

УДК: 519.622.2 + 681.5.015

Параметрическая идентификация динамических систем на основе внешних интервальных оценок фазовых переменных

А. Ю. Морозов^{1,a}, Д. Л. Ревизников^{1,2,b}

¹Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, Россия, 119333, г. Москва, ул. Вавилова, д. 44, корп. 2

²Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» (МАИ), Россия, 125993, г. Москва, Волоколамское ш., д. 4, А-80, ГСП-3

E-mail: ^a morozov@infway.ru, ^b reviznikov@mai.ru

Получено 22.11.2022, после доработки — 16.02.2024.

Принято к публикации 01.03.2024.

Важную роль при построении математических моделей динамических систем играют обратные задачи, к которым, в частности, относится задача параметрической идентификации. В отличие от классических моделей, оперирующих точечными значениями, интервальные модели дают ограничения сверху и снизу на исследуемые величины. В работе рассматривается интерполяционный подход к решению интервальных задач параметрической идентификации динамических систем для случая, когда экспериментальные данные представлены внешними интервальными оценками. Цель предлагаемого подхода заключается в нахождении такой интервальной оценки параметров модели, при которой внешняя интервальная оценка решения прямой задачи моделирования содержала бы экспериментальные данные или минимизировала бы отклонение от них. В основе подхода лежит алгоритм адаптивной интерполяции для моделирования динамических систем с интервальными неопределенностями, позволяющий в явном виде получать зависимость фазовых переменных от параметров системы. Сформулирована задача минимизации расстояния между экспериментальными данными и модельным решением в пространстве границ интервальных оценок параметров модели. Получено выражение для градиента целевой функции. На репрезентативном наборе задач продемонстрированы эффективность и работоспособность предлагаемого подхода.

Ключевые слова: обратные задачи, параметрическая идентификация, интервальные оценки, интервальные параметры, динамические системы, обыкновенные дифференциальные уравнения, алгоритм адаптивной интерполяции, градиентный спуск

UDC: 519.622.2 + 681.5.015

Parametric identification of dynamic systems based on external interval estimates of phase variables

A. Yu. Morozov^{1,a}, D. L. Reviznikov^{1,2,b}

¹Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences,
44/2 Vavilov st., Moscow, 119333, Russia

²Moscow Aviation Institute (National Research University) (MAI),
4 Volokolamskoe highway, Moscow, 125993, Russia

E-mail: ^a morozov@infway.ru, ^b reviznikov@mai.ru

*Received 22.11.2022, after completion — 16.02.2024.
Accepted for publication 01.03.2024.*

An important role in the construction of mathematical models of dynamic systems is played by inverse problems, which in particular include the problem of parametric identification. Unlike classical models that operate with point values, interval models give upper and lower boundaries on the quantities under study. The paper considers an interpolation approach to solving interval problems of parametric identification of dynamic systems for the case when experimental data are represented by external interval estimates. The purpose of the proposed approach is to find such an interval estimate of the model parameters, in which the external interval estimate of the solution of the direct modeling problem would contain experimental data or minimize the deviation from them. The approach is based on the adaptive interpolation algorithm for modeling dynamic systems with interval uncertainties, which makes it possible to explicitly obtain the dependence of phase variables on system parameters. The task of minimizing the distance between the experimental data and the model solution in the space of interval boundaries of the model parameters is formulated. An expression for the gradient of the objective function is obtained. On a representative set of tasks, the effectiveness of the proposed approach is demonstrated.

Keywords: inverse problems, parametric identification, interval estimates, interval parameters, dynamical systems, ordinary differential equations, adaptive interpolation algorithm, gradient descent

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2024, vol. 16, no. 2, pp. 299–314 (Russian).

1. Введение

Для данных, полученных в процессе проведения некоторого эксперимента, является характерным наличие разброса [Schenck, 1968; Martyshov et al., 2020]. Это может быть связано как с погрешностями измерений, так и с невозможностью полного исключения влияния внешних факторов на эксперимент. Наиболее простым описанием неопределенности является интервальная оценка возможных значений. В этом случае при выполнении дальнейшего анализа и построении соответствующей математической модели необходимо использовать интервальный аппарат [Moore, 1966; Moore, Kearfott, Cloud, 2009; Шарый, 2019; Добронев, 2007; Nedialkov, Jackson, Pryce, 2001; Shary, 2001].

Задача параметрической идентификации возникает, когда математическая модель изучаемого процесса уже определена, но неизвестными остаются ее параметры. Традиционно решение данной задачи сводится к минимизации некоторой целевой функции, характеризующей отклонение модельных данных от экспериментальных.

Существует ряд публикаций по интервальным обратным задачам. Работа [Дилигенская, Самокиш, 2020] посвящена развитию методов параметрической идентификации, применяемых для решения обратных задач теплофизики в условиях интервальной неопределенности параметров, на основе нейронных сетей. В диссертационном исследовании [Петрикевич, 2006] предлагается структурно-параметрическая идентификация линейных (либо допускающих линеаризацию) динамических объектов по интервальным исходным данным. В [Xiao, Fedele, Muhanna, 2013] представлен итеративный интервальный метод для прогнозирования границ параметров заданной модели в условиях неопределенности измеренных данных.

Общая теория обратных задач представлена в известных монографиях [Тихонов, Арсенин, 1974; Денисов, 1994; Кабанихин, 2009; Самарский, Вабищевич, 2009]. Вопросам решения обратных задач в таких важных областях, как электроника, аэрокосмическая отрасль, вычислительная астрофизика и т. д., посвящены работы [Абгарян, Носков, Ревизников, 2017; Nenarokomov et al., 2019; Кабанихин, Куликов, Шишленин, 2020].

Наиболее часто математические модели динамических систем формулируются в виде систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), поэтому далее рассматриваются именно такие модели.

В настоящей работе выполняется обобщение ранее разработанного подхода [Морозов, Ревизников, 2022] на случай интервальных экспериментальных данных. Рассматриваемая задача сводится к минимизации расстояния между внешней интервальной оценкой решения системы ОДУ и известными интервальными оценками фазовых переменных в пространстве границ интервальных оценок параметров системы. Получено выражение градиента целевой функции для дальнейшего применения методов оптимизации первого порядка. При этом, в отличие от традиционных подходов, здесь не требуется дополнительного интегрирования исходной системы ОДУ для вычисления градиентов. Решение прямых интервальных задач в процессе минимизации целевой функции выполняется с помощью ранее разработанного, теоретически обоснованного и апробированного на прикладных задачах алгоритма адаптивной интерполяции [Морозов, Ревизников, 2018; Морозов, Журавлев, Ревизников, 2020; Морозов, Ревизников, Гидаспов, 2018].

Алгоритм адаптивной интерполяции относится к группе методов, определяющих явную зависимость решения задачи от значений интервальных параметров. Данная группа методов включает в себя символьные методы [Makino, Berz, 2017; Nataraj, Sundur, 2011; Роголев, 2003] и полиномиальные методы [Fu et al., 2019; Fu et al., 2020]. Используемый алгоритм относится к полиномиальным методам. Для решения задач с большим числом интервальных неопределенностей в работах [Гидаспов, Морозов, Ревизников, 2021; Morozov, Zhuravlev, Reviznikov,

2021; Морозов, Ревизников, 2021] рассматриваются модификации алгоритма на основе разреженных сеток [Смоляк, 1963; Bungartz, Griebel, 2004; Gerstner, Griebel, 2008] и тензорных поездов [Oseledets, 2011; Oseledets, Tyrtyshnikov, 2010]. В приведенных далее численных примерах использовалась модификация алгоритма с использованием разреженных сеток.

Процесс поиска границ интервальных оценок параметров системы начинается с их инициализации произвольными значениями и решением прямой задачи (квазиреальный эксперимент). Для каждой фазовой переменной в каждый момент времени, в котором известна экспериментальная информация, решаются две задачи минимизации расстояния между модельной интервальной оценкой, полученной в процессе работы алгоритма адаптивной интерполяции, и каждой из границ известной (экспериментальной) интервальной оценки. Рассматриваются прообразы точек минимума в пространстве параметров. Область неопределенности представляет собой многомерный прямоугольный параллелепипед, каждая грань которого соответствует нижней или верхней границе соответствующего интервала. Граница интервала сдвигается в сторону увеличения ширины, если на грани оказывается хотя бы один прообраз точки минимума, и в сторону уменьшения ширины, если все прообразы точек минимума на грани не лежат. Степень изменения границ интервалов напрямую зависит от градиента целевой функции. Далее снова решается прямая задача и т. д., до тех пор, пока интервальные оценки параметров не сойдутся.

2. Постановка задачи

Предположим, что математическая модель исследуемого процесса задается в виде автономной системы ОДУ, состоящей из n уравнений с m интервальными параметрами:

$$\begin{cases} \frac{dy_i(t)}{dt} = f_i(y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t), \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m), \\ y_i(t_0) = y_i^0, \quad i = 1, \dots, n, \\ \theta_j \in [\underline{\theta}_j, \overline{\theta}_j], \quad j = 1, \dots, m, \\ t \in [t_0, t_K], \end{cases}$$

где $\underline{\theta}_j \leq \overline{\theta}_j$, $j = 1, \dots, m$, — нижние и верхние границы интервальных неопределенностей, t_0 — начальный момент времени, t_K — конечный момент времени. Для каждого набора вещественных значений $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m$ вектор-функция $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_n)^T$ удовлетворяет всем условиям, обеспечивающим единственность и существование решения соответствующей неинтервальной задачи Коши. Будем полагать, что \mathbf{f} имеет непрерывные производные по всем аргументам. Отметим, что интервальные неопределенности могут содержаться не только в параметрах, но и в начальных условиях, в этом случае все рассуждения будут аналогичными.

Внешняя интервальная оценка решения исходной системы ОДУ в каждый момент времени t_k может быть представлена в виде прямого произведения интервальных оценок значений фазовых переменных:

$$\begin{aligned} Y^k &= [\underline{y}_1^k, \overline{y}_1^k] \times [\underline{y}_2^k, \overline{y}_2^k] \times \dots \times [\underline{y}_n^k, \overline{y}_n^k], \\ \underline{y}_i^k &= \min_{\xi_j \in [\underline{\theta}_j, \overline{\theta}_j], j=1, \dots, m} [y_i^k(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)], \\ \overline{y}_i^k &= \max_{\xi_j \in [\underline{\theta}_j, \overline{\theta}_j], j=1, \dots, m} [y_i^k(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)], \quad i = 1, \dots, n, \end{aligned}$$

где $y_i^k(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m) = y_i(t_k)$, $i = 1, \dots, n$, — решение следующей неинтервальной системы ОДУ:

$$\begin{cases} y_i'(t) = f_i(y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t), \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m), \\ y_i(t_0) = y_i^0, \quad i = 1, \dots, n, \\ t \in [t_0, t_k]. \end{cases} \quad (1)$$

Пусть известны K экспериментальных интервальных оценок фазовых переменных:

$$\widehat{Y}^k = [\underline{y}_1^k, \overline{y}_1^k] \times [\underline{y}_2^k, \overline{y}_2^k] \times \dots \times [\underline{y}_n^k, \overline{y}_n^k], \quad k = 1, \dots, K.$$

Интервальная задача параметрической идентификации заключается в нахождении таких границ интервалов $\underline{\theta}_j \leq \overline{\theta}_j$, $j = 1, \dots, m$, чтобы $\widehat{Y}^k \subseteq Y^k$, $k = 1, \dots, K$, или чтобы степень непересечения множеств \widehat{Y}^k и Y^k , $k = 1, \dots, K$, была минимальна.

Для нахождения границ интервальных оценок параметров выполняется переход к задаче минимизации отклонения модельного решения от экспериментальных данных. Минимизируется следующая целевая функция:

$$J(\underline{\theta}_1, \overline{\theta}_1, \underline{\theta}_2, \overline{\theta}_2, \dots, \underline{\theta}_m, \overline{\theta}_m) = \sum_{k=1}^K \rho(Y^k, \widehat{Y}^k), \quad (2)$$

где $\rho(Y^k, \widehat{Y}^k)$ характеризует степень непересечения множеств Y^k и \widehat{Y}^k , и если $\widehat{Y}^k \subseteq Y^k$, то $\rho(Y^k, \widehat{Y}^k) = 0$. Так как Y^k и \widehat{Y}^k являются многомерными прямоугольными параллелепипедами, то в качестве ρ удобно использовать сумму квадратов расстояний по каждому измерению i между интервалом $[\underline{y}_i^k, \overline{y}_i^k]$ и каждой из границ интервала $[\underline{y}_i^k, \overline{y}_i^k]$, $i = 1, \dots, n$:

$$\rho(Y^k, \widehat{Y}^k) = \sum_{i=1}^n w_i \left[\rho([\underline{y}_i^k, \overline{y}_i^k], \underline{y}_i^k)^2 + \rho([\underline{y}_i^k, \overline{y}_i^k], \overline{y}_i^k)^2 \right],$$

где w_i — веса, которые позволяют учесть разную природу фазовых переменных (далее для удобства будем считать, что $w_i = 1$), $\rho([\underline{y}_i^k, \overline{y}_i^k], b)$ — расстояние между интервалом $[\underline{y}_i^k, \overline{y}_i^k]$ и скаляром b :

$$\rho([\underline{y}_i^k, \overline{y}_i^k], b) = \begin{cases} \underline{y}_i^k - b, & b < \underline{y}_i^k, \\ 0, & \underline{y}_i^k \leq b \leq \overline{y}_i^k, \\ b - \overline{y}_i^k, & \overline{y}_i^k < b, \end{cases}$$

или по-другому:

$$\rho([\underline{y}_i^k, \overline{y}_i^k], b) = \min_{y_i \in [\underline{y}_i^k, \overline{y}_i^k]} |y_i - b|. \quad (3)$$

Как будет видно в дальнейшем, при построении градиента целевой функции ключевую роль играют прообразы точек минимума (3) в пространстве параметров. Поэтому важным является явное представление $y^k(\xi) = (y_1^k(\xi), y_2^k(\xi), \dots, y_n^k(\xi))^T$, где $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)$, $\xi_j \in [\underline{\theta}_j, \overline{\theta}_j]$, $j = 1, \dots, m$, которое возможно получить с помощью алгоритма адаптивной интерполяции.

В этом случае при вычислении $\rho\left(\left[\underline{y}_i^k, \overline{y}_i^k\right], b\right) = \min_{\xi_j \in [\underline{\theta}_j, \overline{\theta}_j], j=1, \dots, m} |y_i(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m) - b|$ минимизацию в пространстве параметров градиентными методами можно выполнять без интегрирования дополнительных систем к системе (1). Целевая функция (2) примет итоговый вид:

$$J\left(\underline{\theta}_1, \overline{\theta}_1, \underline{\theta}_2, \overline{\theta}_2, \dots, \underline{\theta}_m, \overline{\theta}_m\right) = \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^n \left[\min_{\xi \in Q} \left[y_i^k(\xi) - \underline{y}_i^k \right]^2 + \min_{\xi \in Q} \left[y_i^k(\xi) - \overline{y}_i^k \right]^2 \right], \quad (4)$$

где $Q = \left[\underline{\theta}_1, \overline{\theta}_1\right] \times \left[\underline{\theta}_2, \overline{\theta}_2\right] \times \dots \times \left[\underline{\theta}_m, \overline{\theta}_m\right]$ – область неопределенности параметров.

Отметим, что целью предлагаемого подхода является не нахождение границ минимальной интервальной оценки параметров, а только определение таких значений $\underline{\theta}_1, \overline{\theta}_1, \underline{\theta}_2, \overline{\theta}_2, \dots, \underline{\theta}_m, \overline{\theta}_m$, при которых внешняя интервальная оценка решения исходной задачи будет полностью покрывать экспериментальные интервальные оценки фазовых переменных или минимизировать степень пересечения между ними. Тем не менее, если очевидным образом можно уменьшить получаемые интервальные оценки параметров, эта процедура выполняется.

При оптимизации моделей часто возникает вопрос количества идентифицируемых параметров. В данном случае надо учитывать, что уменьшение количества варьируемых параметров в модели снижает ее гибкость, и при решении задачи параметрической идентификации в интервальной постановке это может приводить к росту ширины получаемых интервалов. Кроме этого, отметим, что увеличение числа экспериментальных точек, как правило, ведет к уточнению границ интервалов.

3. Методы решения

В качестве численных методов оптимизации полученной целевой функции будем использовать методы первого порядка [Gill, Murray, Wright, 1981; Пантелеев, Летова, 2005; Shary, 2008]. Этот класс методов требует вычисления градиента ∇J .

Для удобства изложения введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} J_i^k(\xi) &= \left[y_i^k(\xi) - \underline{y}_i^k \right]^2, \\ \overline{J}_i^k(\xi) &= \left[y_i^k(\xi) - \overline{y}_i^k \right]^2, \end{aligned} \quad (5)$$

запишем целевую функцию (4) с их учетом:

$$J\left(\underline{\theta}_1, \overline{\theta}_1, \underline{\theta}_2, \overline{\theta}_2, \dots, \underline{\theta}_m, \overline{\theta}_m\right) = \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^n \left[\min_{\xi \in Q} J_i^k(\xi) + \min_{\xi \in Q} \overline{J}_i^k(\xi) \right]. \quad (6)$$

Для того чтобы вычислить градиент ∇J , необходимо продифференцировать все слагаемые в (6) по границе области поиска минимума. Обозначим через $\underline{\xi}_i^k = \left(\underline{\xi}_{i,1}^k, \underline{\xi}_{i,2}^k, \dots, \underline{\xi}_{i,m}^k\right)$ и $\overline{\xi}_i^k = \left(\overline{\xi}_{i,1}^k, \overline{\xi}_{i,2}^k, \dots, \overline{\xi}_{i,m}^k\right)$ точки минимума функций (5):

$$\begin{aligned} \underline{\xi}_i^k &= \arg \min_{\xi \in Q} \underline{J}_i^k(\xi), \\ \overline{\xi}_i^k &= \arg \min_{\xi \in Q} \overline{J}_i^k(\xi), \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (7)$$

Дополнительно определим компоненты градиентов $\underline{J}_i^k(\xi)$ и $\overline{J}_i^k(\xi)$:

$$\begin{aligned} \frac{dJ_i^k(\xi)}{d\xi_j} &= 2 \left(y_i^k(\xi) - \underline{y}_i^k \right) \frac{dy_i^k(\xi)}{d\xi_j}, \\ \frac{d\overline{J}_i^k(\xi)}{d\xi_j} &= 2 \left(y_i^k(\xi) - \overline{y}_i^k \right) \frac{dy_i^k(\xi)}{d\xi_j}, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (8)$$

Проанализируем (8) в точках $\underline{\xi}_i^k$ и $\overline{\xi}_i^k$:

$$\begin{aligned} \frac{dJ_i^k(\underline{\xi}_i^k)}{d\xi_j} &\begin{cases} \leq 0, & \underline{\xi}_{i,j}^k = \underline{\theta}_j, \\ = 0, & \underline{\theta}_j < \underline{\xi}_{i,j}^k < \underline{\theta}_j, \\ \geq 0, & \underline{\xi}_{i,j}^k = \underline{\theta}_j, \end{cases} \\ \frac{d\overline{J}_i^k(\overline{\xi}_i^k)}{d\xi_j} &\begin{cases} \leq 0, & \overline{\xi}_{i,j}^k = \overline{\theta}_j, \\ = 0, & \overline{\theta}_j < \overline{\xi}_{i,j}^k < \overline{\theta}_j, \\ \geq 0, & \overline{\xi}_{i,j}^k = \overline{\theta}_j, \end{cases} \\ &i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

Если точка минимума $\underline{\xi}_i^k \notin \partial Q$ (или $\overline{\xi}_i^k \notin \partial Q$), где ∂Q — граница множества Q , то изменение границы области поиска минимума никак не будет на нее влиять, то есть производная будет равна нулю. С другой стороны, если $\underline{\xi}_i^k \in \partial Q$ (или $\overline{\xi}_i^k \in \partial Q$), то производная равна частной производной в этой точке. В результате получаем выражения для компонентов градиента ∇J :

$$\begin{aligned} \frac{dJ(\underline{\theta}_1, \overline{\theta}_1, \underline{\theta}_2, \overline{\theta}_2, \dots, \underline{\theta}_m, \overline{\theta}_m)}{d\underline{\theta}_j} &= \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^n \left(\max \left[0, \frac{dJ_i^k(\underline{\xi}_i^k)}{d\xi_j} \right] + \max \left[0, \frac{d\overline{J}_i^k(\overline{\xi}_i^k)}{d\xi_j} \right] \right), \\ \frac{dJ(\underline{\theta}_1, \overline{\theta}_1, \underline{\theta}_2, \overline{\theta}_2, \dots, \underline{\theta}_m, \overline{\theta}_m)}{d\overline{\theta}_j} &= \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^n \left(\min \left[0, \frac{dJ_i^k(\underline{\xi}_i^k)}{d\xi_j} \right] + \min \left[0, \frac{d\overline{J}_i^k(\overline{\xi}_i^k)}{d\xi_j} \right] \right), \\ &j = 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (9)$$

Согласно (9) $\frac{dJ}{d\underline{\theta}_j} \geq 0$ и $\frac{dJ}{d\overline{\theta}_j} \leq 0$. Следовательно, получаемые интервальные оценки параметров в процессе минимизации целевой функции не будут сужаться. Однако если соответствующая компонента градиента равна нулю, то границу интервала можно сдвинуть в сторону уменьшения ширины:

$$\begin{aligned} \underline{\theta}_j &= \min_{\substack{k=1, \dots, K \\ i=1, \dots, n}} \left(\underline{\xi}_{i,j}^k, \overline{\xi}_{i,j}^k \right), \quad \text{если } \frac{dJ}{d\underline{\theta}_j} = 0, \\ \overline{\theta}_j &= \max_{\substack{k=1, \dots, K \\ i=1, \dots, n}} \left(\underline{\xi}_{i,j}^k, \overline{\xi}_{i,j}^k \right), \quad \text{если } \frac{dJ}{d\overline{\theta}_j} = 0, \\ &j = 1, \dots, m, \end{aligned} \quad (10)$$

так как это не приведет к изменению значения целевой функции. Данный момент является важным, так как позволяет избежать постоянного расширения интервальных оценок.

Ключевую роль в вычислении градиента играет алгоритм адаптивной интерполяции, потому что позволяет получить функции (5) в явном виде. Для каждого момента времени алгоритм строит кусочно-полиномиальную вектор-функцию $\mathbf{P}^k(\xi) = (P_1^k(\xi), P_2^k(\xi), \dots, P_n^k(\xi))^T$, которая интерполирует $\mathbf{y}^k(\xi) = (y_1^k(\xi), y_2^k(\xi), \dots, y_n^k(\xi))^T$ с контролируемой точностью. Выражения (5) и (8) примут вид

$$\begin{aligned} J_i^k(\xi) &= \left[P_i^k(\xi) - \underline{y}_i^k \right]^2, & \frac{dJ_i^k(\xi)}{d\xi_j} &= 2 \left(P_i^k(\xi) - \underline{y}_i^k \right) \frac{dP_i^k(\xi)}{d\xi_j}, \\ \overline{J}_i^k(\xi) &= \left[P_i^k(\xi) - \overline{y}_i^k \right]^2, & \frac{d\overline{J}_i^k(\xi)}{d\xi_j} &= 2 \left(P_i^k(\xi) - \overline{y}_i^k \right) \frac{dP_i^k(\xi)}{d\xi_j}, \\ i &= 1, \dots, n, & j &= 1, \dots, m, & k &= 1, \dots, K. \end{aligned}$$

Причем производные $\frac{dP_i^k(\xi)}{d\xi_j}$ вычисляются аналитически.

Отметим, что задачи (7) могут иметь множество различных решений: функции (5) в общем случае являются многоэкстремальными, и, в частности, каждая из задач (7) может вырождаться в единственное алгебраическое уравнение с m неизвестными. В силу (10) это напрямую влияет на ширину получаемых интервальных оценок. Поэтому имеет смысл брать такие точки, которые находятся ближе к центру текущей области неопределенности: $\frac{1}{2} \left(\overline{\theta}_1 + \underline{\theta}_1, \overline{\theta}_2 + \underline{\theta}_2, \dots, \overline{\theta}_m + \underline{\theta}_m \right)^T$. Так как задача поиска всех решений (7) является сложной, с практической точки зрения можно найти несколько частных решений (например, при минимизации сделать запуск метода с разных начальных точек) и взять лучшее из них.

Решение задачи интервальной параметрической идентификации в представленной постановке эквивалентно решению независимого набора классических точечных задач параметрической идентификации $\left| y_i^k(\theta) - \underline{y}_i^k \right| \rightarrow \min_{\theta}, \left| y_i^k(\theta) - \overline{y}_i^k \right| \rightarrow \min_{\theta}, i = 1, \dots, n, k = 1, \dots, N$: нахождению для каждой границы \underline{y}_i^k и $\overline{y}_i^k, i = 1, \dots, n, k = 1, \dots, N$, прообраза в пространстве параметров θ и заключению всех найденных прообразов во внешнюю интервальную оценку. Таким образом, вопрос о сходимости градиентного метода для построенной целевой функции в пространстве границ интервальных параметров сводится к вопросу о сходимости градиентного метода для целевых функций в пространстве самих параметров. Важно, что если экспериментальные данные являются достижимыми в рамках решения прямой задачи, то целевые функции (в том числе J) будут достигать своего теоретического минимума, то есть равны нулю. Это равносильно тому, что все экспериментальные данные содержатся в соответствующем интервальном решении прямой задачи.

4. Результаты

Выполняется численное решение нескольких интервальных задач параметрической идентификации для систем ОДУ. В качестве экспериментальных интервальных оценок использовались квазиэкспериментальные: параметры системы ОДУ задавались интервально и решалась прямая задача, в результате чего для каждого момента времени было получено множество Y^k ; далее из Y^k брался случайный n -мерный прямоугольный параллелепипед, который далее использовался в качестве экспериментальной оценки. Минимизация целевой функции выполнялась до тех пор, пока ее значение не становилось сопоставимым с нулем: $J < 10^{-10}$. Выбор значения 10^{-10}

в первую очередь связан с погрешностями машинных вычислений, при этом фактически можно считать, что минимизация выполняется до достижения целевой функции своего теоретического минимума.

Рассмотрим систему ОДУ из одного уравнения с одним интервальным параметром:

$$\begin{cases} \frac{dy(t)}{dt} = \cos(at), \\ y(0) = 0, \\ a \in [\underline{a}, \bar{a}]. \end{cases} \quad (11)$$

Ее решение имеет вид

$$y(t) \in \left[\min_{a \in [\underline{a}, \bar{a}]} \left(\frac{1}{a} \sin(at) \right), \max_{a \in [\underline{a}, \bar{a}]} \left(\frac{1}{a} \sin(at) \right) \right].$$

Для генерации квазиэкспериментальных оценок из интервала интегрирования были взяты 50 точек $t_k = \frac{2\pi k}{25}$, $k = 1, \dots, 50$, и использовалось значение параметра $a \in [1,0, 1,2]$ (рис. 1). Вертикальными пунктирными линиями для каждой точки t_k показан интервал возможных значений $[\underline{y}^k, \bar{y}^k]$.

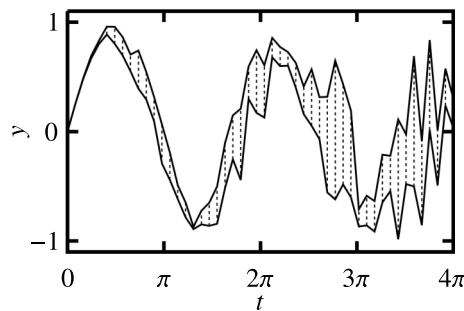


Рис. 1. Квазиэкспериментальные интервальные оценки для системы (11)

Начальное приближение в методе градиентного спуска $a^{(0)} \in [0,7, 0,8]$. На рис. 2 продемонстрирован процесс решения задачи. Серым цветом показаны получающиеся модельные интервальные оценки. На 15-й итерации метод завершает работу. Найденная интервальная оценка параметра $a^{(15)} \in [1,0, 1,2]$ совпадает с исходной.

Далее рассматривается модель с двумя интервальными начальными условиями:

$$\begin{cases} \frac{du(t)}{dt} = 4u(t) - \frac{5}{4}u(t)v(t) + \frac{1}{10}u(t)^2, \\ \frac{dv(t)}{dt} = -2v(t) + \frac{1}{2}u(t)v(t) + \frac{1}{10}v(t)^2, \\ u(0) = u_0 \in [\underline{u}_0, \bar{u}_0], \quad v(0) = v_0 \in [\underline{v}_0, \bar{v}_0]. \end{cases} \quad (12)$$

Как и в предыдущем примере, для генерации квазиэкспериментальных данных были взяты 50 точек $t_k = \frac{2\pi k}{25}$, $k = 1, \dots, 50$. Исходные значения начальных условий: $u_0 \in [4,2, 4,4]$ и $v_0 \in [2,9, 3,1]$. Начальное приближение: $u_0^{(0)} \in [3,7, 3,8]$ и $v_0^{(0)} \in [2,5, 2,6]$. На рис. 3 показаны зависимости интервальных оценок фазовых переменных от времени для различных итераций градиентного спуска. На рис. 4 представлены фазовая плоскость и соответствующие интервальные оценки для каждой третьей экспериментальной точки во времени. Темно-серым цветом выделены экспериментальные данные, светло-серым — модельные данные.

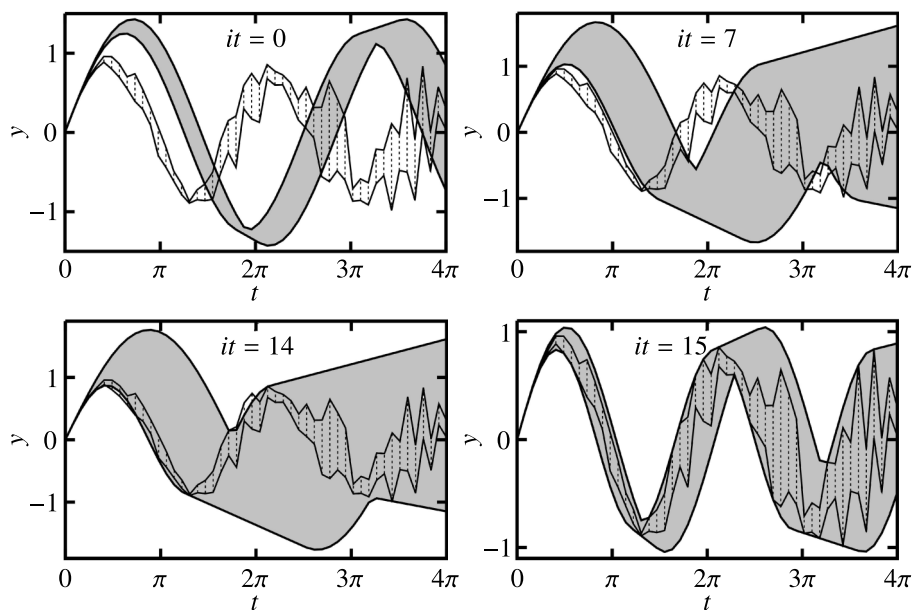


Рис. 2. Иллюстрация решения интервальной задачи параметрической идентификации для системы (11)

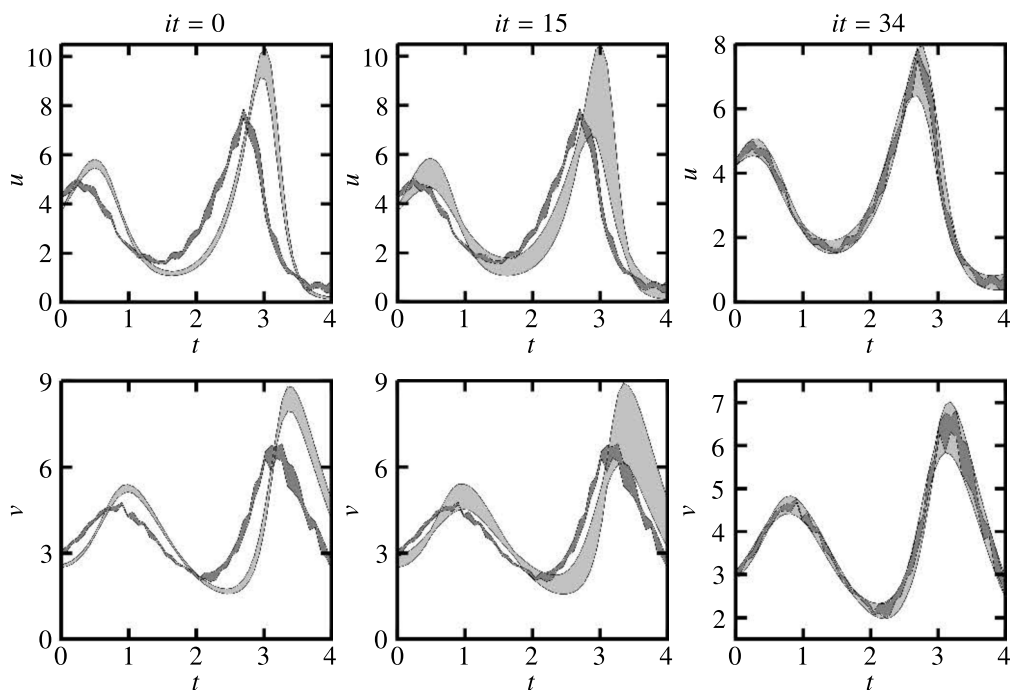


Рис. 3. Зависимость интервальных оценок фазовых переменных от времени в процессе параметрической идентификации системы (12)

На 34-й итерации полученные интервальные оценки начальных условий совпадают с исходными. На графиках наблюдается, что модельное решение полностью содержит в себе квази-экспериментальные интервальные оценки.

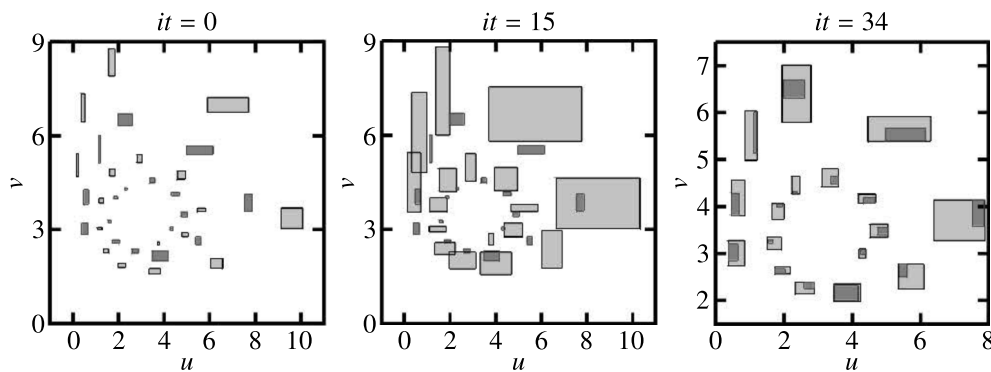


Рис. 4. Иллюстрация решения задачи параметрической идентификации для системы (12) на фазовой плоскости

В заключение рассмотрим систему ОДУ с неизвестными двумя интервальными начальными условиями и двумя параметрами:

$$\begin{cases} \frac{du(t)}{dt} = \alpha u(t) - 2u(t)v(t), & \frac{dv(t)}{dt} = -v(t) + \beta u(t)v(t), \\ u(0) = u_0 \in [\underline{u}_0, \overline{u}_0], & v(0) = v_0 \in [\underline{v}_0, \overline{v}_0], \\ \alpha \in [\underline{\alpha}, \overline{\alpha}], & \beta \in [\underline{\beta}, \overline{\beta}]. \end{cases} \quad (13)$$

Для генерации квазиэкспериментальных данных были взяты 80 точек $t_k = \frac{10,6k}{80}$, $k = 1, \dots, 80$. Исходные значения неизвестных величин: $u_0 \in [0,95, 1,05]$, $v_0 \in [2,95, 3,05]$, $\alpha \in [1,95, 2,05]$ и $\beta \in [0,95, 1,05]$. На рис. 5 показаны построенные экспериментальные интервальные оценки $[\underline{v}^k, \overline{v}^k]$ и $[\underline{u}^k, \overline{u}^k]$ для каждой точки t_k (пунктирными вертикальными линиями показаны интервалы значений).

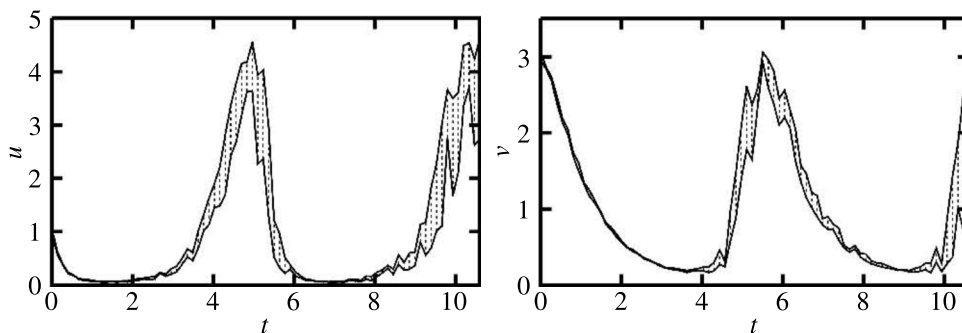


Рис. 5. Квазиэкспериментальные интервальные оценки для системы (13)

Начальное приближение: $u_0^{(32)} \in [0,70, 0,71]$, $v_0^{(32)} \in [2,70, 2,71]$, $\alpha^{(32)} \in [1,60, 1,61]$ и $\beta^{(32)} \in [0,50, 0,51]$. Аналогично рис. 3 на рис. 6 показаны зависимости интервальных оценок фазовых переменных от времени для различных итераций градиентного спуска.

На 32-й итерации полученные интервальные оценки фазовых переменных полностью покрывают экспериментальные данные, целевая функция равна нулю. Найденные значения неизвестных величин: $u_0^{(32)} \in [0,95, 1,08]$, $v_0^{(32)} \in [2,94, 3,13]$, $\alpha^{(32)} \in [1,89, 2,11]$ и $\beta^{(32)} \in [0,95, 0,96]$. Они отличаются от исходных: интервальная оценка для u_0 , v_0 и α более широкая, а для β — более узкая. Результат в общем случае зависит от начального приближения, так как целевая функция

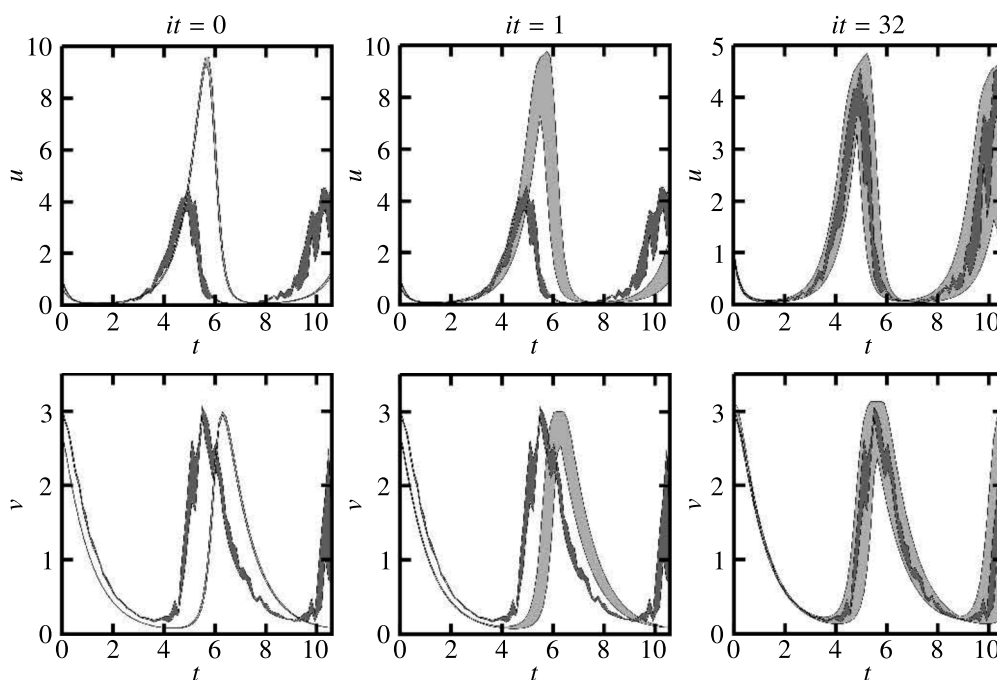


Рис. 6. Зависимости интервальных оценок фазовых переменных от времени в процессе параметрической идентификации системы (13)

является многоэкстремальной. Для получения наиболее приемлемых оценок с точки зрения ширины интервалов на практике можно выполнить поиск решений с разных начальных значений и выбрать наилучшее из них.

Во всех задачах найдены такие интервальные значения неизвестных величин, при которых целевая функция достигает своего теоретического минимума, и, следовательно, все экспериментальные данные содержатся в соответствующем интервальном решении прямой задачи. Для задач (11) и (12) полученные интервальные значения совпадают с точными значениями, используемыми при генерации квазиэкспериментальных данных.

Отметим, что в статье рассматриваются некорректно поставленные обратные задачи. В общем случае выход по невязке минимизируемой целевой функции не гарантирует, что найденное решение является действительным. Однако в соответствии с итерационным принципом регуляризации [Алифанов, 1988] здесь можно в качестве допустимого уровня минимизации невязки взять, например, значение апостериорной оценки погрешности решения прямой задачи. Кроме этого, стремление получить наименьшие по ширине интервальные оценки в некотором смысле реализует правило отбора решений.

5. Заключение

В работе представлен подход к решению интервальных задач параметрической идентификации на основе внешних интервальных оценок. Выполнена постановка интервальной задачи параметрической идентификации для динамических систем, заданных в виде системы ОДУ. Получена целевая функция, минимизация которой эквивалентна нахождению таких границ интервальных параметров системы, при которых внешняя интервальная оценка решения соответствующей прямой задачи моделирования содержала бы экспериментальные данные или минимизировала бы отклонение от них. Для целевой функции построено выражение градиента для

дальнейшего применения методов оптимизации первого порядка. Благодаря использованию ранее разработанного алгоритма адаптивной интерполяции при вычислении градиента нет необходимости в дополнительном интегрировании систем ОДУ. Выполнена апробация предложенного подхода на нескольких задачах, содержащих разное количество неизвестных величин. Для всех задач получены интервальные оценки параметров, при которых решение полностью содержит экспериментальные данные, что демонстрирует эффективность разработанного подхода.

Список литературы (References)

- Абгарян К. К., Носков Р. Г., Ревизников Д. Л.* Обратная коэффициентная задача теплопереноса в слоистых наноструктурах // Известия высших учебных заведений. Материалы электронной техники. — 2017. — Т. 20, № 3. — С. 213–219. — DOI: 10.17073/1609-3577-2017-3-213-219
Abgaryan K. K., Noskov R. G., Reviznikov D. L. Inverse-coefficient problem of heat transfer in layered nanostructures // Russian Microelectronics. — 2019. — Vol. 48. — P. 553–558. — DOI: 10.1134/S106373971908002X (Original Russian paper: *Abgaryan K. K., Noskov R. G., Reviznikov D. L.* Obratnaya koeffitsientnaya zadacha teploperenosa v sloistyh nanostrukturah // Izvestiya vysshih uchebnyh zavedenij. Materialy elektronnoy tekhniki. — 2017. — Vol. 20, No. 3. — P. 213–219. — DOI: 10.17073/1609-3577-2017-3-213-219)
- Алифанов О. М.* Обратные задачи теплообмена. — М.: Машиностроение, 1988. — 280 с.
Alifanov O. M. Obratnye zadachi teploobmena [Inverse heat transfer problems]. — Moscow: Mashinostroenie, 1988. — 280 p. (in Russian).
- Гидаспов В. Ю., Морозов А. Ю., Ревизников Д. Л.* Алгоритм адаптивной интерполяции с использованием ТТ-разложения для моделирования динамических систем с интервальными параметрами // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2021. — Т. 61, № 9. — С. 1416–1430. — DOI: 10.31857/S0044466921090106
Gidaspov V. Yu., Morozov A. Yu., Reviznikov D. L. Adaptive interpolation algorithm using TT-decomposition for modeling dynamical systems with interval parameters // Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 2021. — Vol. 61, No. 9. — P. 1387–1400. — DOI: 10.1134/S0965542521090098 (Original Russian paper: *Gidaspov V. Yu., Morozov A. Yu., Reviznikov D. L.* Algoritm adaptivnoy interpolyacii s ispol'zovaniem TT-razlozheniya dlya modelirovaniya dinamicheskikh sistem s interval'nymi parametrami // Zhurnal vychislitel'noj matematiki i matematicheskoy fiziki. — 2021. — Vol. 61, No. 9. — P. 1416–1430.)
- Денисов А. М.* Введение в теорию обратных задач: учеб. пособие. — М.: Изд-во МГУ, 1994. — С. 208.
Denisov A. M. Vvedenie v teoriyu obratnyh zadach: ucheb. posobie [Introduction to the theory of inverse problems: proc. allowance]. — Moscow: Publishing House of Moscow State University, 1994. — P. 208 (in Russian).
- Дилигенская А. Н., Самокиш А. В.* Параметрическая идентификация в обратных задачах теплопроводности в условиях интервальной неопределенности на основе нейронных сетей // Вестник Самарского государственного технического университета. — 2020. — Т. 28, № 4 (68). — С. 6–18.
Dilignenskaya A. N., Samokish A. V. Parametricheskaya identifikaciya v obratnyh zadachah teploprovodnosti v usloviyah interval'noj neopredelennosti na osnove nejronnyh setej [Parametric identification in inverse problems of heat conduction under conditions of interval uncertainty based on neural networks] // Bulletin of the Samara State Technical University. — 2020. — Vol. 28, No. 4 (68). — P. 6–18 (in Russian).
- Добронец Б. С.* Интервальная математика. — Красноярск: Краснояр. гос. ун-т, 2007. — С. 287.
Dobronec B. S. Interval'naya matematika [Interval mathematics]. — Krasnoyarsk: Krasnoyarsk. state un-t, 2007. — P. 287 (in Russian).
- Кабанихин С. И.* Обратные и некорректные задачи. — Новосибирск: Сиб. науч. изд-во, 2009. — С. 457.
Kabanihin S. I. Obratnye i nekorrektnye zadachi [Inverse and ill-posed problems]. — Novosibirsk: Sib. scientific publishing house, 2009. — P. 457 (in Russian).
- Кабанихин С. И., Куликов И. М., Шишленин М. А.* Алгоритм восстановления характеристик начального состояния сверхновой звезды // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2020. — Т. 60, № 6. — С. 1035–1044. — DOI: 10.31857/S0044466920060137
Kabanihin S. I., Kulikov I. M., Shishlenin M. A. An algorithm for recovering the characteristics of the initial state of supernova // Comput. Math. Math. Phys. — 2020. — Vol. 60, No. 6. — P. 1008–1016. (Original Russian paper: *Kabanihin S. I., Kulikov I. M., Shishlenin M. A.* Algoritm vosstanovleniya harakteristik nachal'nogo sostoyaniya sverhnovoj zvezdy // Zhurnal vychislitel'noj matematiki i matematicheskoy fiziki. — 2020. — Vol. 60, No. 6. — P. 1035–1044.)

- Морозов А. Ю., Журавлев А. А., Ревизников Д. Л.* Анализ и оптимизация алгоритма адаптивной интерполяции численного решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений с интервальными параметрами // Дифференциальные уравнения. — 2020. — Т. 56, № 7. — С. 960–974. — DOI: 10.1134/S0374064120070122
Morozov A. Yu., Zhuravlev A. A., Reviznikov D. L. Analysis and optimization of an adaptive interpolation algorithm for the numerical solution of a system of ordinary differential equations with interval parameters // Differential Equations. — 2020. — Vol. 56, No. 7. — P. 935–949. — DOI: 10.1134/s0012266120070125 (Original Russian paper: *Morozov A. Yu., Zhuravlev A. A., Reviznikov D. L.* Analiz i optimizaciya algoritma adaptivnoj interpolyacii chislennogo resheniya sistem obyknovennyh differencial'nyh uravnenij s interval'nymi parametrami // Differencial'nye uravneniya. — 2020. — Vol. 56, No. 7. — P. 960–974.)
- Морозов А. Ю., Ревизников Д. Л.* Алгоритм адаптивной интерполяции на основе kd-дерева для численного интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений с интервальными начальными условиями // Дифференциальные уравнения. — 2018. — Т. 54, № 7. — С. 963–974. — DOI: 10.1134/S0374064118070130
Morozov A. Yu., Reviznikov D. L. Adaptive interpolation algorithm based on a kd-tree for numerical integration of systems of ordinary differential equations with interval initial conditions // Differential Equations. — 2018. — Vol. 54, No. 7. — P. 945–956. — DOI: 10.1134/S0012266118070121 (Original Russian paper: *Morozov A. Yu., Reviznikov D. L.* Algoritm adaptivnoj interpolyacii na osnove kd-dereva dlya chislennogo integrirovaniya sistem obyknovennyh differencial'nyh uravnenij s interval'nymi nachal'nymi usloviyami // Differencial'nye uravneniya. — 2018. — Vol. 54, No. 7. — P. 963–974.)
- Морозов А. Ю., Ревизников Д. Л.* Алгоритм адаптивной интерполяции на разреженных сетках для численного интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений с интервальными неопределенностями // Дифференциальные уравнения. — 2021. — Т. 57, № 7. — С. 976–987. — DOI: 10.31857/S0374064121070104
Morozov A. Yu., Reviznikov D. L. Adaptive interpolation algorithm on sparse meshes for numerical integration of systems of ordinary differential equations with interval uncertainties // Differential Equations. — 2021. — Vol. 57, No. 7. — P. 947–958. — DOI: 10.1134/S0012266121070107 (Original Russian paper: *Morozov A. Yu., Reviznikov D. L.* Algoritm adaptivnoj interpolyacii na razrezhennyh setkah dlya chislennogo integrirovaniya sistem obyknovennyh differencial'nyh uravnenij s interval'nymi neopredelennostyami // Differencial'nye uravneniya. — 2021. — Vol. 57, No. 7. — P. 976–987.)
- Морозов А. Ю., Ревизников Д. Л.* Интервальный подход к решению задач параметрической идентификации динамических систем // Дифференциальные уравнения. — 2022. — Т. 58, № 7. — С. 962–976. — DOI: 10.31857/S0374064122070081
Morozov A. Yu., Reviznikov D. L. Interval approach to solving parametric identification problems for dynamical systems // Differential Equations. — 2022. — Vol. 58, No. 7. — P. 952–965. — DOI: 10.1134/S0012266122070084 (Original Russian paper: *Morozov A. Yu., Reviznikov D. L.* Interval'nyj podhod k resheniyu zadach parametricheskoj identifikacii dinamicheskikh sistem // Differencial'nye uravneniya. — 2022. — Vol. 58, No. 7. — P. 962–976.)
- Морозов А. Ю., Ревизников Д. Л., Гидаспов В. Ю.* Алгоритм адаптивной интерполяции на основе kd-дерева для решения задач химической кинетики с интервальными параметрами // Математическое моделирование. — 2018. — Т. 30, № 12. — С. 129–144. — DOI: 10.31857/S023408790001940-8
Morozov A. Yu., Reviznikov D. L., Gidaspov V. Yu. Adaptive interpolation algorithm based on a kd-tree for the problems of chemical kinetics with interval parameters // Mathematical Models and Computer Simulations. — 2019. — Vol. 11, No. 4. — P. 622–633. — DOI: 10.1134/S2070048219040100 (Original Russian paper: *Morozov A. Yu., Reviznikov D. L., Gidaspov V. Yu.* Algoritm adaptivnoj interpolyacii na osnove kd-dereva dlya resheniya zadach himicheskoy kinetiki s interval'nymi parametrami // Matematicheskoe modelirovanie. — 2018. — Vol. 30, No. 12. — P. 129–144.)
- Пантелеев А. В., Летова Т. А.* Методы оптимизации в примерах и задачах: учеб. пособие. — М.: Высш. шк., 2005. — P. 544.
Panteleev A. V., Letova T. A. Metody optimizacii v primerah i zadachah: ucheb. posobie [Optimization methods in examples and tasks: proc. allowance]. — Moscow: Higher school, 2005. — P. 544 (in Russian).
- Петрикевич Я. И.* Структурно-параметрическая идентификация динамических объектов по интервальным исходным данным: дис. ... канд. техн. наук: 05.13.18. — М.: Кемеровский государственный университет, 2006. — С. 225.
Petrikevich Ya. I. Strukturno-parametricheskaya identifikaciya dinamicheskikh ob"ektov po interval'nym iskhodnym dannym [Structural-parametric identification of dynamic objects by interval initial data]: dis. ... cand. tech. sciences: 05.13.18. — Moscow: Kemerovo State University, 2006. — P. 225 (in Russian).
- Роголев А. Н.* Гарантированные методы решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений на основе преобразования символьных формул // Вычислительные технологии. — 2003. — Т. 8, № 5. — С. 102–116.

- Rogalev A.N.* Garantirovannye metody resheniya sistem obyknovennykh differentsial'nykh uravnenij na osnove preobrazovaniya simvol'nykh formul [Guaranteed methods for solving systems of ordinary differential equations based on the transformation of symbolic formulas] // *Computing technologies*. — 2003. — Vol. 8, No. 5. — P. 102–116 (in Russian).
- Самарский А. А., Вабищевич П. Н.* Численные методы решения обратных задач математической физики: учеб. пособие. — М.: Изд. ЛКИ, 2009. — С. 480.
- Samarskij A. A., Vabishchevich P. N.* Chislennye metody resheniya obratnykh zadach matematicheskoy fiziki: ucheb. posobie [Numerical methods for solving inverse problems of mathematical physics: proc. allowance]. — Moscow: Ed. LCI, 2009. — P. 480 (in Russian).
- Смоляк С. А.* Квадратурные и интерполяционные формулы на тензорных произведениях некоторых классов функций // *Докл. АН СССР*. — 1963. — Т. 148, № 5. — С. 1042–1045.
- Smolyak S. A.* Kvadrurnye i interpolyacionnye formuly na tenzornyx proizvedeniyah nekotorykh klassov funkciy [Quadrature and interpolation formulas on tensor products of some classes of functions] // *Report Academy of Sciences of the USSR*. — 1963. — Vol. 148, No. 5. — P. 1042–1045 (in Russian).
- Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.* Методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1974. — С. 224.
- Tihonov A. N., Arsenin V. Ya.* Metody resheniya nekorrektnykh zadach [Methods for solving ill-posed problems]. — Moscow: Science, 1974. — P. 224 (in Russian).
- Шарый С. П.* Конечномерный интервальный анализ. — Новосибирск: Институт вычислительных технологий СО РАН, Изд. XYZ, 2019. — С. 629.
- Sharyj S. P.* Konechnomernyj interval'nyj analiz [Finite-dimensional interval analysis]. — Novosibirsk: Institute of Computational Technologies SB RAS, Ed. XYZ, 2019. — P. 629 (in Russian).
- Bungartz H.-J., Griebel M.* Sparse grids // *Acta Numerica*. — 2004. — Vol. 13, No. 1. — P. 147–269.
- Fu C., Ren X., Yang Y.-F., Lu K., Qin W.* Steady-state response analysis of cracked rotors with uncertain but bounded parameters using a polynomial surrogate method // *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* — 2019. — Vol. 68. — P. 240–256. — DOI: 10.1016/j.cnsns.2018.08.004
- Fu C., Xu Y., Yang Y., Lu K., Gu F., Ball A.* Response analysis of an accelerating unbalanced rotating system with both random and interval variables // *J. Sound Vib.* — 2020. — Vol. 466. — 115047. — DOI: 10.1016/j.jsv.2019.115047
- Gerstner T., Griebel M.* Sparse grids // *Encyclopedia of Quantitative Finance* / ed. R. Cont. — New York: Wiley, 2008. — P. 5.
- Gill Ph., Murray W., Wright M.* *Practical Optimization*. — London – New York: Academic Press, 1981. — P. 421.
- Makino K., Berz M.* Models and their applications // *Numerical Software Verification 2017: conference*. — Heidelberg, Germany, July 22–23, 2017. — Springer International Publishing AG. — P. 3–13.
- Martyshev M. N., Emelyanov A. V., Demin V. A. et al.* Multifilamentary character of anticorrelated capacitive and resistive switching in memristive structures based on $(\text{Co-Fe-B})_x(\text{LiNbO}_3)_{100-x}$ nanocomposite // *Phys. Rev. Applied*. — 2020. — Vol. 14, No. 3. — 034016. — DOI: 10.1103/PhysRevApplied.14.034016
- Moore R.* *Interval analysis*. — N.J.: Prentice-Hall, 1966. — P. 145.
- Moore R. E., Kearfott R. B., Cloud M. J.* *Introduction to Interval Analysis*. — SIAM, 2009. — P. 223.
- Morozov A. Yu., Zhuravlev A. A., Reviznikov D. L.* Sparse grid adaptive interpolation in problems of modeling dynamic systems with interval parameters // *Mathematics*. — 2021. — Vol. 9, No. 4. — P. 17. — DOI: 10.3390/math9040298
- Nataraj P. S. V., Sondur S.* The extrapolated Taylor model // *Reliable Computing*. — 2011. — Vol. 15. — P. 251–278.
- Nedialkov N. S., Jackson K. R., Pryce J. D.* An effective high-order interval method for validating existence and uniqueness of the solution of an IVP for an ODE // *Reliable Computing*. — 2001. — Vol. 7, No. 6. — P. 449–465. — DOI: 10.1023/A:1014798618404
- Nenarokomov A. V., Alifanov O. M., Krainova I. V., Titov D. M., Morzhukhina A. V.* Estimation of environmental influence on spacecraft materials radiative properties by inverse problems technique // *Acta Astronautica*. — 2019. — Vol. 160. — P. 323–330. — DOI: 10.1016/j.actaastro.2019.04.014

- Oseledets I. V.* Tensor-train decomposition // *SIAM Journal on Scientific Computing*. — 2011. — Vol. 33, No. 5. — P. 2295–2317. — DOI: 10.1137/090752286
- Oseledets I., Tyrtyshnikov E.* TT-cross approximation for multidimensional arrays // *Linear Algebra and its Applications*. — 2010. — Vol. 432, No. 1. — P. 70–88. — DOI: 10.1016/j.laa.2009.07.024
- Schenck H.* Theories of engineering experimentation. — 2nd ed. — New York: McGraw Hill, 1968. — P. 284.
- Shary S. P.* A surprising approach in interval global optimization // *Reliable Computing*. — 2001. — Vol. 7, No. 6. — P. 497–505. — DOI: 10.1023/A:1014754803382
- Shary S. P.* Randomized algorithms in interval global optimization // *Num. Anal. Appl.* — 2008. — Vol. 1. — P. 376–389. — DOI: 10.1134/S1995423908040083
- Xiao N., Fedele F., Muhanna R. L.* Inverse problems under uncertainties — An interval solution for the beam finite element // *Conference Paper: 11th International Conference on Structural Safety & Reliability*. — New York, NY, USA, 2013. — P. 8.