КОМПЬЮТЕРНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ И МОДЕЛИРОВАНИЕ 2024 Т. 16 № 2 С. 353–373
DOI: 10.20537/2076-7633-2024-16-2-353-373

Ки&М

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ И ОСНОВЫ ИХ РЕАЛИЗАЦИИ

УДК: 519.642

Численное решение интегро-дифференциальных уравнений влагопереноса дробного порядка с оператором Бесселя

М. Х. Бештоков

Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН,
Россия, 360000, г. Нальчик, ул. Шортанова, д. 89а

E-mail: beshtokov-murat@yandex.ru

Получено 21.08.2022, после доработки — 26.06.2023.
Принято к публикации 18.01.2024.

В работе рассматриваются интегро-дифференциальные уравнения влагопереноса дробного порядка с оператором Бесселя. Изучаемые уравнения содержат оператор Бесселя, два оператора дробного дифференцирования Герасимова – Капуто с разными порядками α и β. Рассмотрены два вида интегро-дифференциальных уравнений: в первом случае уравнение содержит нелокальный источник, т. е. интеграл от неизвестной функции по переменной интегрирования x, а во втором — случае интеграл по временной переменной τ, обозначающий эффект памяти. Подобные задачи возникают при изучении процессов с предысторией. Для решения дифференциальных задач при различных соотношениях α и β получены априорные оценки в дифференциальной форме, откуда следуют единственность и устойчивость решения по правой части и начальным данным. Для приближенного решения поставленных задач построены разностные схемы с порядком аппроксимации $O\left(h^2+\tau^2\right)$ при $\alpha=\beta$ и $O\left(h^2+\tau^{2-\max\{\alpha,\beta\}}\right)$ при $\alpha\neq\beta$. Исследование единственности, устойчивости и сходимости решения проводится с помощью метода энергетических неравенств. Получены априорные оценки решений разностных задач при различных соотношениях α и β, откуда следуют единственность и устойчивость, а также сходимость решения разностной схемы к решению исходной дифференциальной задачи со скоростью равной порядку аппроксимации разностной схемы.

Ключевые слова: уравнение влагопереноса, интегро-дифференциальное уравнение, разностные схемы, оператор Бесселя, априорная оценка, устойчивость, сходимость

© 2024 Мурат Хамидбиевич Бештоков
Статья доступна по лицензии Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Unported License.
Чтобы получить текст лицензии, посетите веб-сайт http://creativecommons.org/licenses/by-nd/3.0/
или отправьте письмо в Creative Commons, PO Box 1866, Mountain View, CA 94042, USA.

COMPUTER RESEARCH AND MODELING
2024 VOL. 16 NO. 2 P. 353–373
DOI: 10.20537/2076-7633-2024-16-2-353-373

Ки&М

NUMERICAL METHODS AND THE BASIS FOR THEIR APPLICATION

UDC: 519.642

Numerical solution of integro-differential equations of fractional moisture transfer with the Bessel operator

M. Kh. Beshtokov

Institute of applied mathematics and automation, Kabardino-Balkarian scientific center of RAS,
89a Shortanova st., Nalchik, 360000, Russia

E-mail: beshtokov-murat@yandex.ru

Received 21.08.2022, after completion — 26.06.2023.
Accepted for publication 18.01.2024.

The paper considers integro-differential equations of fractional order moisture transfer with the Bessel operator. The studied equations contain the Bessel operator, two Gerasimov – Caputo fractional differentiation operators with different orders α and β. Two types of integro-differential equations are considered: in the first case, the equation contains a non-local source, i. e. the integral of the unknown function over the integration variable x, and in the second case, the integral over the time variable τ, denoting the memory effect. Similar problems arise in the study of processes with prehistory. To solve differential problems for different ratios of α and β, a priori estimates in differential form are obtained, from which the uniqueness and stability of the solution with respect to the right-hand side and initial data follow. For the approximate solution of the problems posed, difference schemes are constructed with the order of approximation $O\left(h^2 + \tau^2\right)$ for $\alpha = \beta$ and $O\left(h^2 + \tau^{2-\max\{\alpha,\beta\}}\right)$ for $\alpha \neq \beta$. The study of the uniqueness, stability and convergence of the solution is carried out using the method of energy inequalities. A priori estimates for solutions of difference problems are obtained for different ratios of α and β, from which the uniqueness and stability follow, as well as the convergence of the solution of the difference scheme to the solution of the original differential problem at a rate equal to the order of approximation of the difference scheme.

Keywords: moisture transfer equation, integro-differential equation, difference schemes, Bessel operator, a priori estimate, stability, convergence

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2024, vol. 16, no. 2, pp. 353–373 (Russian).

© 2024 Murat Kh. Beshtokov
This work is licensed under the Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Unported License.
To view a copy of this license, visit http://creativecommons.org/licenses/by-nd/3.0/
or send a letter to Creative Commons, PO Box 1866, Mountain View, CA 94042, USA.

Введение

Большой интерес с точки зрения физических приложений представляют интегро-дифференциальные уравнения, когда неизвестная функция входит в дифференциальное выражение и вместе с тем фигурирует под знаком интеграла. Возникновение интегрального слагаемого в уравнении связано с необходимостью учитывать зависимость мгновенных значений характеристик описываемого объекта от их соответствующих предыдущих значений, т. е. влияние на текущее состояние системы ее предыстории. В современной литературе подобные технические и природные системы называют системами с последействием, наследственностью или динамической памятью.

Тематике интегро-дифференциальных уравнений посвящена обширная библиография. Подробный обзор достижений в этой области до 1962 года представлен М. М. Вайнбергом в статье [Вайнберг, 1964]. На необходимость рассмотрения операторных уравнений Вольтерры впервые указал академик М. М. Лаврентьев в своем докладе [Лаврентьев, 1972] на Международном конгрессе математиков в Ницце в 1970 году. Изучению различных краевых задач для обыкновенных интегро-дифференциальных уравнений посвящены работы [Васильев, 1961; Сидоров, 1968; Трубин, 1978; Булатов, 2002], интегро-дифференциальным уравнениям третьего порядка посвящены работы [Ewing, 2009; Cuesta, Pop, 2009; Guezane-Lakoud, Belakroum, 2012; Luoa, Teng, 2018; Xia, Luo, 2017].

Предлагаемая работа посвящена исследованию начально-краевых задач для интегро-дифференциальных уравнений влагопереноса с оператором Бесселя и двумя операторами дробного дифференцирования α и β разных порядков. Целью работы являются построение и исследование сходимости приближенного решения для каждой начально-краевой задачи с помощью метода конечных разностей. Исследование единственности, устойчивости и сходимости проводится методом энергетических неравенств. Получены априорные оценки в дифференциальной и разностной трактовках при различных соотношениях α и β, откуда следуют единственность, устойчивость, а также сходимость решения разностной задачи к решению исходной дифференциальной задачи со скоростью, равной порядку аппроксимации разностной схемы.

В работе [Баренблат, Желтов, Кочина, 1960] дается постановка задачи о фильтрации однородных жидкостей в породах с сильно развитой трещиноватостью, выводится уравнение влагопереноса с оператором Бесселя, описывающее одномерное осесимметричное движение жидкости.

Уравнение влагопереноса с оператором Бесселя также возникает при переходе от трехмерного уравнения влагопереноса

$$\partial_{0t}^{\alpha} u = Lu + f(x, t), \quad (x, t) \in Q_T, \tag{1}$$

где

$$Lu = \sum_{s=1}^{3} L_s u, \quad x = (x_1, x_2, x_3),$$

$$L_s u = \frac{\partial}{\partial x_s}\left(k_s(x, t)\frac{\partial u}{\partial x_s}\right) + \partial_{0t}^{\beta}\frac{\partial}{\partial x_s}\left(\eta_s(x)\frac{\partial u}{\partial x_s}\right) + h_s(x, t)\frac{\partial u}{\partial x_s} - q_s(x, t)u,$$

к цилиндрической системе координат (r, φ, z) в случае, когда решение $u = u(r)$ не зависит ни от z, ни от φ (имеет место осевая симметрия), (1) принимает вид (обозначим $x = r$) (см. [Веницианов, 1983, с. 15] и [Самарский, 1983, с. 433])

$$\partial_{0t}^{\alpha} u = \frac{1}{r}(rk(r, t)u_r)_r + \frac{1}{r}\partial_{0t}^{\alpha}(r\eta(r)u_r)_r + h(r, t)u_r - q(r, t)u + f(r, t), \tag{2}$$

а в случае сферической симметрии уравнение (1) принимает вид

$$\partial_{0t}^{\alpha} u = \frac{1}{r^2}\left(r^2 k(r,\,t)u_r\right)_r + \frac{1}{r^2}\partial_{0t}^{\alpha}\left(r^2\eta(r)u_r\right)_r + h(r,\,t)u_r - q(r,\,t)u + f(r,t), \tag{3}$$

где

$$k(r,\,t) = k_1(x,\,t) = k_2(x,\,t) = k_3(x,\,t), \quad \eta(r) = \eta_1(x) = \eta_2(x) = \eta_3(x),$$
$$h(r,\,t) = h_1(x,\,t) = h_2(x,\,t) = h_3(x,\,t), \quad q(r,\,t) = q_1(x,\,t) = q_2(x,\,t) = q_3(x,\,t)$$

есть условия симметрии на коэффициенты в силу симметрии r относительно переменных x_1, x_2, x_3.

Настоящая работа является непосредственным продолжением серии работ автора [Бештоков, 2013; Бештоков, 2016; Beshtokov, 2016; Бештоков, 2018; Бештоков, 2019], в которых в основном были предложены разностные методы решения локальных и нелокальных краевых задач для уравнения влагопереноса.

Постановка задачи

В замкнутом прямоугольнике $\overline{Q}_T = \{(x,\,t)\colon 0 \leqslant x \leqslant l,\, 0 \leqslant t \leqslant T\}$ рассмотрим следующую задачу для уравнения влагопереноса дробного порядка с нелокальным линейным источником и оператором Бесселя:

$$\partial_{0t}^{\alpha} u = \frac{1}{x^m}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^m k(x,\,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{1}{x^m}\partial_{0t}^{\beta}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^m \eta(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + r(x,\,t)\frac{\partial u}{\partial x} -$$
$$- q(x,\,t)u(x,\,t) + \int_0^l \xi^m p(\xi,\,t)u(\xi,\,t)\,d\xi + f(x,\,t), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \leqslant T, \tag{4}$$

$$\lim_{x\to 0} x^m \Pi(x,\,t) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{5}$$

$$u(l,\,t) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{6}$$

$$u(x,\,0) = u_0(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{7}$$

где

$$\begin{gathered} 0 < c_0 \leqslant k(x,\,t), \quad \eta(x) \leqslant c_1, \quad q(x,\,t) \geqslant 0, \\ |r(x,\,t)|,\, |r_x(x,\,t)|,\, |k_x(x,\,t)|,\, |p(x,\,t)| \leqslant c_2, \quad m \geqslant 0, \\ u(x,\,t) \in C^{4,3}(\overline{Q}_T), \quad k(x,\,t) \in C^{3,1}(\overline{Q}_T), \\ r(x,\,t),\, q(x,\,t),\, p(x,t),\, f(x,\,t) \in C^{2,1}(\overline{Q}_T), \quad \eta(x) \in C^2[0,\,1], \end{gathered} \tag{8}$$

$\partial_{0t}^{\gamma} u = \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)}\int\limits_0^t \frac{u_\tau(x,\,\tau)}{(t-\tau)^{\gamma}}\,d\tau$ — дробная производная в смысле Герасимова–Капуто порядка γ, $0 < \gamma < 1$, $\Pi(x,\,t) = k(x,\,t)u_x(x,\,t) + \eta(x)\partial_{0t}^{\beta}u_x(x,\,t)$.

При $x = 0$ ставится условие ограниченности решения $|u(0,\,t)| < \infty$, которое эквивалентно условию (5), равносильному в свою очередь тождеству $\Pi(0,\,t) = 0$ [Самарский, 1983, с. 173], если функции $r(0,\,t)$, $k(0)$, $q(0,\,t)$, $f(0,\,t)$ и интеграл конечны.

Обозначим через M_i $(i = 1,\,2,\,\ldots)$ положительные постоянные числа, зависящие только от входных данных исходной задачи.

Априорная оценка в дифференциальной форме

Для получения априорной оценки решения задачи (4)–(7) в дифференциальной форме умножим уравнение (4) скалярно на $x^m u$:

$$\left(\partial_{0t}^{\alpha}u,\, x^m u\right)=\left((x^m k u_x)_x,\, u\right)+\left(\partial_{0t}^{\beta}(x^m\eta u_x)_x,\, u\right)+$$
$$+(ru_x,\, x^m u)-(qu(x,\,t),\, x^m u)+\left(\int_0^l \xi^m p(\xi,\,\tau)u(\xi,\,\tau)\,d\tau,\, x^m u\right)+(f,\, x^m u), \quad (9)$$

где $(u,\,v)=\int_0^l uv\,dx$, $(u,\,u)=\|u\|_0^2$, где $u,\,v$ — заданные на $[0,\,l]$ функции.

Преобразуем интегралы, входящие в тождество (9), пользуясь неравенством Коши с ε [Самарский, 1983, с. 100] и леммой 1 из [Алиханов, 2010], находим

$$\left(\partial_{0t}^{\alpha}u,\, x^m u\right)\geqslant\frac{1}{2}\left(x^m,\,\partial_{0t}^{\alpha}\left(u^2\right)\right)=\frac{1}{2}\partial_{0t}^{\alpha}\left\|x^{m/2}u\right\|_0^2, \quad (10)$$

$$\left((x^m k u_x)_x,\, u\right)=\int_0^l u\,(x^m k u_x)_x\,dx=x^m uku_x\Big|_0^l-\int_0^l x^m k u_x^2\,dx\leqslant x^m uku_x\Big|_0^l-c_0\left\|x^{m/2}u_x\right\|_0^2, \quad (11)$$

$$\left(\partial_{0t}^{\beta}(x^m\eta u_x)_x,\, u\right)=\int_0^l u\partial_{0t}^{\beta}(x^m\eta u_x)_x\,dx=x^m\eta u\partial_{0t}^{\beta}u_x\Big|_0^l-\int_0^l x^m\eta(x)u_x\partial_{0t}^{\beta}u_x\,dx\leqslant$$
$$\leqslant x^m\eta u\partial_{0t}^{\beta}u_x\Big|_0^l-\frac{1}{2}\int_0^l \eta\partial_{0t}^{\beta}\left(x^{m/2}u_x\right)^2\,dx, \quad (12)$$

$$(ru_x,\, x^m u)=\int_0^l rx^m uu_x\,dx\leqslant\frac{c_2^2}{4\varepsilon}\int_0^l x^m u^2\,dx+\varepsilon\int_0^l x^m u_x^2\,dx\leqslant\varepsilon\left\|x^{m/2}u_x\right\|_0^2+M_1(\varepsilon)\left\|x^{m/2}u\right\|_0^2, \quad (13)$$

$$-(q(x,\,t)u,\, x^m u)=-\left(q(x,\,t),\,\left(x^{m/2}u\right)^2\right), \quad (14)$$

$$\left(\int_0^l \xi^m p(\xi,\,t)u(\xi,\,t)\,d\xi,\, x^m u\right)=\int_0^l\left(x^m u\int_0^l \xi^m p(\xi,\,t)u(\xi,\,t)\,d\xi\right)dx\leqslant$$
$$\leqslant\int_0^l\left(\frac{x^m u^2}{2}+\frac{x^m}{2}\left(\int_0^l \xi^m p(\xi,\,t)u(\xi,\,t)\,d\xi\right)^2\right)dx\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{2}\left\|x^{m/2}u\right\|_0^2+\frac{1}{2}\int_0^l\left(x^m\int_0^l \xi^m p^2(\xi,\,t)\,d\xi\int_0^l \xi^m u^2(\xi,\,t)\,d\xi\right)dx\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{2}\left\|x^{m/2}u\right\|_0^2+M_2\int_0^l\left(\int_0^l \xi^m u^2(\xi,\,t)\,d\xi\right)dx\leqslant M_3\left\|x^{m/2}u\right\|_0^2, \quad (15)$$

$$(f,\, x^m u)=\int_0^l x^m fu\,dx\leqslant\frac{1}{2}\left\|x^{m/2}u\right\|_0^2+\frac{1}{2}\left\|x^{m/2}f\right\|_0^2. \quad (16)$$

Учитывая преобразования (10)–(16), из (9) находим

$$\frac{1}{2}\partial_{0t}^{\alpha}\left\|x^{m/2}u\right\|_0^2+\frac{1}{2}\partial_{0t}^{\beta}\int\limits_0^l \eta\left(x^{m/2}u_x\right)^2\,dx+c_0\left\|x^{m/2}u_x\right\|_0^2\leqslant$$

$$\leqslant x^m u\Pi(x,\,t)\Big|_0^l+\varepsilon\left\|x^{m/2}u_x\right\|_0^2+M_4(\varepsilon)\left\|x^{m/2}u\right\|_0^2+\frac{1}{2}\left\|x^{m/2}f\right\|_0^2. \quad (17)$$

Выбирая $\varepsilon=\frac{c_0}{2}$, с учетом (5), (6) из (17) получаем

$$\partial_{0t}^{\alpha}\left\|x^{m/2}u\right\|_0^2+\partial_{0t}^{\beta}\int\limits_0^l \eta\left(x^{m/2}u_x\right)^2\,dx+\left\|x^{m/2}u_x\right\|_0^2\leqslant M_5\left\|x^{m/2}u\right\|_0^2+M_6\left\|x^{m/2}f\right\|_0^2. \quad (18)$$

1. Рассмотрим случай, когда $\alpha>\beta$, тогда, применяя к обеим частям неравенства (18) оператор дробного интегрирования $D_{0t}^{-\alpha}$, получаем

$$\left\|x^{m/2}u\right\|_0^2+D_{0t}^{-(\alpha-\beta)}\left\|x^{m/2}u_x\right\|_0^2\leqslant M_7 D_{0t}^{-\alpha}\left\|x^{m/2}u\right\|_0^2+M_8\left(D_{0t}^{-\alpha}\left\|x^{m/2}f\right\|_0^2+\left\|x^{m/2}u_0(x)\right\|_0^2\right). \quad (19)$$

На основании леммы 2 [Алиханов, 2010] из (19) находим априорную оценку

$$\left\|x^{m/2}u\right\|_0^2+D_{0t}^{-(\alpha-\beta)}\left\|x^{m/2}u_x\right\|_0^2\leqslant M_9\left(D_{0t}^{-\alpha}\left\|x^{m/2}f\right\|_0^2+\left\|x^{m/2}u_0(x)\right\|_0^2\right), \quad (20)$$

где $D_{0t}^{-\gamma}u=\frac{1}{\Gamma(\gamma)}\int\limits_0^t\frac{u\,d\tau}{(t-\tau)^{1-\gamma}}$ — дробный интеграл Римана – Лиувилля порядка γ, $0<\gamma<1$.

2. Рассмотрим случай, когда $\alpha=\beta$, тогда, применяя к обеим частям неравенства (18) оператор дробного интегрирования $D_{0t}^{-\alpha}$, получаем

$$\left\|x^{m/2}u\right\|_0^2+\left\|x^{m/2}u_x\right\|_0^2+D_{0t}^{-\alpha}\left\|x^{m/2}u_x\right\|_0^2\leqslant M_{10}D_{0t}^{-\alpha}\left\|x^{m/2}u\right\|_0^2+$$

$$+M_{11}\left(D_{0t}^{-\alpha}\left\|x^{m/2}f\right\|_0^2+\left\|x^{m/2}u_0(x)\right\|_0^2+\left\|x^{m/2}u_0'(x)\right\|_0^2\right). \quad (21)$$

На основании леммы 2 [Алиханов, 2010] из (21) находим априорную оценку

$$\left\|x^{m/2}u\right\|_0^2+\left\|x^{m/2}u_x\right\|_0^2+D_{0t}^{-\alpha}\left\|x^{m/2}u_x\right\|_0^2\leqslant M_{12}\left(D_{0t}^{-\alpha}\left\|x^{m/2}f\right\|_0^2+\left\|x^{m/2}u_0(x)\right\|_0^2+\left\|x^{m/2}u_0'(x)\right\|_0^2\right). \quad (22)$$

3. Рассмотрим случай, когда $\alpha<\beta$, тогда, применяя к обеим частям неравенства (18) оператор дробного интегрирования $D_{0t}^{-\beta}$, получаем

$$\left\|x^{m/2}u_x\right\|_0^2+D_{0t}^{-(\beta-\alpha)}\left\|x^{m/2}u\right\|_0^2\leqslant M_{13}D_{0t}^{-\beta}\left\|x^{m/2}u\right\|_0^2+M_{14}\left(D_{0t}^{-\beta}\left\|x^{m/2}f\right\|_0^2+\left\|x^{m/2}u_0'(x)\right\|_0^2\right). \quad (23)$$

В силу условия $u(l,\,t)=0$ справедливо тождество

$$u(x,\,t)=-\int\limits_x^l u_x(x,\,t)\,dx,$$

тогда

$$u^2(x,\,t)=\left(-\int\limits_x^l u_x(x,\,t)\,dx\right)^2\leqslant(l-x)\int\limits_x^l u_x^2(x,\,t)\,dx\leqslant l\int\limits_0^l u_x^2(x,\,t)\,dx. \quad (24)$$

Интегрируя обе части (24) по x от 0 до l, получаем неравенство $\|u\|_0^2 \leqslant l^2\|u_x\|_0^2$ [Ладыженская, 1973], тогда из (23) получаем

$$\left\|x^{m/2}u_x\right\|_0^2 + D_{0t}^{-(\beta-\alpha)}\left\|x^{m/2}u\right\|_0^2 \leqslant M_{15}D_{0t}^{-\beta}\left\|x^{m/2}u_x\right\|_0^2 + M_{16}\left(D_{0t}^{-\beta}\left\|x^{m/2}f\right\|_0^2 + \left\|x^{m/2}u_0'(x)\right\|_0^2\right).$$

На основании леммы 2 [Алиханов, 2010] из последнего находим априорную оценку

$$\left\|x^{m/2}u_x\right\|_0^2 + D_{0t}^{-(\beta-\alpha)}\left\|x^{m/2}u\right\|_0^2 \leqslant M_{17}\left(D_{0t}^{-\beta}\left\|x^{m/2}f\right\|_0^2 + \left\|x^{m/2}u_0'(x)\right\|_0^2\right). \tag{25}$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (8)*, тогда для решения задачи* (4)–(7) *справедливы априорные оценки*: (20)*, в случае когда* $\alpha > \beta$; (22)*, в случае когда* $\alpha = \beta$; (25)*, в случае когда* $\alpha < \beta$.

Из полученных априорных оценок (20), (22), (25) следуют единственность и устойчивость решения по правой части и начальным данным.

Устойчивость и сходимость разностной схемы, аппроксимирующей краевую задачу для уравнения влагопереноса дробного порядка с нелокальным линейным источником и оператором Бесселя

Для решения задачи (4)–(7) применим метод конечных разностей. В замкнутом цилиндре $\overline{Q}_T$ введем равномерную сетку $\overline{\omega}_{h\tau} = \overline{\omega}_h \times \overline{\omega}_\tau$, где $\overline{\omega}_h = \left\{x_i = ih,\ i = \overline{0,N},\ h = \frac{l}{N}\right\}$, $\overline{\omega}_\tau = \left\{t_j = j\tau,\ j = 0, 1, \ldots, j_0,\ \tau = \frac{T}{j_0}\right\}$. На равномерной сетке $\overline{\omega}_{h\tau}$ дифференциальной задаче (4)–(7) поставим в соответствие разностную схему порядка аппроксимации $O\left(h^2+\tau^2\right)$ при $\alpha = \beta$ и $O\left(h^2+\tau^{2-\max\{\alpha,\beta\}}\right)$ при $\alpha \neq \beta$:

$$\begin{aligned}\overline{\varkappa}\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}y = \frac{\varkappa}{x_i^m}\left(x_{i-0,5}^m a_i^j y_{\overline{x}}^{(\sigma)}\right)_x + \frac{1}{x_i^m}\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\beta}\left(x_{i-0,5}^m\gamma_i y_{\overline{x},i}\right)_x + \frac{b^{-j}}{x_i^m}\left(x_{i-0,5}^m a_i^j y_{\overline{x},i}^{(\sigma)}\right) + \\ + \frac{b^{+j}}{x_i^m}\left(x_{i+0,5}^m a_{i+1}^j y_{x,i}^{(\sigma)}\right) - d_i^j y_i^{(\sigma)} + \sum_{i=0}^{N}\xi_i^m\rho_i^j y_i^{(\sigma)}\hbar + \varphi_i^j, \quad (x,t)\in\omega_{h\tau},\end{aligned} \tag{26}$$

$$\varkappa_0 a_1 y_{(x,0)}^{(\sigma)} + \Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\beta}(\gamma_1 y_{x,0}) = \frac{0,5h}{m+1}\left(\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}y_0 + d_0^j y_0^{(\sigma)} - \sum_{i=0}^{N}\xi_i^m\rho_i^j y_i^{(\sigma)}\hbar\right) - \mu, \quad t\in\overline{\omega}_\tau, \quad x=0, \tag{27}$$

$$y_N^{(\sigma)} = 0, \quad t\in\overline{\omega}_\tau, \quad x = l, \tag{28}$$

$$y(x,0) = u_0(x), \quad x\in\overline{\omega}_h, \quad t = 0, \tag{29}$$

где $\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\gamma}y = \frac{\tau^{1-\gamma}}{\Gamma(2-\gamma)}\sum\limits_{s=0}^{j}c_{j-s}^{(\gamma,\sigma)}y_t^s$ — дискретный аналог дробной производной Герасимова–Капуто порядка γ, $0<\gamma<1$, обеспечивающий порядок точности $O\left(\tau^{3-\gamma}\right)$ при $\sigma = 1-\frac{\gamma}{2}$ и $O\left(\tau^{2-\gamma}\right)$ при $\sigma = 0,5$ [Alikhanov, 2015],

$$a_0^{(\gamma,\sigma)} = \sigma^{1-\gamma}, \quad a_l^{(\gamma,\sigma)} = (l+\sigma)^{1-\gamma} - (l-1+\sigma)^{1-\gamma}, \quad l\geqslant 1,$$

$$b_l^{(\gamma,\sigma)} = \frac{1}{2-\gamma}\left[(l+\sigma)^{2-\gamma)} - (l-1+\sigma)^{2-\gamma}\right] - \frac{1}{2}\left[(l+\sigma)^{1-\alpha} + (l-1+\sigma)^{1-\gamma}\right], \quad l\geqslant 1,$$

$$\text{при } j=0 \quad c_0^{(\gamma,\sigma)} = a_0^{(\gamma,\sigma)},$$

$$\text{при } j>0 \quad c_s^{(\gamma,\sigma)} = \begin{cases} a_0^{(\gamma,\sigma)} + b_1^{(\gamma,\sigma)}, & s=0,\\ a_s^{(\gamma,\sigma)} + b_{s+1}^{(\gamma,\sigma)} - b_s^{(\gamma,\sigma)}, & 1\leqslant s\leqslant j-1,\\ a_j^{(\gamma,\sigma)} - b_j^{(\gamma,\sigma)}, & s=j,\end{cases}$$

$$c_s^{(\gamma,\sigma)} > \frac{1-\gamma}{2}(s+\sigma)^{-\gamma} > 0, \quad \sigma = 1 - \frac{\gamma}{2} \text{ при } \alpha = \beta \quad \text{и} \quad \sigma = 0{,}5 \text{ при } \alpha \neq \beta,$$

$$a_i^j = k(x_{i-0,5}, t_{j+\sigma}), \quad \gamma_i = \eta(x_{i-0,5}), \quad b_i^{\pm j} = \frac{\overline{\varkappa}_i r^{\pm j}(x, t_{j+\sigma})}{k(x_i, t_{j+\sigma})},$$

$$d_i^j = \begin{cases} \overline{\varkappa}_i d_i^{j+\sigma}, & i \neq 0, N, \\ d_i^{j+\sigma}, & i = 0, N, \end{cases} \quad \varphi_i^j = \begin{cases} \overline{\varkappa}_i f_i^{j+\sigma}, & i \neq 0, N, \\ f_i^{j+\sigma}, & i = 0, N, \end{cases} \quad \hbar = \begin{cases} 0{,}5h, & i = 0, \\ h, & i \neq 0, N, \end{cases}$$

$$r(x, t_{j+\sigma}) = r^+(x, t_{j+\sigma}) + r^-(x, t_{j+\sigma}), \quad |r(x, t_{j+\sigma})| = r^+(x, t_{j+\sigma}) - r^-(x, t_{j+\sigma}),$$

$$\overline{\varkappa}_i = 1 + \frac{m(m-1)h^2}{24x_i^2}, \quad i = \overline{1, N-1}, \quad r^+(x, t_{j+\sigma}) = 0{,}5(r(x, t_{j+\sigma}) + |r(x, t_{j+\sigma})|) \geqslant 0,$$

$$r^-(x, t_{j+\sigma}) = 0{,}5(r(x, t_{j+\sigma}) - |r(x, t_{j+\sigma})|) \leqslant 0,$$

$$y^{(\sigma)} = \sigma y^{j+1} + (1-\sigma)y^j, \quad r_N = r(l, t) = r_N^{j+\sigma} \geqslant 0, \quad r_0 = r(0, t) = r_0^{j+\sigma} \leqslant 0,$$

$$y^{(\sigma)} = \sigma y^{j+1} + (1-\sigma)y^j, \quad a^{(+1)} = a_{i+1},$$

$$\rho_{i,s} = p(x_i, t_{j+\sigma}), \quad \varkappa(x_i, t_{j+\sigma}) = \frac{1}{1 + R(x_i, t_{j+\sigma})},$$

$R(x_i, t_{j+\sigma}) = \frac{0{,}5h|r(x_i, t_{j+\sigma})|}{k(x_i, t_{j+\sigma})}$ — разностное число Рейнольдса,

$$R_i = \frac{0{,}5h|r_i|\overline{\varkappa}_i}{k_{i-0,5}}, \quad \varkappa_0 = \frac{1}{1 + \frac{0{,}5h|r_0|}{(m+1)a_1}}, \quad \overline{x}^m = x_{i-0,5}^m,$$

$$\mu = \frac{0{,}5h}{m+1}\varphi_0, \quad Y = \widehat{y} + y, \quad \widehat{y} = y^{j+1}, \quad y_t = \frac{\widehat{y} - y}{\tau}, \quad y = y_i^j = y(x_i, t_j), \quad t^* = t_{j+\sigma}.$$

Априорную оценку решения задачи (26)–(29) найдем методом энергетических неравенств, для этого введем скалярные произведения и норму:

$$(u, v) = \sum_{i=1}^{N-1} u_i v_i h, \quad (u, u) = \left(1, u^2\right) = \|u\|_0^2, \quad \left(1, u_{\overline{x}}^2\right] = \left\|u_{\overline{x}}\right]\!|_0^2, \quad \|u\|_0^2 = \sum_{i=1}^{N} u_i^2 \hbar = \left(1, u^2\right].$$

Найдем теперь априорную оценку, для этого умножим (26) скалярно на $x^m y^{(\sigma)}$:

$$\left(\overline{\varkappa}\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha} y, x^m y^{(\sigma)}\right) = \left(\varkappa \left(x_{i-0,5}^m a_i^j y_{\overline{x}}^{(\sigma)}\right)_x, y^{(\sigma)}\right) + \left(\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\beta} \left(x_{i-0,5}^m \gamma_i y_{\overline{x},i}\right)_x, y^{(\sigma)}\right) + \left(b^{-j} x_{i-0,5}^m a_i^j y_{\overline{x},i}^{(\sigma)}, y^{(\sigma)}\right) +$$
$$+ \left(b^{+j} x_{i+0,5}^m a_{i+1}^j y_{x,i}^{(\sigma)}, y^{(\sigma)}\right) - \left(d_i^j y_i^{(\sigma)}, y^{(\sigma)}\right) + \left(\sum_{i=0}^{N} \xi_i^m \rho_i^j y_i^{(\sigma)} \hbar, x^m y^{(\sigma)}\right) + \left(\varphi, x^m y^{(\sigma)}\right). \quad (30)$$

Оценим суммы, входящие в (30), с учетом леммы 1 из [Alikhanov, 2015]:

$$\left(\overline{\varkappa}\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha} y, x^m y^{(\sigma)}\right) \geqslant M_1 \left(\frac{1}{2}, \Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha} \left(x^{m/2} y\right)^2\right) \geqslant \frac{1}{4}\left(1, \Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha} \left(x^{m/2} y\right)^2\right) \geqslant \frac{1}{4}\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha} \left\|x^{m/2} y\right\|_0^2, \quad (31)$$

где

$$M_1 = \begin{cases} 1, & \text{если } m = 0,\ m \geqslant 1, \\ \frac{1}{2}, & \text{если } m \in (0, 1),\ h \leqslant h_0 = \sqrt{\frac{12x^2}{m(1-m)}}, \end{cases}$$

$$\left(\varkappa\left(x^m_{i-0,5}a^j_i y^{(\sigma)}_{\overline{x}}\right)_x,\, y^{(\sigma)}\right) = \varkappa x^m_{i-0,5}a^j_i y^{(\sigma)}_{\overline{x}} y^{(\sigma)}\Big|_0^N - \left(x^m_{i-0,5}a^j_i y^{(\sigma)}_{\overline{x}},\, \left(\varkappa y^{(\sigma)}\right)_{\overline{x}}\right] =$$
$$= \varkappa x^m_{i-0.5}a^j_i y^{(\sigma)} y^{(\sigma)}_{\overline{x}}\Big|_0^N - \left(\overline{x}^m a\varkappa_{\overline{x}},\, y^{(\sigma)}_{\overline{x}} y^{(\sigma)}\right] - \left(x^m_{i-0,5}a\varkappa^{(-1)},\, \left(y^{(\sigma)}_{\overline{x}}\right)^2\right] \leqslant$$
$$\leqslant \varkappa x^m_{i-0,5}a_i y^{(\sigma)} y^{(\sigma)}_{\overline{x}}\Big|_0^N - \left(\overline{x}^m a\varkappa_{\overline{x}},\, y^{(\sigma)}_{\overline{x}} y^{(\sigma)}\right] - \frac{1}{1+hM_2}\left(x^m_{i-0,5}a\varkappa,\, \left(y^{(\sigma)}_{\overline{x}}\right)^2\right] \leqslant$$
$$\leqslant x^m_{i-0,5}y^{(\sigma)}\varkappa a^j_i y^{(\sigma)}_{\overline{x}}\Big|_0^N - M_3\left\|\overline{x}^{m/2}y^{(\sigma)}_{\overline{x}}\right]\Big|_0^2 + \frac{\varepsilon}{2}\left\|\overline{x}^{m/2}y^{(\sigma)}_{\overline{x}}\right]\Big|_0^2 + M_4^{\varepsilon}\left\|x^{m/2}y^{(\sigma)}\right\|_0^2, \tag{32}$$

$$\left(\Delta^{\beta}_{0t_{j+\sigma}}\left(\overline{x}^m\gamma_i y_{\overline{x},i}\right)_x,\, y^{(\sigma)}\right) = \overline{x}^m y^{(\sigma)}\Delta^{\beta}_{0t_{j+\sigma}}(\gamma_i y_{\overline{x}})\Big|_0^N - \left(\overline{x}^m y^{(\sigma)}_{\overline{x}},\, \Delta^{\beta}_{0t_{j+\sigma}}(\gamma_i y_{\overline{x},i})\right] \leqslant$$
$$\leqslant y^{(\sigma)}\overline{x}^m\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}(\gamma_i y_{\overline{x}})\Big|_0^N - \frac{c_0}{2}\Delta^{\beta}_{0t_{j+\sigma}}\left\|\overline{x}^m y_{\overline{x}}\right]\Big|_0^2, \tag{33}$$

$$\left(b^{-j}x^m_{i-0,5}a^j_i y^{(\sigma)}_{\overline{x},i},\, y^{(\sigma)}\right) + \left(b^{+j}x^m_{i+0,5}a^j_{i+1}y^{(\sigma)}_{x,i},\, y^{(\sigma)}\right) - \left(d^j_i y^{(\sigma)},\, y^{(\sigma)}\right) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\left\|\overline{x}^{m/2}y^{(\sigma)}_{\overline{x}}\right]\Big|_0^2 + M_5^{\varepsilon}\left\|x^{m/2}y^{(\sigma)}\right\|_0^2, \tag{34}$$

$$\left(\sum_{i=0}^{N}\xi^m_i\rho^j_i y^{(\sigma)}_i\hbar,\, x^m y^{(\sigma)}\right) \leqslant \left(\frac{1}{2},\, \left(x^{m/2}y^{(\sigma)}\right)^2 + x^m\left(\sum_{i=0}^{N}\xi^m_i\rho^j_i y^{(\sigma)}_i\hbar\right)^2\right) \leqslant \frac{1}{2}\left\|x^{m/2}y^{(\sigma)}\right\|_0^2 +$$
$$+\left(\frac{1}{2},\, \sum_{i=0}^{N}\left(\xi^{m/2}\rho^j\right)^2\hbar\sum_{i=0}^{N}\left(\xi^{m/2}y^{(\sigma)}_i\right)^2\hbar\right) \leqslant \frac{1}{2}\left\|x^{m/2}y^{(\sigma)}\right\|_0^2 + \left(\frac{M_6}{2},\, \sum_{i=0}^{N}\left(\xi^{m/2}y^{(\sigma)}_i\right)^2\hbar\right) \leqslant \frac{1}{2}\left\|x^{m/2}y^{(\sigma)}\right\|_0^2 +$$
$$+ M_6\sum_{i=0}^{N}\left(1,\, \left(\xi^{m/2}y^{(\sigma)}_i\right)^2\right)\hbar \leqslant M_7\left\|x^{m/2}y^{(\sigma)}\right\|_0^2, \tag{35}$$

$$\left(\varphi,\, x^m y^{(\sigma)}\right) \leqslant \frac{1}{2}\left\|x^{m/2}y^{(\sigma)}\right\|_0^2 + \frac{1}{2}\left\|x^{m/2}\varphi\right\|_0^2. \tag{36}$$

Учитывая преобразования (31)–(36), из (30) находим

$$\frac{1}{4}\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}\left\|x^{m/2}y\right\|_0^2 + M_3\left\|\overline{x}^{m/2}y^{(\sigma)}_{\overline{x}}\right]\Big|_0^2 + \frac{c_0}{2}\Delta^{\beta}_{0t_{j+\sigma}}\left\|\overline{x}^m y_{\overline{x}}\right]\Big|_0^2 \leqslant \overline{x}^m y^{(\sigma)}\left(\varkappa a y^{(\sigma)}_{\overline{x}} + \Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}(\gamma_i y_{\overline{x}})\right)\Big|_0^N +$$
$$+ \varepsilon\left\|\overline{x}^{m/2}y^{(\sigma)}_{\overline{x}}\right]\Big|_0^2 + M_8^{\varepsilon}\left\|x^{m/2}y^{(\sigma)}\right\|_0^2 + \frac{1}{2}\left\|x^{m/2}\varphi\right\|_0^2. \tag{37}$$

Преобразуем первое выражение в правой части (37), тогда получим

$$\overline{x}^m y^{(\sigma)}\left[\varkappa a y^{(\sigma)}_{\overline{x}} + \Delta^{\beta}_{0t_{j+\sigma}}(\gamma_i y_{\overline{x}})\right]\Big|_0^N = -x^m_{0,5}y^{(\sigma)}_0\left(\varkappa_0 a_1 y^{(\sigma)}_{x,0} + \Delta^{\beta}_{0t_{j+\sigma}}\gamma_1 y_{x,0}\right) =$$
$$= -x^m_{0,5}y^{(\sigma)}_0\left[\frac{0{,}5h}{m+1}\left(\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}y_0 + d^j_0 y^{(\sigma)}_0 - \sum_{i=0}^{N}\rho^j_i y^{(\sigma)}_i\hbar\right) - \mu\right] =$$
$$= x^m_{0,5}y^{(\sigma)}_0\mu - \frac{0{,}5h}{m+1}x^m_{0,5}y^{(\sigma)}_0\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}y_0 - \frac{0{,}5h}{m+1}x^m_{0,5}d^j_0\left(y^{(\sigma)}_0\right)^2 + \frac{hx^m_{0,5}}{2(m+1)}y^{(\sigma)}_0\sum_{i=0}^{N}\rho^j_i y^{(\sigma)}_i\hbar \leqslant$$
$$\leqslant M_9^{\varepsilon_1}\left(x^{m/2}_{0,5}\varphi_0\right)^2 h - \frac{0{,}5h}{m+1}x^m_{0,5}d^j_0\left(y^{(\sigma)}_0\right)^2 + M_{10}^{\varepsilon_1}\left\|x^{m/2}y\right\|_0^2 + \varepsilon_1\left(x^{m/2}_{0,5}y^{(\sigma)}_0\right)^2 h - \frac{0{,}5h}{2(m+1)}\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}\left(x^{m/2}_{0,5}y_0\right)^2. \tag{38}$$

Учитывая (38), из (37) при $\varepsilon = \frac{M_3}{2}$ получаем

$$\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}\left\|x^{m/2}y\right\|_1^2 + \left\|\overline{x}^{m/2}y^{(\sigma)}_{\overline{x}}\right]\Big|_0^2 + \Delta^{\beta}_{0t_{j+\sigma}}\left\|\overline{x}^{m/2}y_{\overline{x}}\right]\Big|_0^2 \leqslant M_{11}\left\|x^{m/2}y^{(\sigma)}\right\|_1^2 + M_{12}\left(\left\|x^{m/2}\varphi\right\|_0^2 + \left(x^{m/2}_{0,5}\varphi_0\right)^2 h\right), \tag{39}$$

где $\left\|x^{m/2}y\right\|_1^2 = \left\|x^{m/2}y\right\|_0^2 + \left(x^{m/2}_{0,5}y_0\right)^2$.

Перепишем (39) в другой форме:

$$\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}} \left\|x^{m/2}y\right\|_1^2 + \Delta^{\beta}_{0t_{j+\sigma}} \left\|\overline{x}^{m/2}y_{\overline{x}}\right]\!\Big|_0^2 \leqslant M_{13}^{\sigma} \left\|x^{m/2}y^{j+1}\right\|_1^2 + M_{14}^{\sigma} \left\|x^{m/2}y^{j}\right\|_1^2 + M_{15}F^j, \tag{40}$$

где $F^j = \left\|x^{m/2}\varphi\right\|_0^2 + \left(x_{0,5}^{m/2}\varphi_0\right)^2 h$.

1. Рассмотрим случай, когда $\alpha > \beta$, тогда на основании леммы 7 [Бештоков, 2019] из (40) получаем априорную оценку

$$\left\|x^{m/2}y^{j+1}\right\|_1^2 \leqslant M_{16}\left(\left\|x^{m/2}y^{0}\right\|_1^2 + \max_{0\leqslant j'\leqslant j}\left(\left\|x^{m/2}\varphi\right\|_0^2 + \left(x_{0,5}^{m/2}\varphi_0\right)^2 h\right)\right). \tag{41}$$

2. Рассмотрим случай, когда $\alpha = \beta$, тогда на основании леммы 7 [Бештоков, 2019] из (40) получаем априорную оценку

$$\left\|x^{m/2}y^{j+1}\right\|_1^2 + \left\|\overline{x}^{m/2}y_{\overline{x}}\right]\!\Big|_0^2 \leqslant M_{17}\left(\left\|x^{m/2}y^{0}\right\|_1^2 + \left\|\overline{x}^{m/2}y^0_{\overline{x}}\right]\!\Big|_0^2 + \max_{0\leqslant j'\leqslant j}\left(\left\|x^{m/2}\varphi\right\|_0^2 + \left(x_{0,5}^{m/2}\varphi_0\right)^2 h\right)\right). \tag{42}$$

3. Рассмотрим случай, когда $\alpha < \beta$, тогда в силу (28), неравенства $\|y\|_0^2 \leqslant l^2\|y_{\overline{x}}]|_0^2$ [Ладыженская, 1973] и леммы 7 [Бештоков, 2019] из (37) с учетом (38) получаем

$$\begin{aligned}\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}\left(\left\|x^{m/2}y\right\|_0^2 + \left(x_{0,5}^{m/2}y_0\right)^2\right) + \sum_{i=1}^{N}\left(\overline{x}^{m/2}y^{(\sigma)}_{\overline{x},i}\right)^2\hbar + \left\|\overline{x}^{m/2}y^{(\sigma)}_{\overline{x}}\right]\!\Big|_0^2 + \Delta^{\beta}_{0t_{j+\sigma}}\left\|\overline{x}^{m/2}y_{\overline{x}}\right]\!\Big|_0^2 \leqslant \\ \leqslant M_{18}^{\varepsilon_1}\left\|\overline{x}^{m/2}y^{(\sigma)}_{\overline{x}}\right]\!\Big|_0^2 + \varepsilon_1 M_{19}\left(x_{0,5}^{m/2}y^{(\sigma)}_{\overline{x},1}\right)^2 h + M_{20}^{\varepsilon_1}\left(\left\|x^{m/2}\varphi\right\|_0^2 + \left(x_{0,5}^{m/2}\varphi_0\right)^2 h\right).\end{aligned} \tag{43}$$

Выбирая в (43) $\varepsilon_1 = \frac{1}{2M_{19}}$, получим

$$\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}} \left\|x^{m/2}y\right\|_0^2 + \Delta^{\beta}_{0t_{j+\sigma}} \left\|\overline{x}^{m/2}y_{\overline{x}}\right]\!\Big|_0^2 \leqslant M_{21}\left\|\overline{x}^{m/2}y^{(\sigma)}_{\overline{x}}\right]\!\Big|_0^2 + M_{22}\left(\left\|x^{m/2}\varphi\right\|_0^2 + \left(x_{0,5}^{m/2}\varphi_0\right)^2 h\right). \tag{44}$$

Перепишем (44) в другой форме:

$$\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}} \left\|x^{m/2}y\right\|_0^2 + \Delta^{\beta}_{0t_{j+\sigma}} \left\|x^{m/2}y_{\overline{x}}\right]\!\Big|_0^2 \leqslant M_{23}^{\sigma} \left\|x^{m/2}y^{j+1}\right\|_0^2 + M_{24}^{\sigma} \left\|x^{m/2}y^{j}\right\|_0^2 + M_{25}F^j.$$

Тогда на основании леммы 7 [Бештоков, 2019] из последнего получаем априорную оценку

$$\left\|x^{m/2}y^{j+1}_{\overline{x}}\right]\!\Big|_0^2 \leqslant M_{26}\left(\left\|x^{m/2}y^{0}\right\|_1^2 + \max_{0\leqslant j'\leqslant j}\left(\left\|x^{m/2}\varphi\right\|_0^2 + \left(x_{0,5}^{m/2}\varphi_0\right)^2 h\right)\right), \tag{45}$$

где M_{16}, M_{17}, $M_{26} = \text{const} > 0$, не зависящие от h и τ.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* (8)*, тогда существует такое малое* $\tau_0 = \tau_0(c_0, c_1, c_2, \alpha, \sigma)$*, что если* $\tau \leqslant \tau_0$*, то для решения разностной задачи* (26)–(29) *справедливы априорные оценки*: (41)*, в случае когда* $\alpha > \beta$; (42)*, в случае когда* $\alpha = \beta$; (45) *в случае когда* $\alpha < \beta$.

Из полученных априорных оценок (41), (42), (45) следуют единственность и устойчивость решения разностной схемы (26)–(29) по начальным данным и правой части, а также сходимость решения разностной задачи (26)–(29) к решению дифференциальной задачи (4)–(7), так что существует такое τ_0, что при $\tau \leqslant \tau_0$ справедливы оценки:

1) в случае когда $\alpha > \beta$, $\left\|x^{m/2}\left(y^{j+1} - u^{j+1}\right)\right\|_0^2 \leqslant M_{27}\left(h^2 + \tau^{2-\max\{\alpha,\beta\}}\right)$;

2) в случае когда $\alpha = \beta$, $\left\|x^{m/2}\left(y^{j+1} - u^{j+1}\right)\right\|_0^2 + \left\|\overline{x}^{m/2}\left(y^{j+1}_{\overline{x}} - u^{j+1}_{\overline{x}}\right)\right]\!\Big|_0^2 \leqslant M_{28}\left(h^2 + \tau^2\right)$;

3) в случае когда $\alpha < \beta$, $\left\|\overline{x}^{m/2}\left(y^{j+1}_{\overline{x}} - u^{j+1}_{\overline{x}}\right)\right]\!\Big|_0^2 \leqslant M_{29}\left(h^2 + \tau^{2-\max\{\alpha,\beta\}}\right)$,

где M_{27}, M_{28}, $M_{29} = \text{const} > 0$, не зависящие от h и τ.

Постановка начально-краевой задачи для уравнения влагопереноса с эффектом памяти и априорная оценка в дифференциальной форме

Вместо уравнения (4) рассмотрим теперь интегро-дифференциальное уравнение вида

$$\partial_{0t}^{\alpha}u=\frac{1}{x^m}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^m k(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{1}{x^m}\partial_{0t}^{\beta}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^m\eta(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right)+$$

$$+r(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}-q(x,t)u+\int\limits_0^t p(x,t,\tau)u(x,\tau)\,d\tau+f(x,t), \tag{46}$$

$$|p(x,t,\tau)|\leqslant c_2,\quad p(x,t,\tau)\in C^{2,1}(\overline{Q}_T),\quad 0<\tau<t. \tag{47}$$

Повторяя рассуждения (9)–(17), получаем

$$\left(\int\limits_0^t pu\,d\tau,\ x^m u\right)=\int\limits_0^l\left(x^m u\int\limits_0^t pu\,d\tau\right)dx\leqslant\int\limits_0^l\left(\frac{1}{2}\left(x^{m/2}u\right)^2+\frac{1}{2}\left(\int\limits_0^t x^{m/2}pu\,d\tau\right)^2\right)dx\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\left\|x^{m/2}u\right\|_0^2+\int\limits_0^l\left(\frac{1}{2}\int\limits_0^t p^2\,d\tau\int\limits_0^t(x^{m/2}u)^2\,d\tau\right)dx\leqslant\frac{1}{2}\left\|x^{m/2}u\right\|_0^2+\frac{c_2^2T}{2}\int\limits_0^t\left\|x^{m/2}u\right\|_0^2\,d\tau. \tag{48}$$

Из (9) после некоторых несложных преобразований с учетом (5), (6), (47), (48) получаем неравенство

$$\partial_{0t}^{\alpha}\left\|x^{m/2}u\right\|_0^2+\partial_{0t}^{\beta}\int\limits_0^l\eta\left(x^{m/2}u_x\right)^2dx+\left\|x^{m/2}u_x\right\|_0^2\leqslant M_1\left\|x^{m/2}u\right\|_0^2+M_2\int\limits_0^t\left\|x^{m/2}u\right\|_0^2\,d\tau+M_3\left\|x^{m/2}f\right\|_0^2. \tag{49}$$

1. Рассмотрим случай, когда $\alpha>\beta$, тогда, применяя к обеим частям неравенства (49) оператор дробного интегрирования $D_{0t}^{-\alpha}$, получаем

$$\left\|x^{m/2}u\right\|_0^2+D_{0t}^{-(\alpha-\beta)}\left\|x^{m/2}u_x\right\|_0^2\leqslant M_4D_{0t}^{-\alpha}\left\|x^{m/2}u\right\|_0^2+M_5D_{0t}^{-\alpha}\int\limits_0^t\left\|x^{m/2}u\right\|_0^2d\tau+$$

$$+M_6\left(D_{0t}^{-\alpha}\left\|x^{m/2}f\right\|_0^2+\left\|x^{m/2}u_0(x)\right\|_0^2\right). \tag{50}$$

Второе слагаемое в правой части (50) оценим так:

$$D_{0t}^{-\alpha}\int\limits_0^t\left\|x^{m/2}u\right\|_0^2d\tau=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^t\frac{d\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}}\int\limits_0^\tau\left\|x^{m/2}u\right\|_0^2ds=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^t\left\|x^{m/2}u\right\|_0^2ds\int\limits_s^t\frac{d\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}}=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^t\left\|x^{m/2}u\right\|_0^2\left(-\frac{(t-\tau)^{\alpha}}{\alpha}\right)\Bigg|_s^t ds=\frac{1}{\alpha\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^t(t-s)^{\alpha}\left\|x^{m/2}u\right\|_0^2ds=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\int\limits_0^t(t-\tau)^{\alpha}\left\|x^{m/2}u\right\|_0^2d\tau\leqslant\frac{1}{\alpha\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^t\frac{\left\|x^{m/2}u\right\|_0^2(t-\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}}d\tau\leqslant\frac{T}{\alpha}D_{0t}^{-\alpha}\left\|x^{m/2}u\right\|_0^2.$$

Итак, получаем

$$D_{0t}^{-\alpha}\int_0^t \left\|x^{m/2}u\right\|_0^2\,d\tau \leqslant \frac{T}{\alpha}D_{0t}^{-\alpha}\left\|x^{m/2}u\right\|_0^2. \tag{51}$$

С учетом (51) из (50) находим

$$\left\|x^{m/2}u\right\|_0^2 + D_{0t}^{-(\alpha-\beta)}\left\|x^{m/2}u_x\right\|_0^2 \leqslant M_7 D_{0t}^{-\alpha}\left\|x^{m/2}u\right\|_0^2 + M_8\left(D_{0t}^{-\alpha}\left\|x^{m/2}f\right\|_0^2 + \left\|x^{m/2}u_0(x)\right\|_0^2\right). \tag{52}$$

С помощью леммы 2 [Алиханов, 2010] из (52) получим априорную оценку

$$\left\|x^{m/2}u\right\|_0^2 + D_{0t}^{-(\alpha-\beta)}\left\|x^{m/2}u_x\right\|_0^2 \leqslant M_9\left(D_{0t}^{-\alpha}\left\|x^{m/2}f\right\|_0^2 + \left\|x^{m/2}u_0(x)\right\|_0^2\right). \tag{53}$$

2. Рассмотрим случай, когда $\alpha = \beta$, тогда, применяя к обеим частям неравенства (49) оператор дробного интегрирования $D_{0t}^{-\alpha}$, получаем

$$\left\|x^{m/2}u\right\|_0^2 + \left\|x^{m/2}u_x\right\|_0^2 \leqslant M_{10}D_{0t}^{-\alpha}\left\|x^{m/2}u\right\|_0^2 + M_5 D_{0t}^{-\alpha}\int_0^t\left\|x^{m/2}u\right\|_0^2 d\tau +$$
$$+ M_{11}\left(D_{0t}^{-\alpha}\left\|x^{m/2}f\right\|_0^2 + \left\|x^{m/2}u_0(x)\right\|_0^2 + \left\|x^{m/2}u_0'(x)\right\|_0^2\right).$$

На основании леммы 2 [Алиханов, 2010] из последнего с учетом (51) находим априорную оценку

$$\left\|x^{m/2}u\right\|_0^2 + \left\|x^{m/2}u_x\right\|_0^2 \leqslant M_{12}\left(D_{0t}^{-\alpha}\left\|x^{m/2}f\right\|_0^2 + \left\|x^{m/2}u_0(x)\right\|_0^2 + \left\|x^{m/2}u_0'(x)\right\|_0^2\right). \tag{54}$$

3. Рассмотрим случай, когда $\alpha < \beta$, тогда, применяя к обеим частям неравенства (49) оператор дробного интегрирования $D_{0t}^{-\beta}$, получаем

$$\left\|x^{m/2}u_x\right\|_0^2 + D_{0t}^{-(\beta-\alpha)}\left\|x^{m/2}u\right\|_0^2 \leqslant M_{13}D_{0t}^{-\beta}\left\|x^{m/2}u\right\|_0^2 +$$
$$+ M_{14}D_{0t}^{-\beta}\int_0^t\left\|x^{m/2}u\right\|_0^2 d\tau + M_{15}\left(D_{0t}^{-\beta}\left\|x^{m/2}f\right\|_0^2 + \left\|x^{m/2}u_0'(x)\right\|_0^2\right). \tag{55}$$

В силу условия (6) справедливо неравенство $\|u\|_0^2 \leqslant l^2\|u_x\|_0^2$ [Ладыженская, 1973], тогда из (55) с учетом (51) получаем

$$\left\|x^{m/2}u_x\right\|_0^2 + D_{0t}^{-(\beta-\alpha)}\left\|x^{m/2}u\right\|_0^2 \leqslant M_{16}D_{0t}^{-\beta}\left\|x^{m/2}u_x\right\|_0^2 + M_{17}\left(D_{0t}^{-\beta}\left\|x^{m/2}f\right\|_0^2 + \left\|x^{m/2}u_0'(x)\right\|_0^2\right).$$

На основании леммы 2 [Алиханов, 2010] из последнего находим априорную оценку

$$\left\|x^{m/2}u_x\right\|_0^2 + D_{0t}^{-(\beta-\alpha)}\left\|x^{m/2}u\right\|_0^2 \leqslant M_{18}\left(D_{0t}^{-\beta}\left\|x^{m/2}f\right\|_0^2 + \left\|x^{m/2}u_0'(x)\right\|_0^2\right). \tag{56}$$

Теорема 3. *Пусть выполнены условия* (8), (47)*, тогда для решения* $u(x, t)$ *задачи* (5)–(7), (46) *справедливы априорные оценки*: (53)*, в случае когда* $\alpha > \beta$; (54)*, в случае когда* $\alpha = \beta$; (56)*, в случае когда* $\alpha < \beta$.

Из полученных априорных оценок (53), (54), (56) следуют единственность и устойчивость решения по правой части и начальным данным.

Устойчивость и сходимость разностной схемы, аппроксимирующей краевую задачу для уравнения влагопереноса дробного порядка с эффектом памяти и оператором Бесселя

На равномерной сетке $\overline{\omega}_{h\tau}$ дифференциальной задаче (4)–(7) поставим в соответствие разностную схему порядка аппроксимации $O\left(h^2+\tau^2\right)$ при $\alpha=\beta$ и $O\left(h^2+\tau^{2-\max\{\alpha,\beta\}}\right)$ при $\alpha\neq\beta$:

$$\overline{\varkappa}\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}y=\frac{\varkappa}{x_i^m}\left(x^m_{i-0,5}a_i^jy^{(\sigma)}_{\overline{x}}\right)_x+\frac{1}{x_i^m}\Delta^{\beta}_{0t_{j+\sigma}}\left(x^m_{i-0,5}\gamma_iy_{\overline{x},i}\right)_x+\frac{b^{-j}}{x_i^m}\left(x^m_{i-0,5}a_i^jy^{(\sigma)}_{\overline{x},i}\right)+$$

$$+\frac{b^{+j}}{x_i^m}\left(x^m_{i+0,5}a^j_{i+1}y^{(\sigma)}_{x,i}\right)-d_i^jy_i^{(\sigma)}+\sum_{s=0}^{j}\rho^j_{i,s}y_i^s\overline{\tau}+\varphi_i^j,\quad (x,\,t)\in\omega_{h\tau},\tag{57}$$

$$\varkappa_0a_1y^{(\sigma)}_{(x,0)}+\Delta^{\beta}_{0t_{j+\sigma}}(\gamma_1y_{x,0})=\frac{0,5h}{m+1}\left(\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}y_0+d_0^jy_0^{(\sigma)}-\sum_{s=0}^{j}\rho^j_{0,s}y_0^s\overline{\tau}\right)-\mu,\quad t\in\overline{\omega}_\tau,\quad x=0,\tag{58}$$

$$y_N^{(\sigma)}=0,\quad t\in\overline{\omega}_\tau,\quad x=l,\tag{59}$$

$$y(x,\,0)=u_0(x),\quad x\in\overline{\omega}_h,\quad t=0,\tag{60}$$

где

$$\sum_{s=0}^{j}v^s\overline{\tau}=\sum_{s=1}^{j-1}v^s\tau+0,5\tau\left(v^0+2v^j\right)=\sum_{s=1}^{j}v^s\tau+0,5\tau v^0,\quad \overline{\tau}=\begin{cases}\dfrac{\tau}{2}, & s=0,\\ \tau, & s\neq0,\end{cases}$$

$$\rho_{i,s}=p(x_i,\,t_{j+\sigma},\,\tau_{s+\sigma}).$$

Найдем теперь априорную оценку, для этого умножим (57) скалярно на $x^my^{(\sigma)}$:

$$\left(\overline{\varkappa}\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}y,\,x^my^{(\sigma)}\right)=\left(\varkappa\left(x^m_{i-0,5}a_i^jy^{(\sigma)}_{\overline{x}}\right)_x,\,y^{(\sigma)}\right)+\left(\Delta^{\beta}_{0t_{j+\sigma}}\left(x^m_{i-0,5}\gamma_iy_{\overline{x},i}\right)_x,\,y^{(\sigma)}\right)+\left(b^{-j}x^m_{i-0,5}a_i^jy^{(\sigma)}_{\overline{x},i},\,y^{(\sigma)}\right)+$$

$$+\left(b^{+j}x^m_{i+0,5}a^j_{i+1}y^{(\sigma)}_{x,i},\,y^{(\sigma)}\right)-\left(dy^{(\sigma)},\,y^{(\sigma)}\right)+\left(\sum_{s=0}^{j}\rho^j_{i,s}y_i^s\overline{\tau},\,x^my^{(\sigma)}\right)+\left(\varphi,\,x^my^{(\sigma)}\right).\tag{61}$$

Повторяя рассуждения (30)–(37), с учетом преобразования

$$\left(\sum_{s=0}^{j}\rho^j_{i,s}y_i^s\overline{\tau},\,x^my^{(\sigma)}\right)\leqslant\left(\frac12,\,\left(x^{m/2}y^{(\sigma)}\right)^2+\left(\sum_{s=0}^{j}\rho^j_{i,s}x^{m/2}y_i^s\overline{\tau}\right)^2\right)\leqslant\frac12\left\|x^{m/2}y^{(\sigma)}\right\|_0^2+$$

$$+\left(\frac12,\,\sum_{s=0}^{j}(\rho^s)^2\,\overline{\tau}\sum_{s=0}^{j}\left(x^{m/2}y_i^s\right)^2\overline{\tau}\right)\leqslant\frac12\left\|x^{m/2}y^{(\sigma)}\right\|_0^2+\left(\frac{M_1}{2},\,\sum_{s=0}^{j}\left(x^{m/2}y_i^s\right)^2\overline{\tau}\right)\leqslant\frac12\left\|x^{m/2}y^{(\sigma)}\right\|_0^2+$$

$$+M_1\sum_{s=0}^{j}\left(1,\,\left(x^{m/2}y_i^s\right)^2\right)\overline{\tau}\leqslant\frac12\left\|x^{m/2}y^{(\sigma)}\right\|_0^2+M_1\sum_{s=0}^{j}\left\|x^{m/2}y^s\right\|_0^2\overline{\tau}$$

из (61) получаем

$$\frac12\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}\left\|x^{m/2}y\right\|_0^2+M_2\left\|\overline{x}^{m/2}y^{(\sigma)}_{\overline{x}}\right]\!\Big|_0^2+\frac{c_0}{2}\Delta^{\beta}_{0t_{j+\sigma}}\left\|\overline{x}^my_{\overline{x}}\right]\!\Big|_0^2\leqslant\overline{x}^my^{(\sigma)}\left(\varkappa ay^{(\sigma)}_{\overline{x}}+\Delta^{\beta}_{0t_{j+\sigma}}(\gamma_iy_{\overline{x}})\right)\Big|_0^N+$$

$$+M_3\left\|x^{m/2}y^{(\sigma)}\right\|_0^2+M_4\sum_{s=0}^{j}\left\|x^{m/2}y^s\right\|_0^2\overline{\tau}+\frac12\left\|x^{m/2}\varphi\right\|_0^2.\tag{62}$$

Преобразуем первое выражение в правой части (62), тогда получим

$$\overline{x}^m y^{(\sigma)} \left[\varkappa a y_{\overline{x}}^{(\sigma)} + \Delta^{\beta}_{0t_{j+\sigma}}(\gamma_i y_{\overline{x}})\right]\Big|_0^N = -x_{0,5}^m y_0^{(\sigma)} \left(\varkappa_0 a_1 y_{x,0}^{(\sigma)} + \Delta^{\beta}_{0t_{j+\sigma}} \gamma_1 y_{x,0}\right) =$$

$$= -x_{0,5}^m y_0^{(\sigma)} \left[\frac{0,5h}{m+1}\left(\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}} y_0 + d_0^j y_0^{(\sigma)} - \sum_{s=0}^{j} \rho_{0,s}^j y_0^s \overline{\tau}\right) - \mu\right] =$$

$$= x_{0,5}^m y_0^{(\sigma)}\mu - \frac{0,5h}{m+1} d_0^j \left(x_{0,5}^{m/2} y_0^{(\sigma)}\right)^2 - \frac{0,5h}{m+1} x_{0,5}^m y_0^{(\sigma)} \Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}} y_0 + \frac{h x_{0,5}^m}{2(m+1)} y_0^{(\sigma)} \sum_{s=0}^{j} \rho_{0,s}^j y_0^s \overline{\tau} \leqslant$$

$$\leqslant M_5^{\varepsilon_1} \left(x_{0,5}^{m/2}\varphi_0\right)^2 h - \frac{0,5h}{m+1} d_0^j \left(x_{0,5}^{m/2} y_0^{(\sigma)}\right)^2 + \varepsilon_1 \left(x_{0,5}^{m/2} y_0^{(\sigma)}\right)^2 h - \frac{0,5h}{2(m+1)} \Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}} \left(x_{0,5}^{m/2} y_0\right)^2 +$$

$$+ M_6^{\varepsilon_1} \sum_{s=0}^{j} \left(x_{0,5}^{m/2} y_0^s\right)^2 \overline{\tau}. \quad (63)$$

Учитывая (63), из (62) получаем

$$\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}} \left\|x^{m/2} y\right\|_1^2 + \left\|\overline{x}^{m/2} y_{\overline{x}}^{(\sigma)}\right]\Big|_0^2 + \Delta^{\beta}_{0t_{j+\sigma}} \left\|\overline{x}^m y_{\overline{x}}\right]\Big|_0^2 \leqslant M_7 \left\|x^{m/2} y^{(\sigma)}\right\|_1^2 +$$

$$+ M_8 \sum_{s=0}^{j} \left\|x^{m/2} y^s\right\|_1^2 \overline{\tau} + M_9 \left(\left\|x^{m/2}\varphi\right\|_0^2 + \left(x_{0,5}^{m/2}\varphi_0\right)^2 h\right), \quad (64)$$

где $\left\|x^{m/2}y\right\|_1^2 = \left\|x^{m/2}y\right\|_0^2 + \left(x_{0,5}^{m/2}y_0\right)^2$.

Перепишем (64) в другой форме:

$$\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}} \left\|x^{m/2} y\right\|_1^2 + \left\|\overline{x}^{m/2} y_{\overline{x}}^{(\sigma)}\right]\Big|_0^2 + \Delta^{\beta}_{0t_{j+\sigma}} \left\|\overline{x}^m y_{\overline{x}}\right]\Big|_0^2 \leqslant M_{10}^{\sigma} \left\|x^{m/2} y^{j+1}\right\|_1^2 + M_{11}^{\sigma} \left\|x^{m/2} y^{j}\right\|_1^2 + M_{12} F^j, \quad (65)$$

где $F^j = \sum\limits_{s=0}^{j} \left\|x^{m/2}y^s\right\|_1^2 \overline{\tau} + \left\|x^{m/2}\varphi\right\|_0^2 + \left(x_{0,5}^{m/2}\varphi_0\right)^2 h$.

1. Рассмотрим случай, когда $\alpha \geq \beta$, тогда на основании леммы 7 [Бештоков, 2019] из (65) получаем

$$\left\|x^{m/2} y^{j+1}\right\|_1^2 \leqslant M_{13} \left(\left\|x^{m/2} y^0\right\|_1^2 + \max_{0 \leqslant j' \leqslant j} F^{j'}\right). \quad (66)$$

Из (66) получим

$$\left\|x^{m/2} y^{j+1}\right\|_1^2 \leqslant M_{14} \left(\left\|x^{m/2} y^0\right\|_1^2 + \max_{0 \leqslant j' \leqslant j} \left(\sum_{s=0}^{j'} \left\|x^{m/2} y^s\right\|_1^2 + \left\|x^{m/2}\varphi\right\|_0^2 + \left(x_{0,5}^{m/2}\varphi_0\right)^2 h\right)\right). \quad (67)$$

Введя обозначение $g^j = \max\limits_{0 \leqslant j' \leqslant j} \left\|x^{m/2} y^{j'}\right\|_2^2$, с учетом

$$\left\|x^{m/2} y\right\|_1^2 = \left\|x^{m/2} y\right\|_0^2 + \left(x_{0,5}^{m/2} y_0\right)^2,$$

$$\max_{0 \leqslant j' \leqslant j} \sum_{s=0}^{j'} \left\|x^{m/2} y^s\right\|_1^2 \overline{\tau} \leqslant \sum_{j'=0}^{j} \max_{0 \leqslant s \leqslant j'} \left\|x^{m/2} y^s\right\|_0^2 \overline{\tau} \leqslant \sum_{j'=0}^{j} \max_{0 \leqslant s \leqslant j'} \left\|x^{m/2} y^s\right\|_1^2 \tau$$

из (67) получим

$$g^{j+1} \leqslant M_{15} \sum_{s=0}^{j} g^s \tau + M_{16} F_1^j, \quad (68)$$

где $F_1^j = \left\|x^{m/2}y^0\right\|_1^2 + \max\limits_{0 \leqslant j' \leqslant j} \left(\left\|x^{m/2}\varphi\right\|_0^2 + \mu^2\right)$.

На основании леммы 4 (см. [Самарский, 1973, с. 171]) из (68) получаем

$$\left\|x^{m/2}y^{j+1}\right\|_1^2 \leqslant M_{17}\left(\left\|x^{m/2}y^0\right\|_1^2 + \max_{0\leqslant j'\leqslant j}\left(\left\|x^{m/2}\varphi\right\|_0^2 + \left(x_{0,5}^{m/2}\varphi_0\right)^2 h\right)\right). \tag{69}$$

2. Рассмотрим случай, когда $\alpha = \beta$, тогда на основании леммы 7 [Бештоков, 2019] из (65) с учетом (66)–(69) получаем априорную оценку

$$\left\|x^{m/2}y^{j+1}\right\|_1^2 + \left\|\overline{x}^{m/2}y_{\overline{x}}\right]\right|_0^2 \leqslant M_{18}\left(\left\|x^{m/2}y^0\right\|_1^2 + \left\|\overline{x}^{m/2}y_{\overline{x}}^0\right]\right|_0^2 + \max_{0\leqslant j'\leqslant j}\left(\left\|x^{m/2}\varphi\right\|_0^2 + \left(x_{0,5}^{m/2}\varphi_0\right)^2 h\right)\right). \tag{70}$$

3. Рассмотрим случай, когда $\alpha < \beta$, тогда в силу (6), неравенства $\|y\|_0^2 \leqslant 2l^2\|y_{\overline{x}}]|_0^2$ [Ладыженская, 1973], повторяя рассуждения (42)–(45), (66)–(69), из (62) с учетом (63) при $\varepsilon_1 = \frac{1}{2}$ получаем

$$\left\|x^{m/2}y_{\overline{x}}^{j+1}\right]\right|_0^2 \leqslant M_{19}\left(\left\|x^{m/2}y^0\right\|_1^2 + \max_{0\leqslant j'\leqslant j}\left(\left\|x^{m/2}\varphi\right\|_0^2 + \left(x_{0,5}^{m/2}\varphi_0\right)^2 h\right)\right). \tag{71}$$

Из полученных априорных оценок (69)–(71) следуют единственность и устойчивость решения разностной схемы (5)–(7), (46) по начальным данным и правой части.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия* (8), (47)*, тогда существуют такие* h_0*,* τ_0*, что если* $h \leqslant h_0$*,* $\tau \leqslant \tau_0$*, то для решения разностной задачи* (57)–(60) *справедливы априорные оценки*: (69)*, в случае когда* $\alpha > \beta$; (70)*, в случае когда* $\alpha = \beta$; (71)*, в случае когда* $\alpha < \beta$*.*

Из полученных априорных оценок (69)–(71) следуют единственность и устойчивость решения разностной схемы (57)–(60) по начальным данным и правой части, а также в силу линейности рассматриваемой задачи сходимость решения разностной задачи (57)–(60) к решению дифференциальной задачи (5)–(7), (46), так что существует такое τ_0, что при $\tau \leqslant \tau_0$ справедливы следующие оценки:

1) в случае когда $\alpha > \beta$, $\left\|x^{m/2}\left(y^{j+1} - u^{j+1}\right)\right\|_0^2 \leqslant M_{20}\left(h^2 + \tau^{2-\max\{\alpha,\beta\}}\right)$;

2) в случае когда $\alpha = \beta$, $\left\|x^{m/2}\left(y^{j+1} - u^{j+1}\right)\right\|_0^2 + \left\|\overline{x}^{m/2}(y_{\overline{x}}^{j+1} - u_{\overline{x}}^{j+1})\right]\right|_0^2 \leqslant M_{21}\left(h^2 + \tau^2\right)$;

3) в случае когда $\alpha < \beta$, $\left\|\overline{x}^{m/2}(y_{\overline{x}}^{j+1} - u_{\overline{x}}^{j+1})\right]\right|_0^2 \leqslant M_{22}\left(h^2 + \tau^{2-\max\{\alpha,\beta\}}\right)$,

где $M_{20}, M_{21}, M_{22} = \mathrm{const} > 0$, не зависящие от h и τ.

Алгоритм численного решения краевых задач

Для численного решения задач (4)–(6) и (5), (6), (46) приведем каждую разностную схему (26)–(29) и (57)–(60) к расчетному виду. Тогда (26) и (57) приводятся к следующему виду:

$$A_i y_{i-1}^{j+1} - C_i y_i^{j+1} + B_i y_{i+1}^{j+1} = -F_i^j, \quad i = \overline{1, N-1}, \tag{72}$$

где

$$A_i = \left(\tau\sigma\varkappa_i^j a_i^j + \gamma_i \frac{\tau^{1-\beta} c_0^{(\beta,\sigma)}}{\Gamma(2-\beta)} - \tau h\sigma b_i^{-j} a_i^j\right) x_{i-0,5}^m,$$

$$B_i = \left(\tau\sigma\varkappa_i^j a_{i+1}^j + \gamma_{i+1} \frac{\tau^{1-\beta} c_0^{(\beta,\sigma)}}{\Gamma(2-\beta)} + \tau h\sigma b_i^{+j} a_{i+1}^j\right) x_{i+0,5}^m,$$

$$C_i = A_i + B_i + x_i^m \overline{\varkappa}_i h^2 \frac{\tau^{1-\alpha} c_0^{(\alpha,\sigma)}}{\Gamma(2-\alpha)} + x_i^m \sigma\tau h^2 d_i^j,$$

$$F_i^j = AA_i y_{i-1}^j - CC_i y_i^j + BB_i y_{i+1}^j + x_i^m h^2 \tau\varphi_i^j - x_i^m \overline{\varkappa}_i h^2 \frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{s=0}^{j-1} c_{j-s}^{(\alpha,\sigma)} \left(y_i^{s+1} - y_i^s\right) +$$

$$+ \frac{\tau^{1-\beta}\gamma_{i+1}}{\Gamma(2-\beta)} \sum_{s=0}^{j-1} c_{j-s}^{(\beta,\sigma)} \left(y_{i+1}^{s+1} - y_{i+1}^s\right) - \frac{\tau^{1-\beta}(\gamma_i + \gamma_{i+1})}{\Gamma(2-\beta)} \sum_{s=0}^{j-1} c_{j-s}^{(\beta,\sigma)} \left(y_i^{s+1} - y_i^s\right) +$$

$$+ \frac{\tau^{1-\beta}\gamma_i}{\Gamma(2-\beta)} \sum_{s=0}^{j-1} c_{j-s}^{(\beta,\sigma)} \left(y_{i-1}^{s+1} - y_{i-1}^s\right) + \tau h^2 \,\mathrm{Sum},$$

$$AA_i = \left(\tau(1-\sigma)\varkappa_i^j a_i^j - \gamma_i \frac{\tau^{1-\beta} c_0^{(\beta,\sigma)}}{\Gamma(2-\beta)} - \tau h(1-\sigma) b_i^{-j} a_i^j\right) x_{i-0,5}^m,$$

$$BB_i = \left(\tau(1-\sigma)\varkappa_i^j a_{i+1}^j - \gamma_{i+1} \frac{\tau^{1-\beta} c_0^{(\beta,\sigma)}}{\Gamma(2-\beta)} + \tau h(1-\sigma) b_i^{+j} a_{i+1}^j\right) x_{i+0,5}^m,$$

$$CC_i = AA_i + BB_i - x_i^m \overline{\varkappa}_i h^2 \frac{\tau^{1-\alpha} c_0^{(\alpha,\sigma)}}{\Gamma(2-\alpha)} + x_i^m (1-\sigma)\tau h^2 d_i^j.$$

Краевое условие (27) принимает вид

$$y_0^{j+1} = \varkappa_1 y_1^{j+1} + \widetilde{\mu}_1, \tag{73}$$

где

$$\varkappa_1 = \frac{\tau\sigma\varkappa_0 a_1 + \gamma_1 \frac{\tau^{1-\beta} c_0^{(\beta,\sigma)}}{\Gamma(2-\beta)}}{\tau\sigma\varkappa_0 a_1^j + \gamma_1 \frac{\tau^{1-\beta} c_0^{(\beta,\sigma)}}{\Gamma(2-\beta)} + 0,5h^2 \frac{\tau^{1-\alpha} c_0^{(\alpha,\sigma)}}{\Gamma(2-\alpha)(m+1)} + \frac{0,5\sigma\tau h^2 d_0^j}{m+1}},$$

$$\widetilde{\mu}_1 = \left[\mu_1 h\tau + \tau(1-\sigma)\varkappa_0 a_1 \left(y_1^j - y_0^j\right) - \gamma_1 \frac{\tau^{1-\beta} c_0^{(\beta,\sigma)}}{\Gamma(2-\beta)} \left(y_1^j - y_0^j\right) + \frac{0,5h^2}{(m+1)} \frac{\tau^{1-\alpha} c_0^{(\alpha,\sigma)}}{\Gamma(2-\alpha)} y_0 - \right.$$

$$- \frac{0,5h^2}{m+1} \frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{s=0}^{j-1} c_{j-s}^{(\alpha,\sigma)} \left(y_0^{s+1} - y_0^s\right) + \frac{\tau^{1-\beta}\gamma_1}{\Gamma(2-\beta)(m+1)} \sum_{s=0}^{j-1} c_{j-s}^{(\beta,\sigma)} \left(y_1^{s+1} - y_1^s\right) +$$

$$\left. + \tau h \,\mathrm{Sum}_0 - \frac{0,5(1-\sigma)\tau h^2 d_0^j y_0^j}{m+1} - \frac{\tau^{1-\beta}\gamma_1}{\Gamma(2-\beta)(m+1)} \sum_{s=0}^{j-1} c_{j-s}^{(\beta,\sigma)} \left(y_0^{s+1} - y_0^s\right)\right] \Big/$$

$$\Big/ \left[\tau\sigma\varkappa_0 a_1^j + \gamma_1 \frac{\tau^{1-\beta} c_0^{(\beta,\sigma)}}{\Gamma(2-\beta)} + 0,5h^2 \frac{\tau^{1-\alpha} c_0^{(\alpha,\sigma)}}{\Gamma(2-\alpha)(m+1)} + \frac{0,5\sigma\tau h^2 d_0^j}{m+1}\right].$$

Краевое условие (28) принимает вид

$$y_N = 0. \tag{74}$$

Таким образом, с учетом (72)–(74) разностные схемы (26)–(29) и (57)–(60) приводятся к трехдиагональной системе линейных алгебраических уравнений, если:

1) в случае когда рассматривается разностная схема (26)–(29), в (72) и (73) обозначения Sum и Sum_0 заменяются следующим образом:

$$\mathrm{Sum} = \mathrm{Sum}_0 = \sum_{i=0}^{N} \xi_i^m \rho_i^j y_i^{j-1} \hbar,$$

т. е. значения искомой сеточной функции при вычислении суммы берутся с нижнего слоя;

2) в случае когда рассматривается разностная схема (57)–(60), в (72) и (73) обозначения Sum и Sum_0 заменяются следующим образом:

$$\mathrm{Sum} = \sum_{s=0}^{j} \rho_{i,s}^j y_i^s \overline{\tau},$$

$$\mathrm{Sum}_0 = \sum_{s=0}^{j} \rho_{0,s}^j y_0^s \overline{\tau}.$$

Решения полученных таким образом систем разностных уравнений затем находятся методом прогонки [Самарский, 1983, с. 40].

Результаты численных экспериментов

Коэффициенты уравнения и граничных условий для каждой из задач (4)–(6) и (5), (6), (46) подбираются таким образом, чтобы точным решением задачи была функция $u(x, t) = t^3 \left(x^4 - l^4\right)$.

Ниже в табл. 1, 2 при различных значениях параметров $\alpha = 0{,}01$, $0{,}5$, $0{,}99$, $\beta = 0{,}01$, $0{,}5$, $0{,}99$, $m = 2$ и уменьшении размера сетки приведены максимальное значение погрешности ($z = y - u$) и порядок сходимости (ПС) в норме $\|[\cdot]\|_0$, когда $h = \tau$. Погрешность уменьшается в соответствии с порядком аппроксимации. Порядок сходимости будем определять по формуле ПС $= \log_2 \frac{\|z_1\|}{\|z_2\|}$, где z_1 и z_2 — погрешности, соответствующие шагам $0{,}5h$, h.

Заключение

Исследованы начально-краевые задачи для интегро-дифференциальных уравнений влагопереноса с оператором Бесселя и двумя операторами дробного дифференцирования α и β разных порядков. Построены разностные схемы порядка аппроксимации $O\left(h^2 + \tau^2\right)$ при $\alpha = \beta$ и $O\left(h^2 + \tau^{2-\max\{\alpha,\beta\}}\right)$ при $\alpha \neq \beta$. На основе метода энергетических неравенств получены априорные оценки в дифференциальной и разностной трактовках при различных соотношениях α и β, откуда следуют единственность, устойчивость, а также сходимость решения разностной задачи к решению исходной дифференциальной задачи со скоростью, равной порядку аппроксимации разностной схемы.

Таблица 1. Результаты численного эксперимента для задачи (4)–(6)

m	α	β	h	$\max\limits_{0<j<m} \left\| [z^j] \right\|_0$	ПС в $\|[\cdot]\|_0$
2	0,01	0,01	$\frac{1}{20}$	0,004730435	
			$\frac{1}{40}$	0,001184850	1,9973
			$\frac{1}{80}$	0,000296349	1,9993
			$\frac{1}{160}$	0,000074095	1,9998
	0,5		$\frac{1}{20}$	0,006655465	
			$\frac{1}{40}$	0,001679337	1,9866
			$\frac{1}{80}$	0,000423930	1,9860
			$\frac{1}{160}$	0,000107314	1,9820
	0,99		$\frac{1}{20}$	0,006518312	
			$\frac{1}{40}$	0,001639182	1,9915
			$\frac{1}{80}$	0,000412339	1,9911
			$\frac{1}{160}$	0,000104130	1,9854
2	0,01	0,5	$\frac{1}{20}$	0,009480968	
			$\frac{1}{40}$	0,002779457	1,7702
			$\frac{1}{80}$	0,000838601	1,7287
			$\frac{1}{160}$	0,000260529	1,6865
	0,5		$\frac{1}{20}$	0,005312928	
			$\frac{1}{40}$	0,001325950	2,0025
			$\frac{1}{80}$	0,000330588	2,0039
			$\frac{1}{160}$	0,000082444	2,0035
	0,99		$\frac{1}{20}$	0,009361972	
			$\frac{1}{40}$	0,002750708	1,7670
			$\frac{1}{80}$	0,000832257	1,7247
			$\frac{1}{160}$	0,000259484	1,6814
2	0,01	0,99	$\frac{1}{20}$	0,006265377	
			$\frac{1}{40}$	0,001693129	1,8877
			$\frac{1}{80}$	0,000484965	1,8037
			$\frac{1}{160}$	0,000151839	1,6753
	0,5		$\frac{1}{20}$	0,006292921	
			$\frac{1}{40}$	0,001707170	1,8821
			$\frac{1}{80}$	0,000490915	1,7981
			$\frac{1}{160}$	0,000154142	1,6712
	0,99		$\frac{1}{20}$	0,005676747	
			$\frac{1}{40}$	0,001421538	1,9976
			$\frac{1}{80}$	0,000355387	2,0000
			$\frac{1}{160}$	0,000088810	2,0006

Таблица 2. Результаты численного эксперимента для задачи (5), (6), (46)

m	α	β	h	$\max\limits_{0<j<m}\left\|[z^j]\right\|_0$	ПС в $\|[\cdot]\|_0$
2	0,01	0,01	$\frac{1}{20}$	0,004748827	
			$\frac{1}{40}$	0,001189573	1,9971
			$\frac{1}{80}$	0,000297544	1,9993
			$\frac{1}{160}$	0,000074396	1,9998
	0,5		$\frac{1}{20}$	0,006666026	
			$\frac{1}{40}$	0,001682021	1,9866
			$\frac{1}{80}$	0,000424610	1,9860
			$\frac{1}{160}$	0,000107486	1,9820
	0,99		$\frac{1}{20}$	0,006528305	
			$\frac{1}{40}$	0,001641712	1,9915
			$\frac{1}{80}$	0,000412977	1,9911
			$\frac{1}{160}$	0,000104292	1,9854
2	0,01	0,5	$\frac{1}{20}$	0,009490505	
			$\frac{1}{40}$	0,002782325	1,7702
			$\frac{1}{80}$	0,000839482	1,7287
			$\frac{1}{160}$	0,000260807	1,6865
	0,5		$\frac{1}{20}$	0,005321117	
			$\frac{1}{40}$	0,001328027	2,0024
			$\frac{1}{80}$	0,000331110	2,0039
			$\frac{1}{160}$	0,000082575	2,0035
	0,99		$\frac{1}{20}$	0,009371053	
			$\frac{1}{40}$	0,002753445	1,7670
			$\frac{1}{80}$	0,000833100	1,7247
			$\frac{1}{160}$	0,000259750	1,6814
2	0,01	0,99	$\frac{1}{20}$	0,006268291	
			$\frac{1}{40}$	0,001693922	1,8877
			$\frac{1}{80}$	0,000485193	1,8037
			$\frac{1}{160}$	0,000151910	1,6753
	0,5		$\frac{1}{20}$	0,006295835	
			$\frac{1}{40}$	0,001707966	1,8821
			$\frac{1}{80}$	0,000491145	1,7981
			$\frac{1}{160}$	0,000154214	1,6712
	0,99		$\frac{1}{20}$	0,005679370	
			$\frac{1}{40}$	0,001422198	1,9976
			$\frac{1}{80}$	0,000355552	2,0000
			$\frac{1}{160}$	0,000088851	2,0006

Список литературы (References)

Алиханов А. А. Априорные оценки решений краевых задач для уравнений дробного порядка // Дифференц. уравнения. — 2010. — Т. 46, № 5. — С. 658–664.

Alikhanov A. A. A priori estimates for solutions of boundary value problems for fractional-order equations // Diff. equations. — 2010. — Vol. 46, No. 5. — P. 660–666. (Original Russian paper: *Alikhanov A. A.* Apriornye otsenki reshenii kraevykh zadach dlya uravnenii drobnogo poryadka // Differents. uravneniya. — 2010. — Vol. 46, No. 5. — P. 658–664.)

Баренблат Г. И., Желтов Ю. П., Кочина И. Н. Об основных представлениях теории фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах // Прикладная математика и механика. — 1960. — Т. 25, № 5. — С. 852–864.

Barenblat G. I. Ob osnovnykh predstavleniyakh teorii fil'tratsii odnorodnykh zhidkostei v treshchinovatykh porodakh [On the basic concepts of the theory of filtration of homogeneous fluids in fractured rocks] // Applied Mathematics and Mechanics. — 1960. — Vol. 25, No. 5. — P. 852–864 (in Russian).

Бештоков М. Х. Краевые задачи для вырождающихся и невырождающихся уравнений соболевского типа с нелокальным источником в дифференциальной и разностной трактовках // Дифференц. уравнения. — 2018. — Т. 54, № 2. — С. 249–266.

Beshtokov M. Kh. Boundary value problems for degenerating and nondegenerating Sobolev-type equations with a nonlocal source in differential and difference forms // Diff. equations. — 2018. — Vol. 54, No. 2. — P. 250–267. (Original Russian paper: *Beshtokov M. Kh.* Kraevye zadachi dlya vyrozhdayushchikhsya i nevyrozhdayushchikhsya uravnenii sobolev skogo tipa s nelokal'nym istochnikom v differentsial'noi i raznostnoi traktovkakh // Differents. uravneniya. — 2018. — Vol. 54, No. 2. — P. 249–266.)

Бештоков М. Х. О численном решении нелокальной краевой задачи для вырождающегося псевдопараболического уравнения // Дифференц. уравнения. — 2016. — Т. 52, № 10. — С. 1393–1406.

Beshtokov M. Kh. On the numerical solution of a non-local boundary value problem for a degenerating pseudoparabolic equation // Diff. equations. — 2016. — Vol. 52, No. 10. — P. 1341–1354. (Original Russian paper: *Beshtokov M. Kh.* O chislennom reshenii nelokal'noi kraevoi zadachi dlya vyrozhdayushchegosya psevdoparabolicheskogo uravneniya // Differents. uravneniya. — 2016. — Vol. 52, No. 10. — P. 1393–1406.)

Бештоков М. Х. Разностный метод решения одной нелокальной краевой задачи для псевдопараболического уравнения третьего порядка // Дифференц. уравнения. — 2013. — Т. 49, № 9. — С. 1170–1177.

Beshtokov M. Kh. Finite-difference method for a non-local boundary value problem for a third-order pseudoparabolic equation // Diff. equations. — 2013. — Vol. 49, No. 9. — P. 1134–1141. (Original Russian paper: *Beshtokov M. Kh.* Raznostnyi metod resheniya odnoi nelokal'noi kraevoi zadachi dlya psevdoparabolicheskogo uravneniya tret'ego poryadka // Differents. uravneniya. — 2013. — Vol. 49, No. 9. — P. 1170–1177.)

Бештоков М. Х. Численное исследование начально-краевых задач для уравнения соболевского типа с дробной по времени производной // Журн. выч. матем. и матем. физ. — 2019. — Т. 59, № 2. — С. 185–202.

Beshtokov M. Kh. Numerical analysis of initial-boundary value problem for a Sobolev-type equation with a fractional-order time derivative // Comp. math. and math phys. — 2019. — Vol. 59, No. 2. — P. 175–192. (Original Russian paper: *Beshtokov M. Kh.* Chislennoe issledovanie nachal'no-kraevykh zadach dlya uravneniya sobolevckogo tipa s drobnoi po vremeni proizvodnoi // Zhurn. vych. matem. i matem. fiz. — 2019. — Vol. 59, No. 2. — P. 185–202.)

Булатов М. В. Об интегро-дифференциальных системах с вырожденной матрицей перед производной // Дифференц. уравнения. — 2002. — Т. 38, № 5. — С. 692–697.

Bulatov M. V. Integro-differential systems with a degenerate matrix multiplying the derivative // Diff. equations. — 2002. — Vol. 38, No. 5. — P. 731–737. (Original Russian paper: *Bulatov M. V.* Ob integro-differentsial'nykh sistemakh s vyrozhdennoi matritsei pered proizvodnoi // Differents. uravneniya. — 2002. — Vol. 38, No. 5. — P. 692–697.)

Вайнберг М. М. Интегро-дифференциальные уравнения // Итоги науки. Сер. Мат. анал. Теор. вероятн. Регулир. — М.: ВИНИТИ, 1964. — С. 5–37.

Vaynberg M. M. Integro-differentsial'nyye uravneniya [Integrodifferential equations] // Itogi nauki. Ser. Mat. anal. Teor. veroyatn. Regulir. — Moscow: VINITI, 1964. — P. 5–37 (in Russian).

Васильев В. В. К вопросу о решении задачи Коши для одного класса линейных интегро-дифференциальных уравнений // Изв. вузов. Матем. — 1961. — № 4. — С. 8–24.

Vasiliev V. V. K voprosu o reshenii zadachi Koshi dlya odnogo klassa lineynykh integro-differentsial'nykh uravneniy [On the question of solving the Cauchy problem for a class of linear integro-differential equations] // Izv. vuzov. Matem. — 1961. — No. 4. — P. 8–24 (in Russian).

Веницианов Е. В. Динамика сорбции из жидких сред. — М.: Наука, 1983. — 213 с.

Venicianov E. V. Dinamika sorbtsii iz zhidkikh sred [Dynamics of sorption from liquid media]. — Moscow: Nauka, 1983. — 213 p. (in Russian).

Лаврентьев М. М. Обратные задачи и специальные операторные уравнения первого рода // Международный конгресс математиков. Доклады советских математиков. — М.: Наука, 1972. — С. 130–136.

Lavrentev M. M. Obratnyye zadachi i spetsial'nyye operatornyye uravneniya pervogo roda [Inverse problems and special operator equations of the first kind] // Mezhdunarodnyy kongress matematikov. Doklady sovetskikh matematikov [International Congress of Mathematicians. Reports of Soviet mathematicians]. — Moscow: Nauka, 1972. — P. 130–136 (in Russian).

Ладыженская О. А. Краевые задачи математической физики. — М.: Наука, 1973. — 407 с.

Ladyzhenskaya O. A. Krayevyye zadachi matematicheskoy fiziki [Boundary value problems of mathematical physics]. — Moscow: Nauka, 1973. — 407 p. (in Russian).

Самарский А. А. Теория разностных схем. — М.: Наука, 1983. — 616 с.

Samarsky A. A. Teoriya raznostnykh skhem [Theory of difference schemes]. — Moscow: Nauka, 1983. — 616 p. (in Russian).

Самарский А. А., Гулин А. В. Устойчивость разностных схем. — М.: Наука, 1973. — 415 с.

Samarsky A. A., Gulin A. V. Ustoychivost' raznostnykh skhem [Stability of difference schemes]. — Moscow: Nauka, 1973. — 415 p. (in Russian).

Сидоров Н. А. Решение задачи Коши для одного класса интегро-дифференциальных уравнений с аналитическими нелинейностями // Дифференц. уравнения. — 1968. — Т. 4, № 7. — С. 1309–1316.

Sidorov N. A. Resheniye zadachi Koshi dlya odnogo klassa integro-differentsial'nykh uravneniy s'analiticheskimi nelineynostyami [Solution of the Cauchy problem for a class of integro-differential equations with analytic nonlinearities] // Diff. equations. — 1968. — Vol. 4, No. 7. — P. 1309–1316 (in Russian).

Трубин В. Г. Решение одного вырождающегося интегро-дифференциального уравнения // Дифференциальные и интегральные уравнения. — Иркутск: Иркут. ун-т, 1978. — № 5. — С. 94–101.

Trubin V. G. Resheniye odnogo vyrozhdayushchegosya integrodifferentsial'nogo uravneniya [Solution of one degenerate integro-differential equation] // Differential and integral equations. — Irkutsk: Irkut. un-t, 1978. — No. 5. — P. 94–101 (in Russian).

Alikhanov A. A. A new difference scheme for the time fractional diffusion equation // J. Comput. Phys. — 2015. — No. 280. — P. 424–438.

Beshtokov M. Kh. The third boundary value problem for loaded differential Sobolev type equation and grid methods of their numerical implementation // IOP Conf. Ser. Mater. Sci. Eng. — 2016. — Vol. 158, No. 1. — P. 12–19.

Cuesta C. M., Pop I. S. Numerical schemes for a pseudo-parabolic Burgers equation, discontinuous data and long-time behaviour // Journal of Computational and Applied Mathematics. — 2009. — Vol. 224, No. 1. — P. 269–283.

Ewing R. E. Numerical solution of Sobolev partial differential equations // SIAM Journal on Numerical Analysis. — 1975. — Vol. 12, No. 3. — P. 345–363.

Guezane-Lakoud A., Belakroum D. Time-discretization schema for an integrodifferential Sobolev type equation with integral conditions // Applied Mathematics and Computation. — 2012. — Vol. 218, No. 9. — P. 4695–4702.

Luoa Z. D., Teng F. A reduced-order extrapolated finite difference iterative scheme based on POD method for 2D Sobolev equation // Applied Mathematics and Computation. — 2018. — Vol. 329. — P. 374–383.

Xia H., Luo Z. An optimized finite difference Crank – Nicolson iterative scheme for the 2D Sobolev equation // Advances in Difference Equations. — 2017. — Vol. 196. — P. 12.