012]. Это позволило заметно повысить точность решения и исключить некорректность, которую дает МГЭ вблизи границы рассматриваемой области. Отметим, что для решения подобных задач МНП применяется впервые, ранее он использовался при решении краевых задач для уравнения Лапласа в двумерных неодносвязных областях [Lee et al., 2021; Li et al., 2021; Li et al., 2022].

Предложенные в работах [Kazakov, Spevak, 2013; Kazakov, Spevak, 2016; Казаков, Нефедова, Спевак, 2019; Kazakov et al., 2020; Спевак, Нефедова, 2022] численные алгоритмы, основанные на МГЭ, МДВ и методе коллокаций, были распараллелены и программно реализованы. Алгоритмы на основе метода нулевого поля ранее не имели параллельной реализации. Однако благодаря возможности независимого расчета элементов матрицы системы линейных алгебраических уравнений, к решению которой сводится МНП, его реализация может быть распараллелена, что и было выполнено в данной работе.

2. Постановка задачи

Рассмотрим задачу (2), (3) в случае двух пространственных переменных, когда $f(t, \mathbf{x}) \equiv 0$. В этом случае граничное условие задает в каждый момент времени положение фронта тепловой (диффузионной) волны:

$$w|_{b(t, \mathbf{x})=0} = 0, \quad (4)$$

где $\mathbf{x}(x, y)$ — точка на плоскости, уравнение $b(t, \mathbf{x}) = 0$ в каждый момент времени определяет нулевой фронт тепловой волны $S^{(t)}$ — замкнутую гладкую линию, ограничивающую область $V^{(t)}$, содержащую начало координат. Предполагается, что если $t_1 < t_2$, то $V^{(t_1)} \subset V^{(t_2)}$. Задача состоит в определении функции $w = w(t, \mathbf{x})$ в области $t \in [0, t_*]$, $\mathbf{x} \in \Omega^{(t)}$, где $\Omega^{(t)}$ — область, ограниченная границами $S^{(0)}$ и $S^{(t)}$.

При выполнении условия (3) справедливо соотношение [Kazakov et al., 2020]

$$q|_{b(t, \mathbf{x})=0} = \frac{\sigma b_t(t, \mathbf{x})}{\sqrt{b_x^2(t, \mathbf{x}) + b_y^2(t, \mathbf{x})}}, \quad (5)$$

где $q = \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}}$ — тепловой (диффузионный) поток, \mathbf{n} — вектор внешней нормали к границе рассматриваемой области в момент времени t .

Пусть

$$b(t, \mathbf{x}) = (x - c_x(t))^2 + (y - c_y(t))^2 - r(t)^2. \tag{6}$$

Здесь $c_x(0) = c_y(0)$, $r(0) = R_1 > 0$, $r(t) \geq 0$, $\sqrt{c_x^2(t) + c_y^2(t)} + R_1 < r(t)$. Для определенности рассматриваем случай $r'(t) \geq 0$.

Численное решение задачи (2), (4), (5) будем строить по шагам по времени. На каждом шаге $t_k = kh$ будем рассматривать в области $\Omega^{(t_k)}$ уравнение Пуассона, соответствующее (2):

$$\Delta U = \frac{1}{U} \left(U_t - \frac{(\nabla U)^2}{\sigma} \right), \tag{7}$$

где $U(\mathbf{x}) = w(t_k, \mathbf{x})$. Если фронт тепловой волны задан уравнением (6), то область решения задачи $\Omega^{(t_k)}$ будет ограничена двумя окружностями: $S^{(0)}$ с центром в начале координат и радиусом R_1 и $S^{(t_k)}$ с центром $C(c_x(t_k), c_y(t_k))$ и радиусом $R = r(t_k)$. Далее при описании решения на произвольном шаге t_k избавимся для простоты от индекса k и будем обозначать эти окружности соответственно как S_{R_1} и S_R (рис. 1). Окружность S_{R_1} имеет центр в начале координат. У окружности S_R центр находится в точке (x_1, y_1) , $x_1 = c_x(t_k)$, $y_1 = c_y(t_k)$. Обозначим через (ρ, θ) полярные координаты в системе с началом координат в точке (x_1, y_1) , а через $(\bar{\rho}, \bar{\theta})$ — в системе с началом координат в точке $(0, 0)$. Они связаны следующими соотношениями:

$$\rho = \sqrt{(\bar{\rho} \cos \bar{\theta} - x_1)^2 + (\bar{\rho} \sin \bar{\theta} - y_1)^2}, \quad \text{tg } \theta = \frac{\bar{\rho} \sin \bar{\theta} - y_1}{\bar{\rho} \cos \bar{\theta} - x_1}, \tag{8}$$

$$\bar{\rho} = \sqrt{(\rho \cos \theta + x_1)^2 + (\rho \sin \theta + y_1)^2}, \quad \text{tg } \bar{\theta} = \frac{\rho \sin \theta + y_1}{\rho \cos \theta + x_1}. \tag{9}$$

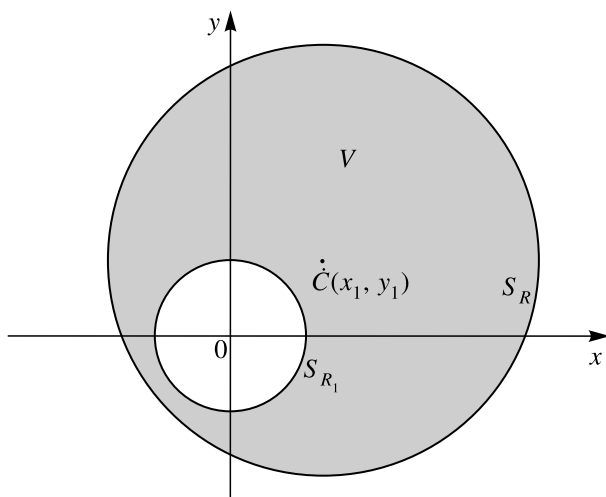


Рис. 1. Область решения задачи (7), (10), (11)

Итак, мы имеем круговую область с круговым отверстием, которую обозначим как V (рис. 1). Внешняя граница области — окружность S_R , внутренняя граница — окружность S_{R_1} . В этой области нужно найти решение обратной задачи Коши для уравнения (7) с граничными

условиями

$$U|_{\mathbf{x} \in S_R} = 0, \quad (10)$$

$$Q|_{\mathbf{x} \in S_R} = \frac{\partial U}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\mathbf{x} \in S_R} = \frac{\sigma b_t}{|\nabla b|}. \quad (11)$$

Представим решение задачи (7), (10), (11) в виде суммы двух функций:

$$U(\mathbf{x}) = v(\mathbf{x}) + u(\mathbf{x}), \quad (12)$$

где $v(\mathbf{x})$ — частное решение уравнения (7), а $u(\mathbf{x})$ — решение соответствующей обратной задачи Коши для уравнения Лапласа:

$$\Delta u = 0, \quad (13)$$

$$u|_{\mathbf{x} \in S^{(t_k)}} = -v|_{\mathbf{x} \in S^{(t_k)}}, \quad (14)$$

$$q|_{\mathbf{x} \in S_R} = \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\mathbf{x} \in S_R} = \frac{\sigma b_t}{|\nabla b|} - \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}}. \quad (15)$$

Задачу будем решать итерационно. Полагая $v^{(0)} \equiv 0$, имеем следующую итерационную процедуру:

$$\Delta u^{(n)} = 0, \quad (16)$$

$$u^{(n)}|_{\mathbf{x} \in S_R} = -v^{(n)}, \quad (17)$$

$$q^{(n)}|_{\mathbf{x} \in S_R} = \frac{\sigma b_t}{|\nabla b|} - \frac{\partial v^{(n)}}{\partial \mathbf{n}}, \quad (18)$$

$$U^{(n)} = v^{(n)} + u^{(n)}, \quad (19)$$

$$\Delta v^{(n+1)} = \frac{1}{U^{(n)}} \left(U_t^{(n)} - \frac{(\nabla U^{(n)})^2}{\sigma} \right). \quad (20)$$

3. Решение обратной задачи Коши с использованием МНП

Для решения задачи (16)–(18) на каждой итерации применим метод нулевого поля [Li et al., 2012]. В его основе лежит разложение искомой функции и потока на круговых границах рассматриваемой области в тригонометрические ряды Фурье. Отметим, что до сих пор МНП рассматривался только для решения задач с двумя граничными условиями, типа Дирихле или Неймана, заданными на разных границах области (по одному условию на окружностях S_{R_1} , S_{R_2} , см. рис. 1). В задаче (16)–(18) оба условия заданы на границе S_R , а S_{R_1} свободна от граничных условий. Таким образом, мы имеем обратную задачу Коши, для решения которой МНП применяется впервые.

На внутренней границе S_{R_1} разложение искомых функций $u^{(n)}$ и $q^{(n)}$ в ряды Фурье представим в виде

$$u^{(n)} = \bar{a}_0^{(n)} + \sum_{k=1}^N \left(\bar{a}_k^{(n)} \cos k\bar{\theta} + \bar{b}_k^{(n)} \sin k\bar{\theta} \right), \quad (21)$$

$$q^{(n)} = \bar{p}_0^{(n)} + \sum_{k=1}^N \left(\bar{p}_k^{(n)} \cos k\bar{\theta} + \bar{q}_k^{(n)} \sin k\bar{\theta} \right). \quad (22)$$

На внешней границе S_R эти функции заданы граничными условиями (17), (18); разложим их в ряды Фурье:

$$u^{(n)} = a_0^{(n)} + \sum_{k=1}^N (a_k^{(n)} \cos k\theta + b_k^{(n)} \sin k\theta), \tag{23}$$

$$q^{(n)} = p_0^{(n)} + \sum_{k=1}^N (p_k^{(n)} \cos k\theta + q_k^{(n)} \sin k\theta). \tag{24}$$

В (21)–(24) $\bar{a}_k^{(n)}, \bar{b}_k^{(n)}, \bar{p}_k^{(n)}, \bar{q}_k^{(n)}$ — неизвестные коэффициенты ($4N + 2$ коэффициента), $a_k^{(n)}, b_k^{(n)}, p_k^{(n)}, q_k^{(n)}$ — коэффициенты, которые можно найти по известным формулам. Отметим, что при решении обратной задачи Коши методом нулевого поля число слагаемых N в разложениях на S_R нужно взять равным числу слагаемых на S_{R_1} . Только в этом случае система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), получаемая в результате применения МНП, получится определенной.

МНП основан на следующем виде формулы Грина:

$$\int_{S_R \cup S_{R_1}} [q^{(n)}(\mathbf{y})U^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - u^{(n)}(\mathbf{y})Q^*(\mathbf{x}, \mathbf{y})] dS(\mathbf{y}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \bar{V}, \tag{25}$$

где $U^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \ln |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ — фундаментальное решение уравнения Лапласа, $Q^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\partial U^*(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}}$, \bar{V} — дополнение области V , т. е. точка \mathbf{x} лежит вне области.

Следуя [Li et al., 2012], рассмотрим точки $\mathbf{x} = (x, y) = (\rho, \theta)$ и $\mathbf{y} = (\xi, \eta) = (r, \varphi)$. Разложения в ряд Фурье функций $U^*(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ и $Q^*(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ имеют вид [Градштейн, Рыжик, 1963; Abramowitz, Stegun, 1964; Li, 2009]

$$U^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{cases} U^i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \ln r - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \left(\frac{\rho}{r}\right)^m \cos m(\theta - \varphi), & \rho < r, \\ U^e(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \ln \rho - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \left(\frac{r}{\rho}\right)^m \cos m(\theta - \varphi), & \rho > r, \end{cases} \tag{26}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial U^i(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial r} &= \frac{1}{r} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{\rho^m}{r^{m+1}}\right) \cos m(\theta - \varphi), & \rho < r, \\ \frac{\partial U^e(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial r} &= - \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{r^{m-1}}{\rho^m}\right) \cos m(\theta - \varphi), & \rho > r. \end{aligned} \tag{27}$$

Если точка $\mathbf{y} = (\xi, \eta) = (r, \varphi)$ лежит на границе S_R , то $Q^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\partial U^*(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial U^*(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial r}$, а если $\mathbf{y} \in S_{R_1}$, то $Q^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\partial U^*(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}} = -\frac{\partial U^*(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial r}$.

Пусть точка $\mathbf{x} \notin V \cup S_R \cup S_{R_1}$. Рассмотрим два случая ее возможного положения на плоскости.

I. Точка $\mathbf{x} = (x, y) = (\rho, \theta)$ лежит вне круга, образованного окружностью S_R . Тогда для любой точки $\mathbf{y} = (\xi, \eta) = (r, \varphi) \in S_R$ справедливо $\rho > r = R$.

Используя разложения (23), (24), (26)–(27), проинтегрируем по границе S_R слагаемые из подынтегрального выражения в формуле Грина (25):

$$\begin{aligned} & \int_{S_R} q^{(n)}(\mathbf{y})U^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dS(\mathbf{y}) = \\ & = \int_0^{2\pi} \left[p_0^{(n)} + \sum_{k=1}^N (p_k^{(n)} \cos k\theta + q_k^{(n)} \sin k\theta) \right] \left[\ln \rho - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \left(\frac{r}{\rho} \right)^m \cos m(\theta - \varphi) \right] R d\varphi = \quad (28) \\ & = (2\pi R \ln \rho) p_0^{(n)} - \pi R \sum_{k=1}^N \frac{1}{k} \left(\frac{R}{\rho} \right)^k (p_k^{(n)} \cos k\theta + q_k^{(n)} \sin k\theta), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int_{S_R} u^{(n)}(\mathbf{y})Q^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dS(\mathbf{y}) = \\ & = \int_0^{2\pi} \left[a_0^{(n)} + \sum_{k=1}^N (a_k^{(n)} \cos k\theta + b_k^{(n)} \sin k\theta) \right] \left[- \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{r^{m-1}}{\rho^m} \right) \cos m(\theta - \varphi) \right] R d\varphi = \quad (29) \\ & = -\pi R \sum_{k=1}^N \frac{R^{k-1}}{\rho^k} (a_k^{(n)} \cos k\theta + b_k^{(n)} \sin k\theta). \end{aligned}$$

Пусть теперь $\mathbf{y} = (\xi, \eta) = (r, \varphi) \in S_{R_1}$. Тогда $\rho > r = R_1$, и, используя разложения (21), (22), (26), (27), аналогично (28), (29) получим следующие соотношения для интегралов по границе S_{R_1} :

$$\int_{S_{R_1}} q^{u(n)}(\mathbf{y})U^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dS(\mathbf{y}) = (2\pi R_1 \ln \bar{\rho}) \bar{p}_0^{(n)} - \pi R_1 \sum_{k=1}^N \frac{1}{k} \left(\frac{R_1}{\bar{\rho}} \right)^k (\bar{p}_k^{(n)} \cos k\bar{\theta} + \bar{q}_k^{(n)} \sin k\bar{\theta}), \quad (30)$$

$$\int_{S_{R_1}} u^{(n)}(\mathbf{y})Q^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dS(\mathbf{y}) = \pi R_1 \sum_{k=1}^N \frac{R_1^{k-1}}{\bar{\rho}^k} (\bar{a}_k^{(n)} \cos k\bar{\theta} + \bar{b}_k^{(n)} \sin k\bar{\theta}). \quad (31)$$

Подставляя (28)–(31) в соотношение (25), получим первое уравнение МНП:

$$\begin{aligned} & -\pi R_1 \sum_{k=1}^N \frac{R_1^{k-1}}{\bar{\rho}^k} (\bar{a}_k^{(n)} \cos k\bar{\theta} + \bar{b}_k^{(n)} \sin k\bar{\theta}) + (2\pi R_1 \ln \bar{\rho}) \bar{p}_0^{(n)} - \pi R_1 \sum_{k=1}^N \frac{1}{k} \left(\frac{R_1}{\bar{\rho}} \right)^k (\bar{p}_k^{(n)} \cos k\bar{\theta} + \bar{q}_k^{(n)} \sin k\bar{\theta}) = \\ & = -\pi R \sum_{k=1}^N \frac{R^{k-1}}{\rho^k} (a_k^{(n)} \cos k\theta + b_k^{(n)} \sin k\theta) - (2\pi R \ln \rho) p_0^{(n)} + \pi R \sum_{k=1}^N \frac{1}{k} \left(\frac{R}{\rho} \right)^k (p_k^{(n)} \cos k\theta + q_k^{(n)} \sin k\theta). \quad (32) \end{aligned}$$

II. Точка $\mathbf{x} = (\bar{\rho}, \bar{\theta})$ лежит внутри окружности S_{R_1} . Тогда для любой точки $\mathbf{y} = (\bar{r}, \bar{\varphi}) \in S_R \cup S_{R_1}$ справедливо $\bar{\rho} < \bar{r} = R_1$.

В этом случае, используя разложения (21)–(24), (26), (27), получим

$$\int_{S_R} q^{u(n)}(\mathbf{y})U^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dS(\mathbf{y}) = (2\pi R \ln R) p_0^{(n)} - \pi R \sum_{k=1}^N \frac{1}{k} \left(\frac{\rho}{R} \right)^k (p_k^{(n)} \cos k\theta + q_k^{(n)} \sin k\theta), \quad (33)$$

$$\int_{S_R} u^{(n)}(\mathbf{y})Q^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dS(\mathbf{y}) = 2\pi a_0^{(n)} + \pi R \sum_{k=1}^N \frac{\rho^k}{R^{k+1}} (a_k^{(n)} \cos k\theta + b_k^{(n)} \sin k\theta), \quad (34)$$

$$\int_{S_{R_1}} q^{(n)}(\mathbf{y}) U^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dS(\mathbf{y}) = (2\pi R_1 \ln R_1) \bar{p}_0^{(n)} - \pi R_1 \sum_{k=1}^N \frac{1}{k} \left(\frac{\bar{\rho}}{R_1} \right)^k \left(\bar{p}_k^{(n)} \cos k\bar{\theta} + \bar{q}_k^{(n)} \sin k\bar{\theta} \right), \quad (35)$$

$$\int_{S_{R_1}} u^{(n)}(\mathbf{y}) Q^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dS(\mathbf{y}) = -2\pi \bar{a}_0^{(n)} - \pi R_1 \sum_{k=1}^N \frac{\bar{\rho}^k}{R_1^{k+1}} \left(\bar{a}_k^{(n)} \cos k\bar{\theta} + \bar{b}_k^{(n)} \sin k\bar{\theta} \right). \quad (36)$$

Подставляя (33)–(36) в соотношение (25), получим второе уравнение МНП:

$$\begin{aligned} & 2\pi \bar{a}_0^{(n)} + \pi R_1 \sum_{k=1}^N \frac{\bar{\rho}^k}{R_1^{k+1}} \left(\bar{a}_k^{(n)} \cos k\bar{\theta} + \bar{b}_k^{(n)} \sin k\bar{\theta} \right) + (2\pi R_1 \ln R_1) \bar{p}_0^{(n)} - \\ & - \pi R_1 \sum_{k=1}^N \frac{1}{k} \left(\frac{\bar{\rho}}{R_1} \right)^k \left(\bar{p}_k^{(n)} \cos k\bar{\theta} + \bar{q}_k^{(n)} \sin k\bar{\theta} \right) = 2\pi a_0^{(n)} + \pi R \sum_{k=1}^N \frac{\rho^k}{R^{k+1}} \left(a_k^{(n)} \cos k\theta + b_k^{(n)} \sin k\theta \right) - \\ & - (2\pi R \ln R) p_0^{(n)} + \pi R \sum_{k=1}^N \frac{1}{k} \left(\frac{\rho}{R} \right)^k \left(p_k^{(n)} \cos k\theta + q_k^{(n)} \sin k\theta \right). \quad (37) \end{aligned}$$

В полученных уравнениях (32), (37) $4N + 2$ неизвестных коэффициентов, входящих в разложения (21), (22). Подставив координаты $2N + 1$ точек коллокации, соответствующих случаю I, в уравнение (32) и такое же число точек коллокации, соответствующих случаю II, в уравнение (37), получим систему $4N + 2$ линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) для определения неизвестных $\bar{a}_k^{(n)}, \bar{b}_k^{(n)}, \bar{p}_k^{(n)}, \bar{q}_k^{(n)}$. Возьмем точки коллокации следующего вида:

- I) $x_m(\rho_m, \theta_m), \rho_m = R + \varepsilon, \theta_m = m\Delta\theta, m = 0, \dots, 2N, \varepsilon > 0, \Delta\theta = \frac{2\pi}{2N+1}$;
- II) $\bar{x}_m(\bar{\rho}_m, \bar{\theta}_m), \bar{\rho}_m = R_1 - \bar{\varepsilon}, \bar{\theta}_m = m\Delta\bar{\theta}, m = 0, \dots, 2N, 0 < \bar{\varepsilon} < R_1, \Delta\bar{\theta} = \frac{2\pi}{2N+1}$.

Решение полученной СЛАУ даст нам значения $\bar{a}_k^{(n)}, \bar{b}_k^{(n)}, \bar{p}_k^{(n)}, \bar{q}_k^{(n)}$, что позволит найти решение задачи (16)–(18) в области V через тождество Грина, записанное для внутренней точки области:

$$u^{(n)}(\mathbf{x}) = u^{(n)}(\rho, \theta) = -\frac{1}{2\pi} \left(\int_{S_R \cup S_{R_1}} [q^{(n)}(\mathbf{y}) U^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - u^{(n)}(\mathbf{y}) Q^*(\mathbf{x}, \mathbf{y})] dS(\mathbf{y}) \right). \quad (38)$$

Подставляя разложения (21)–(24), получим очередную итерацию решения обратной задачи Коши:

$$\begin{aligned} u^{(n)}(\rho, \theta) = u^{(n)}(\bar{\rho}, \bar{\theta}) = & a_0^{(n)} - R \ln R p_0^{(n)} - R_1 \ln \bar{\rho} \bar{p}_0^{(n)} + \\ & + \frac{R}{2} \sum_{k=1}^N \frac{\rho^k}{R^{k+1}} \left(a_k^{(n)} \cos k\theta + b_k^{(n)} \sin k\theta \right) + \frac{R}{2} \sum_{k=1}^N \frac{1}{k} \left(\frac{\rho}{R} \right)^k \left(p_k^{(n)} \cos k\theta + q_k^{(n)} \sin k\theta \right) + \\ & + \frac{R_1}{2} \sum_{k=1}^N \frac{R_1^{k-1}}{\bar{\rho}^k} \left(\bar{a}_k^{(n)} \cos k\bar{\theta} + \bar{b}_k^{(n)} \sin k\bar{\theta} \right) + \frac{R_1}{2} \sum_{k=1}^N \frac{1}{k} \left(\frac{R_1}{\bar{\rho}} \right)^k \left(\bar{p}_k^{(n)} \cos k\bar{\theta} + \bar{q}_k^{(n)} \sin k\bar{\theta} \right). \quad (39) \end{aligned}$$

Здесь координаты (ρ, θ) и $(\bar{\rho}, \bar{\theta})$ связаны соотношениями (8), (9).

Отметим, что в работе [Li et al., 2012] показано, что уравнения МНП справедливы при $\varepsilon = \bar{\varepsilon} = 0$. Таким образом, точки коллокации могут быть расположены на границе области V . Далее мы будем рассматривать именно такие точки коллокации, что существенно упрощает решение задачи (7), (10), (11) на каждом шаге решения исходной задачи (2), (4).

4. Нахождение частного решения уравнения Пуассона

Частное решение $v^{(n+1)}$ ищется с помощью разложения правой части уравнения (20) по системе РБФ:

$$\frac{1}{U^{(n)}} \left(U_i^{(n)} - \frac{(\nabla U^{(n)})^2}{\sigma} \right) = \sum_{i=1}^M \alpha_i^{(n+1)} f_i(\mathbf{x}), \quad (40)$$

где для каждой РБФ f_i существует такая функция \widehat{u}_i , что $f_i = \Delta \widehat{u}_i$. Значение f_i зависит от расстояния между текущей точкой \mathbf{x} и точкой коллокации ξ_i , лежащей в области V или на ее границе: $f_i(\mathbf{x}) = f_i(\|\mathbf{x} - \xi_i\|)$. Коэффициенты $\alpha_i^{(n+1)}$ определяются из решения системы линейных алгебраических уравнений:

$$\frac{1}{U^{(n)}} \left(U_i^{(n)} - \frac{(\nabla U^{(n)})^2}{\sigma} \right) \Big|_{\mathbf{x}=\xi_j} = \sum_{i=1}^M \alpha_i^{(n+1)} f_i(\xi_j), \quad j = 1, \dots, M. \quad (41)$$

Тогда решение уравнения (20) имеет следующий вид:

$$v^{(n+1)} = \sum_{i=1}^M \alpha_i^{(n+1)} \widehat{u}_i(\xi). \quad (42)$$

Расположение точек коллокации имеет важное значение. Они должны находиться в граничных и внутренних точках области V . При этом в качестве граничных точек коллокации удобно взять те же точки x_m и \bar{x}_m , $m = 0, \dots, 2N$, при $\varepsilon = \bar{\varepsilon} = 0$, что и при решении задачи (16)–(18).

Опишем теперь процедуру вычисления левых частей уравнений (41). Поскольку, в соответствии с (19),

$$U^{(n)} = v^{(n)} + u^{(n)}, \quad (43)$$

то

$$\begin{aligned} (\nabla U^{(n)})^2 &= (\nabla v^{(n)} + \nabla u^{(n)})^2 = \left(\frac{\partial v^{(n)}}{\partial x} + \frac{\partial u^{(n)}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v^{(n)}}{\partial y} + \frac{\partial u^{(n)}}{\partial y} \right)^2 = \\ &= (\nabla v^{(n)})^2 + (\nabla u^{(n)})^2 + 2\nabla v^{(n)} \cdot \nabla u^{(n)}, \end{aligned} \quad (44)$$

где

$$\nabla v^{(n)} = \left(\sum_{i=1}^M \alpha_i^{(n)} \frac{\partial \widehat{u}_i(\mathbf{x})}{\partial x}, \sum_{i=1}^M \alpha_i^{(n)} \frac{\partial \widehat{u}_i(\mathbf{x})}{\partial y} \right), \quad (45)$$

$$(\nabla v^{(n)})^2 = \left(\sum_{i=1}^M \alpha_i^{(n)} \frac{\partial \widehat{u}_i(\mathbf{x})}{\partial x} \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^M \alpha_i^{(n)} \frac{\partial \widehat{u}_i(\mathbf{x})}{\partial y} \right)^2, \quad (46)$$

$$\nabla u^{(n)}(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial u^{(n)}}{\partial x}, \frac{\partial u^{(n)}}{\partial y} \right), \quad (47)$$

$$(\nabla u^{(n)}(\mathbf{x}))^2 = \left(\frac{\partial u^{(n)}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u^{(n)}}{\partial y} \right)^2. \quad (48)$$

Функции \widehat{u}_i для каждой системы РБФ известны, поэтому найти $\nabla v^{(n)}$ достаточно просто. Найдем частные производные решения обратной задачи Коши (39). Представим его в виде

$$u^{(n)}(\mathbf{x}) = u_1^{(n)}(\rho, \theta) + u_2^{(n)}(\bar{\rho}, \bar{\theta}). \quad (49)$$

Здесь

$$u_1^{(n)}(\rho, \theta) = a_0^{(n)} - R \ln R \rho_0^{(n)} + \frac{R}{2} \sum_{k=1}^N \frac{\rho^k}{R^{k+1}} (a_k^{(n)} \cos k\theta + b_k^{(n)} \sin k\theta) + \frac{R}{2} \sum_{k=1}^N \frac{1}{k} \left(\frac{\rho}{R}\right)^k (p_k^{(n)} \cos k\theta + q_k^{(n)} \sin k\theta), \quad (50)$$

$$u_2^{(n)}(\bar{\rho}, \bar{\theta}) = -R_1 \ln \bar{\rho} \bar{\rho}_0^{(n)} + \frac{R_1}{2} \sum_{k=1}^N \frac{R_1^{k-1}}{\bar{\rho}^k} (\bar{a}_k^{(n)} \cos k\bar{\theta} + \bar{b}_k^{(n)} \sin k\bar{\theta}) + \frac{R_1}{2} \sum_{k=1}^N \frac{1}{k} \left(\frac{R_1}{\bar{\rho}}\right)^k (\bar{p}_k^{(n)} \cos k\bar{\theta} + \bar{q}_k^{(n)} \sin k\bar{\theta}). \quad (51)$$

Тогда

$$\frac{\partial u^{(n)}(\mathbf{x})}{\partial x} = \frac{\partial u_1^{(n)}(\rho, \theta)}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial u_1^{(n)}(\rho, \theta)}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial u_2^{(n)}(\bar{\rho}, \bar{\theta})}{\partial \bar{\rho}} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x} + \frac{\partial u_2^{(n)}(\bar{\rho}, \bar{\theta})}{\partial \bar{\theta}} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x}, \quad (52)$$

$$\frac{\partial u^{(n)}(\mathbf{x})}{\partial y} = \frac{\partial u_1^{(n)}(\rho, \theta)}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial u_1^{(n)}(\rho, \theta)}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y} + \frac{\partial u_2^{(n)}(\bar{\rho}, \bar{\theta})}{\partial \bar{\rho}} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial y} + \frac{\partial u_2^{(n)}(\bar{\rho}, \bar{\theta})}{\partial \bar{\theta}} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial y}. \quad (53)$$

Поскольку для введенных полярных систем координат справедливы соотношения

$$x = x_1 + \rho \cos \theta, \quad y = y_1 + \rho \sin \theta, \quad (54)$$

$$x = \bar{\rho} \cos \bar{\theta}, \quad y = \bar{\rho} \sin \bar{\theta}, \quad (55)$$

то

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \cos \theta, \quad \frac{\partial \rho}{\partial y} = \sin \theta, \quad \frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{\sin \theta}{\rho}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\cos \theta}{\rho}, \quad (56)$$

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x} = \cos \bar{\theta}, \quad \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial y} = \sin \bar{\theta}, \quad \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x} = -\frac{\sin \bar{\theta}}{\bar{\rho}}, \quad \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial y} = \frac{\cos \bar{\theta}}{\bar{\rho}}. \quad (57)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1^{(n)}(\rho, \theta)}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial u_1^{(n)}(\rho, \theta)}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} &= \frac{R}{2} \sum_{k=1}^N k \frac{\rho^{k-1}}{R^{k+1}} \cos \theta (a_k^{(n)} \cos k\theta + b_k^{(n)} \sin k\theta) - \\ &- \frac{R}{2} \sum_{k=1}^N k \frac{\rho^{k-1}}{R^{k+1}} \sin \theta (-a_k^{(n)} \sin k\theta + b_k^{(n)} \cos k\theta) + \frac{R}{2} \sum_{k=1}^N \frac{\rho^{k-1}}{R^k} \cos \theta (p_k^{(n)} \cos k\theta + q_k^{(n)} \sin k\theta) - \\ &- \frac{R}{2} \sum_{k=1}^N \frac{\rho^{k-1}}{R^k} \sin \theta (-p_k^{(n)} \sin k\theta + q_k^{(n)} \cos k\theta) = \frac{R}{2} \sum_{k=1}^N k \frac{\rho^{k-1}}{R^{k+1}} (a_k^{(n)} \cos[(k-1)\theta] + b_k^{(n)} \sin[(k-1)\theta]) + \\ &+ \frac{R}{2} \sum_{k=1}^N \frac{\rho^{k-1}}{R^k} (p_k^{(n)} \cos[(k-1)\theta] + q_k^{(n)} \sin[(k-1)\theta]), \end{aligned} \quad (58)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1^{(n)}(\rho, \theta)}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial u_1^{(n)}(\rho, \theta)}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y} &= \frac{R}{2} \sum_{k=1}^N k \frac{\rho^{k-1}}{R^{k+1}} \sin \theta (a_k^{(n)} \cos k\theta + b_k^{(n)} \sin k\theta) + \\ &+ \frac{R}{2} \sum_{k=1}^N k \frac{\rho^{k-1}}{R^{k+1}} \cos \theta (-a_k^{(n)} \sin k\theta + b_k^{(n)} \cos k\theta) + \frac{R}{2} \sum_{k=1}^N \frac{\rho^{k-1}}{R^k} \sin \theta (p_k^{(n)} \cos k\theta + q_k^{(n)} \sin k\theta) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{R}{2} \sum_{k=1}^N \frac{\rho^{k-1}}{R^k} \cos \theta (-p_k^{(n)} \sin k\theta + q_k^{(n)} \cos k\theta) = \frac{R}{2} \sum_{k=1}^N k \frac{\rho^{k-1}}{R^{k+1}} (-a_k^{(n)} \sin[(k-1)\theta] + b_k^{(n)} \cos[(k-1)\theta]) + \\
& + \frac{R}{2} \sum_{k=1}^N \frac{\rho^{k-1}}{R^k} (-p_k^{(n)} \sin[(k-1)\theta] + q_k^{(n)} \cos[(k-1)\theta]), \tag{59}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_2^{(n)}(\bar{\rho}, \bar{\theta})}{\partial \bar{\rho}} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x} + \frac{\partial u_2^{(n)}(\bar{\rho}, \bar{\theta})}{\partial \bar{\theta}} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x} &= -R_1 \frac{1}{\bar{\rho}} \cos \bar{\theta} \bar{p}_0^{(n)} - \frac{R_1}{2} \sum_{k=1}^N k \frac{R_1^{k-1}}{\bar{\rho}^{k+1}} \cos \bar{\theta} (a_k^{(n)} \cos k\bar{\theta} + b_k^{(n)} \sin k\bar{\theta}) - \\
& - \frac{R_1}{2} \sum_{k=1}^N k \frac{R_1^{k-1}}{\bar{\rho}^{k+1}} \sin \bar{\theta} (-a_k^{(n)} \sin k\bar{\theta} + b_k^{(n)} \cos k\bar{\theta}) - \frac{R_1}{2} \sum_{k=1}^N \frac{R_1^k}{\bar{\rho}^{k+1}} \cos \bar{\theta} (p_k^{(n)} \cos k\bar{\theta} + q_k^{(n)} \sin k\bar{\theta}) - \\
& - \frac{R_1}{2} \sum_{k=1}^N \frac{R_1^k}{\bar{\rho}^{k+1}} \sin \bar{\theta} (-p_k^{(n)} \sin k\bar{\theta} + q_k^{(n)} \cos k\bar{\theta}) = -R_1 \frac{1}{\bar{\rho}} \cos \bar{\theta} \bar{p}_0^{(n)} - \\
& - \frac{R_1}{2} \sum_{k=1}^N k \frac{R_1^{k-1}}{\bar{\rho}^{k+1}} (\bar{a}_k^{(n)} \cos[(k+1)\bar{\theta}] + \bar{b}_k^{(n)} \sin[(k+1)\bar{\theta}]) - \\
& - \frac{R_1}{2} \sum_{k=1}^N \frac{R_1^k}{\bar{\rho}^{k+1}} (\bar{p}_k^{(n)} \cos[(k+1)\bar{\theta}] + \bar{q}_k^{(n)} \sin[(k+1)\bar{\theta}]), \tag{60}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_2^{(n)}(\bar{\rho}, \bar{\theta})}{\partial \bar{\rho}} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial y} + \frac{\partial u_2^{(n)}(\bar{\rho}, \bar{\theta})}{\partial \bar{\theta}} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial y} &= -R_1 \frac{1}{\bar{\rho}} \sin \bar{\theta} \bar{p}_0^{(n)} - \frac{R_1}{2} \sum_{k=1}^N k \frac{R_1^{k-1}}{\bar{\rho}^{k+1}} \sin \bar{\theta} (a_k^{(n)} \cos k\bar{\theta} + b_k^{(n)} \sin k\bar{\theta}) + \\
& + \frac{R_1}{2} \sum_{k=1}^N k \frac{R_1^{k-1}}{\bar{\rho}^{k+1}} \cos \bar{\theta} (-a_k^{(n)} \sin k\bar{\theta} + b_k^{(n)} \cos k\bar{\theta}) - \frac{R_1}{2} \sum_{k=1}^N \frac{R_1^k}{\bar{\rho}^{k+1}} \sin \bar{\theta} (p_k^{(n)} \cos k\bar{\theta} + q_k^{(n)} \sin k\bar{\theta}) + \\
& + \frac{R_1}{2} \sum_{k=1}^N \frac{R_1^k}{\bar{\rho}^{k+1}} \cos \bar{\theta} (-p_k^{(n)} \sin k\bar{\theta} + q_k^{(n)} \cos k\bar{\theta}) = -R_1 \frac{1}{\bar{\rho}} \sin \bar{\theta} \bar{p}_0^{(n)} - \\
& - \frac{R_1}{2} \sum_{k=1}^N k \frac{R_1^{k-1}}{\bar{\rho}^{k+1}} (\bar{a}_k^{(n)} \sin[(k+1)\bar{\theta}] + \bar{b}_k^{(n)} \cos[(k+1)\bar{\theta}]) - \\
& - \frac{R_1}{2} \sum_{k=1}^N \frac{R_1^k}{\bar{\rho}^{k+1}} (\bar{p}_k^{(n)} \sin[(k+1)\bar{\theta}] + \bar{q}_k^{(n)} \cos[(k+1)\bar{\theta}]). \tag{61}
\end{aligned}$$

Итак,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u^{(n)}(\mathbf{x})}{\partial x} &= -R_1 \frac{1}{\bar{\rho}} \cos \bar{\theta} \bar{p}_0^{(n)} + \frac{R}{2} \sum_{k=1}^N k \frac{\rho^{k-1}}{R^{k+1}} (a_k^{(n)} \cos[(k-1)\theta] + b_k^{(n)} \sin[(k-1)\theta]) + \\
& + \frac{R}{2} \sum_{k=1}^N \frac{\rho^{k-1}}{R^k} (p_k^{(n)} \cos[(k-1)\theta] + q_k^{(n)} \sin[(k-1)\theta]) - \\
& - \frac{R_1}{2} \sum_{k=1}^N k \frac{R_1^{k-1}}{\bar{\rho}^{k+1}} (\bar{a}_k^{(n)} \cos[(k+1)\bar{\theta}] + \bar{b}_k^{(n)} \sin[(k+1)\bar{\theta}]) - \\
& - \frac{R_1}{2} \sum_{k=1}^N \frac{R_1^k}{\bar{\rho}^{k+1}} (\bar{p}_k^{(n)} \cos[(k+1)\bar{\theta}] + \bar{q}_k^{(n)} \sin[(k+1)\bar{\theta}]), \tag{62}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^{(n)}(\mathbf{x})}{\partial y} = & -R_1 \frac{1}{\rho} \sin \bar{\theta} \bar{p}_0^{(n)} + \frac{R}{2} \sum_{k=1}^N k \frac{\rho^{k-1}}{R^{k+1}} \left(-a_k^{(n)} \sin[(k-1)\theta] + b_k^{(n)} \cos[(k-1)\theta] \right) + \\ & + \frac{R}{2} \sum_{k=1}^N \frac{\rho^{k-1}}{R^k} \left(-p_k^{(n)} \sin[(k-1)\theta] + q_k^{(n)} \cos[(k-1)\theta] \right) - \\ & - \frac{R_1}{2} \sum_{k=1}^N k \frac{R_1^{k-1}}{\rho^{k+1}} \left(\bar{a}_k^{(n)} \sin[(k+1)\bar{\theta}] + \bar{b}_k^{(n)} \cos[(k+1)\bar{\theta}] \right) - \\ & - \frac{R_1}{2} \sum_{k=1}^N \frac{R_1^k}{\rho^{k+1}} \left(\bar{p}_k^{(n)} \sin[(k+1)\bar{\theta}] + \bar{q}_k^{(n)} \cos[(k+1)\bar{\theta}] \right). \end{aligned} \quad (63)$$

Производная по времени в левых частях уравнений (40) вычисляется, как и в работе [Спевак, Нефедова, 2022], следующим образом:

$$U_i^{(n)}(\xi_j) = \begin{cases} \frac{U^{(n)}(\xi_j) - w(t_{k-1}, \xi_j)}{h}, & \xi_i \in \Omega^{(t_{k-1})}; \\ \frac{U^{(n)}(\xi_j)}{h_j^*}, & \xi_i \notin \Omega^{(t_{k-1})}. \end{cases} \quad (64)$$

Здесь h — шаг по времени, $h_j^* = t_k - t_j^*$, t_j^* — момент времени, в который точка ξ_j принадлежит нулевому фронту, т. е.

$$b(t_j^*, \xi_j) = 0. \quad (65)$$

Итерационный процесс (16)–(20), реализованный с помощью алгоритма, описанного в §§ 3 и 4, останавливается на n -й итерации, когда значения $u^{(n-1)}$ и $u^{(n)}$ достаточно близки. В результате на шаге t_k определится функция $w(t_k, \mathbf{x}) = U^{(n)}(\mathbf{x})$, непрерывная по пространственным координатам в области $V = \Omega^{(t_k)}$ и на ее границе.

5. Программная реализация

Разработанный алгоритм был распараллелен на каждом этапе решения задачи с целью увеличения его быстродействия, эффективного исполнения на вычислительных системах параллельной архитектуры, а также повышения точности численного решения за счет возможности быстрой параллельной обработки большого числа граничных и внутренних узлов. На каждом временном шаге коэффициенты матрицы СЛАУ, построенной в результате применения МНП, вычисляются независимо друг от друга. Также эффективному распараллеливанию поддается метод LU-разложения, используемый для решения СЛАУ. Нахождение решения обратной задачи Коши во внутренних точках области также выполняется независимо, т. е. параллельно.

На базе представленного алгоритма была создана компьютерная программа. Программа написана в интегрированной среде разработки Eclipse на языке программирования C++ с использованием интерфейса OpenMP — открытого стандарта для распараллеливания программ на многопроцессорных вычислительных системах с общей памятью. Численные расчеты реализованы с использованием специальных функций из библиотек BOOST и GSL. В программе существует возможность выбора шага по времени, количества граничных и внутренних точек коллокации, вида системы РБФ.

6. Вычислительный эксперимент

В отличие от линейных задач без особенностей (см., например, [Golberg, Chen, Bowman, 1999]) для вырождающихся краевых задач для многомерных нелинейных уравнений с частными производными вообще, и для рассматриваемой здесь задачи в частности, доказать сходимость

приближенных методов решения крайне сложно (а в большинстве случаев — вообще невозможно). Тем не менее решать такие задачи необходимо, в том числе и в связи с приложениями. Поэтому следует найти методы верификации проведенных расчетов. Одним из способов решения этой проблемы является использование точных решений.

Для оценки эффективности предложенного нового алгоритма решения задачи (2), (4) был рассмотрен случай, когда симметричный нулевой фронт тепловой волны имеет форму окружности,

$$b(t, \mathbf{x}) = x^2 + y^2 - r^2(t), \quad r(t) = R_1 \left(1 + \frac{\mu t}{C}\right)^\alpha, \quad (66)$$

где $\mu = 4 + \frac{4}{\sigma}$, $\alpha = \frac{1}{2\sigma+2}$, $C > 0$ — произвольная константа.

В этом случае точное решение имеет вид [Казаков, Орлов, Орлов, 2018, с. 551]

$$u = -\frac{x^2 + y^2}{C + \mu t} + \frac{C^{k-1} R_1^2}{(C + \mu t)^k}, \quad (67)$$

где $k = \frac{4}{\mu}$.

На рис. 2 численные решения при $C = 10$, $R = 1$, $h = 0,1$, $N = 10$ для трех значений σ сравниваются с соответствующими точными решениями (67). Приведенные графики демонстрируют близость численных решений к точным.

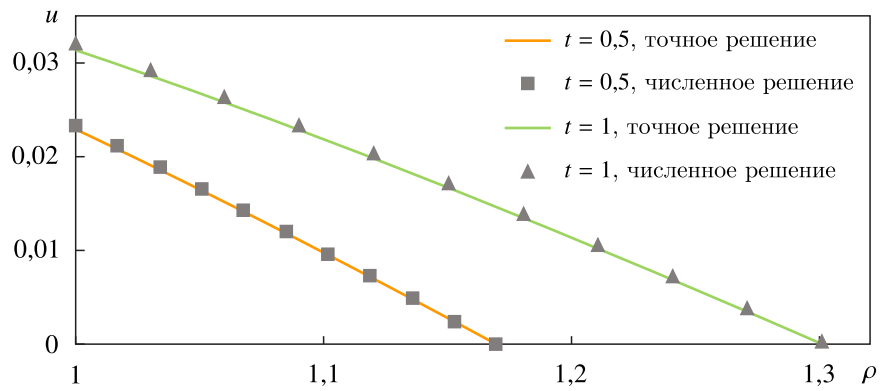
Количественный анализ точности решения был проведен при $\sigma = 3$. Во-первых, было проведено сравнение результатов расчетов с помощью нового алгоритма с применением МНП (далее — алгоритм 1) и алгоритма, разработанного нами ранее [Спевак, Нефедова, 2022], в котором обратная задача Коши решается с помощью МГЭ (алгоритм 2). Отметим, что оба алгоритма приводят к симметричным относительно начала координат решениям, что соответствует заданному краевому условию. Алгоритм 1 обеспечил более высокую точность решения, особенно вблизи границы, где, как известно, МГЭ дает погрешность. В таблице 1 приведены погрешности численных решений относительно точного решения (67) для трех моментов времени в точках, близких к границе S_R . В таблице 2 показаны погрешности во внутренних точках. Проведенные расчеты показали, что применение МНП для задач с фронтом тепловой волны, имеющим форму окружности, предпочтительно по сравнению с МГЭ. Полученное с помощью алгоритма 1 численное решение имеет преимущество в точности и, в отличие от МГЭ, дает возможность проводить вычисления сколь угодно близко к границе области решения.

Таблица 1. Погрешности численных решений вблизи границы S_R

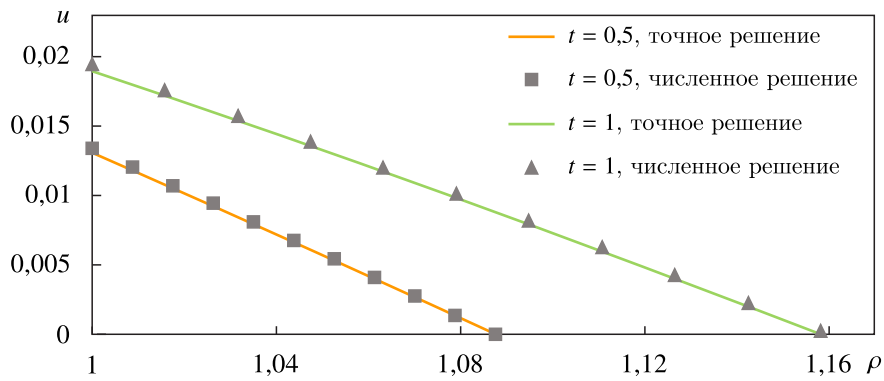
Расстояние до границы	Погрешность, $t = 0,3$		Погрешность, $t = 0,7$		Погрешность, $t = 1$	
	Алгоритм 1	Алгоритм 2	Алгоритм 1	Алгоритм 2	Алгоритм 1	Алгоритм 2
10^{-3}	$1,3 \cdot 10^{-7}$	$9,2 \cdot 10^{-6}$	$5,6 \cdot 10^{-8}$	$8,1 \cdot 10^{-6}$	$5,5 \cdot 10^{-8}$	$7,5 \cdot 10^{-6}$
10^{-4}	$1,4 \cdot 10^{-9}$	$9,8 \cdot 10^{-6}$	$5,2 \cdot 10^{-10}$	$8,6 \cdot 10^{-6}$	$6,1 \cdot 10^{-10}$	$8,0 \cdot 10^{-6}$
10^{-5}	$7,5 \cdot 10^{-11}$	расходится	$2,4 \cdot 10^{-11}$	расходится	$2,5 \cdot 10^{-11}$	расходится
10^{-6}	$6,5 \cdot 10^{-11}$	расходится	$2,0 \cdot 10^{-11}$	расходится	$1,8 \cdot 10^{-11}$	расходится

Таблица 2. Погрешности численных решений при $\rho = \frac{R_1+r(t)}{2}$

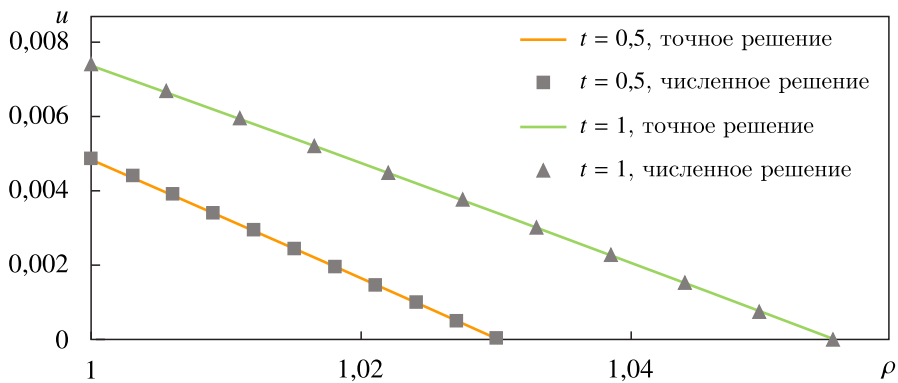
Погрешность, $t = 0,5$		Погрешность, $t = 1,0$		Погрешность, $t = 1,5$		Погрешность, $t = 2,0$	
Алгоритм 1	Алгоритм 2	Алгоритм 1	Алгоритм 2	Алгоритм 1	Алгоритм 2	Алгоритм 1	Алгоритм 2
$2,3 \cdot 10^{-6}$	$7,6 \cdot 10^{-6}$	$3,2 \cdot 10^{-6}$	$8,9 \cdot 10^{-6}$	$8,7 \cdot 10^{-6}$	$1,7 \cdot 10^{-5}$	$7,8 \cdot 10^{-5}$	$3,8 \cdot 10^{-4}$



(а)



(б)



(в)

Рис. 2. Сравнение численных решений с точными: а) $\sigma = 0,5$; б) $\sigma = 1$; в) $\sigma = 3$

Во-вторых, был проведен сравнительный анализ решений при различных РБФ, поскольку их вид влияет на сходимость итерационных процессов и точность решения. В таблице 3 приведены погрешности решений на границе S_{R_1} , где наблюдалось наибольшее расхождение с точным решением, для четырех видов РБФ. Здесь $r_i = |\mathbf{x} - \xi_i|$. Приведенные результаты показывают, что оба алгоритма устойчивы по отношению к виду РБФ, при этом лучшую точность обеспечивают мультикватричные функции $f_i = \sqrt{1 + (\epsilon r_i)^2}$.

Наконец, в-третьих, был проведен анализ эффективности распараллеливания предложенного нового алгоритма. А именно, было проведено сравнение времени счета последовательной и четырех параллельных реализаций алгоритма. Расчеты для последовательного режима

Таблица 3. Погрешности численных решений задачи на внутренней границе в момент $t = 1$

Алгоритм	Относительные погрешности				
	h	$f_i = r_i$	$f_i = r_i^3$	$f_i = 1 + r_i$	$f_i = \sqrt{1 + (\varepsilon r_i)}$
1	0,1	$1,72 \cdot 10^{-4}$	$2,0 \cdot 10^{-4}$	$1,1 \cdot 10^{-4}$	$7,3 \cdot 10^{-5}$
2	0,1	$3,82 \cdot 10^{-4}$	$3,96 \cdot 10^{-4}$	$2,65 \cdot 10^{-4}$	$2,25 \cdot 10^{-4}$
1	0,05	$1,68 \cdot 10^{-4}$	$1,88 \cdot 10^{-4}$	$9,6 \cdot 10^{-5}$	$6,7 \cdot 10^{-5}$
2	0,05	$3,74 \cdot 10^{-4}$	$3,9 \cdot 10^{-4}$	$2,6 \cdot 10^{-4}$	$2,0 \cdot 10^{-4}$

Таблица 4. Время решения задачи при различных количествах расчетных потоков

N	N_{in}	Время счета, с				
		последовательная реализация	параллельная реализация на 4 потоках	параллельная реализация на 8 потоках	параллельная реализация на 12 потоках	параллельная реализация на 24 потоках
10	5	171	72	46	46	46
20	10	864	329	209	167	88
30	15	2530	936	591	452	246

и в параллельном режиме при задействовании 4, 8, 12 потоков выполнялись на 10-ядерном процессоре Intel Core I5-1235U. Параллельные вычисления с использованием 24 потоков проводились на 12-ядерном процессоре Intel Xeon Silver 4214R. В таблице 4 представлены результаты при различных значениях параметра N , определяющего число слагаемых в отрезках рядов Фурье (21)–(24), а также различных количествах внутренних точек коллокации N_{in} . Решение задачи проводилось при $\sigma = 3$, $C = 10$, $R = 1$ для интервала времени $t \in [0, 1]$ с шагом по времени $h = 0,1$, в качестве РБФ использовались мультикватричные функции. Представленные результаты демонстрируют сокращение времени счета с увеличением числа потоков, что говорит об эффективности распараллеливания. При этом эффективность распараллеливания увеличивается с ростом значений N и N_{in} . Таким образом, выбранная технология параллельного программирования OpenMP удачно подходит для параллельных вычислений при реализации предложенного алгоритма.

В целом вычислительный эксперимент продемонстрировал стабильную сходимость и хорошую точность решения задачи (2), (4). Таким образом, можно сделать вывод об эффективности разработанного алгоритма с использованием метода нулевого поля.

7. Заключение

Авторами предложен численно-аналитический алгоритм решения вырождающегося нелинейного уравнения второго порядка параболического типа при заданном законе движения нулевого фронта тепловой (диффузионной) волны, имеющего форму окружности. Разностная аппроксимация по времени приводит на каждом шаге к решению обратной задачи Коши для неоднородного уравнения Пуассона. Эта задача решается итерационно с помощью разложения по радиальным базисным функциям (РБФ), метода коллокаций и метода нулевого поля (МНП). МНП для решения обратной задачи Коши применяется впервые, ранее он применялся только для краевых задач, когда на каждой границе задано одно граничное условие. Полученные результаты показывают, что подобное использование МНП корректно. Для повышения эффективности и ускорения работы компьютерной реализации алгоритма был использован открытый стандарт параллельного программирования OpenMP. Для верификации работы алгоритма и тестирования программы был проведен вычислительный эксперимент, позволивший сделать следующие выводы: 1) новый алгоритм показал достаточно хорошую сходимость итерационных

процессов и стабильную работу при использовании различных РБФ; 2) сравнение результатов расчетов с известным точным решением продемонстрировало хорошую точность нового алгоритма, а также сходимость относительно шага по времени; 3) сравнение полученных численных решений с ранее полученными авторами с использованием метода граничных элементов (МГЭ) вместо МНП показало более высокую точность нового алгоритма, особенно вблизи границы области решения, где корректность МГЭ обычно нарушается; 4) анализ применения различных систем РБФ показал близкие результаты, при этом наиболее подходящими с точки зрения точности решения оказались мультиквадратичные функции. Таким образом, новый алгоритм является эффективным средством решения и дает лучшие результаты по сравнению с разработанными ранее.

Список литературы (References)

- Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — М.: Физматлит, 1963.
Gradshteyn I. S., Ryzhik I. M. Tables of integrals, series, and products. — New York: Academic Press, 1965. (Russ. ed.: *Gradshteyn I. S., Ryzhik I. M.* Tablitsy integralov, summ, ryadov i proizvedenii. — Moscow: Fizmatlit, 1963.)
- Зельдович Я. Б., Компанеев А. С.* К теории распространения тепла при теплопроводности, зависящей от температуры // Сборник, посвященный 70-летию А. Ф. Иоффе. — М.: Изд-во АН СССР, 1950. — С. 61–71.
Zel'dovich Ya. B., Kompaneets A. S. K teorii rasprostraneniya tepla pri teploprovodnosti, zavisyashchei ot temperatury [Towards a theory of heat conduction with thermal conductivity depending on the temperature] // Sbornik, posvyashchennyi 70-letiyu A. F. Ioffe [Collection of papers dedicated to 70th anniversary of A. F. Ioffe]. — 1950. — P. 61–71 (in Russian).
- Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П.* Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. — М.: Наука, 1966.
Zel'dovich Ya. B., Raizer Yu. P. Physics of shock waves and high temperature hydrodynamics phenomena. — New York, Mineola: Dover Publications, 2002. (Russ. ed.: *Zel'dovich Ya. B., Raizer Yu. P.* Fizika udarnykh voln i vysokotemperaturnykh gidrodinamicheskikh yavlenii. — Moscow: Nauka, 1966.)
- Казаков А. Л.* О точных решениях краевой задачи о движении тепловой волны для уравнения нелинейной теплопроводности // Сибирские электронные математические известия. — 2019. — Т. 16. — С. 1057–1068.
Kazakov A. L. O tochnykh resheniyakh kraevoi zadachi o dvizhenii teplovoi volny dlya uravneniya nelineinoy teploprovodnosti [On exact solutions to a heat wave propagation boundary-value problem for a nonlinear heat equation] // Sibirskie elektronnye matematicheskie izvestiya [Siberian Electronic Mathematical Reports]. — 2019. — Vol. 16. — P. 1057–1068 (in Russian). — DOI: 10.33048/semi.2019.16.073
- Казаков А. Л., Кузнецов П. А.* Об аналитических решениях одной специальной краевой задачи для нелинейного уравнения теплопроводности в полярных координатах // Сибирский журнал индустриальной математики. — 2018. — Т. 21, № 2 (74). — С. 56–65. — DOI: 10.17377/SIBJIM.2018.21.205
Kazakov A. L., Kuznetsov P. A. On the analytic solutions of a special boundary value problem for a nonlinear heat equation in polar coordinates // Journal of Applied and Industrial Mathematics. — 2018. — Vol. 12, No. 2. — P. 255–263. — DOI: 10.1134/S1990478918020060 (Original Russian paper: *Kazakov A. L., Kuznetsov P. A.* Ob analiticheskikh resheniyakh odnoi spetsial'noi kraevoi zadachi dlya nelineinogo uravneniya teploprovodnosti v polyarnykh koordinatakh // Sibirskii zhurnal industrial'noi matematiki. — 2018. — Vol. 21, No. 2 (74). — P. 56–65.)
- Казаков А. Л., Неведова О. А., Сневак Л. Ф.* Решение задач об иницировании тепловой волны для нелинейного уравнения теплопроводности методом граничных элементов // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 2019. — Т. 59, № 6. — С. 1047–1062. — DOI: 10.1134/S0044466919060085
Kazakov A. L., Nefedova O. A., Spevak L. F. Solution of the problem of initiating the heat wave for a nonlinear heat conduction equation using the boundary element method // Comput. Math. Math. Phys. — 2019. — Vol. 59, No. 6. — P. 1015–1029. — DOI: 10.1134/S0965542519060083 (Original Russian paper: *Kazakov A. L., Nefedova O. A., Spevak L. F.* Reshenie zadach ob initsirovaniy teplovoi volny dlya nelineinogo uravneniya teploprovodnosti metodom granichnykh elementov // Zh. vychisl. matem. i matem. fiz. — 2019. — Vol. 59, No. 6. — P. 1047–1062.)
- Казаков А. Л., Орлов Св. С., Орлов С. С.* Построение и исследование некоторых точных решений нелинейного уравнения теплопроводности // Сибирский математический журнал. — 2018. — Т. 59, № 3. — С. 544–560. — DOI: 10.17377/smzh.2018.59.306

- Kazakov A. L., Orlov Sv. S., Orlov S. S.* Construction and study of exact solutions to a nonlinear heat equation // *Siberian Mathematical Journal*. — 2018. — Vol. 59, No. 3. — P. 427–441. — DOI: 10.1134/S0037446618030060 (Original Russian paper: *Kazakov A. L., Orlov Sv. S., Orlov S. S.* Postroenie i issledovanie nekotorykh tochnykh reshenii nelineinogo uravneniya teploprovodnosti // *Sibirskii matematicheskii zhurnal*. — 2018. — Vol. 59, No. 3. — P. 544–560.)
- Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. — М.: Наука, 1967.
- Ladyzhenskaja O. A., Solonnikov V. A., Ural'tseva N. N.* Linear and quasi-linear equations of parabolic type // *Translations of Mathematical Monographs*. — Vol. 23. — Providence, RI: American Mathematical Society, 1968. — <https://doi.org/10.1090/mmono/023> (Russ. ed.: *Ladyzhenskaya O. A., Solonnikov V. A., Ural'tseva N. N.* Lineinye i kvazilineinye uravneniya parabolicheskogo tipa. — Moscow: Nauka, 1967.)
- Самарский А. А., Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П.* Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. — М.: Наука, 1987.
- Samarskii A. A., Galaktionov V. A., Kurdyumov S. P., Mikhailov A. P.* Blow-up in quasilinear parabolic equation. — Berlin, New York: Walter de Gruyter, 1995. — DOI: 10.1515/9783110889864 (Russ. ed.: *Samarskii A. A., Galaktionov V. A., Kurdyumov S. P., Mikhailov A. P.* Rezhimy s obostreniem v zadachakh dlya kvazilineinykh parabolicheskikh uravnenii. — Moscow: Nauka, 1987.)
- Сидоров А. Ф.* Избранные труды. Математика. Механика. — М.: Физматлит, 2001.
- Sidorov A. F.* Izbrannye trudy. Matematika. Mekhanika [Selected works. Mathematics. Mechanics]. — Moscow: Fizmatlit, 2001 (in Russian).
- Спевак Л. Ф., Нефедова О. А.* Численное решение двумерного нелинейного уравнения теплопроводности с использованием радиальных базисных функций // *Компьютерные исследования и моделирование*. — 2022. — Т. 14, № 1. — С. 9–22. — DOI: 10.20537/2076-7633-2022-14-1-9-22
- Spevak L. F., Nefedova O. A.* Chislennoe reshenie dvumernogo nelineinogo uravneniya teploprovodnosti s ispol'zovaniem radial'nykh bazisnykh funktsii [Numerical solution to a two-dimensional nonlinear heat equation using radial basis functions] // *Computer Research and Modeling*. — 2022. — Vol. 14, No. 1. — P. 9–22 (in Russian).
- Филимонов М. Ю.* Использование метода специальных рядов для представления решений начально-краевых задач для нелинейных уравнений с частными производными // *Дифференциальные уравнения*. — 2003. — Т. 39, № 8. — С. 1100–1107. — DOI: 10.1023/B:DIEQ.0000011290.09965.9a
- Filimonov M. Yu.* Ispol'zovanie metoda spetsial'nykh ryadov dlya predstavleniya reshenii nachal'no-kraevykh zadach dlya nelineinykh uravnenii s chastnymi proizvodnymi [The method of special series for the representation of solutions of initial-boundary value problems for nonlinear partial differential equations] // *Differentsial'nye uravneniya*. — 2003. — Vol. 39, No. 8. — P. 1100–1107 (in Russian).
- Abramowitz M., Stegun I. A.* Handbook of mathematical functions: with formulas, graphs, and mathematical tables. — New York: Dover Publications Inc., 1964.
- Brebbia C. A., Telles J. C. F., Wrobel L. C.* Boundary element techniques. — Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo: Springer-Verlag, 1984. — DOI: 10.1002/zamm.19850650621
- Chen W., Fu Z.-J., Chen C. S.* Recent advances in radial basis function collocation methods. — Heidelberg, New York, Dordrecht, London: Springer, 2013. — DOI: 10.1007/978-3-642-39572-7
- Golberg M. A., Chen C. S., Bowman H.* Some recent results and proposals for the use of radial basis functions in the BEM // *Eng. Anal. Boundary Elem.* — 1999. — Vol. 23, No. 4. — P. 285–296. — DOI: 10.1016/s0955-7997(98)00087-3
- Kazakov A. L., Spevak L. F.* An analytical and numerical study of a nonlinear parabolic equation with degeneration for the cases of circular and spherical symmetry // *Appl. Math. Model.* — 2016. — Vol. 40, No. 2. — P. 1333–1343. — DOI: 10.1016/j.apm.2015.06.038
- Kazakov A. L., Spevak L. F.* Numerical and analytical studies of a nonlinear parabolic equation with boundary conditions of a special form // *Appl. Math. Model.* — 2013. — Vol. 37, No. 10–11. — P. 6918–6928. — DOI: 10.1016/j.apm.2013.02.026
- Kazakov A. L., Spevak L. F., Nefedova O. A., Lempert A. A.* On the analytical and numerical study of a two-dimensional nonlinear heat equation with a source term // *Symmetry*. — 2020. — Vol. 12, No. 6. — P. 921. — DOI: 10.3390/sym12060921
- Kosov A. A., Semenov E. I.* New exact solutions of the diffusion equation with power nonlinearity // *Siberian Mathematical Journal*. — 2022. — Vol. 63, No. 6. — P. 1102–1116. — DOI: 10.1134/S0037446622060106

- Lee M. G., Zhang L. P., Li Z. C., Kazakov A. L.* Dual null field method for Dirichlet problems of Laplace's equation in circular domains with circular holes // *Siberian Electronic Mathematical Reports*. — 2021. — Vol. 18, No. 1. — P. 393–422. — DOI: 10.33048/semi.2021.18.028
- Li Z.-C.* The method of fundamental solutions for annular shaped domains // *Journal of Computational and Applied Mathematics*. — 2009. — Vol. 228, No. 1. — P. 355–372. — DOI: 10.1016/j.cam.2008.09.027
- Li Z. C., Huang H. T., Zhang L. P., Lempert A. A., Lee M. G.* Analysis of dual null field methods for Dirichlet problems of Laplace's equation in elliptic domains with elliptic holes: bypassing degenerate scales // *The Bulletin of Irkutsk State University. Series: Mathematics*. — 2021. — Vol. 37. — P. 47–62. — DOI: 10.26516/1997-7670.2021.37.47
- Li Z.-C., Huang H.-T., Zhang L.-P., Lempert A. A., Lee M.-G.* Numerical experiments of the dual null field method for Dirichlet problems of Laplace's equation in elliptic domains with elliptic holes // *The Bulletin of Irkutsk State University. Series: Mathematics*. — 2022. — Vol. 39. — P. 80–95. — DOI: 10.26516/1997-7670.2022.39.80.
- Li Z.-C., Huang Hs.-T., Liaw C.-P., Lee M.-G.* The null-field method of Dirichlet problems of Laplace's equation on circular domains with circular holes // *Engineering Analysis with Boundary Elements*. — 2012. — Vol. 36, No. 3. — P. 477–491. — DOI: 10.1016/j.enganabound.2011.09.009
- Nardini D., Brebbia C. A.* A new approach to free vibration analysis using boundary elements // *Appl. Math. Model.* — 1983. — Vol. 7, No. 3. — P. 157–162. — DOI: 10.1016/0307-904X(83)90003-3
- Powell M. J. D.* The theory of radial basis function approximation in 1990 // *Advances in numerical analysis ii: wavelets, subdivision algorithms and radial functions* / W. Light (ed.). — Oxford: Oxford University Press, 1992. — Vol. 2. — P. 105–210.
- Vazquez J. L.* The porous medium equation: mathematical theory. — USA: Oxford University Press, 2007. — DOI: 10.1093/acprof:oso/9780198569039.001.0001