

УДК: 532.54: 51-72

## Алгоритм идентификации вихрей по векторам скорости течения на основе простейшей математической модели вихревой динамики

**В. Н. Говорухин**

Институт математики, механики и компьютерных наук им. И. И. Воровича, Южный федеральный университет,  
Россия, 344090, г. Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, д. 8а

E-mail: vngovoruhin@sfedu.ru

*Получено 28.06.2023, после доработки — 23.09.2023.*

*Принято к публикации 02.10.2023.*

Предложен алгоритм идентификации параметров плоской вихревой структуры по информации о скорости течения в конечном (малом) наборе опорных точек. Алгоритм основан на использовании модельной системы точечных вихрей и минимизации в пространстве ее параметров целевого функционала, оценивающего близость модельного и известного наборов векторов скорости. Для численной реализации используются модифицированный метод градиентного спуска с управлением шагом, аппроксимации производных конечными разностями, аналитическое выражение для поля скорости, индуцируемое модельной системой. Проведен численный экспериментальный анализ работы алгоритма на тестовых течениях: одного и системы нескольких точечных вихрей, вихря Рэнкина и диполя Ламба. Используемые для идентификации векторы скорости задавались в случайно распределенных наборах опорных точек (от 3 до 200) согласно известным аналитическим выражениям для тестовых полей скорости. В результате вычислений показано: алгоритм сходится к искомому минимуму из широкой области начальных приближений; алгоритм сходится во всех случаях когда опорные точки лежат в областях, где линии тока тестовой и модельной систем топологически эквивалентны; если системы топологически не эквивалентны, то доля удачных расчетов снижается, но сходимость алгоритма также может иметь место; координаты найденных в результате сходимости алгоритма вихрей модельной системы близки к центрам вихрей тестовых конфигураций, а во многих случаях и значения их интенсивностей; сходимость алгоритма в большей степени зависит от расположения, чем от количества используемых при идентификации векторов. Результаты исследования позволяют рекомендовать предложенный алгоритм для анализа плоских вихревых структур, у которых линии тока топологически близки траекториям частиц в поле скорости систем точечных вихрей.

Ключевые слова: вихревые структуры, алгоритм идентификации, системы точечных вихрей, метод градиентного спуска

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда, грант № 23-21-00371.

UDC: 532.54: 51-72

## Algorithm for vortices identification based on flow velocity vectors using the simplest mathematical model of vortex dynamics

V. N. Govorukhin

I. I. Vorovich Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Science, Southern Federal University,  
8a Milchakova st., Rostov-on-Don, 344090, Russia

E-mail: vngovoruhin@sfedu.ru

*Received 28.06.2023, after completion — 23.09.2023.*

*Accepted for publication 02.10.2023.*

An algorithm is proposed to identify parameters of a 2D vortex structure used on information about the flow velocity at a finite (small) set of reference points. The approach is based on using a set of point vortices as a model system and minimizing a functional that compares the model and known sets of velocity vectors in the space of model parameters. For numerical implementation, the method of gradient descent with step size control, approximation of derivatives by finite differences, and the analytical expression of the velocity field induced by the point vortex model are used. An experimental analysis of the operation of the algorithm on test flows is carried out: one and a system of several point vortices, a Rankine vortex, and a Lamb dipole. According to the velocity fields of test flows, the velocity vectors utilized for identification were arranged in a randomly distributed set of reference points (from 3 to 200 pieces). Using the computations, it was determined that: the algorithm converges to the minimum from a wide range of initial approximations; the algorithm converges in all cases when the reference points are located in areas where the streamlines of the test and model systems are topologically equivalent; if the streamlines of the systems are not topologically equivalent, then the percentage of successful calculations decreases, but convergence can also take place; when the method converges, the coordinates of the vortices of the model system are close to the centers of the vortices of the test configurations, and in many cases, the values of their circulations also; convergence depends more on location than on the number of vectors used for identification. The results of the study allow us to recommend the proposed algorithm for identifying 2D vortex structures whose streamlines are topologically close to systems of point vortices.

Keywords: vortex structures, identification algorithm, systems of point vortices, gradient descent method

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2023, vol. 15, no. 6, pp. 1477–1493 (Russian).

The work was supported by Russian Science Foundation project No. 23-21-00371.

## 1. Введение

Вихревые структуры возникают в потоках жидкости в природе и промышленности, определяют структуру течений, массоперенос в атмосфере и океане, технологических установках, могут вызывать вибрацию, шум, влиять на характеристики летательных аппаратов и др. Это вызывает необходимость разработки методов поиска и распознавания вихрей и их характеристик, прогноза развития вихревой структуры во времени и пространстве. Для решения таких задач эффективны методы математического моделирования, аналитического и численного анализа уравнений гидродинамики. На основе уравнений Эйлера и Навье–Стокса разработаны численные методы, позволяющие решать прямые задачи прогноза с известным начальным состоянием вихревой структуры. Это методы сеток [Roache, 1998; Куликов, Сон, 2017], конечных элементов [Connor, Brebbia, 1976; Gawlik, Gay-Balmaz, 2020], а в последнее время популярны бессеточные вихревые подходы [Cottet, Koumoutsakos, 2000; Говорухин, 2011; Mimeau, Mortazavi, 2021; Govorukhin, 2023], а также их комбинации в сочетании с алгоритмами качественной теории дифференциальных уравнений [Говорухин, 2016; Говорухин, Филимонова, 2021]. Для применения прямых методов прогноза необходима детальная информация о начальном состоянии потока, которая зачастую отсутствует. Уточнить и дополнить ее можно с помощью решения обратной задачи идентификации вихрей с помощью алгоритмов, основанных на математических моделях и имеющейся информации. Это позволит детализировать начальную конфигурацию для методов прямого прогноза. Решение обратных задач представляет и самостоятельный интерес при изучении вихревых структур. Один из алгоритмов идентификации вихревой структуры по данным о поле скорости течения описан и исследован в данной статье.

Единого определения вихря до сих пор не сформулировано. Вихрь можно охарактеризовать как область вращения частиц жидкости вокруг некоторого центра. В гидродинамике вихрь описывается как связанная область с высокой концентрацией завихренности, или как область, в которой могут создаваться замкнутые или спиральные линии тока. Задача идентификации вихревой структуры требует применения и развития обратных подходов, когда известны характеристики потока в некоторых точках или областях, а неизвестными являются количество, расположение, размеры, интенсивность вихрей и другие характеристики. Одной из возможных постановок обратной задачи является восстановление характеристик течения по его полю скорости, что и рассматривается в данной статье. При применении и разработке методов решения обратных задач вихревой динамики надо иметь в виду, что эти задачи не только трудны для решения, но и могут оказаться некорректными, а построенные решения — не единственными.

Методы идентификации вихрей развиваются уже несколько десятилетий. С их помощью анализируются синоптические потоки, астрофизические явления, турбулентные течения, изучается обтекание летательных аппаратов, основанные на них алгоритмы используются при визуализации экспериментальных данных [Chakraborty, Balachandar, Adrian, 2005; Bremer et al., 2016; Волков и др., 2017; Giagkiozis et al., 2018; Zhang et al., 2018]. В последние десятилетия были предложены различные методы идентификации вихрей, такие как Q-метод,  $\lambda_2$ -метод,  $\lambda_{ci}$ -метод,  $\Omega$ -метод,  $\lambda\omega$ -метод и другие. Описание и сравнительный анализ некоторых из перечисленных методов даны в статьях [Giagkiozis et al., 2018; Bai et al., 2020]. Во многих из них вихрь в области течения описывается изоповерхностями (изолиниями) некоторой скалярной величины. Примером такой величины является давление, имеющее экстремум в центре вихря. Вихрь имеет как интенсивность, так и направление вращения, но некоторые методы идентификации вихря не определяют направление вращения. Этого недостатка лишен алгоритм, предложенный в [Tian et al., 2020], включающий средства для определения направления локального вращения жидкости, а в [Li et al., 2023] предложен метод, основанный на центральной линии вихря и построении окружающей его вихревой трубки во времени. Все перечисленные алгоритмы требуют достаточно подробной информации в области течения и отказывают при ее нехватке.

В данной работе предложен алгоритмически простой и быстрый метод для оценки расположения и интенсивности вихрей в плоском течении на основе информации о векторах скорости течения в конечном (возможно, малом) наборе точек с использованием математической модели системы точечных вихрей. Первоначальный вариант алгоритма был предложен в [Говорухин, 2020], где вместе с описанием идеи подхода даны некоторые результаты вычислений, демонстрирующие его адекватность и применимость. В представленной здесь версии алгоритм усовершенствован — скорректирован вид целевого функционала, реализован модифицированный метод градиентного спуска, добавлены условия выбора опорных точек для сокращения влияния дефекта модельной системы. Большое внимание в работе уделяется экспериментальному исследованию условий и скорости сходимости алгоритма. Для этого проведены вычислительные эксперименты по идентификации известных вихревых течений с различной топологической структурой, проведен анализ влияния различных факторов на результативность метода. Статья состоит из введения, трех разделов и заключения. В § 2 формулируется постановка задачи идентификации вихрей, обсуждаются принимаемые при ее решении допущения и используемый для разработки алгоритма математический аппарат. Параграф 3 содержит подробное описание алгоритма, а в § 4 представлены результаты численного исследования алгоритма с использованием тестовых вихревых структур — конфигураций точечных вихрей, вихря Рэнкина и диполя Чаплыгина–Ламба. В заключении обсуждаются результаты и направления развития метода.

## 2. Задача и предлагаемый метод идентификации вихрей

Рассматривается плоское течение, для которого в некоторый момент времени в результате измерений, наблюдений или вычислений известны значения векторов скорости в конечном наборе точек:

$$P = \left\{ \left( x^{(i)}, y^{(i)}, \mathbf{v}^{(i)} = \left( v_1^{(i)}, v_2^{(i)} \right) \right), i = 1, \dots, N \right\}, \quad (1)$$

где  $N$  — количество векторов,  $x^{(i)}, y^{(i)}$  — координаты точек (будем их называть опорными) в области течения, в которых известны векторы  $\mathbf{v}^{(i)}$ , а  $v_1^{(i)}, v_2^{(i)}$  — их компоненты. Предполагается, что поле скорости, определяющее  $P$ , порождается некоторой вихревой конфигурацией. Задача идентификации вихревой конфигурации состоит в вычислении ее характеристик, которыми являются количество вихрей, их интенсивность (циркуляция), направления вращения, координаты их центров, размер и форма односвязной области, занимаемой вихрями, распределение завихренности или давления внутри области и др.

Поиск всех параметров вихря в рассматриваемой постановке трудно реализуем, так как для вычисления многих из них необходима детальная информация, а представляемый алгоритм предназначен для случая, когда  $N$  невелико. Мы ограничимся несколькими важными характеристиками вихря — координатами его центра и интенсивностью (циркуляцией). Далее, под идентификацией вихря будет пониматься вычисление этих параметров вихря по набору (множеству)  $P$ .

Для идентификации вихревой структуры будем использовать математическую модель системы точечных вихрей, которая во многих случаях адекватно описывает плоскую вихревую динамику. Предлагаемый подход к вычислению характеристик вихрей состоит в поиске параметров математической модели, так, чтобы исходный набор  $P$  и набор векторов, порождаемых математической моделью в тех же опорных точках, были близки, а в идеальном случае — совпадали. По найденным параметрам математической модели можно оценить характеристики вихревой конфигурации. Для дальнейшего изложения обозначим набор (множество) векторов модельного поля скорости в опорных точках:

$$Q = \left\{ \left( x^{(i)}, y^{(i)}, \mathbf{u}^{(i)} = \left( u_1^{(i)}, u_2^{(i)} \right) \right), i = 1, \dots, N \right\}, \quad (2)$$

где  $\mathbf{u}^{(i)}$  — векторы поля скорости модельной системы в опорных точках с координатами  $x^{(i)}, y^{(i)}$ .

## 2.1. Критерий близости векторных полей

Для реализации метода предложим критерий оценки близости множеств векторов  $P$  и  $Q$ . Близость двух векторов с общим началом на плоскости характеризуется разницей их длин и углом между ними. То есть если есть два вектора —  $\mathbf{W} = (W_1, W_2)$  и  $\mathbf{U} = (U_1, U_2)$ , то следующие величины характеризуют их близость:

$$d(\mathbf{W}, \mathbf{U}) = \frac{\sqrt{(W_1 - U_1)^2 + (W_2 - U_2)^2}}{\|\mathbf{W}\| + \|\mathbf{U}\|}, \quad \phi(\mathbf{W}, \mathbf{U}) = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{W_1 U_1 + W_2 U_2}{\|\mathbf{W}\| \cdot \|\mathbf{U}\|} \right). \quad (3)$$

Если  $\mathbf{W}$  и  $\mathbf{U}$  совпадают, то  $d(\mathbf{W}, \mathbf{U}) = 0$  и  $\phi(\mathbf{W}, \mathbf{U}) = 0$ , а при противоположно направленных векторах  $\mathbf{W} = -\mathbf{U}$  обе величины (3) равны 1. Легко показать, что  $\phi(\mathbf{W}, \mathbf{U}) \in [0, 1]$  и  $d(\mathbf{W}, \mathbf{U}) \in [0, 1]$  для любых ненулевых векторов  $\mathbf{W}, \mathbf{U}$ .

Для оценки близости множеств векторов  $P$  и  $Q$  определим легко вычисляемую характеристику, которая равна нулю при совпадении всех векторов и положительна — в противном случае. Будем использовать следующее выражение, обладающее таким свойством:

$$\sigma(P, Q) = \sigma_1(\mathbf{v}^{(i)}, \mathbf{u}^{(i)}) + \sigma_2(\mathbf{v}^{(i)}, \mathbf{u}^{(i)}), \quad (4)$$

$$\sigma_1(\mathbf{v}^{(i)}, \mathbf{u}^{(i)}) = \sum_{i=1}^N c_i d(\mathbf{v}^{(i)}, \mathbf{u}^{(i)}), \quad \sigma_2(\mathbf{v}^{(i)}, \mathbf{u}^{(i)}) = \sum_{i=1}^N C_i \phi(\mathbf{v}^{(i)}, \mathbf{u}^{(i)}).$$

В выражении (4)  $c_i$  и  $C_i$  — весовые коэффициенты, которые могут зависеть от длин, координат начала векторов и других величин. Далее в статье весовые коэффициенты принимаются равными положительным константам для всех  $i$  и каждой из сумм в (4). Значения и свойства  $\sigma(P, Q)$ , а возможно, и скорость сходимости всего алгоритма идентификации вихревой структуры могут зависеть от значений  $c_i$  и  $C_i$ . Теоретическая оценка их влияния затруднительна, потому в будущих работах будет проведено соответствующее экспериментальное исследование. В представленных ниже вычислительных экспериментах использовались значения  $c_i = 0,7$  и  $C_i = 0,3$ .

Выполнение  $\sigma(P, Q) = 0$  означает, что  $P$  и  $Q$  совпадают, следовательно, можно предположить, что структура вихревого течения в этот момент времени хорошо описывается математической моделью (соответствующей динамической системой на плоскости), определяющей  $Q$ . Отметим, что данное предположение имеет эмпирический характер и можно привести контрпримеры, когда из  $\sigma(P, Q) = 0$  не следует корректное описание течения модельной системой, что зависит от количества и выбора векторов набора  $P$ , параметров математической модели.

Если  $\sigma(P, Q) \neq 0$ , то наборы  $P$  и  $Q$  отличаются количественно, но могут быть близки качественно, в смысле близости структуры порождающих их векторных полей. Естественно предположить, что чем меньше  $\sigma(P, Q)$ , тем ближе в качественном смысле наборы  $P$  и  $Q$  и тем лучше математическая модель описывает вихревую конфигурацию. В силу погрешностей измерений, шумов и идеализации математической модели следует ожидать, что наборы  $P$  и  $Q$  отличаются. Поэтому для приближения  $P$  вместо условия  $\sigma(P, Q) = 0$  будем использовать более слабое условие минимизации выражения (4) в пространстве параметров модельной вихревой конфигурации. В качестве условия достижения искомого минимизирующего значения примем  $\|\nabla\sigma(P, Q)\| < \varepsilon$ , где градиент вычисляется по параметрам модельной системы, используемой для описания течения.

Ниже предложен алгоритм и проведено численное исследование зависимости точности идентификации вихрей на основе оценки  $\|\nabla\sigma(P, Q)\| < \varepsilon$  от выбора набора  $P$  для известных вихревых конфигураций с использованием математической модели системы точечных вихрей.

## 2.2. Модельная система точечных вихрей на плоскости

Простейшей математической моделью вихревых структур в отсутствие вязкости является система точечных вихрей [Villat, 1930]. Если предположить, что завихренность вихрей сосредоточена на прямолинейных бесконечно тонких нитях, параллельных друг другу, то можно изучать движение вихрей, анализируя точки их пересечения с плоскостью. Образ такого вихря на плоскость является точкой, его называют точечным вихрем [Batchelor, 1967], который описывается координатами на плоскости и значением интенсивности. Доказана корректность модели точечных вихрей для описания динамики концентрированных вихрей на плоскости при стремлении их радиуса к нулю (см. [Marchioro, 1993]). Исследовалась применимость модели для анализа различных течений [Velasco Fuentes, Van Heijst, Van Lipzig, 1996; Geldhauser, Romito, 2019; Chai, Fang, 2022], показано правильное качественное описание ею вихревых потоков. Структуры линий тока в окрестности точечного и сосредоточенного распределенного вихрей топологически эквивалентны и представляют собой замкнутые кривые. Кроме того, в основе широко используемых вихревых численных методов решения нестационарных задач динамики жидкости лежит аппроксимация поля скорости системой точечных вихрей [Leonard, 1980; Cottet, Koumoutsakos, 2000]. Естественно предположить, что математическая модель системы точечных вихрей во многих случаях может быть эффективно использована для идентификации вихревой структуры.

Динамика  $K$  точечных вихрей с координатами  $(x_k, y_k)$ ,  $k = 1, \dots, K$ , и интенсивностями  $\omega_k$  описывается системой  $2K$  обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка вида

$$\dot{x}_k = -\frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^K \frac{\omega_j(y_k - y_j)}{d_{kj}^2}, \quad \dot{y}_k = \frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^K \frac{\omega_j(x_k - x_j)}{d_{kj}^2}, \quad d_{kj} = \sqrt{(x_k - x_j)^2 + (y_k - y_j)^2}, \quad (5)$$

где  $k = 1, \dots, N$ ; точка обозначает дифференцирование по  $t$ ;  $d_{kj}$  — расстояние между вихрями с номерами  $k$  и  $j$ . В нестационарном случае система (5) должна быть дополнена начальными координатами вихрей при  $t = 0$ .

Система точечных вихрей  $G = \{(\omega_k, x_k, y_k), k = 1, \dots, K\}$  в каждый момент времени  $t$  определяет на всей плоскости поле скорости, которое задается функцией тока

$$\psi(x, y) = -\frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^K \omega_k \ln [(x - x_k)^2 + (y - y_k)^2]. \quad (6)$$

Компоненты вектора скорости жидкости в момент  $t$  в любой точке плоскости  $(x, y)$  выражаются через функцию тока:

$$u_1(x, y) = \frac{\partial \psi(x, y)}{\partial y} = -\frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^K \omega_k \frac{y - y_k}{(x - x_k)^2 + (y - y_k)^2}, \quad (7)$$

$$u_2(x, y) = -\frac{\partial \psi(x, y)}{\partial x} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^K \omega_k \frac{x - x_k}{(x - x_k)^2 + (y - y_k)^2}.$$

Динамика пассивной частицы с нулевой завихренностью и координатами  $(x(t), y(t))$  в поле скорости (7), порождаемой системой точечных вихрей  $G$ , описывается системой уравнений

$$\dot{x}(t) = -\frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^K \omega_j \frac{y(t) - y_j}{(x(t) - x_j)^2 + (y(t) - y_j)^2}, \quad \dot{y}(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^K \omega_j \frac{x(t) - x_j}{(x(t) - x_j)^2 + (y(t) - y_j)^2}. \quad (8)$$

Конкретное решение системы (8) определяется начальной координатой частицы  $(x(0), y(0))$ . Отметим, что (6) является зависящим от времени гамильтонианом системы (8). Строятся математические модели точечных вихрей также в полуплоскости, кольцевых, прямоугольных и других двумерных областях [Villat, 1930; Lamb, 1932; Гешев, Черных, 2018].

Достоинством математической модели точечных вихрей является относительная простота выражения (7) для компонент вектора скорости жидкости во всех точках плоскости. Заметим, что вектор скорости  $\mathbf{u}(x, y) = (u_1(x, y), u_2(x, y))$  (см. (7)) стремится к нулю при удалении координат  $(x, y)$  от вихрей конфигурации. Ситуация усложняется при приближении  $(x, y)$  к одному из точечных вихрей с координатами  $(x_k, y_k)$ , что вызывает неограниченный рост длины вектора при  $(x, y) \rightarrow (x_k, y_k)$ . Вырожденность вектора скорости непосредственно в точечном вихре является существенным недостатком модели и должна быть учтена в алгоритме идентификации.

### 3. Алгоритм метода

При сделанных выше допущениях задача идентификации структуры плоского течения жидкости, порождаемой системой вихрей, сводится к задаче минимизации:

$$\min_G \sigma(P, Q), \quad (9)$$

где  $G$  — множество параметров модельной системы, а  $\sigma(P, Q)$  — выражение (4), оценивающее близость исходного и модельного наборов векторов скорости течения в опорных точках. Для модели точечных вихрей параметрами являются:  $K$  — количество вихрей;  $G = \{(\omega_k, x_k, y_k), k = 1, \dots, K\}$  — их интенсивности и координаты на плоскости. Отметим, что  $K$  — целое число, а остальные величины действительные.

Для минимизации (9) можно применять методы спуска, Ньютона или комбинированные алгоритмы. В данной работе используется модифицированный метод градиентного спуска, который является вариантом метода Нестерова [Нестеров, 1983]. Этот метод имеет лучшую сходимость к минимуму по сравнению с классическим методом градиентного спуска. Алгоритм идентификации вихрей сводится к построению приближений  $G_{(l)} = \{(\omega_k^{(l)}, x_k^{(l)}, y_k^{(l)}), k = 1, \dots, K\}$  значений параметров систем (5) и (7), приводящих к достижению (9).

Для учета недостатков модельной системы и возможной погрешности исходного набора  $P$  при реализации алгоритма необходимо скорректировать процедуру выбора опорных точек  $\{x^{(i)}, y^{(i)}, i = 1, \dots, N\}$  для вычисления набора  $Q$ . Поле скоростей (7) является вырожденным в точках плоскости, в которых находятся точечные вихри. Это влечет некорректность модельного набора векторов  $Q$ , если опорные точки близки к точечным вихрям. Введем константу  $r_{\min}$  и при вычислениях будем учитывать только те опорные точки, у которых расстояние до точечных вихрей больше этой величины. Аналогично: не будем учитывать те опорные точки, которым соответствуют векторы  $P$ , для которых  $\|\mathbf{v}^{(i)}\| < d_{\min}$ , где  $d_{\min}$  — некоторая минимальная длина. Отбор векторов набора  $P$  проводится на этапе инициализации алгоритма, а множества — на каждом шаге алгоритма. Таким образом, на шаге алгоритма с номером  $l$  учитываются опорные точки, принадлежащие множеству  $\Omega_{(l)}$ , удовлетворяющие условиям

$$\Omega_{(l)} = \left\{ \begin{array}{l} (x^{(i)}, y^{(i)}): \sqrt{(x^{(i)} - x_k^{(l)})^2 + (y^{(i)} - y_k^{(l)})^2} > r_{\min}, \quad i = 1, \dots, N, k = 1, \dots, K \\ \|\mathbf{v}^{(i)}\| < d_{\min} \end{array} \right\}, \quad (10)$$

где  $(x_k^{(l)}, y_k^{(l)})$  — координаты точечного вихря с номером  $k$  на шаге  $l$  алгоритма.

Как и в большинстве итерационных методов, возникает проблема выбора начального приближения. Желательно указать близкие к исходным координаты модельных вихрей и оценки их

интенсивностей с верным знаком. Особая трудность возникает при выборе количества вихрей в структуре  $K$ . Возможны несколько подходов для ее преодоления. Первый заключается в задании избыточного числа вихрей, в предположении, что в результате применения алгоритма будут найдены вихри с ненулевой интенсивностью, соответствующие вихрям исходной конфигурации, а остальные будут иметь нулевую интенсивность. При втором подходе для идентификации вихревой конфигурации нужно последовательно рассматривать системы для  $K = 1, 2, \dots$  до качественного установления результатов. Другими возможными подходами могут быть разбиение области течения на ячейки или скользящее пространственное сканирование области течения ячейкой с использованием алгоритма для  $K = 1$  в каждой подобласти. Реализация этих подходов предполагается в следующих работах, здесь представлен базовый алгоритм.

Приведем шаги алгоритма идентификации вихревой структуры. В представленной базовой версии предполагается, что расчетной является вся область течения.

*Шаг 0.* Инициализация. Номер итерации  $l = 0$ . Задание количества точечных вихрей  $K$ , начального приближения  $G_{(0)} = \{(\omega_k^{(0)}, x_k^{(0)}, y_k^{(0)}), k = 1, \dots, K\}$  и параметров метода:  $h_s$  — значение начального шага метода градиентного спуска,  $h_{\min}$  — минимальное значение шага,  $\beta$  — коэффициент корректора в схеме Нестерова,  $\varepsilon$  — точность поиска вихревой конфигурации (для оценки используется  $\|\nabla\sigma(P, Q)\| < \varepsilon$  и  $\|G_{(l)} - G_{(l-1)}\| < \varepsilon$ ),  $l_{\max}$  — максимальное число итераций метода,  $h_a$  — шаг численного дифференцирования при вычислении  $\nabla\sigma(P, Q)$ , величины  $r_{\min}$  и  $d_{\min}$ .

*Шаг 1.* Следующая итерация с номером  $l = l + 1$ . Проверка условия  $l \leq l_{\max}$ . При выполнении условия — переход к следующему шагу алгоритма. В противном случае — сообщение о превышении максимального числа итераций и окончание работы алгоритма.

*Шаг 2.* Формирование подмножества опорных точек  $\Omega_{(l)}$  на текущем шаге согласно (10).

*Шаг 3.* Определение подмножества  $P_{(l)}$  векторов  $P$ , соответствующих опорным точкам  $\Omega_{(l)}$ .

*Шаг 4.* Формирование множества векторов скорости  $Q_{(l)}$  модельной системы в опорных точках  $\Omega_{(l)}$ . Для этого используется выражение (7), в котором количество, координаты точечных вихрей и их интенсивности задаются набором  $G = G_{(l-1)}$ .

*Шаг 5.* Вычисление градиента  $f_{(l)} = \nabla\sigma(P_{(l)}, Q_{(l)})$  по параметрам  $G$  системы вихрей. Для этого используется аппроксимация частных производных центральными разностями:

$$\frac{\partial\sigma(P_{(l)}, Q_{(l)})}{\partial s} \approx \frac{\sigma(P_{(l)}^+, Q_{(l)}^+) - \sigma(P_{(l)}^-, Q_{(l)}^-)}{2h_a},$$

где  $s$  принимает последовательно значения входящих в  $G$  параметров. В выражении  $P_{(l)}^+, Q_{(l)}^+$  — возмущения наборов  $P_{(l)}$  и  $Q_{(l)}$  при положительном приращении параметра  $s + h_a$ , а  $P_{(l)}^-, Q_{(l)}^-$  — при отрицательном  $s - h_a$ .

*Шаг 6.* Расчет шага метода градиентного спуска с модификацией Нестерова по формуле

$$\begin{aligned} \tilde{G} &= G_{(l)} - h_s f_{(l)}, & \text{если } l = 1, \\ \tilde{G} &= G_{(l)} - h_s f_{(l)} + h_s \beta (G_{(l)} - G_{(l-1)}), & \text{если } l > 1. \end{aligned}$$

В результате будет получен набор  $\tilde{G}$  значений параметров системы точечных вихрей.

*Шаг 7.* Построение наборов векторов  $\tilde{P}, \tilde{Q}$ , соответствующих значениям параметров  $\tilde{G}$  (аналогично шагам 2–4 алгоритма). Проверка условия

$$\sigma(\tilde{P}, \tilde{Q}) < \sigma(P_{(l)}, Q_{(l)}). \quad (11)$$

*Шаг 8.* Если (11) не выполнено, то  $l = l + 1$ ,  $h_s = \frac{h_s}{2}$ . Проверка условия  $h_s > h_{\min}$  и аварийное окончание работы алгоритма при его невыполнении.

*Шаг 9.* Если (11) выполнено, то  $l = l + 1$ ,  $G_{(l)} = \tilde{G}$ ,  $P_{(l)} = \tilde{P}$ ,  $Q_{(l)} = \tilde{Q}$ ,  $h_s = 1,02h_s$ .



Проверка условия сходимости метода  $\|f_{(l)}\| < \varepsilon$  или  $\|G_{(l)} - G_{(l-1)}\| < \varepsilon$ . Если сходимость достигнута — то успешное окончание работы алгоритма,  $G_{(l)}$  — искомые значения параметров (координаты и интенсивности) системы точечных вихрей.

*Шаг 10.* Проверка условия  $l < l_{\max}$ . Если условие выполнено — то переход к шагу 5 алгоритма или аварийное окончание работы при  $l = l_{\max}$ .

#### 4. Применение алгоритма для идентификации тестовых течений

Для исследования алгоритма применим его к идентификации известных вихревых структур, имеющих аналитическое выражение для компонент скорости. Цель экспериментов состоит в изучении области применимости метода, зависимости его сходимости от параметров алгоритма, начального приближения и объема входной информации о течении. В численных экспериментах координаты опорных точек  $x^{(i)}, y^{(i)}, i = 1, \dots, N$ , задавались в узлах равномерной сетки в прямоугольной области течения или случайно с равномерным распределением. Векторы скорости  $\mathbf{v}^{(i)} = (v_1^{(i)}, v_2^{(i)})$  набора  $P$  определялись тестовым примером. При вычислениях использовались следующие параметры метода:  $r_{\min} = 0,0001, d_{\min} = 0,025, h_s = 0,1, h_{\min} = 10^{-14}, \beta = 0,2, l_{\max} = 1000, h_a = 0,0005, \varepsilon = 0,0001$ .

##### 4.1. Система точечных вихрей

Рассмотрим тестовый пример, когда исходный набор векторов  $P$  порождается модельной системой (5) и поле скорости имеет выражение (6). В этом случае естественно ожидать сходимость алгоритма к конфигурации точечных вихрей и выполнения  $\sigma(P, Q) = 0$ . Расчетной областью для этого примера принят квадрат  $D = [-1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1]$ . При генерации тестовых множеств  $P$  использовались две конфигурации точечных вихрей:

$$\{K = 1, (\omega_1, x_1, y_1) = (2, 0, 0)\}, \quad (12a)$$

$$\{K = 3, (\omega_1, x_1, y_1) = (2, -0,7, 0), (\omega_2, x_2, y_2) = (-3, 0,5, -0,5), (\omega_3, x_3, y_3) = (2, 0,6, 0,6)\}. \quad (12б)$$

В первой серии экспериментов рассматривался порождающий точечный вихрь (12a). Изучалась зависимость сходимости алгоритма от количества векторов  $N$  в наборе  $P$ . Изменялось  $N$ , для каждого расчета опорные точки в  $D$  выбирались случайно, с равномерным распределением, затем в них вычислялись векторы для  $P$ . Для каждого  $N$  по этой схеме проводилось 10 расчетов, затем результаты усреднялись. Во всех вычислениях этой серии использовалось начальное приближение  $G_{(0)} = \{\omega_1^{(0)} = 0,65, x_1^{(0)} = 0,9, y_1^{(0)} = 0,65\}$ . Результаты приведены в таблице 1. Видно, что процент расчетов, которые привели к идентификации вихря, не меньше 90 % для всех рассмотренных  $N$ . Это свидетельствует как о высокой эффективности алгоритма для этого примера, так и о том, что возможен неудачный выбор опорных точек, при котором метод отказывает. Оказалось, что сходимость алгоритма практически не зависит от количества опорных точек  $N$ . Как для  $N = 3$ , так и для  $N = 200$  алгоритм сошелся в 97 % расчетов. Остальные 3 % расчетов соответствует неудачному выбору  $P$ . Число шагов метода градиентного спуска также слабо зависит от  $N$ , но на него оказывает влияние распределение опорных точек. Это демонстрирует разница между минимальным и максимальным значениями числа шагов в каждой серии расчетов.

Аналогичные численные эксперименты проведены для набора  $P$ , порожденного конфигурацией трех точечных вихрей (12б). Во всех расчетах в методе градиентного спуска использовалось начальное приближение  $G_{(0)} = \{(\omega_1^{(0)} = 1, x_1^{(0)} = -0,8, y_1^{(0)} = 0,2), (\omega_2^{(0)} = -1, x_2^{(0)} = 0,2, y_2^{(0)} = 0), (\omega_3^{(0)} = 1, x_3^{(0)} = 0,1, y_3^{(0)} = 0,8)\}$ . В этой серии экспериментов все характеристики работы алгоритма идентификации ухудшились (см. таблицу 2). Уменьшился процент удачных идентификаций, но даже в худшем случае он был равен 52 %. Это можно объяснить более сложной

структурой тестового векторного поля (7) при  $K = 3$ . Низкий процент при  $N = 5$  связан с недостаточностью информации, но увеличение числа поверочных точек до  $N \in [20, 75]$  улучшает ситуацию. Дальнейший рост  $N$  не повышает, а снижает вероятность успешной идентификации. Такой эффект можно объяснить повышением сложности целевого функционала (4) и сужением области сходимости метода в пространстве параметров с ростом  $N$ , что приводит к ухудшению результатов. Количество шагов метода градиентного спуска для идентификации также увеличилось при  $K = 3$ .

Таблица 1. Результаты работы алгоритма при идентификации одного точечного вихря по различному числу известных векторов (опорных точек) в поле скорости течения

| Количество известных векторов $N$ | 5    | 10   | 20    | 30   | 50    | 75   | 100  | 150   |
|-----------------------------------|------|------|-------|------|-------|------|------|-------|
| Процент успешных расчетов         | 93 % | 97 % | 100 % | 90 % | 100 % | 93 % | 97 % | 100 % |
| Среднее число шагов метода спуска | 135  | 122  | 113   | 94   | 102   | 105  | 95   | 97    |
| Минимальное число шагов метода    | 91   | 90   | 91    | 90   | 90    | 90   | 90   | 90    |
| Максимальное число шагов метода   | 511  | 529  | 270   | 122  | 254   | 234  | 155  | 212   |

Таблица 2. Результаты работы алгоритма при идентификации структуры из трех точечных вихрей по различному числу известных векторов (опорных точек) в поле скорости течения

| Количество известных векторов $N$ | 5    | 10   | 20   | 30   | 50   | 75   | 100  | 150  |
|-----------------------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| Процент успешных расчетов         | 52 % | 68 % | 83 % | 78 % | 72 % | 72 % | 63 % | 60 % |
| Среднее число шагов метода спуска | 516  | 454  | 418  | 392  | 375  | 411  | 382  | 367  |
| Минимальное число шагов метода    | 152  | 145  | 148  | 147  | 176  | 192  | 188  | 186  |
| Максимальное число шагов метода   | 999  | 974  | 986  | 991  | 921  | 983  | 898  | 924  |

Для анализа влияния начального приближения на сходимость алгоритма проводились вычисления для набора  $P$  из восьми векторов, заданных (7) и (12а), а в качестве модельной системы использовалась (5) при  $K = 1$ . Во всех расчетах рассматривалось одинаковое распределение опорных точек. На рис. 1, а изображены тестовые векторы  $P$  с началом в опорных точках. В экспериментах изменялось начальное приближение  $G_{(0)} = \{(\omega_1^{(0)}, x_1^{(0)}, y_1^{(0)})\}$ , координаты  $x_1^{(0)}, y_1^{(0)}$  задавались в узлах сетки в прямоугольной области  $D = [-1,6 \leq x \leq 1,6, -1,6 \leq y \leq 1,6]$  при двух вариантах начальной интенсивности точечного вихря —  $\omega_1^{(0)} = 0,2$  и  $\omega_1^{(0)} = -0,2$ . В первом случае направление модельного векторного поля совпадает с исходным, а во втором противоположно ему. Если из начального приближения  $G_{(0)}$  алгоритм сходился к тестовой конфигурации, то эта точка окрашивалась оттенком серого цвета (чем светлее, тем больше шагов алгоритма потребовалось для сходимости) и черным цветом, если алгоритм не сошелся. По этой схеме построены бассейны сходимости, изображенные на рис. 1, б, в. Видно, области сходимости занимают большую часть  $D$ , причем для обоих значений  $\omega_1^{(0)}$ . На границах  $D$  есть области начальных данных, из которых не удается идентифицировать тестовую вихревую конфигурацию. В этих случаях работа алгоритма прекращается при превышении  $l_{\max}$  или при шаге метода спуска  $h_s < h_{\min}$ . Результаты для  $\omega_1^{(0)} = -0,2$ , то есть с порождающей конфигурацией (12а) с противоположной по знаку начальной интенсивностью, демонстрируют не только уменьшение области сходимости, но и то, что алгоритм сходится и при качественно неверном начальном приближении.

Для анализа зависимости результатов применения алгоритма от количества вихрей  $K$  в модельной системе (5) была проведена еще одна серия вычислительных экспериментов. В качестве исходного векторного поля использовалось (7), набор  $P$  состоял из 20 векторов, расположенных в случайно распределенных опорных точках в  $D$ . Вычисления проводились для двух наборов параметров — с одним, (12а), и тремя, (12б), точечными вихрями. Вычисления проводились для  $K = 1, 2, 3, 4$ . В качестве начального приближения параметров модельной системы при  $K = 4$  ис-

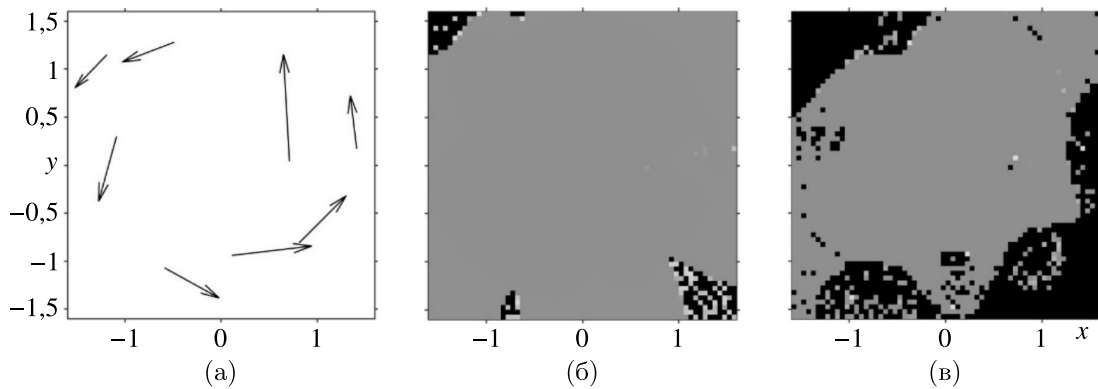


Рис. 1. Векторы набора  $P$  (а), бассейны сходимости алгоритма при  $\omega_1^{(0)} = 0,2$  (б) и при  $\omega_1^{(0)} = -0,2$  (в)

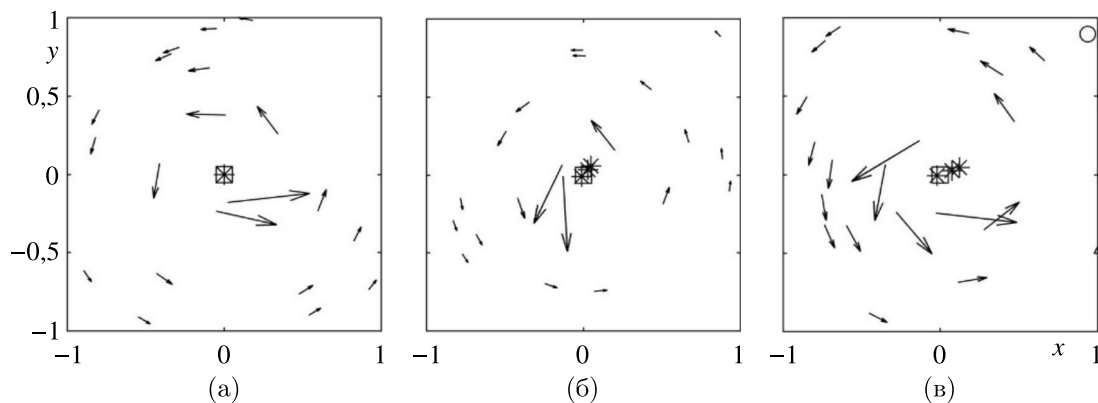


Рис. 2. Результаты расчетов для тестового набора векторов  $P$  для параметров (12а) при использовании в модельной системе (5) различного числа точечных вихрей:  $K = 1$  (а),  $K = 3$  (б),  $K = 4$  (в)

пользовалось  $G_{(0)} = \{(\omega_1^{(0)} = 1, x_1^{(0)} = -0,8, y_1^{(0)} = 0,2), (\omega_2^{(0)} = -1, x_2^{(0)} = 0,2, y_2^{(0)} = 0), (\omega_3^{(0)} = 1, x_3^{(0)} = 0,1, y_3^{(0)} = 0,8), (\omega_4^{(0)} = 1, x_4^{(0)} = 0,9, y_4^{(0)} = 0,9)\}$ , а при меньших  $K$  – подмножество  $G_{(0)}$  с нужным числом параметров, начиная с первого. Результаты вычислений даны на рис. 2 и рис. 3, где изображен исходный и модельный набор векторов, квадратами помечены вихри порождающей системы, звездочками отмечены найденные точечные вихри модельной системы с ненулевой интенсивностью, а кружками – с близкой к нулевой. Векторы набора  $P$  изображены пунктирными линиями, а результирующего набора  $Q$  – сплошными. На рисунках представлены основные качественно отличные сценарии успешной сходимости алгоритма. Отметим, что для обеих конфигураций (12) при сходимости метода для разных  $P$  получаются близкие к тестовым слабо отличающиеся конфигурации. В некоторых случаях алгоритм не сходится в результате превышения максимального числа шагов, или при  $h_s < h_{\min}$ .

Когда порождающее  $P$  поле скорости задается (7) и (12а), а модельная система (5) используется при  $K = 1$  (см. рис. 2, а), в подавляющем числе случаев имеет место сходимость к тестовому точечному вихрю (12а), см. таблицу 1. Если  $K = 2$ , то возможны два сценария сходимости алгоритма. Первый состоит в том, что один результирующий вихрь имеет параметры близкие к (12а), а второй имеет близкую к нулю интенсивность. Например, в одном из расчетов результатом работы алгоритма были  $(\omega_1, x_1, y_1) = (1,9985, 0,0, 0,001)$ ,  $(\omega_2, x_2, y_2) = (0,0014, 0,4156, 0,0027)$ . На рис. 2, б представлен второй сценарий, когда при  $K > 1$  все вихри найденной точечной конфигурации имеют ненулевую циркуляцию, расположены близко друг к другу и тестовому вихрю. При этом суммарная интенсивность модельных

вихрей равна интенсивности тестового (12а). На рис. 1, б для  $K = 3$  это вихри с параметрами  $(\omega_1, x_1, y_1) = (1,2215, -0,0115, -0,0093)$ ,  $(\omega_2, x_2, y_2) = (-0,5241, 0,0467, 0,0582)$ ,  $(\omega_3, x_3, y_3) = (1,3023, 0,0292, 0,0333)$ . Возможны и сценарии, когда алгоритм сходится к конфигурации из нескольких вихрей, часть которых близко расположены к тестовому, имеют ненулевые интенсивности, их сумма равна тестовой (12а), а остальные имеют близкую к нулю интенсивностью. Пример такого результата работы алгоритма при  $K = 4$  дан на рис. 2, в, где три вихря с ненулевой интенсивностью помечены звездами, а один, с близкой к нулю интенсивностью, отмечен кружком.

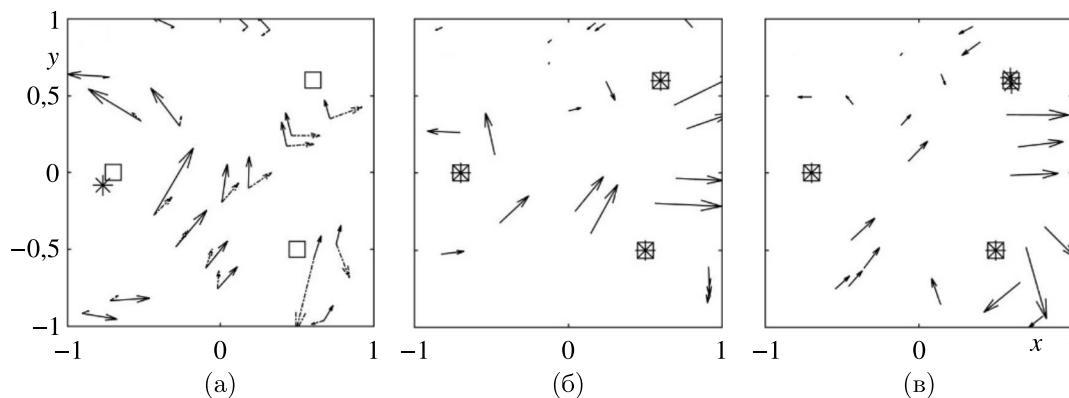


Рис. 3. Результаты расчетов для тестового набора векторов  $P$  для параметров (12б) при использовании в модельной системе (5) различного числа точечных вихрей:  $K = 1$  (а),  $K = 3$  (б),  $K = 4$  (в)

Для тестовой конфигурации (12б) поведение алгоритма аналогично сценариям для (12а) при  $K \geq 3$ . Если  $K = 3$ , то в большинстве расчетов алгоритм сходится к тестовой конфигурации (12б),  $P$  и  $Q$  практически совпадают (см. рис. 3, б). При  $K > 3$ , то есть когда число вихрей в модельной системе превышает их число в тестовой, результатом успешного выполнения алгоритма возможны сценарии: в результирующей конфигурации присутствуют вихри с близкой нулю интенсивностью или несколько вихрей имеют суммарную циркуляцию тестового и расположены в его малой окрестности. Пример такого расчета дан на рис. 3, в, где два вихря совпадают с тестовыми, а в окрестности третьего находится два модельных. Если число вихрей в (5) меньше, чем в (12б), то есть  $K < 3$ , алгоритм во всех проведенных результативных численных экспериментах сходится к модельной системе с векторным полем и вихрями сильно отличающимся от тестовых (см. рис. 3, а), при  $K = 1$ . Результат в этом случае сильно зависит от числа опорных точек, что может свидетельствовать о недостаточном  $K$  в модельной системе.

#### 4.2. Вихрь Рэнкина

Классическим примером вихревого течения на плоскости является вихрь Рэнкина [Lamb, 1932]. Он представляет собой распределенный круглый вихрь с центром в  $(0, 0)$  радиусом  $A$ , постоянной завихренностью  $W$  внутри круга и нулевой вне его. Функция тока течения имеет вид

$$\psi_A = \begin{cases} -\frac{1}{4}Wr^2, & r \leq A, \\ -\frac{1}{4}WA^2\left(1 + 2\ln\frac{r}{A}\right), & r > A, \end{cases} \quad (13)$$

где  $r$  — полярный радиус. Компоненты скорости жидкости, порождаемой вихрем Рэнкина, выражаются через (13):  $v_1(x, y) = \frac{\partial\psi_A}{\partial y}$ ,  $v_2(x, y) = -\frac{\partial\psi_A}{\partial x}$ . Для данной структуры имеет место твердотельное вращение распределенного вихря. Для области внутри круга находится точное решение:  $x(t) = x_0 \cos \frac{At}{2} + y_0 \sin \frac{At}{2}$ ,  $y(t) = -x_0 \sin \frac{At}{2} + y_0 \cos \frac{At}{2}$ . То есть траекториями частиц являются

окружности, определяемые начальным положением. Это означает, что структура линий тока вихря Рэнкина и одного точечного вихря топологически эквивалентна. Более того, выражение  $\psi_A$  в (13) при  $r > A$  отличается от (6) при  $K = 1$  лишь константами.

Алгоритм идентификации был применен к тестовым наборам векторов  $P$ , порожденных вихрем Рэнкина (13). Рассматривался вихрь радиусом  $A = 1$  с  $W = 1$ . При таких значениях параметров общая циркуляция вихря  $-\Gamma = 2\pi \approx 6,2832$ . В области  $D = [-2 \leq x \leq 2, -2 \leq y \leq 2]$  задавались три вида случайно распределенных тестовых наборов  $P$  при  $N = 20$ : а) все векторы находятся вне ядра вихря; б) векторы распределены во всей области  $D$ ; в) все векторы имеют начала в опорных точках, для которых  $r \leq A$ .

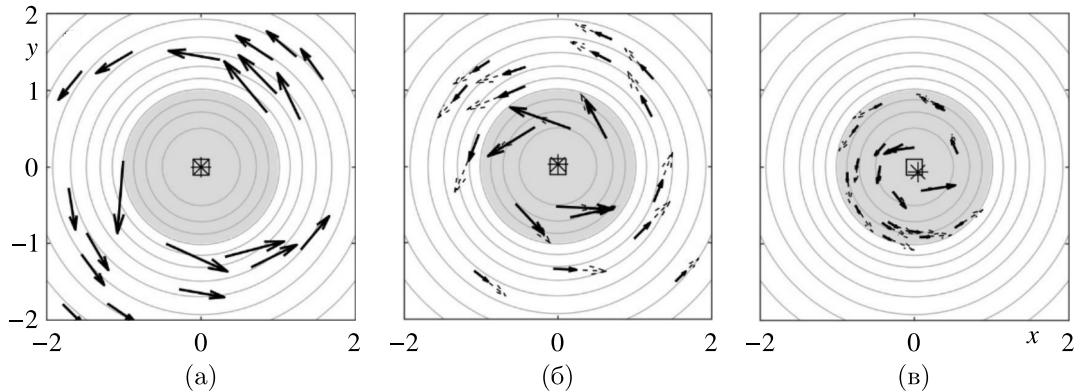


Рис. 4. Результаты расчетов для вихря Рэнкина (13) при использовании системы (5) при  $K = 1$ . В наборе  $P$  все векторы вне ядра вихря (а); векторы распределены во всей области (б); все векторы в ядре (в)

На рис. 4 даны результаты идентификации для  $K = 1$  и при начальном приближении для параметров модельной системы (5)  $G_{(0)} = \{(\omega_1^{(0)} = 1, x_1^{(0)} = -0,8, y_1^{(0)} = 0,2)\}$ . Тестовые векторы  $P$  изображены пунктирными линиями, полученные векторы  $Q$  — сплошными, центр вихря Рэнкина обозначен квадратом, вычисленный центр точечного вихря — звездой, круг серого цвета соответствует распределенному вихрю, а концентрические окружности — линии тока жидких частиц в поле (13). Если все векторы имеют начала в опорных точках вне вихря, имела место сходимость алгоритма к параметрам модельной системы в подавляющем большинстве расчетов. Векторы наборов  $P$  и  $Q$  практически совпадали, положение точечного вихря находилось в центре вихря Рэнкина, а  $\omega_1 \approx \Gamma$ . На рис. 4, а векторы соответствуют системе (5) с найденными параметрами модельного вихря  $(\omega_1, x_1, y_1) = (6,2793, 0,0000, 0,0000)$ . Если часть векторов находится внутри вихря Рэнкина, то координаты найденного точечного вихря также близки к  $(0, 0)$ , но его циркуляция отличается от  $\Gamma$  и тем сильнее, чем больше вихрей имеют координаты начала с  $r \leq A$ . На рис. 4, б модельное векторное поле имеет параметры  $(\omega_1, x_1, y_1) = (5,1613, 0,0022, 0,0289)$ , а на рис. 4, в, когда все векторы находятся в области вихря,  $(\omega_1, x_1, y_1) = (3,7839, 0,0423, -0,0667)$ . Аналогичные результаты были получены и для других  $A, W, N$ . Проводились вычисления и для модельных систем при  $K > 1$  и с опорными точками во всей  $D$ . Оказалось, что если в качестве модельной использовать систему трех и более вихрей, то сходимость алгоритма сильно ухудшается. При  $K = 2$  сценарии сходимости аналогичны сценариям для тестовой системы (5) (см. предыдущий раздел).

### 4.3. Диполь Чаплыгина — Ламба

Диполи, состоящие из двух близко расположенных вихрей разной ориентации, являются фундаментальными течениями идеальной жидкости. Известные диполи Ламба [Lamb, 1932] и Чаплыгина [Чаплыгин, 1903] получены аналитически, а течения со сходными характеристиками наблюдаются в экспериментах и природе. Вихревая структура является кругом радиусом  $R$ .

Завихренность за пределами круга равна нулю. Внутренность круга состоит из двух половин с разнонаправленными вихрями. Эта конфигурация имеет нулевую суммарную интенсивность, движется по плоскости вдоль вертикальной оси со скоростью  $U$ . Функция тока диполя имеет вид

$$\psi_L = \begin{cases} -\frac{2UJ_1(\lambda r)}{\lambda J_0(\lambda R)} \cos \theta, & r \leq R, \\ U\left(r - \frac{R^2}{r}\right) \cos \theta, & r > R. \end{cases} \quad (14)$$

В (14)  $r, \theta$  — полярные координаты на плоскости,  $J_i$  — функции Бесселя первого типа  $i$ -го порядка,  $\lambda$  выбирается так, чтобы произведение  $\lambda R = 3,831\dots$ , что обусловлено условием гладкости поля завихренности. Результаты лабораторных и вычислительных экспериментов позволяют предполагать, что диполь устойчив относительно широкого класса возмущений.

Проведены тестовые расчеты для идентификации диполя. Вычисления проводились для  $U = 1, R = 1$  в области  $D = [-2 \leq x \leq 2, -2 \leq y \leq 2]$ . При этих параметрах центры вихрей диполя имеют координаты  $(-0,4810, 0)$  и  $(0,4810, 0)$ . Набор  $P$  формировали  $N = 25$  случайно распределенных опорных точек, векторы скорости течения в них определялись согласно (14).

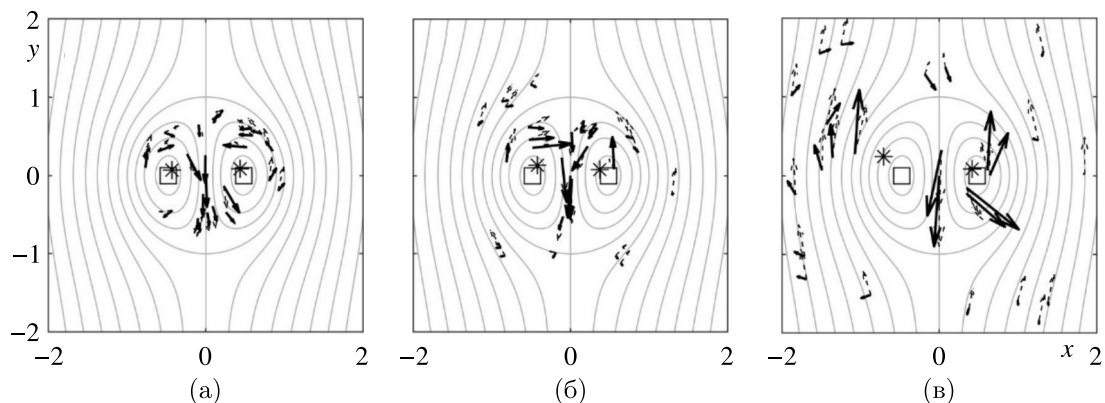


Рис. 5. Результаты трех расчетов для диполя Чаплыгина–Ламба (14) при использовании модельной системы (5),  $K = 2$ . В наборе  $P$  все векторы — внутри ядра вихря (а); векторы распределены в окрестности ядра диполя (б); векторы распределены во всей области (в)

Результаты вычислений даны на рис. 5. Линии тока частиц в поле скорости диполя изображены серыми кривыми, центры вихрей помечены квадратами, векторы  $P$  показаны пунктирной линией, полученные модельные вихри отмечены звездами, а векторы  $Q$  — жирными линиями. Использовалась модельная система (5) при  $K = 2$  с начальным приближением  $G_{(0)} = \{(\omega_1^{(0)} = -1, x_1^{(0)} = -0,8, y_1^{(0)} = 0,2), (\omega_1^{(0)} = 1, x_1^{(0)} = 0,2, y_1^{(0)} = 0)\}$ . В первой серии вычислений опорные точки выбирались случайно внутри области двух вихрей диполя. Почти во всех расчетах алгоритм сходился к системе двух вихрей. Пример результатов дан на рис. 5, а, где найденные модельные точечные вихри имеют параметры  $(\omega_1, x_1, y_1) = (-4,1834, -0,4329, 0,0673)$ ,  $(\omega_2, x_2, y_2) = (5,0280, 0,4366, 0,0843)$ . Видно, что их координаты близки к координатам центров вихрей диполя. Если опорные точки выбирать не только внутри ядра диполя, но и в его окрестности (см. рис. 5, б), сходимость алгоритма ухудшается, а при успешном расчете параметры точечных вихрей отличаются от характеристик центров диполя. Для рис. 5, б это  $(\omega_1, x_1, y_1) = (-4,7434, -0,4178, 0,1321)$ ,  $(\omega_2, x_2, y_2) = (3,6976, 0,3718, 0,0755)$ . Отметим, что значения циркуляции модельных точечных вихрей в обоих случаях существенно отличаются. Если опорные точки распределены во всей  $D$ , то для большинства рассмотренных наборов  $P$  алгоритм не сходится, шаг метода спуска становится малым или превышает максимальное число итераций.

При сходимости полученные конфигурации точечных вихрей при этом сильно отличаются для разных  $P$  (один из вариантов см. на рис. 5, в).

## 5. Заключение и обсуждение

В статье развит алгоритм для определения структуры и параметров плоской вихревой конфигурации по конечному (малому) набору известных векторов скорости течения с помощью математической модели системы точечных вихрей. Такая постановка задачи идентификации далека от строго математически корректной, так как практически всегда найдется набор векторов, для которого это сделать не удастся, но проведенное в работе исследование демонстрирует эффективность алгоритма в большинстве рассмотренных случаев. Алгоритм основан на минимизации в пространстве параметров математической модели целевого функционала, оценивающего близость исходного и модельного наборов векторов. В статье предложен вид целевого функционала, модифицированный метод градиентного спуска Нестерова адаптирован для задачи идентификации вихревой структуры, сформулированы условия выбора опорных точек для сокращения влияния дефекта модельной системы.

Проведено численное экспериментальное исследование алгоритма на основе идентификации тестовых течений с известными аналитическими выражениями для поля скорости жидкости. Рассматривались системы точечных вихрей, распределенных вихря Рэнкина и вихревого диполя Чаплыгина – Ламба. Для идентификации конфигураций использовались порождаемые тестовыми течениями наборы векторов скорости, расположенных в случайно распределенных наборах опорных точек. Алгоритм продемонстрировал эффективную сходимость в том случае, когда опорные точки выбирались в областях, где линии тока тестовой и модельной систем топологически эквивалентны. Для такой ситуации метод имеет широкую область сходимости в пространстве параметров модели. Это имело место для тестовых систем точечных вихрей, вихря Рэнкина и области внутри ядра диполя Чаплыгина – Ламба. При сходимости алгоритма полученные координаты вихрей модельной системы близки к координатам центров вихрей тестовых конфигураций, как и значения их интенсивностей. Если линии тока тестовой и модельной систем топологически различны, то процент удачных расчетов существенно ниже и может быть равен нулю. Оказалось, что сходимость метода в большей степени зависит от расположения, чем от количества опорных точек (векторов). Наилучшие результаты алгоритм показал при идентификации одного вихря. Таким образом, развитый в статье алгоритм может быть эффективно применен для идентификации плоских вихрей, если информация о векторах скорости течения относится к окрестности их ядер. Это утверждение основывается на том, что структура линий тока в окрестности ядер вихрей топологически эквивалентна линиям в окрестности точечного вихря. Алгоритм может быть использован и для конфигураций из нескольких вихрей, но при условии топологической близости векторных полей модельной и идентифицируемой структур.

В статье предложены достаточно простой вариант алгоритма и примеры его применения, но описанные подходы можно использовать при решении более сложных задач. Предложенный метод может быть развит по многим направлениям. Эффективная идентификация одного вихревого пятна совместно с алгоритмами скользящего сканирования может использоваться для поиска вихревых пятен в области течения. Еще один возможный путь состоит в усовершенствовании вида целевого функционала, характеризующего близость двух наборов векторов. Это может включать использование иных видов зависимостей и характеристик, настройку весовых коэффициентов. Для идентификации весовых коэффициентов могут применяться методы машинного обучения, которые показывают хорошие результаты при решении проблем распознавания образов. Ускорить алгоритм можно с помощью применения эффективных численных схем безусловной минимизации, например метода Ньютона. Предложенный подход может быть реализован с использованием других математических моделей вихревой динамики.

## Список литературы (References)

- Волков К. Н., Емельянов В. Н., Тетерина И. В., Яковчук М. С. Визуализация вихревых течений в вычислительной газовой динамике // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 2017. — Т. 57, № 8. — С. 1374–1391.  
*Volkov K.N., Emel'yanov V.N., Teterina I.V., Yakovchuk M.S.* Visualization of vortical flows in computational fluid dynamics // *Comput. Math. Math. Phys.* — 2017. — Vol. 57, No. 8. — P. 1360–1375. — <https://doi.org/10.1134/S0965542517080139> (Original Russian paper: *Volkov K.N., Emel'yanov V.N., Teterina I.V., Yakovchuk M.S.* Vizualizatsiyavikh revykh techenii v vychislitel'noi gazovoi dinamike // *Zh. vychisl. matem. i matem. fiz.* — 2017. — Vol. 57, No. 8. — P. 1374–1391.)
- Гешев П. И., Черных А. И. Движение вихрей в двумерной ограниченной области // Теплофизика и аэромеханика. — 2018. — № 6. — С. 841–854.  
*Geshev P.I., Chernykh A.I.* The motion of vortices in a two-dimensional bounded region // *Thermophysics and Aeromechanics.* — 2018. — Vol. 25, No. 6. — P. 809–822. — <https://doi.org/10.1134/S0869864318060033> (Original Russian paper: *Geshev P.I., Chernykh A.I.* Dvizhenie vikhrei v dvumernoi ogranichennoi oblasti // *Teplofizika i aeromekhanika.* — 2018. — No. 6. — P. 841–854.)
- Говорухин В. Н. Алгоритм идентификации вихревых пятен на основе моделей точечных вихрей // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Сер. Естественные науки. — 2020. — № 3 (207). — С. 11–18. — <https://doi.org/10.18522/1026-2237-2020-3-11-18>  
*Govorukhin V.N.* Algorithm identifikatsii vikhrevykh pyaten na osnove modelej tochechnykh vikhrei [An algorithm of vortex patches identification based on models of point vortices] // *Izv. vuzov. Severo-Kavkazskiy region. Estestvennyye nauki* [Bulletin of Higher Educational Institutions. North Caucasus Region. Natural Sciences]. — 2020. — No. 3. — P. 11–18 (in Russian).
- Говорухин В. Н. Вариант метода вихрей в ячейках для расчета плоских течений идеальной несжимаемой жидкости // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 2011. — Т. 51, № 6. — С. 1133–1147.  
*Govorukhin V.N.* A vortex method for computing two-dimensional inviscid incompressible flows // *Comput. Math. Math. Phys.* — 2011. — Vol. 51, No. 6. — P. 1061–1073. — <https://doi.org/10.1134/S096554251106008X> (Original Russian paper: *Govorukhin V.N.* Variant metoda vikhrei v yacheikakh dlya rascheta ploskikh techenii ideal'noi neszhimaemoi zhidkosti // *Zh. vychisl. matem. i matem. fiz.* — 2011. — Vol. 51, No. 6. — P. 1133–1147.)
- Говорухин В. Н. Численный анализ динамики распределенных вихревых конфигураций // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 2016. — Т. 56, № 8. — С. 1491–1505.  
*Govorukhin V.N.* Numerical analysis of the dynamics of distributed vortex configurations // *Comput. Math. Math. Phys.* — 2016. — Vol. 56, No. 8. — P. 1474–1487. — <https://doi.org/10.7868/S004446691608007X> (Original Russian paper: *Govorukhin V.N.* Chislennyi analiz dinamiki raspredelennykh vikhrevykh konfiguratsii // *Zh. vychisl. matem. i matem. fiz.* — 2016. — Vol. 56, No. 8. — P. 1491–1505.)
- Говорухин В. Н., Филимонова А. М. Анализ структуры плоских вихревых течений и их изменений во времени // Вычислительная механика сплошных сред. — 2021. — Т. 14, № 4. — С. 367–376. — <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2021.14.4.30>  
*Govorukhin V.N., Filimonova A.M.* Analiz struktury ploskikh vikhrevykh techenii i ikh izmenenii vo vremeni [Analysis of the structure of vortex planar flows and their changes with time] // *Computational Continuum Mechanics.* — 2021. — Vol. 14, No. 4. — P. 367–376. — <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2021.14.4.30> (in Russian).
- Куликов Ю. М., Сон Э. Е. Применение схемы «КАБАРЕ» к задаче об эволюции свободного сдвигового течения // Компьютерные исследования и моделирование. — 2017. — Т. 9, № 6. — С. 881–903.  
*Kulikov Yu.M., Son E.E.* Primenenie skhemy “KABARE” k zadache ob evolyucii svobodnogo sdvigovogo techeniya [CABARET scheme implementation for free shear layer modeling] // *Computer Research and Modeling.* — 2017. — Vol. 9, No. 6. — P. 881–903 (in Russian).
- Нестеров Ю. Е. Метод решения задач выпуклого программирования с трудоемкостью  $O\left(\frac{1}{k^2}\right)$  // Докл. АН СССР. — 1983. — Т. 269, № 3. — С. 543–547.  
*Nesterov Yu.E.* A method of solving a convex programming problem with convergence rate  $O\left(\frac{1}{k^2}\right)$  // *Sov. Math. Dokl.* — 1983. — Vol. 27. — P. 372–376. (Original Russian paper: *Nesterov Yu.E.* Metod resheniyaz zadach vypuklogo programmirovaniyas trudnoemkost'yu  $O\left(\frac{1}{k^2}\right)$  // *Dokl. AN SSSR.* — 1983. — Vol. 269, No. 3. — P. 543–547.)
- Чаплыгин С. А. Один случай вихревого движения жидкости // Труды отд. физ. наук Императ. Моск. общ. любителей естествознания. — 1903. — Т. 11, № 2. — С. 11–14.  
*Chaplygin S.A.* Odin sluchay vikhrevogo dvizheniya zhidkosti [One case of vortex motion in fluid] // *Trans. Phys. Sect. Imperial Moscow Soc. Friends of Natural Sciences.* — 1903. — Vol. 11, No. 2. — P. 11–14 (in Russian).



- Bai X., Cheng H., Ji B., Long X., Qian Zh., Peng X. Comparative study of different vortex identification methods in a tip-leakage cavitating flow // *Ocean Engineering*. — 2020. — Vol. 207. — 107373. — <https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2020.107373>
- Batchelor G. An introduction to fluid dynamics. — Cambridge University Press, 1967.
- Bremer P.-T., Gruber A., Bennett J.C., Gyulassy A., Kolla H., Chen J.H., Grout R.W. Identifying turbulent structures through topological segmentation // *Communications in Applied Mathematics and Computational Science*. — 2016. — Vol. 11, No. 1. — P. 37–53. — <https://doi.org/10.2140/camcos.2016.11.37>
- Chai J., Fang L. Late dynamics of large-scale vortices in periodic two-dimensional flows // *Physics Letters A*. — 2022. — Vol. 426. — 127889. — <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2021.127889>
- Chakraborty P., Balachandar S., Adrian R.J. On the relationships between local vortex identification schemes // *Journal of Fluid Mechanics*. — 2005. — Vol. 535. — P. 189–214. — <https://doi.org/10.1017/S0022112005004726>
- Connor J.J., Brebbia C.A. Finite element techniques for fluid flow. — London: Newnes-Butterworths, 1976.
- Cottet G.H., Koumoutsakos P.D. Vortex methods: theory and practice. — Cambridge: Cambridge University Press, 2000.
- Gawlik E.S., Gay-Balmaz F. A conservative finite element method for the incompressible Euler equations with variable density // *Journal of Computational Physics*. — 2020. — Vol. 412. — 109439. — <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2020.109439>
- Geldhauser C., Romito M. The point vortex model for the Euler equation // *J. AIMS Mathematics*. — 2019. — Vol. 4, No. 3. — P. 534–575. — <https://doi.org/10.3934/math.2019.3.534>
- Giagkiozis I., Fedun V., Scullion E., Jess D.B., Verth G. Vortex flows in the solar atmosphere: automated identification and statistical analysis // *Astrophysical Journal*. — 2018. — Vol. 869, No. 2. — Art. 169. — <https://doi.org/10.3847/1538-4357/aaf797>
- Govorukhin V.N. An extended and improved particle-spectral method for analysis of unsteady inviscid incompressible flows through a channel of finite length // *Int. J. Numer. Meth. Fluids*. — 2023. — Vol. 95, No. 4. — P. 579–602. — <https://doi.org/10.1002/flid.5163>
- Lamb H. Hydrodynamics. — Cambridge University Press, 1932.
- Leonard A. Vortex methods for flow simulation // *J. of Computational Physics*. — 1980. — Vol. 37, Iss. 3. — P. 289–335. — [https://doi.org/10.1016/0021-9991\(80\)90040-6](https://doi.org/10.1016/0021-9991(80)90040-6)
- Li H., Liu Y., Wang D., Xu H. Liutex (vortex) core and tube identification and automatic generation algorithms // *Computers & Fluids*. — 2023. — Vol. 250. — 105731. — <https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2022.105731>
- Marchioro C. Point vortices and localization in Euler flows // *Vortex flows and related numerical methods* / J.T. Beale, G.H. Cottet, S. Huberson (eds.). — NATO ASI Series. — Vol. 395. — Dordrecht: Springer, 1993. — [https://doi.org/10.1007/978-94-015-8137-0\\_6](https://doi.org/10.1007/978-94-015-8137-0_6)
- Mimeau C., Mortazavi I. A review of vortex methods and their applications: from creation to recent advances // *Fluids*. — 2021. — Vol. 6. — Art. 68. — <https://doi.org/10.3390/fluids6020068>
- Roache P.J. Fundamentals of computational fluid dynamics. — Hermosa Publishers, 1998.
- Tian Sh., Fu H., Xia J., Yang Y. A vortex identification method based on local fluid rotation // *Physics of Fluids*. — 2020. — Vol. 32. — 015104. — <https://doi.org/10.1063/1.5133815>
- Velasco Fuentes O.U., Van Heijst G.J.F., Van Lipzig N.P.M. Unsteady behaviour of a topography-modulated tripole // *J. Fluid Mech*. — 1996. — Vol. 307. — P. 11–41. — <https://doi.org/10.1017/s002211209600002x>
- Villat H. Leçons sur la théorie des tourbillons [Lessons on vortex theory]. — Paris: Gauthier-Villiers, 1930.
- Zhang Y., Liu K., Xian H., Du X. A review of methods for vortex identification in hydroturbines // *Renewable and Sustainable Energy Reviews*. — 2018. — Vol. 81, Part 1. — P. 1269–1285. — <https://doi.org/10.1016/j.rser.2017.05.058>