

УДК: 519.63

Разностные схемы расщепления для системы одномерных уравнений гемодинамики

Г. В. Кривовичев

Санкт-Петербургский государственный университет,
Россия, 199034, г. Санкт-Петербург, Университетская наб., д. 7/9

E-mail: g.krivovichev@spbu.ru

Получено 06.05.2023, после доработки — 13.09.2023.

Принято к публикации 27.10.2023.

Работа посвящена построению и анализу разностных схем для системы уравнений гемодинамики, полученной осреднением уравнений гидродинамики вязкой несжимаемой жидкости по поперечному сечению сосуда. Рассматриваются модели крови как идеальной и как вязкой ньютоновской жидкости. Предложены разностные схемы, аппроксимирующие уравнения со вторым порядком по пространственной переменной. Алгоритмы расчета по построенным схемам основаны на методе расщепления по физическим процессам, в рамках которого на одном шаге по времени уравнения модели рассматриваются отдельно и последовательно. Практическая реализация предложенных схем приводит к последовательному решению на каждом шаге по времени двух линейных систем с трехдиагональными матрицами. Показано, что схемы являются ρ -устойчивыми при незначительных ограничениях на шаг по времени в случае достаточно гладких решений.

При решении задачи с известным аналитическим решением показано, что имеет место сходимость численного решения со вторым порядком по пространственной переменной в широком диапазоне значений шага сетки. При проведении вычислительных экспериментов по моделированию течения крови в модельных сосудистых системах производилось сравнение предложенных схем с такими известными явными схемами, как схема Лакса – Вендроффа, Лакса – Фридрикса и МакКормака. При решении задач показано, что результаты, полученные с помощью предложенных схем, близки к результатам расчетов, полученных по другим вычислительным схемам, в том числе построенным на основе других методов дискретизации. Показано, что в случае разных пространственных сеток время расчетов для предложенных схем значительно меньше, чем в случае явных схем, несмотря на необходимость решения на каждом шаге систем линейных уравнений. Недостатками схем является ограничение на шаг по времени в случае разрывных или сильно меняющихся решений и необходимость использования экстраполяции значений в граничных точках сосудов. В связи с этим актуальными для дальнейших исследований являются вопросы об адаптации схем расщепления к решению задач с разрывными решениями и в случаях специальных типов условий на концах сосудов.

Ключевые слова: течение крови, одномерная модель, схемы расщепления, устойчивость

UDC: 519.63

Difference splitting schemes for the system of one-dimensional equations of hemodynamics

G. V. Krivovichev

Saint Petersburg State University,
7/9 Universitetskaya nab., Saint Petersburg, 199034, Russia

E-mail: g.krivovichev@spbu.ru

Received 06.05.2023, after completion – 13.09.2023.

Accepted for publication 27.10.2023.

The work is devoted to the construction and analysis of difference schemes for a system of hemodynamic equations obtained by averaging the hydrodynamic equations of a viscous incompressible fluid over the vessel cross-section. Models of blood as an ideal and as a viscous Newtonian fluid are considered. Difference schemes that approximate equations with second order on the spatial variable are proposed. The computational algorithms of the constructed schemes are based on the method of splitting on physical processes. According to this approach, at one time step, the model equations are considered separately and sequentially. The practical implementation of the proposed schemes at each time step leads to a sequential solution of two linear systems with tridiagonal matrices. It is demonstrated that the schemes are ρ -stable under minor restrictions on the time step in the case of sufficiently smooth solutions.

For the problem with a known analytical solution, it is demonstrated that the numerical solution has a second order convergence in a wide range of spatial grid step. The proposed schemes are compared with well-known explicit schemes, such as the Lax–Wendroff, Lax–Friedrichs and McCormack schemes in computational experiments on modeling blood flow in model vascular systems. It is demonstrated that the results obtained using the proposed schemes are close to the results obtained using other computational schemes, including schemes constructed by other approaches to spatial discretization. It is demonstrated that in the case of different spatial grids, the time of computation for the proposed schemes is significantly less than in the case of explicit schemes, despite the need to solve systems of linear equations at each step. The disadvantages of the schemes are the limitation on the time step in the case of discontinuous or strongly changing solutions and the need to use extrapolation of values at the boundary points of the vessels. In this regard, problems on the adaptation of splitting schemes for problems with discontinuous solutions and in cases of special types of conditions at the vessels ends are perspective for further research.

Keywords: blood flow, one-dimensional model, splitting schemes, stability

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2024, vol. 16, no. 2, pp. 459–488 (Russian).

1. Введение

В настоящее время математические модели течения крови широко используются в клинических исследованиях для диагностики развития сердечно-сосудистых заболеваний и предсказания последствий различных операций [Marchandise, Willemet, Lacroix, 2009; Gallo, Anayiotos, Morbiducci, 2015; Bessonov et al., 2016; Dobroserdova et al., 2019; Василевский и др., 2022]. Для моделирования течений в больших сосудистых системах (в системе кровообращения человека в целом и в отдельных ее разделах) в большинстве работ применяются одномерные модели [Formaggia, Lamponi, Quarteroni, 2003; Shi, Lawford, Hose, 2011; van de Vosse, Stergiopoulos, 2011; Буничева и др., 2015; Quarteroni, Manzoni, Vergara, 2017; Симаков, 2018]. Такие модели можно построить посредством осреднения уравнений гидродинамики вязкой несжимаемой жидкости по поперечному сечению сосуда. Результаты расчетов по таким моделям хорошо согласуются с осредненными решениями, полученными с использованием пространственных моделей [Xiao, Alastruey, Figueroa, 2014], а при практическом применении одномерные и пространственные модели успешно сочетаются [Dobroserdova et al., 2019; Rozema, Veldman, Maurits, 2023].

Система уравнений в частных производных, представляющая собой одномерную модель течения в сосуде с упругой стенкой, является строго гиперболической [Formaggia, Lamponi, Quarteroni, 2003; Буничева и др., 2015; Toro, 2015]. Из-за того что система является нелинейной, задачи для нее в общем случае могут быть решены только численно. Это приводит к разработке большого числа численных методов, основанных на разных подходах к дискретизации, основными из которых являются методы конечных объемов, конечных элементов и конечных разностей. В последние годы большой интерес также вызывают работы по применению разрывного метода Галёркина [Puelz et al., 2017; Li, Delestre, Yuan, 2018], метода прямых [Бибердорф, Попова, 2009] и метода решеточных уравнений Больцмана [Ильин, 2019].

Конечно-объемные схемы применяются для моделирования течения крови в большом числе работ. Так, в [Cavallini, Caleffi, Coscia, 2008] предложена схема WENO пятого порядка аппроксимации. Схема применена к решению задачи о моделировании кровотока в одном из отделов аорты с аневризмой. В [Delestre, Lagree, 2013] предложена консервативная схема, точно воспроизводящая стационарные решения в случае нулевой скорости течения (так называемой *dead-man equilibria*). В [Delestre et al., 2016; Ghigo et al., 2017] предложены обобщения этой схемы. Авторами работы [Muller et al., 2016] предложен подход к построению консервативных схем высокого порядка, использующий точные решения задачи Римана для невязкой модели. В [Murillo, Garcia-Navarro, 2015] разработана конечно-объемная схема для решения задач массопереноса. Для получения монотонных решений в [Huang, Muller, 2015] предложено использовать TVD-схемы. Другие подходы к монотонизации схем основаны на использовании схем MUSCL и ENO [Delestre, Lagree, 2013; Delestre et al., 2016; Wang, Fullana, Lagree, 2015].

Основное число работ по применению конечно-элементных схем основано на использовании методов Галёркина [Bessems, Rutten, van de Vosse, 2007], наименьших квадратов [Steele et al., 2003] и Тейлора–Галёркина [Formaggia, Lamponi, Quarteroni, 2003; Malossi, Blanco, Deparis, 2012; Melicher, Gajdosik, 2009; Sherwin et al., 2003]. Последний, по сути, применяется к параболическому дифференциальному приближению разностной схемы и является конечно-элементным аналогом схемы Лакса–Вендроффа.

Как отмечается в [Wang, Fullana, Lagree, 2015], конечно-разностные схемы в применении к численному решению задач для одномерных моделей можно рассматривать как наиболее удобные и простые с точки зрения практической реализации. Во многих работах для расчетов применяются явные схемы. Так, в [Elad et al., 1991] проведено сравнение схем Лакса–Вендроффа и МакКормака в применении к разным формам записи уравнений одномерной гемодинамики. Показано, что обе схемы позволяют получать близкие результаты. В работах [Smith,

Pullan, Hunter, 2002; Duanmu et al., 2019] схема Лакса–Вендроффа применяется для моделирования течений в системе коронарных артерий, а в [Olufsen et al., 2000; Saito et al., 2011] — для моделирования течений в артериальной системе человека. В [Azer, Peskin, 2007] такая схема применяется для модели с нестационарным профилем скорости. В [Diem, Bressloff, 2017] описан реализованный на Python комплекс программ, где для расчетов тоже используется схема Лакса–Вендроффа.

Упомянутые явные схемы, несмотря на удобство в практической реализации, из-за условной устойчивости имеют ограничение на шаг по времени. В связи с этим многими авторами для решения одномерных начально-краевых задач гемодинамики были разработаны неявные схемы. В [Ашметков и др., 2000] авторами предложена неявная конечно-разностная схема второго порядка с регуляризирующими членами для снижения нефизических эффектов численной дисперсии и диссипации. В [Huo, Kassab, 2007] предложена неявная схема, аппроксимирующая производную по времени на основе формулы трапеций и имеющая первый порядок по пространству. В [Bessemis, Rutten, van de Vosse, 2007; Watanabe, Blanco, Feijoo, 2015] предложены неявные конечно-элементные схемы. Для аппроксимации по времени используется θ -метод. В [Kroon et al., 2012] предложена линеаризованная неявная схема для моделирования распространения волн давления в сосудистых системах. Работа [Carson, van Loon, 2017] посвящена схеме, в которой для аппроксимации по времени используется формула трапеций, а для аппроксимации по пространству используется метод коллокаций по подобластям. Особенностью этой и других неявных схем является то, что на каждом шаге по времени они приводят к решению глобальной (т. е. для всей модели сосудистой системы) системы нелинейных алгебраических уравнений. В случае же явных схем значения искомых функций во внутренних узлах сеток, разбивающих модели сосудов, на одном шаге по времени можно получать независимо от других сосудов, используя для расчета в граничных узлах значения, полученные в предыдущие моменты времени. Значения же в граничных узлах и точках сопряжения (или бифуркации) сосудов можно получать с использованием неявных схем для улучшения устойчивости, используя для этого значения в приграничных узлах, полученные по явным схемам (см., например, [Vassilevski et al., 2011; Симаков, 2021]). Такая независимость расчетов по сосудам позволяет эффективно проводить вычисления в параллельном режиме.

Схемы расщепления [Яненко, 1967; Вабищевич, 2013] широко используются для численного решения задач для гиперболических систем. В рамках такого подхода, имеющего на одном шаге по времени несколько этапов, можно для реализации этих этапов использовать различные схемы, что позволяет улучшать устойчивость метода и точность по пространству. Подобные схемы применялись для решения одномерных задач гемодинамики в [Malossi, Blanco, Deparis, 2012; Delestre, Lagree, 2013; Wang, Fullana, Lagree, 2015; Delestre et al., 2016]. В [Delestre, Lagree, 2013; Delestre et al., 2016] рассматриваются схемы с расщеплением по физическим процессам: на первом этапе реализуется явная схема для невязкой модели, а на втором этапе используется неявная схема для вязкой модели. В [Malossi, Blanco, Deparis, 2012; Wang, Fullana, Lagree, 2015] расщепление осуществляется по принципу последовательного учета упругой и вязкоупругой стадий процесса деформации.

Настоящая работа посвящена разработке и анализу схем расщепления для системы одномерных уравнений гемодинамики для невязкой и ньютоновской моделей крови. В рамках предлагаемого подхода на одном шаге по времени последовательно реализуются схемы для осредненного условия несжимаемости и уравнения движения. Схемы аппроксимируют соответствующие уравнения со вторым порядком по пространству и являются неявными. Реализация каждого этапа метода расщепления требует решения линейной системы алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей. Алгоритмы расчетов по построенным схемам обладают свойством локальности, благодаря чему они имеют широкие возможности для распараллели-

вания вычислений и проще в реализации, чем ранее предложенные алгоритмы, основанные на неявных схемах и требующие решения глобальной системы уравнений. Для исследования устойчивости схем по начальным условиям используется метод энергетических неравенств. Показано, что в случае гладких решений имеет место условие устойчивости, гарантирующее достаточно большие значения шага по времени. При решении модельной задачи с аналитическим решением для невязкой модели показано, что при расчетах имеет место второй порядок сходимости в широком диапазоне значений шага по пространству. Сравнение схем с известными из литературы явными схемами проведено при решении задач о течении в модельных сосудистых системах. Результаты, полученные по предложенным схемам, близки к результатам расчетов по известным схемам. Показано, что существенным достоинством схем расщепления является то, что время проведения расчетов и число шагов для предложенных неявных схем оказывается меньше, чем для известных явных разностных схем. Недостатками схем являются возможность наличия сильного ограничения на шаг по времени в случае разрывных или сильно меняющихся решений и необходимость использования экстраполяции значений в граничных точках сосудов для обеспечения локальной реализации схем. В связи с этим актуальными для дальнейших исследований являются вопросы об адаптации схем расщепления к решению задач с разрывными решениями и в случаях специальных типов условий на концах сосудов.

2. Уравнения одномерной гемодинамики

Одномерная модель течения крови, получающаяся посредством осреднения уравнений динамики вязкой несжимаемой жидкости по поперечному сечению сосуда, имеет следующий вид [Formaggia, Lamponi, Quarteroni, 2003; Ghigo, Lagree, Fullana, 2018]:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\alpha \frac{Q^2}{A} \right) + \frac{A}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} = f(A, Q), \quad (1)$$

где t — время, z — пространственная координата, $A(t, z)$ — площадь поперечного сечения, $Q(t, z)$ — объемный расход, $\alpha \geq 1$ — коэффициент Буссинеска, ρ — плотность, $P(t, z)$ — давление, f — вязкий член, вычисляемый как

$$f(A, Q) = \frac{2\pi R}{\rho} T_{rz} \Big|_{r=R},$$

где $R(t, z)$ есть радиус сосуда, T_{rz} — компонента тензора касательных напряжений. В большинстве работ по одномерным моделям кровь рассматривается как ньютоновская жидкость. Для такой модели вязкий член имеет следующий вид [Puelz et al., 2017]:

$$f(A, Q) = -K \frac{Q}{A},$$

где

$$K = \frac{\alpha}{\alpha - 1} \frac{2\pi\mu}{\rho},$$

где μ — динамическая вязкость.

Альтернативой системе (1) выступает система относительно A и средней скорости U :

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial(AU)}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{U^2}{2} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} = -K \frac{U}{A}. \quad (2)$$

Система (2) получается из (1) в случае, когда в (1) единичное значение α рассматривается только в левой части уравнения для Q . В [Puelz et al., 2017; Krivovichev, 2022] показано, что

значение α , рассматриваемое в этой части уравнения, существенно не влияет на результаты расчетов, в связи с чем вполне допустимо использовать такое приближение на практике.

В настоящей работе будут рассматриваться модель вида (2) и ее аналог для случая, когда не учитывается вязкость крови:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial(AU)}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{U^2}{2} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} = 0. \quad (3)$$

Такая модель используется, например, в работах [Toro, Siviglia, 2013; Toro, 2015; Spiller et al., 2017; Britton, Xing, 2020; Sheng, Zheng, Zheng, 2020].

Системы (2) и (3) замыкаются уравнением состояния $P = P(A)$. В настоящей работе будем использовать соотношение, применяемое в большинстве работ для моделирования течений в артериях [Того, 2015]:

$$P - P_{ext} = P_d + \frac{\beta}{A_d} \left(\sqrt{A} - \sqrt{A_d} \right), \quad (4)$$

где P_{ext} — внешнее давление, A_d и P_d — площадь и давление во время диастолы, $\beta = \frac{4}{3} \sqrt{\pi} E h$, E — модуль Юнга, h — толщина стенки сосуда. Будем полагать, что для конкретного сосуда в системе эти параметры являются постоянными.

Будем рассматривать решения как элементы гильбертова пространства $H = L_2(a, b)$ (где $[a, b]$ определяет промежуток, на котором поставлена задача) со скалярным произведением

$$(f, g) = \int_a^b f(z)g(z) dz,$$

и евклидовой нормой $\|f\| = \sqrt{(f, f)}$. Будем полагать, что элементы H обладают необходимыми свойствами гладкости.

Определим дифференциальный оператор C следующим образом:

$$C(v) = \frac{\partial}{\partial z}(Uv),$$

где $v \in H$. В этом случае первое уравнение в (2) и (3) переписется таким образом:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + C(A) = 0, \quad (5)$$

а уравнения движения примут вид

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{C(U)}{2} + \psi(A) = -K \frac{U}{A}, \quad (6)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{C(U)}{2} + \psi(A) = 0, \quad (7)$$

где функция $\psi(A)$ получается в результате замыкания невязкой и ньютоновской моделей уравнением состояния (4) и имеет следующий вид:

$$\psi(A) = \chi \frac{\partial \sqrt{A}}{\partial z}, \quad \chi = \frac{\beta}{\rho A_d}.$$

3. Разностные схемы

Рассмотрим сетку по времени, построенную с шагом Δt и узлами t_n , $n = \overline{1, M}$, и сетку по пространству с узлами z_i , $i = \overline{0, N+1}$, построенную с шагом h . Рассмотрим схему с весами, аппроксимирующую (5) в случае, когда скорость U известна и задается функцией U^* :

$$\frac{A^{n+1} - A^n}{\Delta t} + C(\sigma A^{n+1} + (1 - \sigma)A^n) = 0, \quad (8)$$

где $A^n = (A_1^n, \dots, A_N^n)$ – сеточная функция, $A_i^n \approx A(t_n, z_i)$, $\sigma \in [0, 1]$ – безразмерный параметр, а C есть сеточный оператор, определяемый при его действии на некоторую сеточную функцию V для внутренних узлов сетки следующим образом:

$$C(V) \approx \frac{U_{i+1}^* V_{i+1} - U_{i-1}^* V_{i-1}}{2h}, \quad i = \overline{1, N}.$$

Схемы, аппроксимирующие (6) и (7), построим для случая, когда функция A в момент $t = t_{n+1}$ считается известной и задается как A^* . Тогда построим такие разностные схемы:

$$\frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} + C(U^{n+1}) + \psi(A^*) = -K \frac{U^{n+1}}{A^*}, \quad (9)$$

$$\frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} + C(U^{n+1}) + \psi(A^*) = 0, \quad (10)$$

где U^n есть сеточная функция, задаваемая аналогично A^n , в операторе C функция V равна $\frac{U^*}{2}$, а $\psi(A^*)$ аппроксимируется таким образом:

$$\psi(A_i^*) \approx \chi \frac{\sqrt{A_{i+1}^*} - \sqrt{A_{i-1}^*}}{2h}.$$

В связи с тем что в (8)–(10) используются центральные разности, во внутренних узлах пространственной сетки имеет место аппроксимация со вторым порядком.

Поскольку в (8)–(10) A^* и U^* считаются известными, схемы (8)–(10) являются линейными, и их применение сводится к решению систем с трехдиагональными матрицами, для решения которых можно применить метод прогонки, имеющий трудоемкость $\Theta(N)$.

При построении вычислительного алгоритма будем предполагать, что $U^* = U^n$ и $A^* = A^{n+1}$. Процесс вычислений на одном шаге по времени $[t_n, t_{n+1}]$ организуется таким образом: на первом этапе при известном U^* из (8) получаем значения A^{n+1} , а на втором этапе по известным A^* и U^* по схеме (9) или (10) находим значения U^{n+1} . Такая реализация отвечает идее расщепления по физическим процессам: сперва по известной скорости потока определяется деформированное состояние сосуда, затем вычисляется скорость жидкости в деформированном сосуде.

Для анализа устойчивости построенных схем воспользуемся методом операторных неравенств. Будем исследовать устойчивость в случае промежутка, в крайних точках которого U^n (следовательно, и U^*) равна нулю [Самарский, Вабищевич, 1998]. Рассмотрим пространство $L_2(\omega)$ сеточных функций, заданных на равномерной сетке ω , разбивающей этот промежуток. Скалярное произведение определим следующим образом:

$$(f, g) = \sum_i f_i g_i h.$$

Как и ранее, будем рассматривать евклидову норму.

Устойчивость схемы (8) следует из результатов, представленных в [Самарский, Вабищевич, 1998]. В этой работе рассматривалась аналогичная схема и было показано, что она является ρ -устойчивой при ограничении на шаг по времени следующего вида:

$$\Delta t \leq \frac{3}{16M\sigma^2},$$

где

$$M \leq \frac{1}{2h} \max_i |U_{i+1}^* - U_i^*|.$$

При этом справедлива оценка

$$\|A^{n+1}\|^2 \leq \rho \|A^n\|^2,$$

где $\rho = \exp(4M((\sigma - 1)^2 + 2\sigma^2)\Delta t)$. Заметим, что ограничение на Δt является весьма умеренным и позволяет использовать большие значения Δt для случая, когда функция U не имеет разрывов и резких изменений. В дальнейшем в рамках расчетов будем рассматривать случай $\sigma = \frac{1}{2}$, что отвечает схеме Кранка – Николсон и второму порядку аппроксимации по времени [Vabishchevich, 2018].

Заметим, что аналогичная ситуация имеет место и для схемы (10) при $\psi \equiv 0$. Этот член, в силу предположения об известности A^* , является неоднородностью в (9) и (10). Таким образом, в силу ρ -устойчивости однородной схемы получим устойчивость неоднородной схемы (10) по правой части [Самарский, Гулин, 2005]. Аналогично покажем устойчивость схемы (9) в случае $\psi \equiv 0$ и «замороженного» коэффициента $\frac{1}{A^*}$:

$$\frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} + C(U^{n+1}) + K\xi U^{n+1} = 0, \quad (11)$$

где $\xi = \max_i \left(\frac{1}{A_i^*}\right)$.

Скалярно умножая (11) на $2\Delta t U^{n+1}$, получим

$$2(U^{n+1} - U^n, U^{n+1}) + 2\Delta t(C(U^{n+1}), U^{n+1}) + 2\Delta t K\xi(U^{n+1}, U^{n+1}) = 0,$$

откуда получим, что

$$2\|U^{n+1}\|^2 - 2(U^{n+1}, U^n) + 2\Delta t(C(U^{n+1}), U^{n+1}) + 2\Delta t K\xi\|U^{n+1}\|^2 = 0.$$

Последнее выражение перепишем в виде

$$\|U^{n+1} - U^n\|^2 + \|U^{n+1}\|^2 - \|U^n\|^2 + 2\Delta t(C(U^{n+1}), U^{n+1}) + 2\Delta t K\xi\|U^{n+1}\|^2 = 0.$$

С учетом положительности K , ξ и Δt получим

$$\|U^{n+1} - U^n\|^2 + \|U^{n+1}\|^2 + 2\Delta t K\xi\|U^{n+1}\|^2 \leq \|U^n\|^2 + 2\Delta t |(C(U^{n+1}), U^{n+1})|.$$

Используя неравенство $|(C(U^{n+1}), U^{n+1})| \leq M\|U^{n+1}\|^2$ [Самарский, Вабищевич, 1998], получим

$$\|U^{n+1} - U^n\|^2 + \|U^{n+1}\|^2 + 2\Delta t K\xi\|U^{n+1}\|^2 \leq \|U^n\|^2 + 2\Delta t M\|U^{n+1}\|^2. \quad (12)$$

С учетом очевидного неравенства

$$\|U^{n+1} - U^n\|^2 + \|U^{n+1}\|^2 + 2\Delta t K\xi\|U^{n+1}\|^2 \geq (1 + 2\Delta t K\xi)\|U^{n+1}\|^2 > \|U^{n+1}\|^2,$$

из (12) получим, что

$$\|U^{n+1}\|^2 < \|U^n\|^2 + 2\Delta t M \|U^{n+1}\|^2,$$

откуда получим

$$\|U^{n+1}\|^2 < \frac{1}{1 - 2\Delta t M} \|U^n\|^2. \quad (13)$$

С учетом того, что при $\eta \leq \frac{3}{4}$ справедливо неравенство [Самарский, Вабищевич, 1998]

$$\frac{1}{1 - \eta} \leq \exp(2\eta),$$

получим, что при

$$\Delta t \leq \frac{3}{8M}$$

будет иметь место оценка

$$\|U^{n+1}\|^2 < \rho \|U^n\|^2,$$

где $\rho = \exp(4\Delta t M)$, которая приводит к ρ -устойчивости схемы (11), а следовательно, и к устойчивости (9) по начальным условиям и правой части.

4. Вычислительные эксперименты

В данном разделе применим построенные схемы расщепления к решению ряда модельных задач. Для сравнения будем использовать численные решения, полученные с использованием известных схем, применяемых как для численного решения задач гемодинамики, так и для гиперболических систем общего вида. Эти схемы построены для системы уравнений (2)–(3), записанной в дивергентной форме:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial z} = \mathbf{B}(\mathbf{U}),$$

где $\mathbf{U} = (A, U)^T$.

Рассмотрим следующие схемы.

1. *Схема Лакса – Фридрикса*. Схема задается рекуррентной формулой [Lu et al., 2015]:

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^n - \frac{\Delta t}{h} (\mathbf{F}_{i+1/2}^n - \mathbf{F}_{i-1/2}^n) + \Delta t \mathbf{B}(\mathbf{U}_i^n),$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{i+1/2}^n &= \frac{1}{2} (\mathbf{F}(\mathbf{U}_{i+1}^n) - \mathbf{F}(\mathbf{U}_i^n)) - \frac{h}{2\Delta t} (\mathbf{U}_{i+1}^n - \mathbf{U}_i^n), \\ \mathbf{F}_{i-1/2}^n &= \frac{1}{2} (\mathbf{F}(\mathbf{U}_i^n) - \mathbf{F}(\mathbf{U}_{i-1}^n)) - \frac{h}{2\Delta t} (\mathbf{U}_i^n - \mathbf{U}_{i-1}^n). \end{aligned}$$

Схема имеет первый порядок аппроксимации по пространству [Lu et al., 2015]. Обеспечивающее устойчивость ограничение на шаг Δt имеет следующий вид [Prebeg, Flatten, Muller, 2018]:

$$\Delta t \leq \frac{h}{\max_i (|U_i| + c_i)}, \quad (14)$$

где

$$c = \sqrt{\frac{A}{\rho} \frac{dP}{dA}} = \sqrt{\frac{\beta}{2\rho A_d}} A^{1/4}.$$

2. *Схема Лакса–Вендроффа*. Эта схема на одном шаге по времени реализуется в два этапа. На первом производится расчет в полуцелых узлах сетки:

$$\mathbf{U}_{i+1/2}^{n+1/2} = \frac{1}{2} (\mathbf{U}_{i+1}^n + \mathbf{U}_i^n) - \frac{\Delta t}{2h} (\mathbf{F}(\mathbf{U}_{i+1}^n) - \mathbf{F}(\mathbf{U}_i^n)) + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{B}(\mathbf{U}_{i+1/2}^n),$$

где

$$\mathbf{U}_{i+1/2}^n = \frac{1}{2} (\mathbf{U}_{i+1}^n + \mathbf{U}_i^n).$$

На втором этапе производится расчет значений в узлах с целыми индексами:

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^n - \frac{\Delta t}{h} (\mathbf{F}(\mathbf{U}_{i+1/2}^{n+1/2}) - \mathbf{F}(\mathbf{U}_{i-1/2}^{n+1/2})) + \Delta t \mathbf{B}(\mathbf{U}_i^n).$$

Схема имеет второй порядок сходимости по обеим переменным и является устойчивой при выполнении условия (14) [Elad et al., 1991; Voileau et al., 2015].

3. *Схема МакКормака*. Данная схема имеет второй порядок аппроксимации по обеим переменным и также реализуется в два этапа. Этап предиктора имеет следующий вид:

$$\mathbf{U}_i^* = \mathbf{U}_i^n - \frac{\Delta t}{h} (\mathbf{F}(\mathbf{U}_{i+1}^n) - \mathbf{F}(\mathbf{U}_i^n)) + \Delta t \mathbf{B}(\mathbf{U}_i^n),$$

а этап корректора задается формулой

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \frac{1}{2} (\mathbf{U}_i^n + \mathbf{U}_i^*) - \frac{\Delta t}{2h} (\mathbf{F}(\mathbf{U}_i^*) - \mathbf{F}(\mathbf{U}_{i-1}^*)) + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{B}(\mathbf{U}_i^*).$$

Условие устойчивости имеет вид (14) [Elad et al., 1991; Wang, Fullana, Lagree, 2015].

При проведении расчетов по явным схемам шаг по времени выбирался из условия устойчивости:

$$\Delta t \leq n_{CFL} \min_{s=1, S} \left(\max_{i=1, N} \left(\frac{h_s}{c_{s,i} + |U_{s,i}|} \right) \right),$$

где S есть число сосудов, а значение n_{CFL} бралось меньше единицы, чтобы гарантировать нахождение внутри области устойчивости. Численные расчеты проводились на ПК с Intel(R) Core(TM) i7-7700 CPU@3,60 GHz 16 Gb RAM с использованием кода, реализованного на языке системы Matlab 2019b. Отметим, что при реализации метода прогонки для расчетов по схемам расщепления не проводилась специальная векторизация вычислений и не использовался формат sparse для хранения разреженных матриц. Все элементы диагоналей разреженных матриц хранились в отдельных массивах. Для всех рассмотренных в работе схем характерно линейное по N количество операций на одном шаге по времени, но для явных схем их больше (особенно у двухэтапных), так как приходится производить расчет значений векторов потоков \mathbf{F} в узлах сетки.

4.1. Задача для неограниченного промежутка

Рассмотрим модельную задачу, имеющую аналитическое решение. Покажем, что численное решение, получаемое по схеме для (3), имеет второй порядок сходимости в широком диапазоне значений шага h .

Введем безразмерные переменные:

$$\tilde{z} = \frac{z}{L_c}, \quad \tilde{t} = \frac{t}{T_c}, \quad \tilde{A} = \frac{A}{A_d}, \quad \tilde{U} = \frac{U}{U_c}, \quad (15)$$

где L_c и T_c есть характерные длина и время, $U_c = \frac{L_c}{T_c}$. В дальнейшем в этом разделе знак тильды у безразмерных переменных будем опускать. После подстановки (15) в (3), получим систему вида

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial(AU)}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\kappa}{\sqrt{A}} \frac{\partial A}{\partial z} = 0, \quad (16)$$

где

$$\kappa = \frac{\beta}{2\sqrt{A_d}\rho U_c^2}.$$

Рассмотрим систему (16) на вещественной прямой. Предположим, что начальные условия представимы в виде

$$A(0, z) = A^0 + \varepsilon\phi_1(z) + \varepsilon^2\phi_2(z) + \dots, \quad U(0, z) = \varepsilon\zeta_1(z) + \varepsilon^2\zeta_2(z) + \dots, \quad (17)$$

где ε есть малый безразмерный параметр, $A^0 > 0$ есть постоянная величина, функции $\phi_i(z)$, $\zeta_i(z)$ считаем ограниченными на всей прямой. Условия такого вида отвечают возмущенному стационарному решению $(A_0, 0)$.

Будем искать решение задачи (16)–(17) в виде

$$A(t, z) = A_0 + \varepsilon A_1 + \varepsilon^2 A_2 + \dots, \quad U(t, z) = \varepsilon U_1 + \varepsilon^2 U_2 + \dots$$

Легко показать, что $A_0 = A^0$. В дальнейшем ограничимся только первым приближением по ε . Для A_1 и U_1 имеем следующую систему:

$$\frac{\partial A_1}{\partial t} + A_0 \frac{\partial U_1}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial U_1}{\partial t} + \frac{\kappa}{\sqrt{A_0}} \frac{\partial A_1}{\partial z} = 0,$$

из которой легко получить простое волновое уравнение относительно U_1 :

$$\frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 U_1}{\partial z^2}, \quad (18)$$

где $c = \sqrt{\kappa A_0}^{1/4}$.

Функцию A_1 можно получить по известному решению задачи для (18):

$$A_1(t, z) = -A_0 \int_0^t \frac{\partial U_1}{\partial z}(\tau, z) d\tau + w(z),$$

где $w(z)$ определяется из начального условия. Для (18) получаются начальные условия следующего вида:

$$U_1(0, z) = \zeta_1(z), \quad \frac{\partial U_1}{\partial t}(0, z) = -\frac{\kappa}{\sqrt{A_0}} \frac{d\phi_1}{dz}(z). \quad (19)$$

В случае $\zeta_1(z) = \zeta(z)$, $\phi_1(z) \equiv 0$ получим решение (18)–(19) в виде

$$U_1(t, z) = \frac{1}{2}(\zeta(z - ct) + \zeta(z + ct)).$$

Функция A_1 при этом имеет следующий вид:

$$A_1(t, z) = \frac{A_0}{2c}(\zeta(z - ct) - \zeta(z + ct)).$$

При численном решении этой задачи вместо бесконечного промежутка будем рассматривать отрезок $[-L, L]$ и временной промежуток $[0, T]$. В граничных точках поставим условия совместности [Магомедов, Холодов, 2018]:

$$\mathbf{I}_{\pm}(\mathbf{U}) \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \lambda_{\pm}(\mathbf{U}) \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial z} \right) = \mathbf{0}, \quad (20)$$

где \mathbf{I}_{\pm} и λ_{\pm} есть левые собственные векторы и отвечающие им собственные значения матрицы системы (2) при ее записи в квазилинейной форме. В случае $z = -L$ в (20) фигурируют $\lambda_{-} < 0$ и \mathbf{I}_{-} , в случае $z = L$ используются $\lambda_{+} > 0$ и \mathbf{I}_{+} . В дополнение к (20) в граничных точках зададим неотражающие условия, отвечающие характеристикам, входящим в вычислительную область [Hedstrom, 1979]:

$$\mathbf{I}_{\pm}(\mathbf{U}) \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = \mathbf{0},$$

где при $z = -L$ используется \mathbf{I}_{+} , а при $z = L$ используется \mathbf{I}_{-} .

Производную по t , входящую в (20), аппроксимируем при $t = t_{n+1}$ с помощью левой разностной производной:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t}(t_{n+1}, z_i) \approx \frac{\mathbf{U}_i^{n+1} - \mathbf{U}_i^n}{\Delta t},$$

где $i = 0$ и $i = N + 1$. Производные по z аппроксимируем конечными разностями второго порядка (см., например, [Simakov, Gamilov, 2019]):

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial z}(t_{n+1}, z_0) \approx \frac{-3\mathbf{U}_0^{n+1} + 4\mathbf{U}_1^{n+1} - \mathbf{U}_2^{n+1}}{2h}, \\ \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial z}(t_{n+1}, z_{N+1}) \approx \frac{\mathbf{U}_{N-1}^{n+1} - 4\mathbf{U}_N^{n+1} + 3\mathbf{U}_{N+1}^{n+1}}{2h}. \end{cases} \quad (21)$$

Нелинейные функции $\mathbf{I}_{\pm}(\mathbf{U})$ и $\lambda_{\pm}(\mathbf{U})$ аппроксимируем при $t = t_{n+1}$ следующим образом: $\mathbf{I}_{\pm}(\mathbf{U}_i^{n+1}) \approx \mathbf{I}_{\pm}(\mathbf{U}_i^n)$, $\lambda_{\pm}(\mathbf{U}_i^{n+1}) \approx \lambda_{\pm}(\mathbf{U}_i^n)$. Таким образом, в результате дискретизации получим систему линейных алгебраических уравнений относительно значений \mathbf{U} в граничных узлах в момент времени $t = t_{n+1}$.

Для реализации схем расщепления при расчете значений в приграничных узлах ($i = 1$ и $i = N$), вообще говоря, требуется использовать значения в граничных узлах. Это приводит к *глобальной* системе уравнений относительно значений искомым функций. Для *локальной* реализации в конкретном сосуде (т. е. независимо от других сосудов) значения в граничных узлах должны быть известны. Локальная реализация важна ввиду возможности эффективного распараллеливания вычислений и является серьезным преимуществом явных схем (поскольку значения в граничных узлах для таких схем известны и берутся с предыдущих слоев по t).

Для осуществления локальной реализации в рамках неявных схем применим подход, основанный на идее методов типа «предиктор – корректор»: сперва значения в граничных узлах предсказываются с помощью каких-либо экстраполяционных формул, а затем, после вычисления значений во внутренних узлах, граничные значения корректируются на основе дискретизованных граничных условий с использованием полученных значений во внутренних узлах. Такой подход существенно упрощает реализацию неявных схем и обладает свойством локальности.

Для предсказания значений в граничных узлах можно использовать разные подходы, основанные на экстраполяции. В настоящей работе сравнению результатов применения таких методов внимание не уделяется. Заметим, что адекватные и превосходящие по производительности явные схемы результаты удалось получить просто с использованием значений с предыдущего слоя:

$$A_0^{n+1} \approx A_0^n, \quad A_{N+1}^{n+1} \approx A_{N+1}^n, \quad U_0^{n+1} \approx U_0^n, \quad U_{N+1}^{n+1} \approx U_{N+1}^n.$$

Для проведения численных расчетов использовались следующие параметры: $L = 10$, $T = 1$, $\zeta(z) = \sin\left(\frac{3z}{2}\right)$, $A_0 = \pi$, $\kappa = 1$ и $\varepsilon = 0,01$. Сетка по времени содержала 2000 узлов, сетки по пространству задавались с шагами $h = \frac{1}{2^s}$, $s = \overline{0, 5}$. Погрешность вычислялась по формуле

$$E = \sqrt{\sum_{i=1}^N \left((A_i^M - A(T, z_i))^2 + (U_i^M - U(T, z_i))^2 \right) h}.$$

Порядок сходимости оценивался посредством формулы Рунге для главного члена погрешности.

На рис. 1 представлены графики зависимости логарифма погрешности от логарифма шага для схем второго порядка. Как можно видеть, все рассматриваемые схемы позволяют получить близкие по точности результаты. Как можно видеть, схема расщепления на основе (8), (10) позволяет получать результаты со вторым порядком сходимости по пространству в широком диапазоне значений шага h .

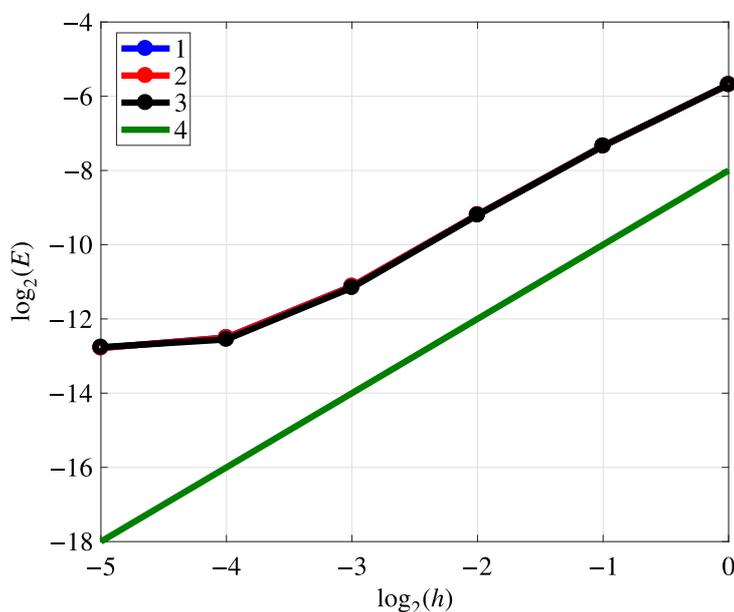


Рис. 1. Графики зависимости логарифма погрешности от логарифма шага: 1 — схема Лакса–Вендроффа, 2 — схема MUSCL, 3 — схема расщепления для невязкой модели, 4 — прямая с угловым коэффициентом, равным двум

4.2. Задача о моделировании течения в сонной артерии

Рассмотрим тестовую задачу, взятую из работ [Xiao, Alastruey, Figueroa, 2014; Boileau et al., 2015], в рамках которой моделируется течение в сонной артерии человека. В [Xiao, Alastruey, Figueroa, 2014] решение, полученное по одномерной модели, сравнивается с осредненным решением пространственной гидродинамической модели.

Сонная артерия представляется как одиночный сосуд длиной L , на входе которого задается значение расхода $Q(t, 0) = q_{in}(t)$, где функция $q_{in}(t)$ моделирует физиологический расход и представляется линейной комбинацией тригонометрических функций. Выражение для $q_{in}(t)$ представлено в дополнительных материалах к статье [Boileau et al., 2015]. В дополнение к этому условию на входе зададим условие совместности. На выходе также задаются условие совместности и известное модельное условие, получаемое из электромеханических аналогий (так

называемое RCR-условие) [Xiao, Alastruey, Figueroa, 2014]:

$$Q \left(1 + \frac{R_1}{R_2} \right) + CR_1 \frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{P - P_{out}}{R_2} + C \frac{\partial P}{\partial t}, \quad (22)$$

где R_1 и R_2 — коэффициенты сопротивления, C — коэффициент емкости, P_{out} — давление на выходе [Xiao, Alastruey, Figueroa, 2014]. При численной реализации производные по t аппроксимировались следующим образом:

$$\frac{\partial P}{\partial t}(t_{n+1}, z_{N+1}) \approx \frac{P_{N+1}^{n+1} - P_{N+1}^n}{\Delta t}, \quad \frac{\partial Q}{\partial t}(t_{n+1}, z_{N+1}) \approx \frac{A_{N+1}^{n+1} U_{N+1}^{n+1} - A_{N+1}^n U_{N+1}^n}{\Delta t}.$$

В результате для нахождения значений U_{N+1}^{n+1} и A_{N+1}^{n+1} получается система нелинейных алгебраических уравнений, для решения которой использовался метод Ньютона – Рафсона.

Для расчетов использовались следующие значения параметров [Xiao, Alastruey, Figueroa, 2014; Boileau et al., 2015]: $L = 12,6$ см, $A_d = 0,2827$ см², $\rho = 1,06$ г/см³, $\mu = 0,04$ дин/см² · с, $h = 0,03$ см, $P_d = 10,933 \cdot 10^4$ дин/см², $\alpha = \frac{4}{3}$, $E = 7 \cdot 10^6$ дин/см², $R_1 = 2,4875 \cdot 10^3$ дин/см⁵ · с, $R_2 = 1,8697 \cdot 10^3$ дин/см⁵ · с, $C = 1,7529 \cdot 10^{-5}$ см⁵/дин, $P_{out} = 0$ дин/см².

Начальные условия ставились таким образом: $A(0, z) = 0,22038$ см², $U(0, z) = 0$ см/с. В качестве эталонного решения, с которым проводилось сравнение, было выбрано осредненное решение пространственной модели, представленное в дополнительных материалах к [Boileau et al., 2015]. Это решение представляет собой значения Q и P в средней точке сосуда на интервале [8,8, 9,9] с (нормированном к [0, 1,1] с). Для установления периодического решения численные расчеты проводились на 10 временных промежутках длиной 1,1 с. Для возможности получения значений при любом значении t (что было нужно для сравнения с другими численными решениями) эталонное решение аппроксимировалось с помощью линейного сплайна.

Для сравнения численных решений использовались следующие критерии [Boileau et al., 2015].

1. Среднеквадратичные относительные отклонения:

$$E_P^{RMS} = \sqrt{\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \left(\frac{P_i - \mathcal{P}_i}{\mathcal{P}_i} \right)^2}, \quad E_Q^{RMS} = \sqrt{\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \left(\frac{Q_i - Q_i}{\max_j(Q_j)} \right)^2},$$

где \mathcal{P} и \mathcal{Q} представляют собой эталонные решения, а M есть число узлов сетки по времени на промежутке [8,8, 9,9] с.

2. Максимальные относительные отклонения:

$$E_P^{\max} = \max_i \left| \frac{P_i - \mathcal{P}_i}{\mathcal{P}_i} \right|, \quad E_Q^{\max} = \max_i \left| \frac{Q_i - Q_i}{\max_j(Q_j)} \right|.$$

На рис. 2 представлены графики численных решений, полученные в случае сетки при $N = 150$. Значение n_{CFL} для схемы Лакса – Фридрихса бралось равным 0,9 и равным 0,85 для схем Лакса – Вендроффа и МакКормака. В табл. 1 представлены значения относительных отклонений в случае той же пространственной сетки. Для сравнения приведены значения для схем, описанных в [Boileau et al., 2015] (DCG — разрывный метод Галёркина, FEM — конечно-элементная схема, FVM — конечно-объемная схема, STM — неявная схема на основе формулы трапеций). Значения отклонений представлены в [Boileau et al., 2015] в таблице IV. Как можно видеть, значения отклонений для всех схем оказались близки. В табл. 2 представлены значения времени расчета и числа шагов по t для одного периода в случае разных сеток по пространству. Как

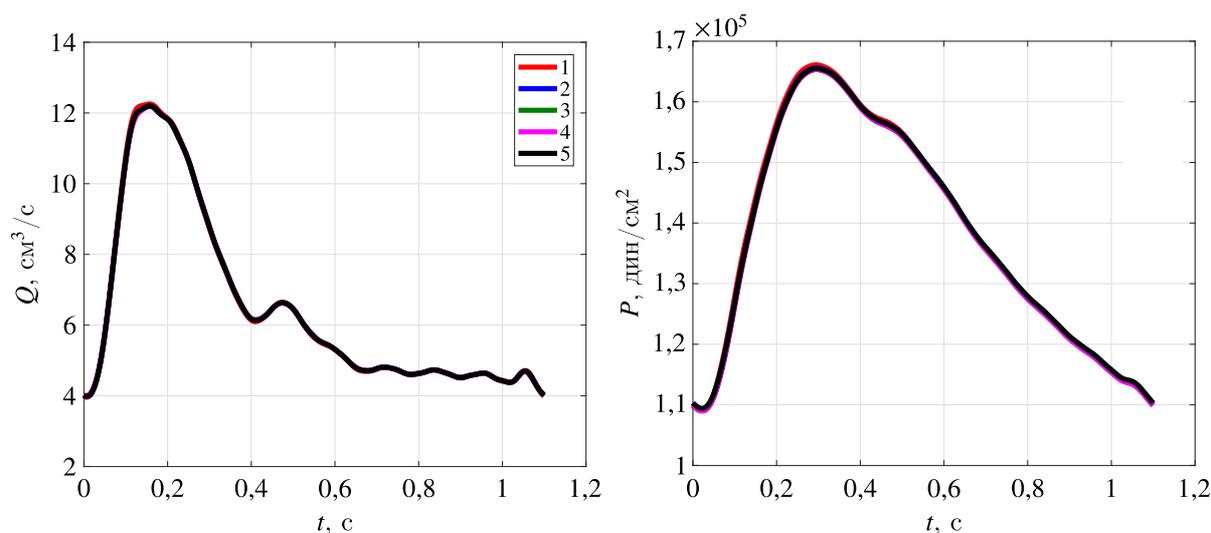


Рис. 2. Графики значений Q и P в средней точке модели сонной артерии человека при $N = 150$: 1 — эталонное решение, 2 — схема Лакса – Фридрихса, 3 — схема Лакса – Вендроффа, 4 — схема МакКормака, 5 — схема расщепления для вязкой модели

Таблица 1. Значения относительных отклонений решений (в процентах) в случае сетки с $N = 150$ для задачи о течении в сонной артерии

	E_Q^{RMS}	E_Q^{max}	E_P^{RMS}	E_P^{max}
Схема Лакса – Фридрихса	0,343	1,28	0,319	0,799
Схема Лакса – Вендроффа	0,384	1,62	0,454	1,23
Схема МакКормака	0,383	1,62	0,454	1,23
Схема расщепления	0,395	1,12	0,359	0,837
DCG [Boileau et al., 2015]	0,39	1,23	0,20	0,34
FEM [Boileau et al., 2015]	0,28	1,12	0,23	0,50
FVM [Boileau et al., 2015]	0,29	1,07	0,28	0,66
STM [Boileau et al., 2015]	0,29	1,13	0,24	0,53

Таблица 2. Время расчета в секундах и число шагов по времени (в скобках) на одном периоде для задачи о течении в сонной артерии для случаев разных сеток

	$N = 50$	$N = 100$	$N = 150$	$N = 200$	$N = 250$
Схема Лакса – Фридрихса	1,118 (3281)	2,833 (6630)	5,456 (9979)	8,665 (13 327)	12,78 (16 676)
Схема Лакса – Вендроффа	1,568 (3474)	4,741 (7020)	8,994 (10 566)	14,61 (14 111)	21,75 (17 657)
Схема МакКормака	1,541 (3474)	4,703 (7020)	9,102 (10 566)	14,02 (14 111)	21,67 (17 657)
Схема расщепления	0,4755 (1800)	1,098 (4300)	1,671 (6200)	2,173 (7900)	3,015 (10 000)

можно видеть, при использовании схемы расщепления можно проводить расчеты с большим значением шага по времени и за меньшее время (примерно в 3–4 раза быстрее, чем по схеме Лакса – Фридрихса, и в 5–7 раз быстрее, чем по схемам Лакса – Вендроффа и МакКормака, при $N \geq 150$).

4.3. Задача о течении в сосуде с бифуркацией в случае невязкой модели

Рассмотрим систему, состоящую из основного сосуда (I) и двух дочерних сосудов (II и III) (рис. 3). Для проведения численных расчетов использовались параметры из работы [Xiu, Sherwin, 2007]. Длина каждого сосуда бралась равной 20 см, диаметр основного сосуда брался равным 1 см для расчета A_d , диаметры дочерних сосудов выбирались равными $\frac{1}{\sqrt{6}}$ см. Плотность ρ бралась равной 1 г/см³. Значение A_d вычислялось как πR^2 , где R вычислялось через диаметр. Параметр $\frac{\beta}{A_d}$ брался равным 32 497 г/(см²с²) для основного сосуда и 79 602 г/(см²с²) для дочерних сосудов.

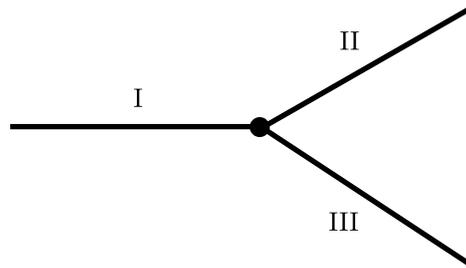


Рис. 3. Схема сосуда с бифуркацией

Начальные скорости полагались равными нулю, начальные площади задавались равными A_d . Как и в [Xiu, Sherwin, 2007], решалась задача для невязкой модели (3). На входе сосуда I значение U задавалось таким образом [Xiu, Sherwin, 2007]:

$$U(t, 0) = U_0 \exp(-C(t - t_0)^2),$$

где $U_0 = 1$ см/с, $C = 5000$ с⁻², $t_0 = 0,05$ с. В дополнение к этому условию задавалось условие совместности для характеристики, отвечающей λ_- . На выходах сосудов II и III задавались условия совместности и неотражающие условия.

В точке ветвления ставились условия сохранения расхода:

$$U_I A_I = U_{II} A_{II} + U_{III} A_{III},$$

условия непрерывности полного давления:

$$P_{III}(A_{III}) + \rho \frac{U_{III}^2}{2} = P_I(A_I) + \rho \frac{U_I^2}{2}, \quad P_{II}(A_{II}) + \rho \frac{U_{II}^2}{2} = P_I(A_I) + \rho \frac{U_I^2}{2},$$

три условия совместности:

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_+(\mathbf{U}_I) \left(\frac{\partial \mathbf{U}_I}{\partial t} + \lambda_+(\mathbf{U}_I) \frac{\partial \mathbf{U}_I}{\partial z} \right) &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{I}_-(\mathbf{U}_{II}) \left(\frac{\partial \mathbf{U}_{II}}{\partial t} + \lambda_-(\mathbf{U}_{II}) \frac{\partial \mathbf{U}_{II}}{\partial z} \right) &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{I}_-(\mathbf{U}_{III}) \left(\frac{\partial \mathbf{U}_{III}}{\partial t} + \lambda_-(\mathbf{U}_{III}) \frac{\partial \mathbf{U}_{III}}{\partial z} \right) &= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Производные, входящие в условия совместности, аппроксимировались так же, как и в случае условий в граничных узлах. После их дискретизации для вычисления значений A и U в точке ветвления получается система нелинейных алгебраических уравнений. Для ее решения использовался метод Ньютона – Рафсона. В качестве начального приближения использовались значения

для момента $t = t_n$. Итерационный процесс для получения \mathbf{U}^{n+1} в точке ветвления реализовывался следующим образом:

$$\mathbf{U}^{n+1,k+1} = \mathbf{U}^{n+1,k} - (\nabla \mathcal{F}(\mathbf{U}^{n+1,k}))^{-1} \mathcal{F}(\mathbf{U}^{n+1,k}), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

где $\mathcal{F}(\mathbf{U}^{n+1}) = 0$ задает систему нелинейных уравнений, $\nabla \mathcal{F}$ есть матрица Якоби. Выбор $\mathbf{U}^{n+1,0} = \mathbf{U}^n$ при относительно небольших шагах по времени обеспечивает нахождение $\mathbf{U}^{n+1,0}$ в окрестности \mathbf{U}^{n+1} , что обеспечивает достаточно быструю сходимость: так, для точности 10^{-6} требовались 1–3 итерации.

Расчеты производились на промежутке по времени $[0, 0,4]$ с. Пространственные сетки для каждого из сосудов содержали одинаковое число узлов. Параметр n_{CFL} брался равным 0,95 для рассматриваемых явных схем.

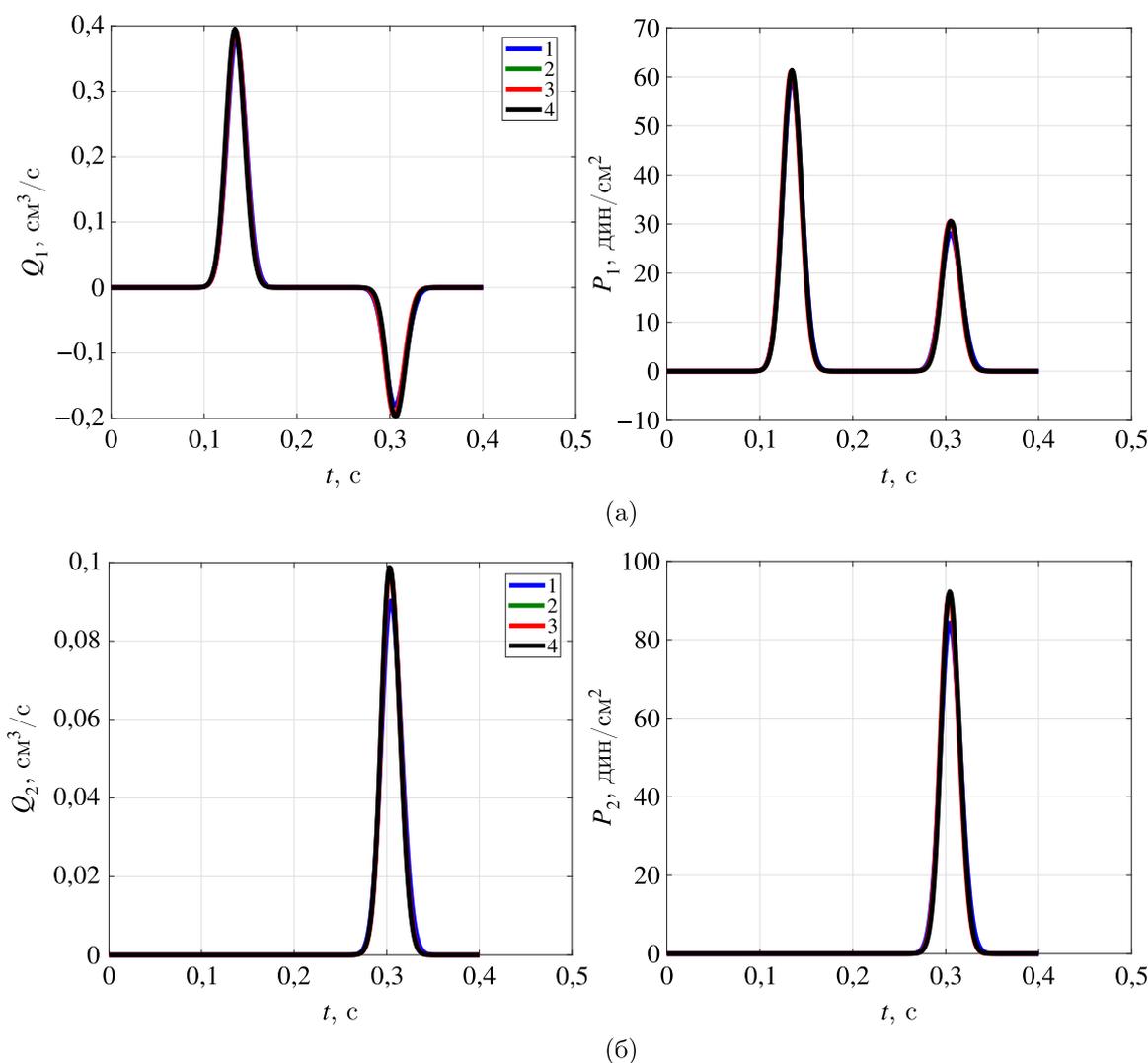


Рис. 4. Графики расхода и давления в средней точке основного (а) и дочерних (б) сосудов при $N = 150$: 1 — схема Лакса – Фридрикса, 2 — схема Лакса – Вендроффа, 3 — схема МакКормака, 4 — схема расщепления для невязкой модели

На рис. 4 представлены графики расхода и давления в средних точках сосудов, полученные для сеток с $N = 150$. Результаты, полученные по разным схемам, оказались близки. Заметим, что

полученные графики идентичны графикам, представленным на рис. 2 в [Xiu, Sherwin, 2007]. Заметим, что наличие второго пика на рис. 4, a связано с отражением волны от точки ветвления. Затухание решения, наблюдаемое для случая схемы Лакса – Фридрихса, связано с наличием у нее схемной вязкости, выражение для которой имеет вид [Trangenstein, 2007]

$$a = \frac{h^2}{4\Delta t} (1 - n_{CFL}^2).$$

В табл. 3 представлены значения времени расчета и числа шагов по t в случае разных сеток по пространству. Как можно видеть, при $N \geq 150$ получить решение по схеме расщепления можно примерно в 3–5 раз быстрее, чем по схеме Лакса – Фридрихса, и примерно в 4–7 раз быстрее, чем по схемам Лакса – Вендроффа и МакКормака.

Таблица 3. Время расчета в секундах и число шагов по времени (в скобках) для задачи о течении в сосуде с бифуркацией для невязкой модели для различных пространственных сеток

	$N = 50$	$N = 100$	$N = 150$	$N = 200$	$N = 250$
Схема Лакса – Фридрихса	0,1772 (122)	0,3041 (246)	0,5486 (370)	0,7865 (494)	1,179 (618)
Схема Лакса – Вендроффа	0,1848 (126)	0,3911 (245)	0,7245 (368)	1,151 (491)	1,722 (614)
Схема МакКормака	0,1837 (123)	0,3832 (243)	0,7494 (366)	1,125 (489)	1,823 (614)
Схема расщепления	0,1323 (60)	0,1641 (130)	0,1973 (185)	0,2121 (245)	0,2479 (310)

4.4. Задача о течении в сосуде с бифуркацией в случае вязкой модели

В качестве тестовой задачи для схемы в случае вязкой модели рассмотрим задачу о течении в районе бифуркации аорты, предложенную в работах [Xiao, Alastruey, Figueroa, 2014; Voileau et al., 2015]. В системе, представленной на рис. 3, в качестве сосуда-родителя рассматривается брюшной отдел аорты, в качестве дочерних сосудов – подвздошные артерии. На входе, по аналогии с задачей о течении в сонной артерии, задается значение расхода (вид функции представлен в дополнении к статье [Voileau et al., 2015]) и задается условие совместности. На выходах задаются условия совместности и условия (22). Начальные условия имеют следующий вид [Xiao, Alastruey, Figueroa, 2014]: $A_1(0, z) = 1,8062 \text{ см}^2$, $A_2(0, z) = A_3(0, z) = 0,94787 \text{ см}^2$, $U_1(0, z) = U_2(0, z) = U_3(0, z) = 0 \text{ см/с}$. Длина родительского сосуда равна 8,6 см, длины дочерних сосудов – 8,5 см [Xiao, Alastruey, Figueroa, 2014]. Расчеты производились при следующих параметрах [Xiao, Alastruey, Figueroa, 2014; Voileau et al., 2015]: $A_{d,1} = 2,3235 \text{ см}^2$, $A_{d,2} = A_{d,3} = 1,131 \text{ см}^2$, $h_1 = 1,033 \cdot 10^{-1} \text{ см}$, $h_2 = h_3 = 0,72 \cdot 10^{-1} \text{ см}$, $E_1 = 5 \cdot 10^6 \text{ дин/см}^2$, $E_2 = E_3 = 7 \cdot 10^6 \text{ дин/см}^2$, $\rho = 1,06 \text{ г/см}^3$, $\mu = 0,04 \text{ дин/см}^2 \cdot \text{с}$, $\alpha = \frac{11}{10}$, $P_d = 9,46 \cdot 10^4 \text{ дин/см}^2$, $R_1 = 6,8123 \cdot 10^2 \text{ дин/см}^5 \cdot \text{с}$, $R_2 = 3,1013 \cdot 10^4 \text{ дин/см}^5 \cdot \text{с}$, $C = 3,664 \cdot 10^{-5} \text{ см}^5/\text{дин}$, $P_{out} = 0 \text{ дин/см}^2$.

Как и ранее, в качестве эталонного решения бралось осредненное решение, полученное по пространственной модели, взятое из дополнения к работе [Voileau et al., 2015]. Решение представляет собой значения Q и P в средних точках дочернего и родительского сосудов на промежутке [28,6, 29,7] с, нормированном к [0, 1,1] с. Расчеты проводились для случая 30 периодов по времени, имеющих длину 1,1 с. Для явных схем значение n_{CFL} бралось равным 0,95. В качестве критериев сравнения численных решений, как и для задачи о течении в сонной артерии, использовались значения относительных отклонений от эталонного решения.

На рис. 5 представлены графики значений Q и P в средних точках родительского и дочернего сосудов для сетки с $N = 150$. В табл. 4 представлены значения процентных относительных

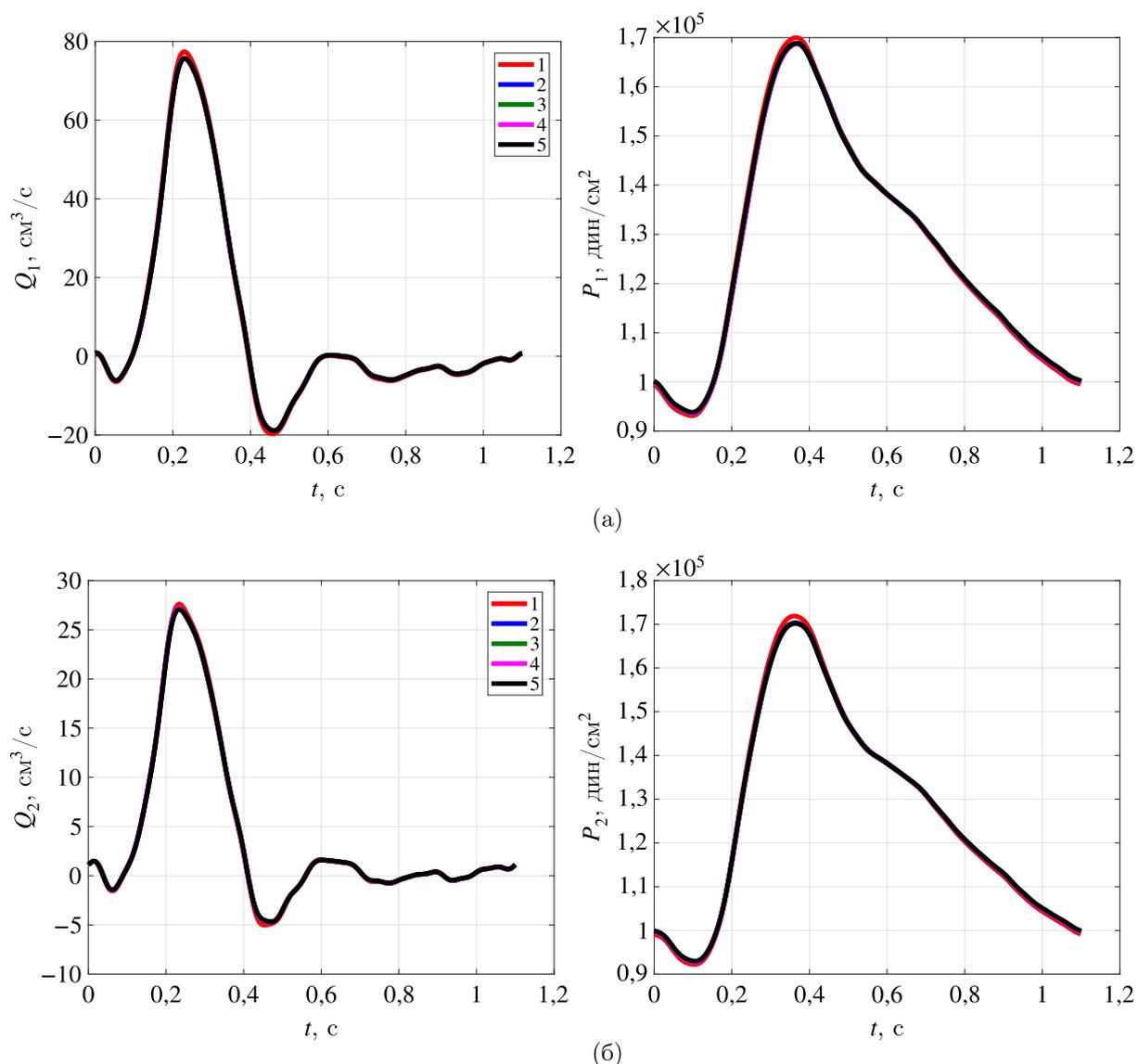


Рис. 5. Графики значений Q и P в средней точке моделей брюшной аорты (а) и подвздошной артерии (б) при $N = 150$: 1 — эталонное решение, 2 — схема Лакса–Фридрикса, 3 — схема Лакса–Вендроффа, 4 — схема МакКормака, 5 — схема расщепления для вязкой модели

отклонений в сравнении со значениями, представленными в [Voileau et al., 2015]. Как можно видеть, имеет место близость значений для случаев всех рассмотренных схем для обеих сосудов. В табл. 5 представлены значение времени расчета и число шагов за один период. Отметим, что при $N \geq 150$ схема расщепления позволяет получать решение примерно в 4–5 раз быстрее, чем схема Лакса–Фридрикса, и примерно в 6–9 раз быстрее, чем схемы Лакса–Вендроффа и МакКормака.

4.5. Задача о течении в модельной сосудистой системе

Рассмотрим сосудистую систему, исследуемую в работах [Duanmu et al., 2019; Olufsen et al., 2000; Ghigo, Lagree, Fullana, 2018]. Система представляет собой модель асимметричной артериальной системы, образующей дерево с элементарными бифуркациями. В каждой точке ветвления сосуд разделяется на два дочерних сосуда — l и v , радиусы которых вычисляются

Таблица 4. Значения относительных отклонений решений (в процентах) в случае сетки с $N = 150$ для задачи о течении в сосуде с бифуркацией в случае вязкой модели

	E_Q^{RMS}	E_Q^{max}	E_P^{RMS}	E_P^{max}
Брюшная аорта				
Схема Лакса – Фридрихса	0,831	2,41	0,543	1,09
Схема Лакса – Вендроффа	0,811	2,34	0,576	1,23
Схема МакКормака	0,813	2,34	0,574	1,24
Схема расщепления	0,812	2,47	0,567	1,01
DCG [Boileau et al., 2015]	0,89	2,51	0,37	0,61
FEM [Boileau et al., 2015]	0,82	2,53	0,37	0,65
FVM [Boileau et al., 2015]	0,81	2,44	0,40	0,68
STM [Boileau et al., 2015]	0,82	2,52	0,38	0,66
Подвздошная артерия				
Схема Лакса – Фридрихса	0,551	1,88	0,506	0,987
Схема Лакса – Вендроффа	0,573	1,81	0,511	1,05
Схема МакКормака	0,573	1,82	0,511	1,05
Схема расщепления	0,635	2,21	0,621	1,08
DCG [Boileau et al., 2015]	0,92	2,33	0,45	0,84
FEM [Boileau et al., 2015]	0,65	2,01	0,44	0,84
FVM [Boileau et al., 2015]	0,68	1,80	0,47	0,92
STM [Boileau et al., 2015]	0,66	2,02	0,44	0,85

Таблица 5. Время расчета в секундах и число шагов по времени (в скобках) для задачи о течении в сосуде с бифуркацией для вязкой модели для различных пространственных сеток

	$N = 50$	$N = 100$	$N = 150$	$N = 200$	$N = 250$
Схема Лакса – Фридрихса	3,654 (4859)	10,22 (9817)	19,33 (14 775)	31,04 (19 733)	46,09 (24 692)
Схема Лакса – Вендроффа	4,846 (4859)	13,63 (9817)	28,74 (14 775)	46,83 (19 733)	73,52 (24 691)
Схема МакКормака	4,867 (4856)	15,29 (9817)	29,81 (14 777)	49,62 (19 732)	74,59 (24 691)
Схема расщепления	1,936 (4000)	4,122 (7400)	5,336 (9300)	7,066 (11 400)	8,404 (13 400)

через радиус сосуда-родителя R_p как $R_l = \iota R_p$ и $R_v = \nu R_p$. В настоящей работе, по аналогии с [Ghigo, Lagree, Fullana, 2018], использовались значения $\iota = 0,9$ и $\nu = 0,6$. Длина каждого сосуда вычислялась через радиус как $L = 50R$. Значения коэффициента $\frac{\beta}{A_d}$ определялись через значение радиуса по формуле

$$\frac{\beta}{A_d} = \frac{4}{3} \frac{R}{\sqrt{\pi}} (k_1 \exp(k_2 R) + k_3),$$

где $k_1 = 2 \cdot 10^7$ дин/см⁴, $k_2 = -22,53$ см⁻¹, $k_3 = 8,65 \cdot 10^5$ дин/см⁴. При численном моделировании предполагалось, что радиус входного сосуда равен 1 см. На входе в этот сосуд ставилось условие вида [Ghigo, Lagree, Fullana, 2018]

$$U_1(t, 0) = \frac{Q_h}{\pi R_1^2} \exp(-b(t - (k + a))^2), \quad t \in [k, k + 1], \quad k = \overline{0, K - 1},$$

где $T_h = 1$ с и $Q_h = 100$ см³/с, $a = 0,35$ с, $b = 70$ с⁻², расчеты проводились для случая $K = 9$. В дополнение к этому условию ставилось условие совместности для случая вязкой модели:

$$\mathbf{I}_-(\mathbf{U}) \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \lambda_-(\mathbf{U}) \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial z} - \mathbf{f} \right) = \mathbf{0}.$$

На выходе из каждого терминального сосуда ставилось условие совместности:

$$\mathbf{I}_+(\mathbf{U}) \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \lambda_+(\mathbf{U}) \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial z} - \mathbf{f} \right) = \mathbf{0},$$

в дополнение к которому ставилось условие вида (22) при следующих модельных значениях параметров: $R_1 = 3 \cdot 10^2$ дин/см⁵ · с, $R_2 = 2 \cdot 10^3$ дин/см⁵ · с, $C = 1,5 \cdot 10^{-5}$ ми⁵/дин, $P_{out} = 0$ дин/см², $P_d = 5 \cdot 10^3$ дин/см².

Для проведения численных расчетов бралось значение динамической вязкости, равное 0,035 с · дин/см² [Razavi, Shirani, 2013]. Значение ρ бралось равным 1,06 г/см³ [Voileau et al., 2015]. Коэффициент α брался равным $\frac{8}{7}$ для того, чтобы воспроизвести приплюснутый профиль скорости, характерный для крови. В случае системы из 31 сосуда значение n_{CFL} для явных схем бралось равным 0,95, в случае системы из 63 сосудов для схем Лакса – Вендроффа и МакКормака значение этого параметра бралось таким же, а для схемы Лакса – Фридрихса оно бралось равным 0,7 (при большем значении развивались численные неустойчивости).

При проведении расчетов рассматривались две сосудистые системы – из 31 и 63 сегментов (рис. 6). На рис. 7, 8 представлены графики значений Q и P в средних точках избранных сосудов для сетки с $N = 150$. Как можно видеть, все рассмотренные схемы позволяют получать близкие результаты. В табл. 6, 7 представлены значения времени расчетов и число шагов за один период, равный 1 с, для случаев разных сеток по пространству. Как можно видеть, для всех случаев наилучшие результаты имеют место для случая схемы расщепления. Для системы из 31 сосуда при $N \geq 150$ по этой схеме можно производить расчеты примерно в 7–13 раз быстрее, чем по схеме Лакса – Фридрихса, и примерно в 11–17 раз быстрее, чем по схемам Лакса – Вендроффа и МакКормака. Для системы из 63 сосудов при $N \geq 150$ можно производить расчеты примерно в 10–14 раз быстрее, чем по схеме Лакса – Фридрихса, и примерно в 12–17 раз быстрее, чем по схемам Лакса – Вендроффа и МакКормака.

Таблица 6. Время расчета в секундах и число шагов по времени (в скобках) для задачи о течении в системе из 31 сосуда для различных пространственных сеток

	$N = 50$	$N = 100$	$N = 150$	$N = 200$	$N = 250$
Схема Лакса – Фридрихса	7,223 (1215)	22,12 (2454)	43,25 (3692)	81,41 (4932)	131,9 (6171)
Схема Лакса – Вендроффа	10,24 (1216)	35,13 (2456)	75,14 (3697)	137,4 (4937)	189,7 (6177)
Схема МакКормака	9,316 (1216)	32,31 (2456)	67,67 (3697)	131,2 (4937)	176,4 (6177)
Схема расщепления	1,791 (650)	4,826 (1500)	6,181 (1900)	8,543 (2500)	11,17 (3200)

5. Заключение

Представленная работа посвящена построению и анализу неявных схем для системы одномерных уравнений гемодинамики в случаях невязкой и ньютоновской моделей крови. Реализация схем на каждом шаге по времени производится в рамках метода расщепления по физическим

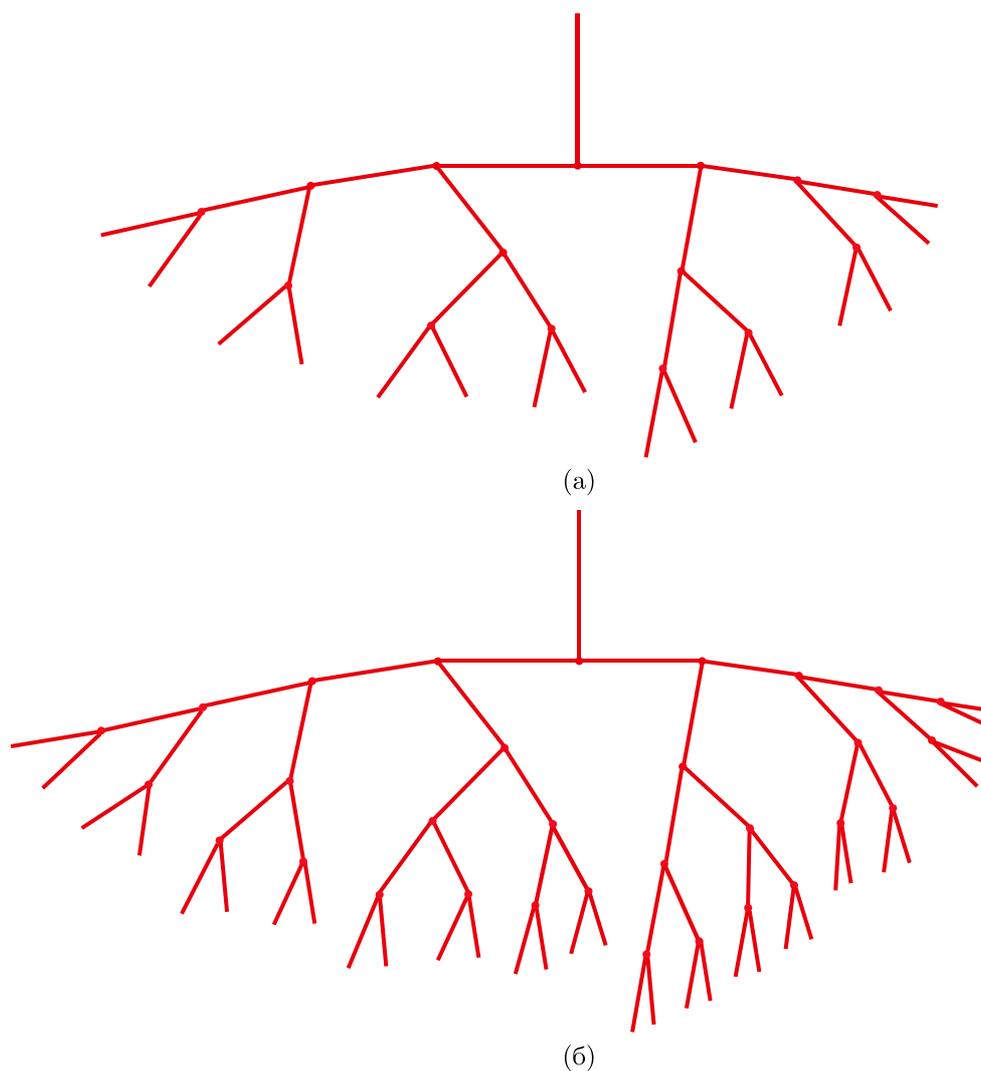


Рис. 6. Модельные сосудистые системы из 31 (а) и 63 (б) сегментов

Таблица 7. Время расчета в секундах и число шагов по времени (в скобках) для задачи о течении в системе из 63 сосудов для различных пространственных сеток

	$N = 50$	$N = 100$	$N = 150$	$N = 200$	$N = 250$
Схема Лакса – Фридрихса	25,97 (2399)	82,62 (4848)	172,2 (7297)	329,4 (9746)	447,1 (12 195)
Схема Лакса – Вендроффа	31,43 (1769)	100,1 (3574)	201,4 (5379)	358,4 (7184)	527,3 (8988)
Схема МакКормака	30,76 (1769)	99,91 (3574)	205,7 (5379)	360,2 (7184)	531,1 (8988)
Схема расщепления	4,637 (850)	10,77 (1800)	17,67 (2700)	23,62 (3600)	32,03 (4450)

процессам. Методом операторных неравенств проведен анализ устойчивости схем, реализуемых на каждом этапе метода. При решении задачи с известным аналитическим решением показано, что на практике схема расщепления позволяет проводить расчеты со вторым порядком сходимости по пространству в широком диапазоне значений шага сетки. При сравнении с известными

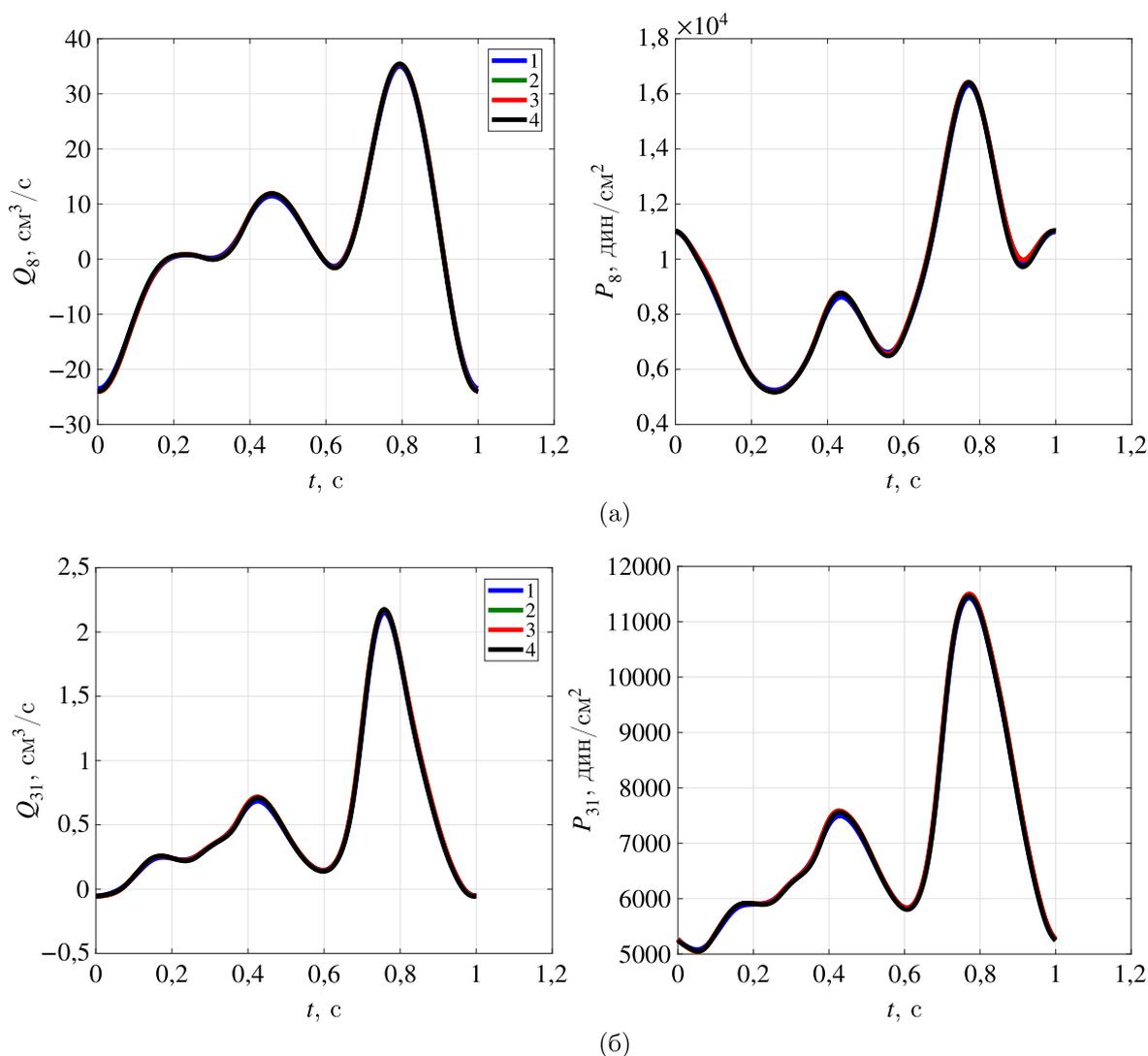


Рис. 7. Графики значений Q и P в средней точке 8-го (а) и 31-го (б) сосудов для системы из 31 сосуда при $N = 150$: 1 — схема Лакса-Фридрихса; 2 — схема Лакса-Вендроффа; 3 — схема МакКормака; 4 — схема расщепления для вязкой модели

явными схемами показано, что схемы расщепления, несмотря на их неявную природу, позволяют проводить расчеты за меньшее число шагов и время.

Относительно результатов работы и перспектив последующих исследований отметим следующие моменты.

1. В работе представлены модели на основе широко встречающейся в литературе, но достаточно частной модели закона упругости сосудистой стенки (4). Отметим, что в литературе представлены более реалистичные модели, описывающие упругие [Василевский, Саламатова, Симаков, 2015] и вязкоупругие [Malossi, Blanco, Deparis, 2012; Wang, Fullana, Lagree, 2015] свойства материала кровеносного сосуда.

2. Достоинством предложенных схем расщепления можно признать то, что в работе показано, что они позволяют получать результаты быстрее, чем известные явные конечно-разностные схемы. Это связано как с возможностью использования большего шага по времени Δt , так и с меньшим числом операций, особенно по сравнению с двухэтапными схемами. При этом,

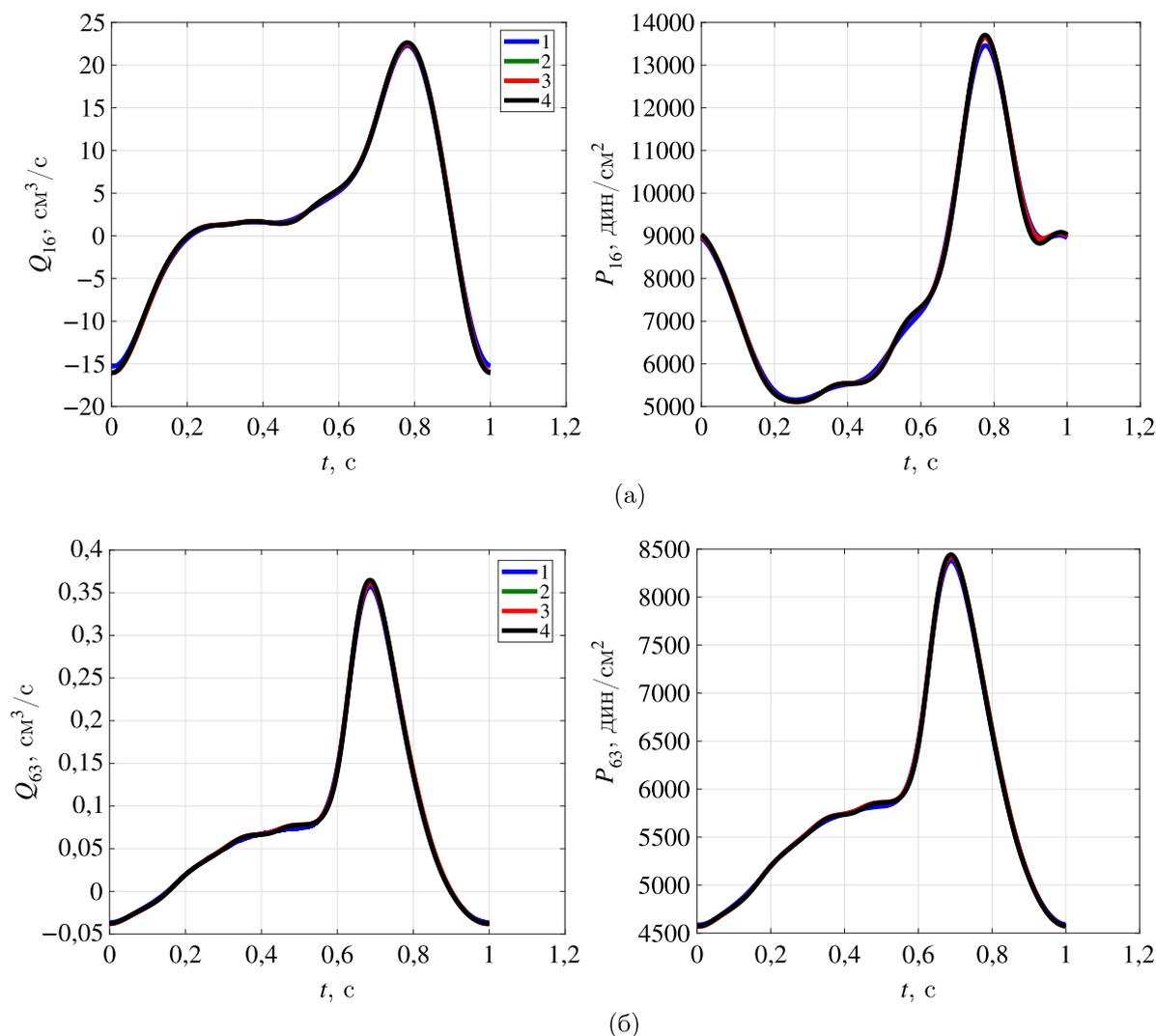


Рис. 8. Графики значений Q и P в средней точке 16-го (а) и 63-го (б) сосудов для системы из 63 сосудов при $N = 150$: 1 — схема Лакса–Фридрихса; 2 — схема Лакса–Вендроффа; 3 — схема МакКормака; 4 — схема расщепления для вязкой модели

как можно видеть, полученные результаты оказываются близки по точности не только к результатам для явных схем, но и для схем с другими типами дискретизации, рассмотренными в работе [Voileau et al., 2015] (см. задачи из подпараграфов 4.2 и 4.4).

3. В качестве недостатка предложенных схем можно отметить, что полученные по методу энергетических неравенств достаточные условия ρ -устойчивости в виде ограничений на шаг Δt дают большой диапазон его значений в случае, когда средняя скорость течения U меняется достаточно плавно, т. е. решение соответствующей задачи является гладким. Такая ситуация характерна, например, для случая течения в артериях без наличия резких сужений и расширений, а также внешних включений (типа стентов) [Wang, Fullana, Lagree, 2015]. В случае же течений в венах или в сосудах со стенозами и аневризмами решения могут иметь разрывы или резко меняться [Formaggia, Lamponi, Quarteroni, 2003; Spiller et al., 2017; Toro, 2015; Toro, Siviglia, 2013]. Вопрос о применимости предложенных схем к решению таких задач остается открытым. По всей видимости, в этих ситуациях лучше использовать хорошо разработанные конечно-объемные схемы (см., например, [Cavallini, Caleffi, Coscia, 2008; Delestre, Lagree, 2013; Delestre et al.,

2016; Ghigo et al., 2017; Huang, Muller, 2015; Li, Delestre, Yuan, 2018; Muller et al., 2016; Murillo, Garcia-Navarro, 2015)).

4. Другим недостатком предложенного подхода к численному моделированию течений в сосудистых сетях является необходимость использования экстраполяции по t на концах сосудов. С одной стороны, это накладывает ограничение на значение шага по времени, которое при таком подходе, по сути, приходится находить эмпирически в каждой конкретной задаче. С другой стороны, использование экстраполяции позволяет избежать необходимости решения глобальной системы нелинейных алгебраических уравнений на каждом шаге. Это сохраняет преимущество явных схем, связанное с их локальностью. Последнее дает возможность естественного распараллеливания вычислений (по сосудам) на одном шаге по времени.

5. В работе не проводилось исследование консервативности предложенных схем расщепления. При этом рассмотренные примеры имеют достаточно гладкие решения, и для таких задач схемы успешно подходят и дают результаты, близкие к получаемым по другим (в том числе и консервативным) схемам. Отметим, что на задаче из [Xiu, Sherwin, 2007] с относительно большими изменениями U схема расщепления для невязкой модели показала лучшие результаты, чем схема Лакса–Фридрикса, которая имеет сильную численную диссипацию. По всей видимости, это связано с тем, что схемы расщепления строились на основе центрально-разностных аппроксимаций. Анализ консервативности схем расщепления и перспективы их использования для решения задач с сильно меняющимися или разрывными решениями планируется провести в последующих работах.

6. Интересными являются задачи о применении схем расщепления к моделированию течений в сосудистых системах с использованием нового типа условий в точках соединения сосудов, предложенного С. С. Симаковым в [Симаков, 2021]. Эти условия обеспечивают необходимую гладкость решений и сходимости к решению в одиночном сосуде при предельном переходе, состоящем в стремлении к нулю диаметра одного из сосудов в бифуркации при условии равенства между собой диаметров и свойств других сосудов. Как отмечается в [Симаков, 2021], существует потенциал развития методов численной реализации таких условий за счет повышения порядка аппроксимации и использования неявных схем.

7. Перспективными можно назвать задачи об адаптации предложенного подхода с расщеплением на схемы, использующие конечно-элементные аппроксимации. Интересными также являются задачи о разработке схем расщепления с повышенным порядком аппроксимации по пространству и параллельной реализации алгоритмов на основе таких схем.

Автор благодарит рецензентов за труд по прочтению рукописи и высказанные замечания и предложения.

Список литературы (References)

- Ашметков И. В., Мухин С. И., Соснин Н. В., Фаворский А. П., Хруленко А. Б. Анализ и сравнение некоторых аналитических и численных решений задач гемодинамики // Дифференциальные уравнения. — 2000. — Т. 36, № 7. — С. 919–924. — <https://doi.org/10.1007/BF02754503>
- Ashmetkov I. V., Mukhin S. I., Sosnin N. V., Favorskii A. P., Khrulenko A. B. Analysis and comparison of some analytic and numerical solutions of hemodynamic problems // Differential Equations. — 2000. — Vol. 36, No. 7. — P. 1021–1026. (Original Russian paper: Ashmetkov I. V., Mukhin S. I., Sosnin N. V., Favorskii A. P., Khrulenko A. B. Analiz i sravnenie nekotorykh analiticheskikh i chislennykh reshenii zadach gemodinamiki // Differentsial'nye uravneniia. — 2000. — Vol. 36, No. 7. — P. 919–924.)
- Бибердорф Э. А., Попова Н. И. Численное решение задачи гемодинамики методом прямых и методом ортогональной прогонки. — Новосибирск: ИЯФ, 2009. — 35 с.
- Biberdorf E. A., Popova N. I. Chislennoe reshenie zadachi gemodinamiki metodom pryamikh i metodom ortogonalnoi progonki [Numerical solution of the task of haemodynamics by the methods of lines and orthogonal crout algorithm]. — Novosibirsk: INP, 2009. — 35 p. (in Russian).

- Буничева А. Я., Мухин С. И., Соснин Н. В., Хруленко А. Б.* Математическое моделирование квази-одномерной гемодинамики // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2015. — Т. 55, № 8. — С. 1417–1428. — <https://doi.org/10.1134/S0965542515080060>
Bunicheva A. Ya., Mukhin S. I., Sosnin N. V., Khrulenko A. B. Mathematical modeling of quasi-one-dimensional hemodynamics // Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 2015. — Vol. 55, No. 8. — P. 1381–1392. (Original Russian paper: *Bunicheva A. Ya., Mukhin S. I., Sosnin N. V., Khrulenko A. B.* Matematicheskoe modelirovanie kvaziodnomernoi gemodinamiki // Zhurnal vychislitel'noi matematiki i matematicheskoi fiziki. — 2015. — Vol. 55, No. 8. — P. 1417–1428.)
- Вабищевич П. Н.* Аддитивные операторно-разностные схемы (схемы расщепления). — М.: УРСС, 2013. — 464 с.
Vabishevich P. N. Additivnye operatorno-raznostnye shemy [Additive operator-difference schemes (splitting schemes)]. — Moscow: URSS, 2013. — 464 p. (in Russian).
- Василевский Ю. В., Саламатова В. Ю., Симаков С. С.* Об эластичности сосудов в одномерных моделях гемодинамики // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2015. — Т. 55, № 9. — С. 1599–1610. — <https://doi.org/10.7868/S004446691509015X>
Vassilevski Yu. V., Salamatova V. Yu., Simakov S. S. On the elasticity of blood vessels in one-dimensional problems of hemodynamics // Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 2015. — Vol. 55, No. 9. — P. 1567–1578. (Original Russian paper: *Vassilevski Y. V., Salamatova V. Yu., Simakov S. S.* Ob elastichnosti sosudov v odnomernyh modeliah gemodinamiki // Zhurnal vychislitel'noi matematiki i matematicheskoi fiziki. — 2015. — Vol. 55, No. 9. — P. 1599–1610.)
- Василевский Ю. В., Симаков С. С., Гамилов Т. М., Саламатова В. Ю., Добросердова Т. К., Копытов Г. В., Богданов О. Н., Данилов А. А., Дергачёв М. А., Добровольский Д. Д., Косухин О. Н., Ларина Е. В., Мычка Е. Ю., Харин В. Ю., Чеснокова К. В., Шипилов А. А.* Персонализация математических моделей в кардиологии: трудности и перспективы // Компьютерные исследования и моделирование. — 2022. — Т. 14, № 4. — С. 911–930. — <https://doi.org/10.20537/2076-7633-2022-14-4-911-930>
Vassilevski Yu. V., Simakov S. S., Gamilov T. M., Salamatova V. Yu., Dobroserdova T. K., Kopytov G. V., Bogdanov O. N., Danilov A. A., Dergachev M. A., Dobrovolskii D. D., Kosukhin O. N., Larina E. V., Meleshkina A. V., Mychka E. Yu., Kharin V. Yu., Chesnokova K. V., Shipilov A. A. Personalizatsiya matematicheskikh modelei v cardiologii: trudnosti i persepektivy [Personalization of mathematical models in cardiology: obstacles and perspectives] // Computer Research and Modeling. — 2022. — Vol. 14, No. 4. — P. 911–930 (in Russian).
- Ильин О. В.* Моделирование одномерных нелинейных пульсовых волн в эластичных сосудах на основе решеточных уравнений Больцмана // Компьютерные исследования и моделирование. — 2019. — Т. 11, № 4. — С. 707–722. — <https://doi.org/10.20537/2076-7633-2019-11-4-707-722>
Ilyin O. V. Modelirovanie odnomernykh nelineinykh pilsovyykh voln v elastichnykh sosudah na osnove reshtochnykh uravnenii Boltzmana [The modeling of nonlinear pulse waves in elastic vessels using the Lattice Boltzmann method] // Computer Research and Modeling. — 2019. — Vol. 11, No. 4. — P. 707–722 (in Russian).
- Магомедов К. М., Холодов А. С.* Сеточно-характеристические численные методы. — М.: Юрайт, 2018. — 314 с.
Magomedov K. M., Kholodov A. S. Setochno-kharakteristicheskie chislennyye metody [Characteristic-grid numerical methods]. — Moscow: Urait, 2018. — 314 p. (in Russian).
- Самарский А. А., Вабищевич П. Н.* Разностные схемы для уравнения переноса. I // Дифференциальные уравнения. — 1998. — Т. 34, № 12. — С. 1675–1685.
Samarskii A. A., Vabishevich P. N. Rzanostnye shemy dlia uravneniia perenosa. I [Difference schemes for advection equation. I] // Differential Equations. — 1998. — Vol. 34, No. 12. — P. 1675–1685 (in Russian).
- Самарский А. А., Гулин А. В.* Устойчивость разностных схем. — М.: УРСС, 2005. — 384 с.
Samarskii A. A., Gulin A. V. Ustoichivost' raznostnykh shem [Stability of difference schemes]. — Moscow: URSS, 2005. — 384 p. (in Russian).
- Симаков С. С.* Новые граничные условия для одномерных сетевых моделей гемодинамики // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2021. — Т. 61, № 12. — С. 2109–2124. — <https://doi.org/10.31857/S0044466921120139>
Simakov S. S. New boundary conditions for one-dimensional network models of hemodynamics // Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 2021. — Vol. 61, No. 12. — P. 2102–2117. (Original Russian paper: *Simakov S. S.* Novye granichnye usloviya dlya odnomernykh modelei gemodinamiki // Zhurnal vychislitel'noi matematiki i matematicheskoi fiziki. — 2021. — Vol. 61, No. 12. — P. 2109–2124.)
- Симаков С. С.* Современные методы математического моделирования кровотока с помощью осредненных моделей // Компьютерные исследования и моделирование. — 2018. — Т. 10, № 5. — С. 581–604. — <https://doi.org/10.20537/2076-7633-2018-10-5-581-604>

- Simakov S. S.* Sovremennyye metody matematicheskogo modelirovaniya krovotoka s pomoschiyu osrednennykh modelei [Modern methods of mathematical modeling of blood flow using reduced order methods] // Computer Research and Modeling. — 2018. — Vol. 10, No. 5. — P. 581–604 (in Russian).
- Яненко Н. Н.* Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. — Новосибирск: Наука, 1967. — 196 с.
- Yanenko N. N.* Metod drobnnykh shagov resheniia mnogomernykh zadach matematicheskoi fiziki [Method of fractional steps for solution of multidimensional problems of mathematical physics]. — Novosibirsk: Nauka, 1967. — 196 p. (in Russian).
- Azer K., Peskin C. S.* A one-dimensional model of blood flow in arteries with friction and convection based on the Womersley velocity profile // Cardiovascular Engineering. — 2007. — Vol. 7. — P. 51–73. — <https://doi.org/10.1007/s10558-007-9031-y>
- Bessem D., Rutten M., van de Vosse F.* A wave propagation model of blood flow in large vessels using an approximate velocity profile function // Journal of Fluid Mechanics. — 2007. — Vol. 580. — P. 145–168. — <https://doi.org/10.1017/S0022112007005344>
- Bessonov N., Sequeira A., Simakov S., Vassilevskii Yu., Volpert V.* Methods of blood flow modelling // Mathematical Modelling of Natural Phenomena. — 2016. — Vol. 11, No. 1. — P. 1–25. — <https://10.1051/mmnp/201611101>
- Boileau E., Nithiarasu P., Blanco P. J., Muller L. O., Fossan F. E., Hellevik L. R., Donders W. P., Huberts W., Willemet M., Alastruey J.* A benchmark study of numerical schemes for one-dimensional arterial blood flow modeling // International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering. — 2015. — Vol. 31. — P. 1–33. — <https://doi.org/10.1002/cnm.2732>
- Britton J., Xing Y.* Well-balanced discontinuous Galerkin methods for the one-dimensional blood flow through arteries model with man-at-eternal-rest and living-man equilibria // Computers and Fluids. — 2020. — Vol. 203. — Art. no. 104493. — <https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2020.104493>
- Carson J., van Loon R.* An implicit solver for 1D arterial network models // International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering. — 2008. — Vol. 33, No. 7. — Art. no. e2837. — <https://doi.org/10.1002/cnm.2837>
- Cavallini N., Caleffi V., Coscia V.* Finite volume and WENO scheme in one-dimensional vascular system modelling // Computers and Mathematics with Applications. — 2008. — Vol. 56, No. 5. — P. 2382–2397. — <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2008.05.039>
- Delestre O., Lagree P.-Y.* A well-balanced finite volume scheme for blood flow simulation // International Journal for Numerical Methods in Fluids. — 2013. — Vol. 72, No. 2. — P. 177–205. — <https://doi.org/10.1002/flid.3736>
- Delestre O., Ghigo A. R., Fullana J.-M., Lagree P.-Y.* A shallow water with variable pressure model for blood flow simulation // Networks and Heterogeneous Media. — 2016. — Vol. 11, No. 1. — P. 69–87. — <https://doi.org/10.3934/nhm.2016.11.69>
- Diem A. K., Bressloff N. M.* VaMpy: A Python package to solve 1D blood flow problems // Journal of Open Research Software. — 2017. — Vol. 5. — Art. no. 17. — <https://doi.org/10.5334/jors.159>
- Dobroserdova T., Liang F., Panasenko G., Vassilevski Y.* Multiscale models of blood flow in the compliant aortic bifurcation // Applied Mathematics Letters. — 2019. — Vol. 93. — P. 98–104. — <https://doi.org/10.1016/j.aml.2019.01.037>
- Duanmu Z., Chen W., Gao H., Yang X., Luo X., Hill N. A.* A one-dimensional hemodynamic model of the coronary arterial tree // Frontiers in Physiology. — 2019. — Vol. 10. — Art. no. 853. — <https://doi.org/10.3389/fphys.2019.00853>
- Elad D., Katz D., Kimmel E., Einav S.* Numerical schemes for unsteady fluid flow through collapsible tubes // Journal of Biomedical Engineering. — 1991. — Vol. 13, No. 1. — P. 10–18. — [https://doi.org/10.1016/0141-5425\(91\)90038-9](https://doi.org/10.1016/0141-5425(91)90038-9)
- Formaggia L., Lamponi D., Quarteroni A.* One-dimensional models for blood flow in arteries // Journal of Engineering Mathematics. — 2003. — Vol. 251. — P. 251–276. — <https://doi.org/10.1023/B:ENGI.0000007980.01347.29>

- Gallo D., Anayiotos A., Morbiducci U.* The evolution of computational hemodynamics as a clinical tool in decision making, patient specific treatment and clinical management. Part II // *Annals of Biomedical Engineering*. — 2015. — Vol. 43. — P. 1273–1274. — <https://doi.org/10.1007/s10439-015-1338-z>
- Ghigo A.R., Delestre O., Fullana J.-M., Lagree P.-Y.* Low-Shapiro hydrostatic reconstruction technique for blood flow simulation in large arteries with varying geometrical and mechanical properties // *Journal of Computational Physics*. — 2017. — Vol. 331. — P. 108–136. — <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2016.11.032>
- Ghigo A. R., Lagree P.-Y., Fullana J.-M.* A time-dependent non-Newtonian extension of a 1D blood flow model // *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*. — 2018. — Vol. 253. — P. 36–49. — <https://doi.org/10.1016/j.jnnfm.2018.01.004>
- Hedstrom G.W.* Nonreflecting boundary conditions for nonlinear hyperbolic systems // *Journal of Computational Physics*. — 1979. — Vol. 30, No. 2. — P. 222–237. — [https://doi.org/10.1016/0021-9991\(79\)90100-1](https://doi.org/10.1016/0021-9991(79)90100-1)
- Huang P.G., Muller L.O.* Simulation of one-dimensional blood flow in networks of human vessels using a novel TVD scheme // *International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering*. — 2015. — Vol. 31, No. 1. — Art. no. e02701. — <https://doi.org/10.1002/cnm.2701>
- Huo Y., Kassab G.S.* A hybrid one-dimensional/Womersley model of pulsatile blood flow in the entire coronary arterial tree // *American Journal of Physiology-Heart and Circulatory Physiology*. — 2007. — Vol. 292, No. 6. — P. H2623–H2633. — <https://doi.org/10.1152/ajpheart.00987.2006>
- Krivovichev G.V.* Computational analysis of one-dimensional models for simulation of blood flow in vascular networks // *Journal of Computational Science*. — 2022. — Vol. 62. — Art. no. 101705. — <https://doi.org/10.1016/j.jocs.2022.101705>
- Kroon W., Huberts W., Bosboom M., van de Vosse F.* A numerical method of reduced complexity for simulating vascular hemodynamics using coupled 0D lumped and 1D wave propagation models // *Computational and Mathematical Methods in Medicine*. — 2012. — Vol. 2012. — Art. no. 156094. — <https://doi.org/10.1155/2012/156094>
- Li G., Delestre O., Yuan L.* Well-balanced discontinuous Galerkin method and finite volume WENO scheme based on hydrostatic reconstruction for blood flow model in arteries // *International Journal for Numerical Methods in Fluids*. — 2018. — Vol. 86, No. 7. — P. 491–508. — <https://doi.org/10.1002/flid.4463>
- Lu X., Dong B., Mao B., Zhang X.* Convergence improved Lax–Friedrichs scheme based numerical schemes and their applications in solving the one-layer and two-layer shallow-water equations // *Mathematical Problems in Engineering*. — 2015. — Vol. 2015. — Art. no. 379281. — <https://doi.org/10.1155/2015/379281>
- Malossi A. C. I., Blanco P. J., Deparis S.* A two-level time step technique for the partitioned solution of one-dimensional arterial networks // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. — 2012. — Vol. 237–240. — P. 212–226. — <https://doi.org/10.1016/j.cma.2012.05.017>
- Marchandise E., Willemet M., Lacroix V.* A numerical hemodynamic tool for predictive vascular surgery // *Medical Engineering and Physics*. — 2009. — Vol. 31. — P. 131–144. — <https://doi.org/j.medengphy.2008.04.015>
- Melicher V., Gajdosik V.* A numerical solution of a one-dimensional blood flow model – moving grid approach // *Journal of Computational and Applied Mathematics*. — 2008. — Vol. 215, No. 2. — P. 512–520. — <https://doi.org/10.1016/j.cam.2006.03.065>
- Muller L.O., Blanco P.J., Watanabe S.M., Feijoo R.A.* A high-order local time stepping finite volume solver for one-dimensional blood flow simulations: application to the ADAN model // *International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering*. — 2016. — Vol. 32. — Art. no. e02761. — <https://doi.org/10.1002/cnm.2761>

- Murillo J., Garcia-Navarro P.* A Roe type energy balanced solver for 1D arterial blood flow and transport // *Computers and Fluids*. — 2015. — Vol. 117. — P. 149–167. — <https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2015.05.003>
- Olufsen M.S., Peskin C.S., Kim W.Y., Pedersen E.M., Nadim A., Larsen J.* Numerical simulation and experimental validation of blood flow in arteries with structured-tree outflow conditions // *Annals of Biomedical Engineering*. — 2000. — Vol. 28. — P. 1281–1299. — <https://doi.org/10.1114/1.1326031>
- Prebeg M., Flatten T., Muller B.* Large time step HLL and HLLC schemes // *ESAIM: M2AN*. — 2018. — Vol. 52, No. 4. — P. 1239–1260. — <https://doi.org/10.1051/m2an/2017051>
- Puelz C., Canic S., Riviere B., Rusin C. G.* Comparison of reduced models for blood flow using Runge–Kutta discontinuous Galerkin methods // *Applied Numerical Mathematics*. — 2017. — Vol. 115. — P. 114–141. — <https://doi.org/10.1016/j.apnum.2017.01.005>
- Quarteroni A., Manzoni A., Vergara C.* The cardiovascular system: mathematical modelling, numerical algorithms and clinical applications // *Acta Numerica*. — 2017. — Vol. 26. — P. 365–590. — <https://doi.org/10.1017/S0962492917000046>
- Razavi M. S., Shirani E.* Development of a general methods for designing microvascular networks using distribution of wall shear stress // *Journal of Biomechanics*. — 2013. — Vol. 46. — P. 2303–2309. — <https://doi.org/10.1016/j.jbiomech.2013.06.005>
- Rozema G., Veldman A. E. P., Maurits N. M.* Quasi-simultaneous coupling methods for partitioned problems in computational hemodynamics // *Applied Numerical Mathematics*. — 2023. — Vol. 184. — P. 461–481. — <https://doi.org/10.1016/j.apnum.2022.11.001>
- Saito M., Ikenaga Y., Matsukawa M., Watanabe Y., Asada T., Lagree P.-Y.* One-dimensional model for propagation of a pressure wave in a model of the human arterial network: comparison of theoretical and experimental results // *Journal of Biomechanical Engineering*. — 2011. — Vol. 133. — Art. no. 121005. — <https://doi.org/10.1115/1.4005472>
- Sheng W., Zheng Q., Zheng Y.* The Riemann problem for a blood flow model in arteries // *Communications in Computational Physics*. — 2020. — Vol. 27. — P. 227–250. — <https://doi.org/10.4208/cicp.OA-2018-0220>
- Sherwin S. J., Formaggia L., Peiro J., Franke V.* Computational modelling of 1D blood flow with variable mechanical properties and its application to the simulation of wave propagation in the human arterial system // *International Journal for Numerical Methods in Fluids*. — 2003. — Vol. 43. — P. 673–700. — <https://doi.org/10.1002/flid.543>
- Shi Y., Lawford P., Hose R.* Review of zero-D and 1-D models of blood flow in the cardiovascular system // *BioMedical Engineering OnLine*. — 2011. — Vol. 10. — Art. no. 33. — <https://doi.org/10.1186/1475-925X-10-33>
- Simakov S., Gamilov T.* Computational study of the cerebral circulation accounting for the patient-specific anatomical features // *Smart Modeling for Engineering Systems*. — 2019. — Vol. 133. — P. 309–330. — https://doi.org/10.1007/978-3-030-06228-6_25
- Smith N. P., Pullan A. J., Hunter P. J.* An anatomically based model of transient coronary blood flow in the heart // *SIAM Journal on Applied Mathematics*. — 2002. — Vol. 62. — P. 990–1018. — <https://doi.org/10.1137/S0036139999355199>
- Spiller C., Toro E. F., Vazquez-Cendon M. E., Contarino C.* On the exact solution of the Riemann problem for blood flow in human veins, including collapse // *Applied Mathematics and Computation*. — 2017. — Vol. 303. — P. 178–189. — <https://doi.org/10.1016/j.amc.2017.01.024>
- Steele B. N., Wan J., Ku J. P., Hughes T. J. R., Taylor C. A.* In vivo validation of a one-dimensional finite-element method for predicting blood flow in cardiovascular bypass grafts // *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*. — 2003. — Vol. 50, No. 6. — P. 649–656. — <https://doi.org/10.1109/TBME.2003.812201>

- Toro E.F.* Brain venous haemodynamics, neurological diseases and mathematical modelling. A review // *Applied Mathematics and Computation*. — 2015. — Vol. 272. — P. 542–579. — <https://doi.org/10.1016/j.amc.2015.06.066>
- Toro E.F., Siviglia A.* Flow in collapsible tubes with discontinuous mechanical properties: Mathematical model and exact solutions // *Communications in Computational Physics*. — 2013. — Vol. 13. — P. 361–385. — <https://doi.org/10.4208/cicp.210611.240212a>
- Trangenstein J.A.* Numerical solution of hyperbolic partial differential equations. — Cambridge: Cambridge University Press, 2007. — 619 p.
- van de Vosse F.N., Stergiopoulos N.* Pulse wave propagation in the arterial tree // *Annual Review of Fluid Mechanics*. — 2011. — Vol. 43. — P. 467–499. — <https://doi.org/10.1146/annurev-fluid-122109-160730>
- Vabishchevich P.N.* Two-level schemes for the advection equation // *Journal of Computational Physics*. — 2018. — Vol. 363. — P. 158–177. — <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2018.02.044>
- Vassilevski Yu., Simakov S., Salamatova V., Ivanov Yu., Dobroserdova T.* Numerical issues of modelling blood flow in networks of vessels with pathologies // *Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling*. — 2011. — Vol. 26, No. 6. — P. 605–622. — <https://doi.org/10.1515/rjnamm.2011.036>
- Wang X., Fullana J.-M., Lagree P.-Y.* Verification and comparison of four numerical schemes for a 1D viscoelastic blood flow model // *Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering*. — 2015. — Vol. 18. — P. 1704–1725. — <https://doi.org/10.1080/10255842.2014.948428>
- Watanabe S. M., Blanco P. J., Feijoo R. A.* Mathematical model of blood flow in an anatomically detailed arterial network of the arm // *ESAIM: M2AN*. — 2013. — Vol. 47, No. 4. — P. 961–985. — <https://doi.org/10.1051/m2an/2012053>
- Xiao N., Alastruey J., Figueroa C.* A systematic comparison between 1-D and 3-D hemodynamics in compliant arterial models // *International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering*. — 2014. — Vol. 30. — P. 203–231. — <https://doi.org/10.1002/cnm.2598>
- Xiu D., Sherwin S.J.* Parametric uncertainty analysis of pulse wave propagation in a model of a human arterial network // *Journal of Computational Physics*. — 2007. — Vol. 226, No. 2. — P. 1385–1407. — <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2007.05.020>