

УДК: 532.545

Об определении модельной скорости звука для решения задачи о плоском сдвиговом течении жидкости методом гидродинамики сглаженных частиц (SPH)

О. В. Решетникова

Вычислительный центр Дальневосточного отделения Российской академии наук,
Россия, 680000, г. Хабаровск, ул. Ким-Ю-Чена, д. 65

E-mail: ov13r@yandex.ru

Получено 22.11.2022, после доработки — 21.12.2023.

Принято к публикации 21.12.2023.

Дискретизация задач по методу гидродинамики сглаженных частиц (SPH) предполагает присутствие в решении нескольких констант — параметров дискретизации. Среди них особо следует отметить модельную скорость звука c_0 , которая связывает мгновенную плотность в SPH-частице с возникающим давлением через замыкающее уравнение состояния.

В работе изложен подход к точному определению необходимого значения модельной скорости звука, имеющий в своей основе анализ изменения плотностей в SPH-частицах при их относительном смещении. Примером движения сплошной среды принята задача о плоском сдвиговом течении; объектом анализа является функция относительного уплотнения ε_ρ в SPH-частице, определяемая формой ядра сглаживания. Идеальный плоскопараллельный относительный сдвиг частиц в области сглаживания определяет периодическое изменение их плотностей. Исследование функций ε_ρ , получаемых от использования различных ядер сглаживания в аппроксимации плотности с учетом такого сдвига, позволило установить пульсационный характер возникновения давлений в частицах. Кроме того, определен случай расположения соседей в области сглаживания, обеспечивающий максимум уплотнения в частице.

Сопоставление функций ε_ρ с SPH-аппроксимацией уравнения движения позволило связать параметр дискретизации c_0 с формой ядра сглаживания и прочими параметрами дискретного аналога задачи, в том числе коэффициентом искусственной диссипации. В результате сформулировано уравнение, обеспечивающее нахождение необходимого и достаточного для решения значения модельной скорости звука. Для трех представителей ядер сглаживания приведены выражения корня c_0 такого уравнения, упрощенные из полиномов до числовых коэффициентов при параметрах рассматриваемой задачи.

Ключевые слова: плоское сдвиговое течение, метод сглаженных частиц (SPH), ядро, дискретная аппроксимация физического свойства, изменение дискретной аппроксимации во времени, замыкающее уравнение состояния, искусственная диссипация, скорость звука

UDC: 532.545

The model sound speed determination for the plane shear fluid flow problem solving by the SPH method

O. V. Reshetnikova

Computing Center of the Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences,
65 Kim U Chena st., Khabarovsk, 680000, Russia

E-mail: ov13r@yandex.ru

*Received 22.11.2022, after completion – 21.12.2023.
Accepted for publication 21.12.2023.*

The problem discrete statement by the smoothed particle hydrodynamics method (SPH) include a discretization constants parameters set. Of them particular note is the model sound speed c_0 , which relates the SPH-particle instantaneous density to the resulting pressure through the equation of state.

The paper describes an approach to the exact determination of the model sound speed required value. It is on the analysis based, how SPH-particle density changes with their relative shift. An example of the continuous medium motion taken the plane shear flow problem; the analysis object is the relative compaction function ε_ρ in the SPH-particle. For various smoothing kernels was research the functions of ε_ρ , that allowed the pulsating nature of the pressures occurrence in particles to establish. Also the neighbors uniform distribution in the smoothing domain was determined, at which shaping the maximum of compaction in the particle.

Through comparison the function ε_ρ with the SPH-approximation of motion equation is defined associate the discretization parameter c_0 with the smoothing kernel shape and other problem parameters. As a result, an equation is formulated that the necessary and sufficient model sound speed value provides finding. For such equation the expressions of root c_0 are given for three different smoothing kernels, that simplified from polynomials to numerical coefficients for the plane shear flow problem parameters.

Keywords: plane shear fluid flow, SPH, smoothing kernel, physical property discrete approximation, discrete approximation by time change, state equation, artificial viscosity, sound speed

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2024, vol. 16, no. 2, pp. 339–351 (Russian).

1. Введение

Безсеточный метод гидродинамики сглаженных частиц (SPH) подразумевает аппроксимацию расчетного объема сплошной среды конечным набором лагранжевых частиц, каждая из которых обладает объемом, массой и является носителем физических свойств (плотности, скорости, давления и т. д.). Величина некоторого свойства f SPH-частицы в точке пространства x определяется совокупным, «сглаженным» вкладом от близлежащих частиц-соседей посредством весовой функции — ядра сглаживания W (далее — ядра). Мера существенности такого вклада от каждого соседа определяется пространственным расстоянием до него. Предельное расстояние, за которым вклад от соседа считается уже не существенным, называется радиусом сглаживания, а пространство, им очерчиваемое, — областью сглаживания.

Для численного выражения значения свойства f в SPH-частице используются аппроксимации, полученные из следующих базовых форм [Monaghan, 2006; Monaghan, 1994]:

$$f_i = \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} f_j W(r_{ij}, H), \quad (1)$$

$$\nabla f_i = \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} f_{ij} \nabla W(r_{ij}, H). \quad (2)$$

Здесь $f_i = f(x_i^\alpha)$ — значение функции f , аппроксимируемое в i -й частице с координатами x_i^α ($\alpha = 1, \dots, D$, D — размерность пространства задачи); f_{ij} — интерполяция функции f на отрезке между точками x_i^α и x_j^α по двум соответствующим значениям f_i и f_j ; m_j и ρ_j — соответственно масса и плотность частицы-соседа; $W(r_{ij}, H)$ — ядро, удовлетворяющее условиям четности $W(r_{ij}, H) = W(-r_{ij}, H)$ и компактности $W(r_{ij}, H) = 0$, $r_{ij} \geq H$; $\nabla W(r_{ij}, H)$ — производная ядра; $r_{ij} = \sqrt{\sum_\alpha (x_j^\alpha - x_i^\alpha)^2}$ — расстояние между частицами i и j ; H — радиус сглаживания ядра.

Размерная величина H определяется как расстояние от центра сглаживаемой частицы i до границы, за которой функция ядра W принимает нулевое значение. Радиус сглаживания выражается как $H = hR$, где h — сглаживающая длина (размерная величина), $R = 1, 2, 3, \dots$ — безразмерный радиус сглаживания. Сглаживающая длина $h = kd$ используется как физический масштаб при построении функций ядра и определяется через размер d частицы и коэффициент сглаживания k . То есть наиболее детализировано функцию ядра следует представлять как $W(r_{ij}, kd, R)$.

Из аппроксимаций по типу (1) и (2) формулируется дискретный аналог постановки задачи о движении среды. Весомое влияние на получаемое численное решение оказывает интервал допустимых изменений мгновенной плотности в частице ρ_i относительно некоторого фиксированного значения ρ_0 . Величина такого относительного уплотнения/разуплотнения определяет формируемое давление в частице P_i через замыкающее уравнение состояния [Macdonald, 1966; Monaghan, 1994; Morris, Fox, Zhu, 1997] вида

$$P_i = \rho_0 c_0^2 \left(\frac{\rho_i}{\rho_0} - 1 \right)^\gamma. \quad (3)$$

Здесь $\gamma = 1, \dots, 7$ — показатель адиабаты для моделируемой среды, c_0 — скорость распространения упругой волны в среде или модельная скорость звука.

Следует отметить, что вопрос о значении c_0 , необходимого для решения некоторой задачи методом SPH, до настоящего времени остается открытым. В первых работах по тематике SPH [Monaghan, 1985] указывалось, что величина c_0 никак не соответствует физическому значению этого свойства для рассматриваемой среды (как правило, существенно меньше) и должна

определяться для каждой конкретной задачи. Позднее в работе [Monaghan, 1994] была сформулирована рекомендация, повсеместно используемая в настоящее время [Monaghan, 2012] для моделирования жидких сред:

$$c_0 \sim 10U_{\max}, \quad (4)$$

где U_{\max} — максимальная скорость для задачи. В качестве U_{\max} рассматривается наибольшая скорость движения среды относительно границы или препятствия [Monaghan, 2006]. Однако отсутствие знака строгого или нестрогого равенства в (4) оставляет эту рекомендацию неопределенной и необходимость подбора c_0 сохраняется.

В настоящей работе представлен подход к точному определению величины c_0 , необходимой и достаточной для получения адекватной численной модели движения сплошной среды по методу SPH. В качестве примера такого движения рассмотрено плоское сдвиговое течение вязкой несжимаемой жидкости.

2. Задача о плоском сдвиговом течении и ее дискретизация по методу SPH

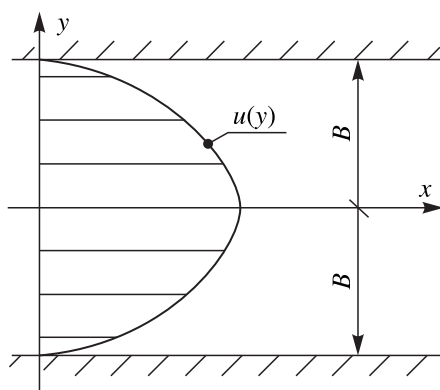


Рис. 1. Задача о плоском сдвиговом течении

Рассмотрим задачу об установившемся плоском сдвиговом течении (рис. 1) вязкой несжимаемой жидкости под действием постоянного градиента давления $\frac{dP}{dx}$. Скорость потока u направлена вдоль оси Ox . На стенках канала скорость потока равна нулю; по центру канала скорость потока максимальна. Математическая постановка задачи формулируется уравнением движения

$$\rho \frac{du}{dt} = -\frac{dP}{dx} + \mu \frac{d^2u}{dy^2}, \quad (5)$$

замыкаемым граничными условиями

$$u(0) = U, \quad u(\pm B) = 0. \quad (6)$$

Здесь ρ — плотность среды, P — давление, μ — динамическая вязкость потока.

Решение задачи (5)–(6) для установившегося потока, когда $\frac{du}{dt} = 0$, имеет вид

$$u = -\frac{1}{2\mu} \frac{dP}{dx} (B^2 - y^2) = \frac{U}{B^2} (B^2 - y^2). \quad (7)$$

Тогда уравнение движения (5) принимает форму

$$-\frac{dP}{dx} + \mu \frac{d^2 u}{dy^2} = -\rho p, \quad (8)$$

$$2\mu \frac{U}{B^2} = \rho p, \quad (9)$$

где p — вектор постоянной тяги от разности давления на поперечных границах канала.

Для построения дискретного аналога задачи методом SPH проведем исходное разбиение расчетной области на частицы, размер которых характеризуется диаметром d . Примем послойное, вдоль оси OX , плотное заполнение расчетной области; центры частиц расположены в узлах решетки, состоящей из равнобедренных треугольников с длиной стороны d (рис. 2). Тогда шаг между частицами по горизонтали — $\Delta x = d$, а по вертикали — $\Delta y = \frac{\sqrt{3}}{2}d$. При этом $B = N\Delta y$, где N — целое число, задающее количество слоев частиц, уместяющихся на полуширине канала. Частицы, расположенные на расстоянии $\geq B$ от оси OX , по условиям задачи (6), будем считать неподвижными. Масса m всех частиц одинакова и постоянна.

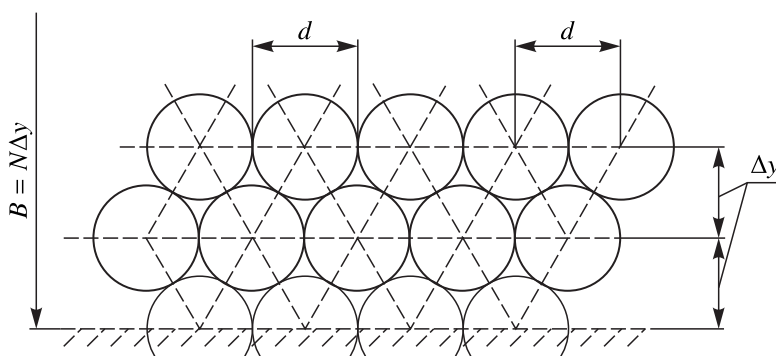


Рис. 2. Исходная дискретизация расчетного объема частицами

Дискретные аналоги уравнения движения (8), его членов и замыкающих уравнений состояния по методу SPH в соответствии с обозначениями из § 1 имеют вид [Monaghan, 2005; Morris, Fox, Zhu, 1997]

$$\frac{du_i}{dt} = -\frac{dP_i}{\rho_i dx} + \frac{M}{\rho_i} \frac{d^2 u_i}{dy^2} + p, \quad M = \frac{\rho_0 p B^2}{2U}, \quad (10)$$

$$\rho_i = m \sum_j W(r_{ij}, kd, R), \quad m = \frac{\sqrt{3}}{2} d^2 \rho_0, \quad (11)$$

$$\frac{dP_i}{dx} = \frac{m}{\rho_i} \sum_j (P_i + P_j) \frac{dW(r_{ij}, kd, R)}{dr_{ij}} \frac{r_{ij}^x}{r_{ij}}, \quad (12)$$

$$P_i = \begin{cases} \rho_0 c_0^2 \left(\frac{\rho_i}{\rho_0} - 1 \right), & \rho_i > \rho_0, \\ 0, & \rho_i \leq \rho_0, \end{cases} \quad (13)$$

$$\frac{d^2 u_i}{dy^2} = 2 \frac{m}{\rho_i} \sum_j \frac{u_j - u_i}{r_{ij}} \frac{dW(r_{ij}, kd, R)}{dr_{ij}}. \quad (14)$$

Здесь присутствует две группы параметров-констант: геометрические $(d, k, a_s = \frac{\sqrt{3}}{2})$, определяемые функцией ядра и способом разбиения исходного объема на частицы, а также физиче-

ские (ρ_0 — плотность среды в естественном состоянии, c_0 — модельная скорость звука), значения которых определяются условиями конкретной задачи.

3. Периодичный относительный сдвиг частиц в области сглаживания

Очевидно, что плотное расположение в соответствии с исходной дискретизацией частицы будут занимать только в отдельные моменты времени. В общем же для некоторой частицы i , расположенной в слое n , за счет разницы скоростей в выше- и нижележащих слоях будут иметь место постоянный сдвиг соседей и, соответственно, изменение расстояний r_{ij} . При этом число соседей в области сглаживания тоже будет переменным. Следовательно, будет изменяться и плотность частицы i . Введем определение относительного уплотнения частицы во времени:

$$\varepsilon_\rho(t, n) = \frac{\rho_i(t, n)}{\rho_0} - 1. \quad (15)$$

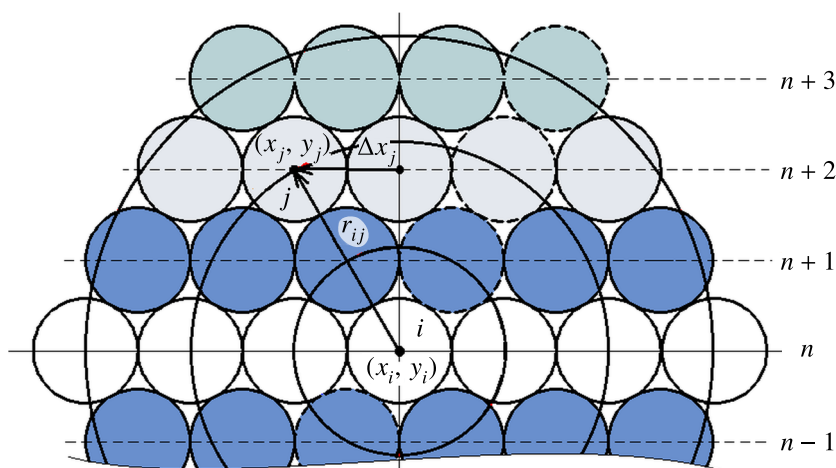


Рис. 3. Схема распределения соседей по слоям в области сглаживания ($R = 1, 2, 3; h = d$)

Для построения функции $\varepsilon_\rho(t, n)$ рассмотрим область сглаживания частицы i (рис. 3). Количество соседей в области сглаживания зависит от величины радиуса сглаживания ядра R (различные сглаживания на рис. 3 ограничены концентрическими окружностями). Соседние частицы распределены по разным слоям относительно n . Назовем k относительным от n номером слоя; диапазон k определяется величиной R радиуса сглаживания. Значение k далее используется для описания как слоя целиком, так и отдельной частицы j в слое. Поэтому условимся, что в первом случае записываем его как k , а во втором — как k_j .

Выразим в общем виде относительные скорости сдвига слоев k и n через разность скоростей пары частиц:

$$\Delta u_{n\pm k} = u_j((n \pm k_j)\Delta y) - u_i(n\Delta y), \quad n = 0, 1, \dots, N, \quad k = 1, 2, 3. \quad (16)$$

Подставив (7) в выражение (16), в итоге получим

$$\Delta u_{n\pm k} = \mp \frac{U}{B^2} (\Delta y)^2 k(2n \pm k) = \mp \frac{U}{N^2} k(2n \pm k). \quad (17)$$

Допустим, что относительный сдвиг частиц в области сглаживания происходит строго вдоль оси OX . Тогда можем определить период смены позиции частицы (то есть ее горизонтального сдвига на расстояние d) в слое k :

$$T_{n\pm k} = \frac{d}{|\Delta u_{n\pm k}|} = \frac{dN^2}{|Uk(2n \pm k)|}. \quad (18)$$

Для возможности сравнительного анализа функций $\varepsilon_\rho(t, n)$ при различных n введем понятие T — периода полной смены соседей в области сглаживания частицы. За его величину принимается максимально возможное для задачи значение по формуле (18), то есть при $n = 0$ и $k = 1$

$$T = \frac{dN^2}{U}. \tag{19}$$

Легко убедиться, что в период T целое число раз укладываются частные периоды смены позиций частиц относительно любого слоя n потока: $\frac{T}{T_{n\pm k}} = |k(2n \pm k)|$.

Изменение во времени расстояния r_{ij} запишем сначала в общем виде:

$$r_{ij}(n \pm k, t) = \sqrt{(y_j - y_i)^2 + (x_j(t) - x_i)^2}, \quad t \leq T_{n\pm k}. \tag{20}$$

Выразим (20) относительно позиции частицы i и окончательно получим

$$\begin{aligned} y_j - y_i &= (\pm k)\Delta y, & (x_j(t) - x_i) &= \Delta x_j \pm |\Delta u_{n\pm k}|t, \\ r_{ij}(n \pm k, t) &= \sqrt{(k\Delta y)^2 + (\Delta x_j \pm |\Delta u_{n\pm k}|t)^2}, & t &\leq T_{n\pm k}, \end{aligned} \tag{21}$$

где Δx_j — исходная координата частицы j на $n \pm k$ слое относительно x_i (см. рис. 3).

Подстановкой (17) и (21) в (11), (12) и (14) формируются выражения изменяемых во времени значений соответствующих аппроксимаций при плоскопараллельном движении частиц.

4. Анализ функций $\varepsilon_\rho(t, n)$ для некоторых ядер SPH

Для детального исследования изменения относительного уплотнения $\varepsilon_\rho(t, n)$ при сдвиговом течении рассмотрим три SPH-ядра с разными радиусами сглаживания: составное [Потапов, Решетникова, 2021], ядро Монагана [Monaghan, 2005] и ядро Морриса [Morris, Fox, Zhu, 1997]. Предыдущие исследования [Потапов, Решетникова, 2021] показали, что при значении геометрического параметра дискретизации $k = 1$ относительная погрешность аппроксимаций плотности (11) этими ядрами для частицы в естественном состоянии (см. рис. 2) не превышает 0,2%. Поэтому примем $h = d$, тогда функции W удобно представить в таком детализированном виде:

- составное ядро (упрощение при $k = 1$ от представленного в [Потапов, Решетникова, 2021]):

$$W(r_{ij}, d, 1) = \frac{15}{13d^2} \begin{cases} \left(1 - \left(\frac{r_{ij}}{d}\right)^2\right)^2 \left(1 - \left(4 - \frac{52}{5\pi}\right)\left(\frac{r_{ij}}{d}\right)^2\right), & 0 \leq \frac{r_{ij}}{d} \leq 1, \\ 0, & \frac{r_{ij}}{d} > 1, \end{cases} \tag{22a}$$

$$W'(r_{ij}, d, 1) = \frac{264}{665\pi d^3} \begin{cases} 22\frac{r_{ij}}{d} - 25, & 0 \leq \frac{r_{ij}}{d} \leq 1, \\ 0, & \frac{r_{ij}}{d} > 1; \end{cases} \tag{22b}$$

- ядро Монагана:

$$W(r_{ij}, d, 2) = \frac{15}{7\pi d^2} \begin{cases} \frac{2}{3} - \left(\frac{r_{ij}}{d}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{r_{ij}}{d}\right)^3, & 0 \leq \frac{r_{ij}}{d} \leq 1, \\ \frac{1}{6}\left(2 - \frac{r_{ij}}{d}\right)^3, & 1 \leq \frac{r_{ij}}{d} \leq 2, \\ 0, & \frac{r_{ij}}{d} > 2; \end{cases} \tag{23}$$

- ядро Морриса:

$$W(r_{ij}, d, 3) = \frac{7}{478\pi d^2} \begin{cases} \left(3 - \frac{r_{ij}}{d}\right)^5 - 6\left(2 - \frac{r_{ij}}{d}\right)^5 + 15\left(1 - \frac{r_{ij}}{d}\right)^5, & 0 \leq \frac{r_{ij}}{d} \leq 1, \\ \left(3 - \frac{r_{ij}}{d}\right)^5 - 6\left(2 - \frac{r_{ij}}{d}\right)^5, & 1 \leq \frac{r_{ij}}{d} \leq 2, \\ \left(3 - \frac{r_{ij}}{d}\right)^5, & 2 \leq \frac{r_{ij}}{d} \leq 3, \\ 0, & \frac{r_{ij}}{d} > 3. \end{cases} \quad (24)$$

Поскольку все три ядра характеризуются одинаковой сглаживающей длиной (равной d), далее будем обозначать их сокращенно как $W(r_{ij}, R)$, а их производную по r_{ij} — как $W'(r_{ij}, R)$.

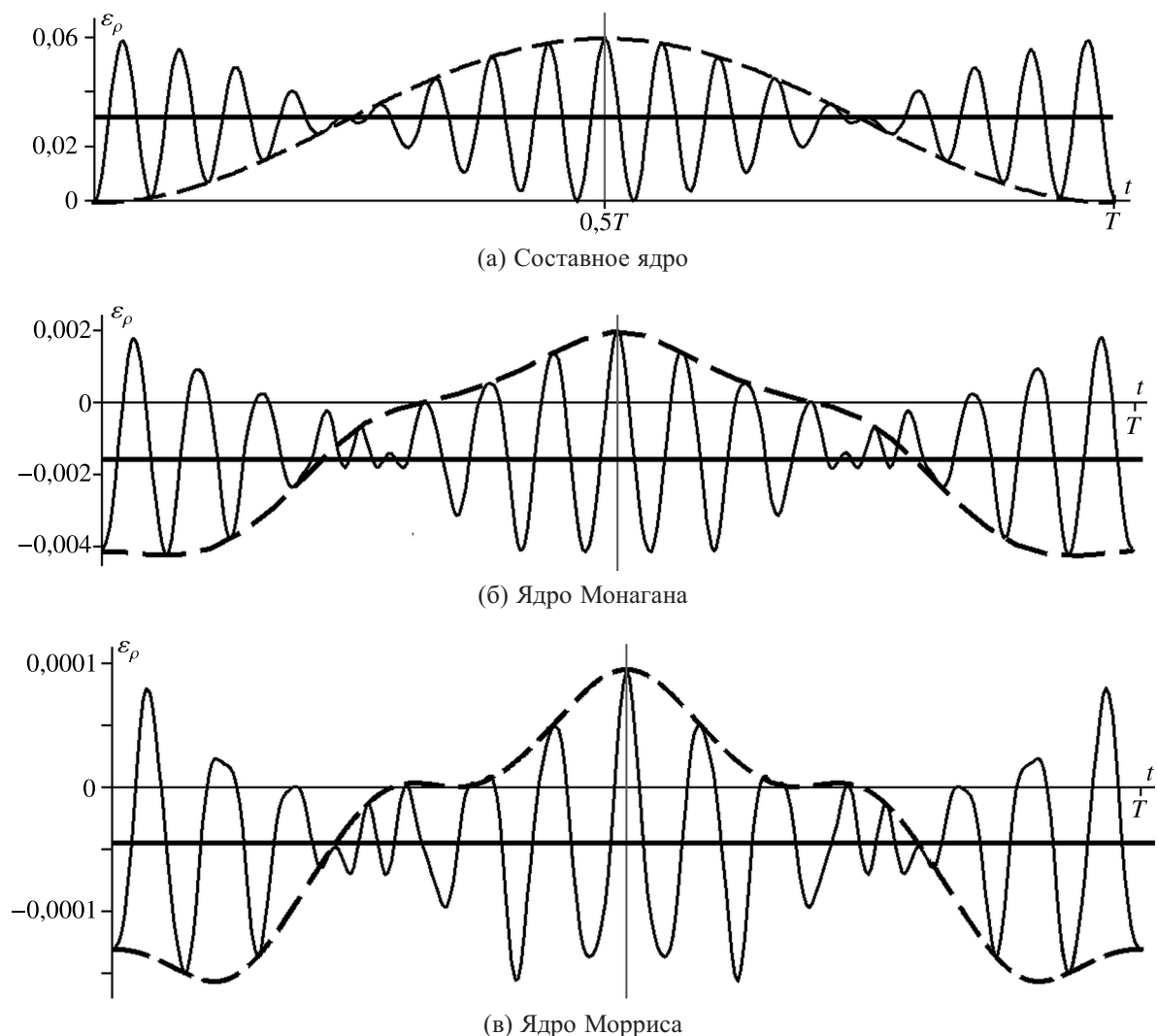


Рис. 4. Графики функций относительного уплотнения частицы $\varepsilon_\rho(t, n)$ за период T , формируемые различными ядрами для двух значений n : $n = 0$ (штриховые линии) и $n = N - R$ (сплошные линии); обозначения см. в тексте

Таблица 1. Значения функций ε_ρ в характерные моменты времени на периоде T и их среднее

Ядро	$\varepsilon_\rho(0T)$	$\varepsilon_\rho(0,5T)$	$\mathbb{M}(\varepsilon_\rho)$
Составное	-0,000740	0,059568	0,029873
Монагана	-0,004120	0,001984	-0,001275
Морриса	-0,000131	0,000094	-0,000043

На рис. 4 представлена серия графиков изменения $\varepsilon_\rho(t, n)$ согласно выражению (15) за период T , формируемых рассматриваемыми ядрами. Графики приведены для двух вариантов расположения частицы i по ширине канала: на оси ($n = 0$) и в глубине ($n = N - R$) потока. Кривые функций рис. 4 показывают, что амплитуды изменения $\varepsilon_\rho(t, n)$ в этих случаях независимы от n . Значение последнего определяет только частоту периодического изменения ε_ρ . Максимумы функций ε_ρ приходятся строго на середину периода T (табл. 1), то есть возникают в одном-единственном случае относительного расположения частиц в области сглаживания. Интегральные средние относительного уплотнения $\mathbb{M}(\varepsilon_\rho) = \frac{1}{T} \int_0^T \varepsilon_\rho(t) dt$ в диапазоне $0 < n \leq N - R$ постоянны (сплошные горизонтальные прямые на рис. 4, значения см. в табл. 1).

Однако в случае размещения частицы i в пристеночном слое ($n = N - 1$) функции $\varepsilon_\rho(t, n)$, формируемые ядрами с $R > 1$, характеризуются уменьшением амплитуды (графики не приведены). Это объясняется тем, что часть соседей такой частицы представляет стенку канала и не участвует в движении среды, следовательно, не вносит вклада в изменение $\varepsilon_\rho(t, n)$.

Сопоставив изменение функций $\varepsilon_\rho(t, n)$ на периоде T с замыкающим уравнением состояния (13) можно заключить, что для ядер с $R > 1$ (Монагана и Морриса, рис. 4, б, в) для случая идеального плоскопараллельного сдвига соседей в области сглаживания давление P_i в частице будет возникать лишь в отдельные отрезки времени. Причем чем больше n , тем короче такой отрезок. Для составного ядра (рис. 4, а) ситуация совершенно иная: давление P_i присутствует почти постоянно и только в отдельные моменты времени может становиться нулевым. Но в любом случае имеет место изменение P_i во времени.

5. Изменение градиента давления $\frac{dP_i(t)}{dx}$ в частице и параметр c_0

При решении задачи методом SPH условие $\frac{dP}{dx} = \text{const}$ справедливо только относительно полного расчетного объема среды. Применительно же к отдельной SPH-частице, в свете вышесказанного о переменности $\rho_i(t)$, значение $\frac{dP_i(t)}{dx}$ также перемененно.

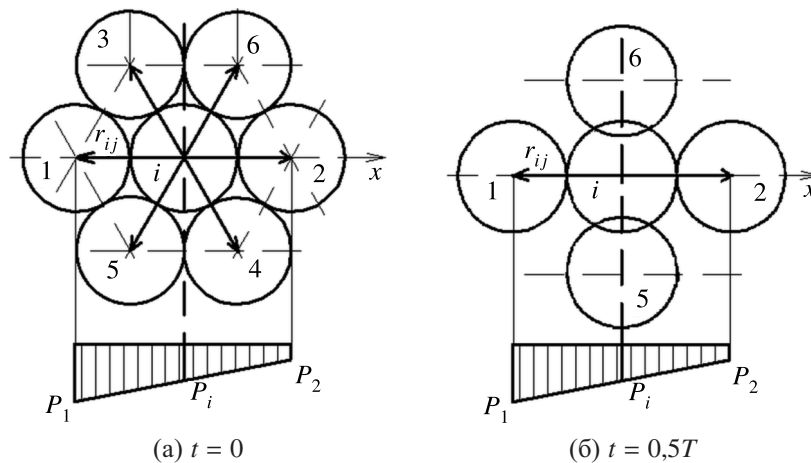


Рис. 5. Случай расположения частиц в области сглаживания $R = 1$ для разных моментов времени

Рассмотрим некоторую частицу i и ее соседей в области сглаживания для ядра с $R = 1$ (рис. 5). Примем, что мгновенное значение давления в ней P_i в общем случае складывается из двух составляющих: действия постоянной внешней тяги p и реакции на переменное увеличение плотности ε_ρ при относительном сдвиге частиц. В момент времени $t = 0$ (рис. 5, а) дискретная SPH-аппроксимация (12) выражается полиномом

$$\frac{dP_i(t=0)}{dx} = \frac{m}{\rho_i} \left[(P_2 - P_1) + \frac{1}{2}(P_4 + P_6 - P_3 - P_5) \right] \frac{W'(d, 1)d}{d}. \quad (25)$$

В этот момент времени уплотнение в частицах отсутствует ($\varepsilon_\rho \rightarrow -0$, табл. 1), то есть можно считать $\rho_i = \rho_0$. Тогда выразим давления в соседях через давление в частице i :

$$\begin{aligned} P_1 &= P_i + \rho_0 pd, & P_2 &= P_i - \rho_0 pd, \\ P_3 &= P_i + \frac{1}{2}\rho_0 pd, & P_4 &= P_i - \frac{1}{2}\rho_0 pd, \\ P_5 &= P_i + \frac{1}{2}\rho_0 pd, & P_6 &= P_i - \frac{1}{2}\rho_0 pd, \end{aligned}$$

$$\frac{dP_i(t=0)}{dx} = -\frac{m}{\rho_0} [\rho_0 pd] 3W'(d, 1) = -3mpdW'(d, 1). \quad (26)$$

Далее, в ходе относительного сдвига слоев соседние частицы 3 и 4 покинут область сглаживания на соответствующие им периоды $T_{n\pm 1}$. Произведенным в §4 анализом показано, что максимальное увеличение плотности частица i приобретает на середине T , то есть при размещении соседей, представленном на рис. 5, б. При этом градиент давления будут формировать только частицы 1 и 2. Причем разница давлений в них определяется не только внешним воздействием, но и параметром дискретизации задачи c_0 , что выражается через уравнение состояния (11). То есть давления в частицах с учетом реакции на увеличение плотности выразятся как

$$\begin{aligned} P_1 &= \rho_0 c_0^2 \left(\frac{\rho_1}{\rho_0} - 1 \right) = P_i + \rho_0 (c_0^2 \varepsilon_0 + pd), \\ P_2 &= \rho_0 c_0^2 \left(\frac{\rho_2}{\rho_0} - 1 \right) = P_i - \rho_0 (c_0^2 \varepsilon_0 + pd), \\ P_2 - P_1 &= 2\rho_0 (c_0^2 \varepsilon_0 + pd), \end{aligned} \quad (27)$$

$$\frac{dP_i(t=0,5T)}{dx} = -\frac{2m}{1 + \varepsilon_0} (c_0^2 \varepsilon_0 + pd) W'(d, 1). \quad (28)$$

Здесь для единообразия выкладок допустимое уплотнение частицы в этом расположении соседей $\varepsilon_\rho(0,5T)$ обозначено как ε_0 .

Из требования равенства (26) и (28) может быть получено выражение для значения параметра дискретизации c_0 для задачи, чье уравнение движения не содержит иных аппроксимаций, кроме ∇P_i . В общем же случае выражение для c_0 должно строиться исходя из полного состава уравнения движения. Сформулируем полиномы аппроксимаций $\frac{d^2 u_i}{dy^2}$ на основе (14) с учетом (17) и (21) для ядра с $R = 1$:

$$M \frac{d^2 u_i(t=0)}{dy^2} = -p \left(\frac{\sqrt{3}}{2} d \right)^2 m \frac{4}{d} W'(d, 1), \quad (29)$$

$$M \frac{d^2 u_i(t=0,5T)}{dy^2} = -p \left(\frac{\sqrt{3}}{2} d \right)^2 \frac{m}{1 + \varepsilon_0} \frac{4}{d \sqrt{3}} W' \left(\frac{\sqrt{3}}{2} d, 1 \right). \quad (30)$$

Кроме того, при численной реализации решения задач методом SPH в аппроксимацию для градиента давлений (12) включается искусственная диссипация по Монагану [Monaghan, 1983; Monaghan, 2012], а именно:

$$\frac{dP_i}{dx} = \frac{m}{\rho_i} \sum_j (P_i + P_j) W'(r_{ij}, 1) \frac{r_{ij}^x}{r_{ij}} + \Pi, \tag{31}$$

где

$$\Pi = \begin{cases} -\alpha c_0 h m \sum_b \frac{r_b \cdot \Delta u_{n+k_b}}{r_b^2} W'(r_b, 1) \frac{r_b^x}{r_b}, & r_b \cdot \Delta u_{n+k_b} < 0, \\ 0, & \text{если иначе.} \end{cases}$$

Коэффициент диссипации принимается из диапазона $\alpha \in (0 \dots 0,25)$, и чем больше его значение, тем более пластичной получается моделируемая среда.

Очевидно, что проявление диссипативного вклада переменено во времени. Для ядра с $R = 1$ момент времени $t = 0,5T$, исходя из геометрии (рис. 5, б) $\Pi = 0$. При $t = 0$ диссипативный вклад будут создавать только две частицы: 4 и 6 ($n > 0$) или 5 и 6 ($n = 0$), но значение n в этом случае размещения соседей несущественно. Учтя, что $h = d$ и $r_b^2 = d^2$, а также раскрыв $\Delta u_{n\pm 1}$ по (17), запишем Π также через полином

$$\Pi(t = 0) = \frac{1}{2} \alpha c_0 \frac{U}{N^2} m W'(d, 1). \tag{32}$$

Тогда (26) переписывается как

$$\frac{dP_i(t = 0)}{dx} = m \left(-3pd + \frac{1}{2} \alpha c_0 \frac{U}{N^2} \right) W'(d, 1). \tag{33}$$

Из сформированных полиномов требуется составить уравнение исходя из условия

$$\frac{dP_i(t = 0)}{dx} - M \frac{d^2 u_i(t = 0)}{dy^2} = \frac{dP_i(t = 0,5T)}{dx} - M \frac{d^2 u_i(t = 0,5T)}{dy^2}.$$

В итоге получим

$$\left(\frac{2(c_0^2 \varepsilon_0 + pd)}{1 + \varepsilon_0} + \frac{1}{2} \alpha c_0 \frac{U}{N^2} \right) W'(d, 1) - \frac{pd}{1 + \varepsilon_0} \frac{3}{\sqrt{3}} W' \left(\frac{\sqrt{3}}{2} d, 1 \right) = 0. \tag{34}$$

Положительный корень уравнения (34) даст модельное значение параметра дискретизации c_0 для поставленной задачи, численно решаемой методом SPH с использованием ядра с $R = 1$.

Таблица 2. К расчету значений c_0 при использовании в решении некоторых ядер с соответствующим заданным допустимым уплотнением ε_0

Ядро	ε_0	c_0 , где $A = \frac{pdN^4}{U^2}$
Составное	0,05957	$U \frac{\sqrt{5\alpha^2 + 12A} - 2\alpha}{N^2}$
Монагана	0,00198	$10U \frac{\sqrt{6\alpha^2 + 5A} - 2,15\alpha}{N^2}$
Морриса	0,00009	$10U \frac{\sqrt{83\alpha^2 + 120A} - 28,5\alpha}{N^2}$

При использовании в SPH-аппроксимациях ядер с $R > 1$ принципы построения выражений для определения c_0 полностью аналогичны вышеизложенным, только учитывают гораздо большее число слагаемых в аппроксимирующих полиномах. В табл. 2 сведены соответствующие рассмотренным в работе ядрам (22)–(24) выражения для расчета c_0 , упрощенные до числовых коэффициентов при заданных допустимых уплотнениях ε_0 в частице.

6. Заключение

В работе рассмотрены задача о плоском сдвиговом течении жидкости и ее дискретизация по методу SPH. Показано, что относительный плоскопараллельный сдвиг слоев течения вызывает колебание во времени плотностей SPH-частиц. Исследование функций относительного изменения плотности в частице ε_ρ для трех различных ядер сглаживания позволило сделать следующие выводы:

- составное ядро ($R = 1$) не подходит для численного решения задачи об идеальном сдвиговом течении жидкости в условиях несжимаемости, поскольку требует допущения относительного уплотнения в частице не менее 6 %;
- пульсирующий характер изменения давлений в частицах при их относительном сдвиге в соответствии с уравнением Бернулли имеет следствием возникновение пульсаций скорости; то есть численное решение задачи о сдвиговом течении методом SPH всегда имеет ненулевую пульсационную компоненту эффективной скорости в точке расчетной области.

Сопоставление результатов анализа ε_ρ с уравнением движения, выраженного через SPH-аппроксимации, позволило связать параметр дискретизации c_0 с функцией ядра сглаживания. В результате сформулировано выражение для нахождения модельной скорости звука, необходимой и достаточной для численного решения задачи методом SPH:

$$c_0 = \kappa U.$$

Полученная формула подтверждает факт пропорциональности c_0 и максимальной скорости потока согласно известным рекомендациям для жидких сред. Однако коэффициент пропорциональности κ имеет сложную форму и учитывает в себе функцию ядра сглаживания, коэффициент искусственной диссипации, размер SPH-частицы, а также характерные условия задачи. В частности, для сдвигового течения учитываются скоростной напор $\frac{U^2}{2\rho}$ и ширина канала.

Предложенный подход к определению c_0 может быть применен и для других задач на движение сплошных сред, решаемых методом SPH. Для этого потребуется только корректировка состава полиномов, выражающих SPH-аппроксимацию уравнения движения. При этом величина максимального уплотнения ε_0 не обязательно должна привязываться к результатам приведенного в работе анализа. Она может назначаться исходя из технических соображений (например 1 %) или по результатам анализа иного относительного смещения частиц в области сглаживания, специфичного для конкретной задачи.

Список литературы (References)

- Потапов И. И., Решетникова О. В.* Исследование влияния двух геометрических параметров на точность решения гидростатической задачи методом гидродинамики сглаженных частиц // Компьютерные исследования и моделирование. — 2021. — Т. 13, № 5. — С. 979–992.
- Potapov I. I., Reshetnikova O. V.* Issledovanie vliyaniya dvuh geometricheskikh parametrov na tochnost' resheniya gidrostaticheskoy zadachi metodom gidrodinamiki sglajennih chastits [The two geometric parameters influence study on the hydrostatic problem solution accuracy by the SPH method] // Computer research and modeling. — 2021. — Vol. 13, No. 5. — P. 979–992 (in Russian).
- Macdonald J. R.* Some simple isothermal equations of state // Reviews of Modern Physics. — 1966. — Vol. 38, No. 4. — P. 669–679.
- Monaghan J. J.* Particle methods for hydrodynamics // Computer Physics Reports 3. North-Holland, Amsterdam. — 1985. — P. 71–124.
- Monaghan J. J.* Shock simulation by the particle method SPH // Journal of computational physics. — 1983. — Vol. 52. — P. 374–389.

-
- Monaghan J. J.* Simulating free surface flows with SPH // *Journal of Computational Physics*. — 1994. — Vol. 110, No. 2. — P. 399–406.
- Monaghan J. J.* Smoothed particle hydrodynamics and its diverse applications // *Annu. Rev. Fluid Mech.* — 2012. — Vol. 44. — P. 323–346.
- Monaghan J. J.* Smoothed particle hydrodynamic simulations of shear flow // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* — 2006. — Vol. 365. — P. 199–213.
- Monaghan J. J.* Smoothed particles hydrodynamics // *Reports on Progress in Physics*. — 2005. — Vol. 68. — P. 1703–1759.
- Morris J. P., Fox P. J., Zhu Y.* Modeling low Reynolds number incompressible flows using SPH // *Comput. Phys.* — 1997. — Vol. 136. — P. 214–226.