

УДК: 62.9, 62.192+330.133.2, 519.21

Стоимостная оценка машин при случайном процессе их деградации и досрочной продажи

С. А. Смоляк

Центральный экономико-математический институт РАН,
Россия, 117418, г. Москва, Нахимовский пр., д. 47

E-mail: smolyak1@yandex.ru

Получено 24.03.2024.

Принято к публикации 08.04.2024.

Исследуется модель процесса использования машин, учитывающая вероятностный характер процесса их эксплуатации и продажи. В ней учитываются возможность случайных скрытых отказов, после которых состояние машин ухудшается скачком, а также случайно возникающая необходимость досрочной (до окончания срока службы) продажи машины, требующей, вообще говоря, случайного времени. Модель ориентирована на оценку рыночной стоимости и сроков службы машин в соответствии с международными стандартами оценки. Строго говоря, рыночная стоимость подержанной машины зависит от ее технического состояния, однако на практике стоимость машины устанавливают с учетом только ее возраста, поскольку общепринятых измерителей технического состояния машин пока еще не предложено. Тем самым стоимость подержанной машины принимается на уровне средней стоимости аналогичных машин соответствующего возраста. В этих целях оценщики используют зависимости стоимости машин от возраста, не всегда обоснованные и не учитывающие ни деградации машин, ни вероятностного характера процесса их использования. Предлагаемая модель основана на принципе ожидания выгод. В ней состояние машины характеризуется интенсивностью приносимых ею выгод. Машина подвергается сложному пуассоновскому потоку отказов, после каждого из которых состояние машины скачком ухудшается и может даже оказаться предельным. Возникают также ситуации, исключающие дальнейшее использование машины ее владельцем. В таких ситуациях владелец выставляет машину на продажу до окончания срока ее службы (досрочно), причем продажа требует случайного времени. Модель позволяет учесть влияние таких ситуаций и построить аналитическую зависимость, связывающую рыночную стоимость машины с ее состоянием, и рассчитать средние коэффициенты изменения рыночной стоимости машин с возрастом. При этом удается также учесть влияние инфляции и утилизационной стоимости машин. Мы установили, что опасность досрочных продаж существенно влияет на сроки службы и стоимость новых и подержанных машин. В то же время зависимости стоимости машин от возраста в значительной степени определяются коэффициентом вариации срока службы машин. Полученные результаты позволяют получать более обоснованные оценки рыночной стоимости машин, в том числе для целей системы национальных счетов.

Ключевые слова: машины и оборудование, пуассоновский процесс, деградация, рыночная стоимость, принцип ожидания выгод, срок службы, срок владения, досрочная продажа, инфляция

UDC: 62.9, 62.192+330.133.2, 519.21

Valuation of machines at the random process of their degradation and premature sales

S. A. Smolyak

Central Economics and Mathematics Institute of Russian Academy of Sciences,
47 Nakhimovsky prospect, Moscow, 117418, Russia

E-mail: smolyak1@yandex.ru

Received 24.03.2024.

Accepted for publication 08.04.2024.

The model of the process of using machinery and equipment is considered, which takes into account the probabilistic nature of the process of their operation and sale. It takes into account the possibility of random hidden failures, after which the condition of the machine deteriorates abruptly, as well as the randomly arising need for premature (before the end of its service life) sale of the machine, which requires, generally speaking, random time. The model is focused on assessing the market value and service life of machines in accordance with International Valuation Standards. Strictly speaking, the market value of a used machine depends on its technical condition, but in practice, appraisers only take into account its age, since generally accepted measures of the technical condition of machines do not yet exist. As a result, the market value of a used machine is assumed to be equal to the average market value of similar machines of the corresponding age. For these purposes, appraisers use coefficients that reflect the influence of the age of machines on their market value. Such coefficients are not always justified and do not take into account either the degradation of the machine or the probabilistic nature of the process of its use. The proposed model is based on the anticipation of benefits principle. In it, we characterize the state of the machine by the intensity of the benefits it brings. The machine is subjected to a complex Poisson failure process, and after failure its condition abruptly worsens and may even reach its limit. Situations also arise that preclude further use of the machine by its owner. In such situations, the owner puts the machine up for sale before the end of its service life (prematurely), and the sale requires a random timing. The model allows us to take into account the influence of such situations and construct an analytical relationship linking the market value of a machine with its condition, and calculate the average coefficients of change in the market value of machines with age. At the same time, it is also possible to take into account the influence of inflation and the scrap cost of the machine. We have found that the rate of premature sales has a significant impact on the cost of new and used machines. The model also allows us to take into account the influence of inflation and the scrap value of the machine. We have found that the rate of premature sales has a significant impact on the service life and market value of new and used machines. At the same time, the dependence of the market value of machines on age is largely determined by the coefficient of variation of the service life of the machines. The results obtained allow us to obtain more reasonable estimates of the market value of machines, including for the purposes of the system of national accounts.

Keywords: machinery and equipment, the Poisson process, degradation, market value, anticipation of benefits principle, service life, tenure, premature sale, inflation

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2024, vol. 16, no. 3, pp. 797–815 (Russian).

1. Основные понятия. Постановка задачи

Статья посвящена моделированию процесса использования машин (к машинам мы относим и оборудование и транспортные средства) в целях их стоимостной оценки. При этом машины рассматриваются как обращающаяся на рынке серийная продукция, предназначенная для выполнения определенных работ. Машины, подготовленные к эксплуатации (использованию по назначению), но не введенные в эксплуатацию, называются новыми или находящимися в новом состоянии, все остальные считаются подержанными. Новые машины обращаются на первичном рынке, подержанные — на вторичном. Машины, идентичные в новом состоянии, мы относим к одной марке, а машины разных марок одного назначения — к одному виду. В процессе работы техническое состояние машин меняется непрерывно. Поэтому процесс использования машин мы рассматриваем в непрерывном времени. При этом вплоть до § 8 мы будем предполагать *отсутствие инфляции*.

Приведем краткие сведения из теории стоимостной оценки машин, опираясь на международные стандарты оценки [IVS 2022; Смоляк, 2022].

Основным видом стоимости является рыночная стоимость (РС). РС машины на определенную дату (дату оценки) — это ее цена в сделке, совершаемой на эту дату на конкурентном рынке между типичными участниками, не связанными между собой какими-либо отношениями и действующими независимо. При этом типичными считаются участники рынка, проводящие надлежащий маркетинг, ведущие себя расчетливо и хорошо осведомленные о характере, свойствах и способах использования машины, а также о состоянии рынка на дату оценки.

Можно показать, что

- продать машину по РС не менее выгодно, чем использовать ее в дальнейшем наиболее эффективным способом;
- купить машину по РС и наиболее эффективно использовать ее не менее выгодно, чем вложить те же средства в альтернативные и доступные для всех участников рынка направления инвестирования.

Поэтому РС машины должна оцениваться при предположении о наиболее эффективном способе ее использования. Совершение сделки по РС предполагает проведение должного маркетинга. Это означает, «что актив был выставлен на рынке наиболее подходящим образом, чтобы обеспечить его реализацию по наилучшей из достижимых, по разумным соображениям, цене в соответствии с определением рыночной стоимости» [IVS 2022, IVS 104, para 30.2g].

Аналогично определяется и РС *работ*. При этом РС работы отвечает наиболее эффективному способу ее выполнения.

Под (доналоговыми) *выгодами* от использования машины мы будем понимать РС выполняемых ею работ за вычетом операционных затрат¹. Под *интенсивностью* выгод (ИВ), приносимых машиной в определенный момент времени, мы понимаем выгоды от ее использования в следующую малую единицу времени. Она определяется формулой $ИВ = pW - C$, где W — производительность машины, C — интенсивность ее операционных затрат, p — РС единицы выполняемых машиной работ.

Работа, выполняемая некоторыми видами машин, обращается на рынке, и ее РС можно оценить по данным рыночных сделок. В других случаях машины можно сдавать в аренду на определенный срок. Рыночная стоимость такой услуги носит название *рыночной арендной платы* [IVS 2022, IVS 104, para 40], и она может быть оценена исходя из сложившихся на рынке

¹ Так, определяемый показатель выгод может рассматриваться и как связанный с использованием машины (доналоговый) денежный поток, упоминаемый в стандартах оценки. По экономическому содержанию и величине он близок к EBITDA (прибыли до уплаты налогов и процентов и начисления амортизации), используемому в оценке бизнеса.

арендных ставок. На равновесном рынке оба способа использования должны быть равновыгодными для владельцев, поэтому выгоды от использования машин по назначению в некотором периоде должны совпадать с рыночной арендной платой таких же машин за такой же период (естественно, за вычетом необходимых затрат, осуществляемых арендодателем) и с *РС права пользования* машиной в этом периоде.

В процессе использования *поддержание* состояния машины обеспечивается за счет ее технического обслуживания и текущего ремонта (ТОиР). Затраты на ТОиР мы включаем в состав операционных. На практике состояние некоторых машин можно существенно улучшить за счет *капитального* ремонта. Такие ситуации мы исключаем и считаем, что состояние машины в процессе эксплуатации *не улучшается*.

Состояние, в котором машину невозможно или нецелесообразно далее использовать по назначению, называют *предельным*. Машина в таком состоянии должна выбывать из эксплуатации — утилизироваться. При этом она рассматривается уже как совокупность отдельных элементов (деталей и узлов, пригодных к дальнейшему использованию, металлолома). Рыночная стоимость этих элементов за вычетом стоимости работ по демонтажу машины и доставке отдельных ее элементов к месту продажи образует *утилизационную стоимость* (УС) машины. Коэффициент годности такой машины (отношение ее УС к стоимости новой машины той же марки) называется *относительной утилизационной стоимостью* (ОУС). Для многих видов машин она лежит в пределах от 0,04 до 0,1. При утилизации машина в целом или ее элементы продаются на достаточно развитом *скраповом* рынке, что позволяет считать процесс утилизации мгновенным.

Новые и подержанные машины обращаются на разных рынках и оцениваются по-разному [Федотова и др., 2018].

Новые машины продаются производителями и дилерами на *первичном* рынке. Все новые машины одной марки (этим термином мы обозначаем также модели и модификации) можно считать точными копиями друг друга, а их РС обычно определяется исходя из сложившихся на первичном рынке цен. Этот этап оценки обычно каких-то принципиальных затруднений не вызывает. Исключение составляют машины, которые отсутствуют на рынке на дату оценки, включая и снятые с производства.

Подержанные машины, находящиеся в рабочем состоянии, обращаются на *вторичном* рынке. Такая машина обычно не имеет точных аналогов, а рыночные цены машин того же возраста обычно имеют достаточно большой разброс. Поэтому подержанную машину удобно оценивать исходя из стоимости новой машины той же марки. Обычно это делается одним из двух эквивалентных способов. При первом способе, используемом российскими оценщиками, стоимость новой машины уменьшается на сумму или процент обесценения (износа), определяемый по различным формулам [Федотова и др., 2018; Лейфер, 2023]. При втором способе, принятом в США [АН 582], стоимость новой машины умножается на коэффициент или процент годности (относительной стоимости, Percent Good Factor), значения которого даются в специальных таблицах, например, в [2019 Cost Index & Depreciation Schedules; 2020 Personal Property Manual; АН 581]. При этом проценты обесценения и годности дополняют друг друга до 100 %.

Значения процентов годности (или износа), строго говоря, зависят от технического состояния машины, которое в свою очередь определяется всей историей ее эксплуатации. Однако общепринятых измерителей технического состояния машин пока еще не предложено, а документально подтвердить сведения о том, в каких условиях работала машина до даты оценки, не могут ни оценщики, ни даже владельцы машин. Поэтому обоснованное определение коэффициентов годности машин по-прежнему является актуальной задачей теории стоимостной оценки. На практике состояние машин оценщики характеризуют возрастом, а для оценки конкретной машины используют средний коэффициент годности (СКГ) машин того же возраста. Нередко

его считают равным относительно возрасту машины — отношением возраста к среднему сроку службы. Однако такой метод не учитывает утилизационной стоимости машин, не позволяет оценивать машины за пределами среднего срока службы и часто не согласуется с фактическими ценами достаточно старых машин.

Более обоснованные результаты можно получить, когда на вторичном рынке представлено большое количество аналогичных машин разного возраста. Тогда зависимости СКГ от возраста находят с помощью регрессионной зависимости цен машин от возраста и применения ее к машинам, работающим в некоторых средних условиях, которым отвечает определенный средний срок службы. Для машин, постоянно работающих в условиях, существенно отличающихся от средних, вводятся поправочные коэффициенты к среднему сроку службы, а зависимость процентов годности или износа от возраста, соответственно, пересчитывается [Лейфер, 2023]. По сути, это означает, что разным условиям работы машины отвечает одна и та же зависимость процента годности от относительного возраста (отношения возраста к среднему сроку службы).

Этот способ имеет три существенных недостатка. Во-первых, дать какое-то четкое «техническое» определение средним условиям работы не удастся. Мало того, если «тяжесть» условий работы описывать в терминах нагрузок на основные узлы и агрегаты машины, то оказывается, что средние цены машин достаточно большого возраста отвечают легким, а не средним условиям эксплуатации [Смоляк, 2022, § 13.4]. Во-вторых, для построения необходимой регрессионной зависимости ее спецификацию приходится задавать, и обычно параметры подобных зависимостей не имеют какого-либо экономического или технического смысла. И наконец, остается неясным, почему в разных условиях работы машины зависимость процента годности от относительного возраста будет одной и той же.

Обосновать спецификацию зависимости СКГ машин от возраста можно с помощью упоминаемого в [IVS 2022] *принципа ожидания выгод*, согласно которому РС актива на дату оценки отражает ожидаемые выгоды от его последующего (и, как говорилось выше, наиболее эффективного) использования. При этом РС актива на дату оценки оказывается удобным оценивать как сумму ожидаемых дисконтированных к дате оценки выгод от наиболее эффективного использования этого актива в некотором прогнозном периоде и его РС в конце этого периода¹.

Принимая те или иные допущения о динамике ИВ либо о динамике производительности машины и интенсивности ее операционных затрат, можно получать различные зависимости коэффициентов ее годности от возраста [СНС-2008; Смоляк, 2016]. Таким способом (при наличии необходимой информации) можно учесть и влияние условий работы машины.

Между тем процесс использования машин, даже в одних и тех же условиях, носит вероятностный характер. Распределению сроков службы машин и зданий уделяется много внимания специалистами по надежности и экономической статистике. Результаты подобных исследований (включая ускоренные испытания на долговечность) позволяют для многих марок машин оценить среднее значение и коэффициент вариации срока службы. Ориентировочные значения этих характеристик даются, например, в рекомендациях [Острейковский, 2003, табл. 12.5] и [Лейфер, 2023, §§ 5.2 и 5.3]. Однако в публикациях по вопросам надежности, стоимостной оценки и национального счетоводства должного внимания этой проблеме не уделяется.

Оценка РС активов со случайным сроком службы давно применяется в системе национальных счетов разных стран [СНС-2008]. Правда, каждому возможному сроку службы актива здесь отвечает своя детерминированная динамика приносимых им выгод. Этот прием использован и в [АН 582; Лейфер, 2023]. Однако при этом распределение срока службы задавалось экзогенно, а деградация машины не учитывалась.

Моделированию деградации машин (и иных технических систем) посвящено огромное количество публикаций, например [Li, Pham, 2005; Nakagawa, 2007; Wang et al., 2011; Lin, Li, Zio,

¹ Очевидно, что такая сумма не зависит от того, когда кончается прогнозный период.

2014]. Основное внимание в них уделялось влиянию деградации на надежность машины, статистическому моделированию процесса и оптимизации эксплуатационных параметров (например, периодичности ремонтов и замен элементов). Однако при этом принималось, что в ходе эксплуатации машины меняется только интенсивность отказов, но не производительность машины или операционные затраты. Соответственно, критерии оптимизации носили затратный характер (скажем, средние затраты на эксплуатацию и ремонт за единицу времени), а применить соответствующие модели для оценки РС реальных машин оказалось невозможным.

Задачи стоимостной оценки машин в условиях неопределенности процесса их эксплуатации стали исследоваться сравнительно недавно. Некоторые экономико-математические модели для этой цели предложены, например, в [Аркин, Слестников, Смоляк, 2006; Смоляк, 2014]. Одна из моделей, количественно учитывающих и надежность и деградацию машин при их стоимостной оценке, предложена в [Смоляк, 2020].

Однако во всех упомянутых работах процесс использования машины до конца срока службы предполагался непрерывным. Между тем само наличие вторичного рынка машин подразумевает, что много машин, находящихся в исправном состоянии, продается до окончания срока службы. Разумеется, возможны ситуации, когда продажа машины является вынужденной (например, производится по требованию суда). Однако о таких продажах участники рынка извещаются специально, большинство же машин на вторичном рынке продается на обычных рыночных условиях, а цены соответствующих сделок или цены предложения таких машин используются оценщиками при оценке рыночной стоимости подержанных машин (например, при построении регрессионных зависимостей коэффициентов годности/износа от возраста). Поэтому далее мы, следуя [Смоляк, 2023], рассмотрим только невынужденные продажи машин до окончания срока их службы, назовем их *досрочными*¹.

Чтобы продать машину, необходимы время и определенные затраты, поэтому продажа машины обычно менее выгодна, чем использование ее по назначению. К досрочной продаже владелец прибегает, когда использовать машину по назначению становится рискованным или невыгодным, например, когда он:

- опасается незаконных действий, которые сделают невозможным использование им данной машины (в этой ситуации досрочная продажа машины является одной из возможных превентивных мер, которые владелец может предпринять);
- решает включить машину в число непрофильных активов;
- решает так изменить технологический процесс на предприятии, что дальнейшее использование данной машины станет нецелесообразным или даже невозможным.

Естественно, что подобные причины носят «индивидуальный» характер (т. е. относятся к конкретной машине и ее конкретному владельцу), а владелец принимает решение о досрочной продаже на основе анализа и прогноза рыночной ситуации. Поэтому из того, что владелец выставил машину на продажу, не следует, что все остальные владельцы немедленно поступят так же. Это позволяет рассматривать досрочную продажу машины как случайное событие.

Вероятность μ того, что машина, находящаяся на дату оценки в рабочем состоянии, будет выставлена на досрочную продажу в ближайшую малую единицу времени, назовем *опасностью* досрочных продаж. При этом вероятность выставления машины на досрочную продажу в течение малого времени dt после даты оценки равна μdt . Как и в [Лейфер, 2022; Смоляк, 2023], мы исходим из допущения, что значение μ не зависит от состояния машины и остается стабильным

¹ В [IVS 2022] продажа *группы* активов на таких условиях именуется упорядоченной ликвидацией, но мы рассматриваем *только одну* машину, а под ее ликвидацией понимаем утилизацию.

в течение некоторого периода вблизи даты оценки. При этом среднее время работы машины до выставления ее на досрочную продажу составляет примерно $\frac{1}{\mu}$.

Досрочная (да и любая) продажа актива на рынке требует случайного времени. Назовем интенсивностью продаж актива вероятность того, что актив, находящийся на экспозиции на дату оценки, будет продан в течение малой единицы времени после этой даты. Следуя [Лейфер, 2022; Смоляк, 2023], будем считать, что интенсивность продаж машин рассматриваемой марки не зависит от их состояния и остается стабильной в течение некоторого периода вблизи даты оценки¹. Тогда срок продажи машины будет иметь экспоненциальное распределение. Соответствующий средний срок продажи будем обозначать через S .

В момент продажи машина переходит к новому владельцу, поэтому средний срок владения машиной будет равен $\frac{1}{\mu} + S$. Это равенство позволяет ориентировочно оценивать μ . Так, если пренебречь временем на предпродажную подготовку и оформление сделки и считать, что средний срок продажи машины — 0,5 года, а средний срок владения машинами — 5 лет, то $5 = \frac{1}{\mu} + 0,5$, откуда $\mu = \frac{1}{4,5} = 0,22$.

Некоторые характеристики машины зависят не только от ее состояния, но и от того, используется ли она по назначению или предлагается к продаже (находится на экспозиции). Поэтому при необходимости, говоря о машине, мы будем в первом случае называть ее рабочей, а во втором — продаваемой.

Обратим внимание, что используемые в экономических расчетах сведения о сроках службы машин основаны на фактических данных и, следовательно, учитывают влияние досрочных продаж, тогда как характеристики долговечности машин, оцениваемые специалистами по надежности, этого влияния не учитывают.

Влияние досрочных продаж на РС машин исследовалось в [Смоляк, 2023], однако при этом процесс эксплуатации машин предполагался детерминированным. В данной статье этот недостаток устраняется. Это позволяет, опираясь на принцип ожидания выгод, выяснить, как влияют досрочные продажи на сроки службы и РС машин и средние коэффициенты годности машин в условиях случайного процесса их деградации.

2. Основные положения модели

Будем рассматривать только машины одной определенной марки, считая, что они могут эксплуатироваться (использоваться по назначению) единственным способом. Будем считать, что для этих машин известны среднее значение T и коэффициент вариации срока службы ν , опасность досрочных продаж μ и средний срок продажи (экспозиции) S . Далее, вплоть до § 9, утилизационную стоимость машин будем считать нулевой.

Состояние машины мы характеризуем интенсивностью приносимых ею выгод (ИВ). Процесс ее деградации мы свяжем с потоком случайных скрытых отказов, приводящих к случайным последствиям, и описываем следующим сложным пуассоновским процессом. Время от времени с интенсивностью μ происходят случайные отказы. Их можно вообще не заметить или частично устранить их последствия при *текущем* ремонте, однако они приводят к ухудшению операционных характеристик машины (в том числе за счет увеличения затрат на ТОиР). Принимается, что после отказа ИВ уменьшается на неотрицательную случайную величину ξ , не зависящую от истории эксплуатации машины и распределенную экспоненциально с плотностью $\alpha e^{-\alpha x}$ и средним значением $\frac{1}{\alpha}$. Машина, у которой ИВ после отказа осталась положительной, продолжает работать. Машину, у которой после отказа ИВ стала отрицательной, далее эксплуатировать нецелесообразно, и мы принимаем, что через непродолжительное время она утилизируется. Подобный отказ будем называть *фатальным* (отказы, после которых машину физически невозможно или

¹ Справедливость этого допущения для объектов недвижимости была подтверждена в [Лейфер, 2022].

экономически нецелесообразно использовать по назначению, в теории надежности именуют ресурсными). Таким образом, в нашей модели последствия отказов машины, если только они не оказались фатальными, «накапливаются» до тех пор, пока машина не перейдет в предельное состояние и не будет утилизирована, принеся нулевые выгоды.

До сих пор подразумевалось использование обычных единиц измерения. Однако нам будет удобно принять такие (условные) единицы измерения стоимости и времени, чтобы в этих единицах ИВ новой машины и средний (полный) срок ее службы были равны 1. Ставка дисконтирования при этом оказывается безразмерной (она отличается от «обычной» умножением на средний срок службы машин), и мы обозначим ее через r . Средний срок экспозиции S в этих единицах совпадает с соответствующим относительным сроком (отношением среднего срока экспозиции к среднему сроку службы).

3. Среднее число досрочных продаж

Выясним вначале, сколько раз за свой срок службы машина продается досрочно (т. е. меняет владельца). Для этого обозначим через $\Omega(z)$ среднее число досрочных продаж рабочей машины, находящейся в состоянии z на дату оценки, за оставшийся срок службы. Обратим внимание, что функция $\Omega(z)$ имеет разрыв в точке 0. Действительно, при $z < 0$ машина будет утилизирована, срок ее службы закончится, так что $\Omega(z) = 0$. Если же $z > 0$, то машина сможет эффективно работать по крайней мере до очередного отказа, т. е. в среднем $\frac{1}{\lambda}$.

Рассмотрим рабочую машину, находящуюся в состоянии $z > 0$ на дату оценки. За малый период времени dt могут возникнуть три ситуации.

1. С вероятностью μdt возникнет необходимость в досрочной продаже машины. Тогда машина будет выставлена на экспозицию и через некоторое время будет продана. Поскольку ее состояние не изменилось, то и после продажи среднее количество ее досрочных продаж за оставшийся срок службы составит $\Omega(z)$, так что в начале периода оно составляло $\Omega(z) + 1$.

2. С вероятностью λdt произойдет скрытый отказ. При этом ИВ машины примет новое случайное значение $y = z - \xi$, распределенное на луче $(-\infty, z)$ с плотностью $\alpha e^{\alpha(y-z)}$. При $y > 0$ среднее количество досрочных продаж за оставшийся срок службы составит $\Omega(y)$, в противном же случае (фатальный отказ) срок службы машины закончится.

3. Ни отказа, ни необходимости в досрочной продаже не возникнет. Тогда машина останется в прежнем состоянии, и среднее количество досрочных продаж за оставшийся срок ее службы составит $\Omega(z)$.

Учитывая вероятности указанных ситуаций, получаем

$$\Omega(z) = \mu dt [\Omega(z) + 1] + \lambda dt \int_0^z \alpha e^{\alpha(y-z)} \Omega(y) dy + (1 - \mu dt - \lambda dt) \Omega(z).$$

Отсюда после простых преобразований находим

$$\lambda \Omega(z) - \lambda \int_0^z \alpha e^{\alpha(y-z)} \Omega(y) dy = \mu.$$

Решение этого уравнения будет иметь вид

$$\Omega(z) = \frac{\mu}{\lambda} (1 + \alpha z).$$

В частности, среднее количество досрочных продаж новой машины (у которой ИВ = 1) за весь срок ее службы составит

$$\Omega(1) = \frac{\mu}{\lambda} (1 + \alpha). \quad (1)$$

4. Зависимость РС машины от ее состояния

РС машины в состоянии z обозначим как $V(z)$. Из технических и экономических соображений функцию $V(z)$ можно считать непрерывной и убывающей, а кроме того, при $z = 0$ она должна обращаться в нуль. Рассмотрим рабочую машину, находящуюся в состоянии z на дату оценки. За малое время dt возможны те же три ситуации, что и в § 3.

1. С вероятностью μdt возникнет необходимость в досрочной продаже машины. Тогда машина будет выставлена на экспозицию и через некоторое время x будет продана по своей РС (она, напомним, при отсутствии инфляции зависит только от состояния машины, которое за время экспозиции не изменилось) $V(z)$. При этом срок продажи x имеет плотность распределения $S^{-1}e^{-x/S}$. Ожидаемые дисконтированные (по ставке r) выгоды от продажи при этом составят

$$\int_0^{\infty} V(z)e^{-rx}S^{-1}e^{-x/S} dx = \frac{V(z)}{1+rS}.$$

2. С вероятностью λdt произойдет отказ. При этом, как и в предыдущем разделе, ИВ машины примет новое случайное значение y , распределенное на луче $(-\infty, z)$ с плотностью $\alpha e^{\alpha(y-z)}$. При $y > 0$ машина в конце периода будет иметь РС $V(y)$, в противном же случае (фатальный отказ) РС машины обратится в нуль, и она будет утилизирована, принеся нулевые выгоды.

3. Ни отказа, ни необходимости в досрочной продаже не возникнет. Тогда машина принесет выгоды $z dt$, останется в прежнем состоянии и будет иметь прежнюю стоимость (поскольку инфляция отсутствует).

Применив принцип ожидания выгод к прогнозному периоду dt , мы с точностью до малых более высокого порядка получаем

$$V(z) = \mu dt \frac{V(z)}{1+rS} + \lambda dt \int_0^z \alpha e^{\alpha(y-z)} V(y) dy + (1 - \mu dt - \lambda dt)[z dt + (1 - r dt)V(z)].$$

Отсюда, используя обозначение

$$\beta = \frac{\mu}{1+rS}, \quad (2)$$

получаем

$$z - (r + \lambda + \beta)V(z) + \lambda \int_0^z \alpha e^{\alpha(y-z)} V(y) dy = 0.$$

Умножив это равенство на $e^{\alpha z}$ и дифференцируя, после простых преобразований найдем

$$1 + \alpha z - \alpha(r + \beta)V(z) - (r + \lambda + \beta)V'(z) = 0.$$

Решение этого уравнения с начальным условием $V(0) = 0$ будет иметь вид

$$V(z) = \frac{z}{r + \beta} - \frac{\lambda}{\alpha(r + \beta)^2} \left[1 - e^{-\frac{\alpha(r + \beta)}{r + \lambda + \beta} z} \right]. \quad (3)$$

Нелинейность этой зависимости не позволяет оценивать подержанные машины, пересчитывая РС ее аналога пропорционально приносимым выгодам. Из (3) при $z = 1$ вытекает формула для РС новой машины (V_0):

$$V_0 = V(1) = \frac{1}{r + \beta} - \frac{\lambda}{\alpha(r + \beta)^2} \left[1 - e^{-\frac{\alpha(r + \beta)}{r + \lambda + \beta}} \right]. \quad (4)$$

Обратим внимание, что в этих формулах влияние опасности досрочных продаж и среднего срока продажи учитывается путем увеличения «безрисковой» ставки дисконтирования на β , которую поэтому можно трактовать как своеобразную «премию за риск досрочных продаж».

5. Остаточный срок службы машины

Обозначим через $\tau(z)$ случайный остаточный срок службы рабочей машины, находящейся в состоянии z . Нас будут интересовать его среднее значение $T(z)$, дисперсия $D(z)$ и коэффициент вариации $v(z)$. Для этого найдем производящую функцию моментов $\varphi(p, z) = \mathbf{E} \left[e^{p\tau(z)} \right]$, где символом \mathbf{E} обозначено математическое ожидание. Отметим при этом, что указанные функции непрерывны только при $z > 0$, а при $z = 0$ имеют разрыв. Это объясняется так же, как и в § 3 (при $z < 0$ машину утилизируют сразу же, а при $z > 0$ срок ее службы завершится не ранее очередного отказа).

Для нахождения функции $\varphi(p, z)$ при $z > 0$ рассмотрим на дату оценки рабочую машину в состоянии $z > 0$. За малое время dt могут возникнуть три ситуации.

1. С вероятностью μdt возникнет необходимость в досрочной продаже машины. Тогда машина будет выставлена на экспозицию и через некоторое время x (имеющее плотность распределения $S^{-1}e^{-x/S}$) будет продана в том же состоянии. У такой машины остаточный срок службы на дату оценки равен $x + \tau(z)$.

2. С вероятностью λdt произойдет скрытый отказ. При этом ИВ машины примет случайное значение y , распределенное на луче $(-\infty, z)$ с плотностью $\alpha e^{\alpha(y-z)}$. Ему будет отвечать и новый остаточный срок службы, равный $\tau(y)$ при $y > 0$ или нулю при $y < 0$ (т. е. с вероятностью $e^{-\alpha z}$).

3. Ни отказа, ни необходимости в досрочной продаже не возникнет. Тогда машина останется в прежнем состоянии. Поэтому остаточный срок ее службы равен $\tau(z) + dt$.

Учитывая вероятности указанных ситуаций, имеем

$$\varphi(p, z) = \mathbf{E} \left[e^{p\tau(z)} \right] = \mu dt \mathbf{E} \left[e^{p[x+\tau(z)]} \right] + \lambda dt \left[\int_0^z \alpha e^{\alpha(y-z)} e^{p\tau(y)} du + e^{-\alpha z} \right] + (1 - \mu dt - \lambda dt) e^{p[\tau(z)+dt]}.$$

Отсюда, учитывая, что

$$\mathbf{E} \left[e^{px} \right] = \int_0^{\infty} e^{px} S^{-1} e^{-x/S} dx = \frac{1}{1 - pS},$$

после простых преобразований и умножения на $e^{\alpha z}$ находим

$$\left(p + \frac{\mu p S}{1 - p S} - \lambda \right) \varphi(p, z) e^{\alpha z} + \lambda \int_0^z \alpha e^{\alpha x} \varphi(p, x) dx + \lambda = 0.$$

По непрерывности, это равенство справедливо и при $z = 0$, если только понимать $\varphi(p, 0)$ как предел $\varphi(p, z)$ при $z \rightarrow 0$. Если обозначить

$$\int_0^z e^{\alpha x} \varphi(p, x) dx = G(p, z),$$

то полученное уравнение примет вид

$$\left(p + \frac{\mu p S}{1 - p S} - \lambda \right) G'_z(p, z) + \lambda \alpha G(p, z) + \lambda = 0.$$

Его решением с краевым условием $G(p, 0) = 0$ будет

$$G(p, z) = \frac{1}{\alpha} \left\{ \exp \left[\frac{\lambda \alpha z}{\lambda - p - \frac{\mu p S}{1 - p S}} \right] - 1 \right\}.$$

Но тогда при всех $z > 0$ имеем

$$\psi(p, z) = \ln \varphi(p, z) = \ln \left[e^{-\alpha z} G'_z(p, z) \right] = \ln \frac{\lambda}{\lambda - p - \frac{\mu p S}{1 - p S}} + \alpha z \frac{p + \frac{\mu p S}{1 - p S}}{\lambda - p - \frac{\mu p S}{1 - p S}}.$$

Среднее значение и дисперсия остаточного срока службы будут соответственно первой и второй производными по p от полученного выражения при $p = 0$. Вычисляя эти производные, после преобразований находим

$$\begin{aligned} T(z) &= \psi'_p(0, z) = \frac{1 + \mu S}{\lambda} (1 + \alpha z), \\ D(z) &= \psi''_{pp}(0, z) = \frac{(1 + \mu S)^2}{\lambda^2} (1 + 2\alpha z) + \frac{\mu S^2}{\lambda} (2 + 2\alpha z), \\ v(z) &= \frac{\sqrt{D(z)}}{T(z)} = (1 + \alpha z)^{-1} \sqrt{1 + 2\alpha z + (2 + 2\alpha z) \lambda \mu \left(\frac{S}{1 + \mu S} \right)^2}. \end{aligned}$$

Для новой машины, у которой $z = 1$, эти равенства принимают вид

$$\frac{1 + \mu S}{\lambda} (1 + \alpha) = 1, \quad (1 + \alpha)^{-1} \sqrt{1 + 2\alpha + (2 + 2\alpha) \lambda \mu \left(\frac{S}{1 + \mu S} \right)^2} = v.$$

Отсюда можно получить выражения для α и λ :

$$\alpha = \frac{1}{1 - \sqrt{1 - v^2 + \frac{2\mu S^2}{1 + \mu S}}} - 1, \quad \lambda = (1 + \alpha)(1 + \mu S) = \frac{1 + \mu S}{1 - \sqrt{1 - v^2 + \frac{2\mu S^2}{1 + \mu S}}}. \quad (5)$$

При этом неравенство $\alpha > 0$ будет выполняться, только если

$$0 < v^2 - \frac{2\mu S^2}{1 + \mu S} < 1. \quad (6)$$

Поэтому каждой комбинации (v, μ) отвечает своя область изменения среднего срока продажи S , а каждой комбинации (v, S) — своя область изменения опасности досрочных продаж μ .

Мы видим, что досрочные продажи увеличивают срок службы машины в $1 + \mu S$ раз и повышают коэффициент вариации срока службы, причем он может даже превысить единицу.

Используя равенства (5) и (1), найдем иное выражение для среднего количества досрочных продаж машины за весь срок ее службы:

$$\Omega(1) = \frac{\mu}{\lambda} (1 + \alpha) = \frac{\mu}{1 + \mu S}. \quad (7)$$

Поясним смысл этой формулы. За малую единицу времени с вероятностью μ может потребоваться досрочная продажа машины, при этом срок службы машины продлится на срок ее экспозиции, в среднем равный S . Поэтому время работы машины составляет долю $\frac{1}{1 + \mu S}$ от срока ее службы, а тогда за средний срок службы (мы приняли его за единицу времени) будет происходить в среднем $\frac{\mu}{1 + \mu S}$ досрочных продаж.

6. Пример 1

Рассмотрим машины со средним сроком службы 10 лет и коэффициентами вариации срока службы 0,35 и 0,65. Примем ставку дисконтирования (в непрерывном времени) на уровне $0,08 \text{ год}^{-1}$. Этому отвечает безразмерная ставка $r = 0,8$. На рис. 1, 2 приведены зависимости стоимости новой машины (V_0) от опасности досрочных продаж μ при разных значениях среднего срока продажи S . Напомним, что все указанные характеристики выражены в условных единицах, что в подрисуночных подписях не отражено. Соответствующие графики обрываются — они относятся только к таким S , при которых еще выполняется неравенство (6) (более высоким значениям S будут отвечать более высокие коэффициенты вариации срока службы).

Из графиков видно, что рост среднего срока продажи (уменьшение ликвидности) ведет к снижению РС машин, тем большему, чем выше коэффициент вариации срока службы. Гораздо

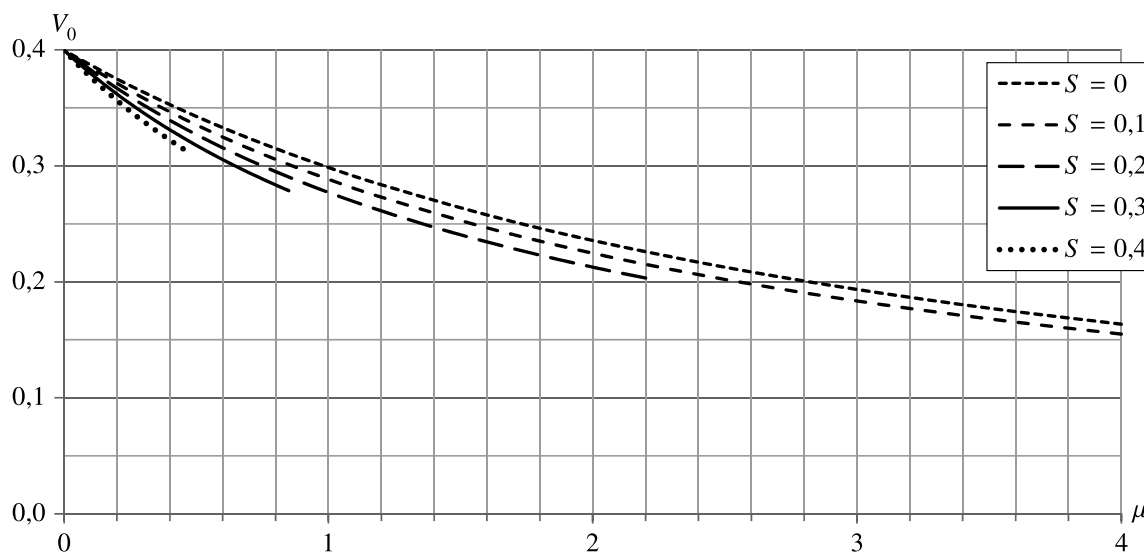


Рис. 1. Зависимости РС новой машины (V_0) с $v = 0,35$ от опасности досрочной продажи (μ) при разных значениях среднего срока экспозиции S

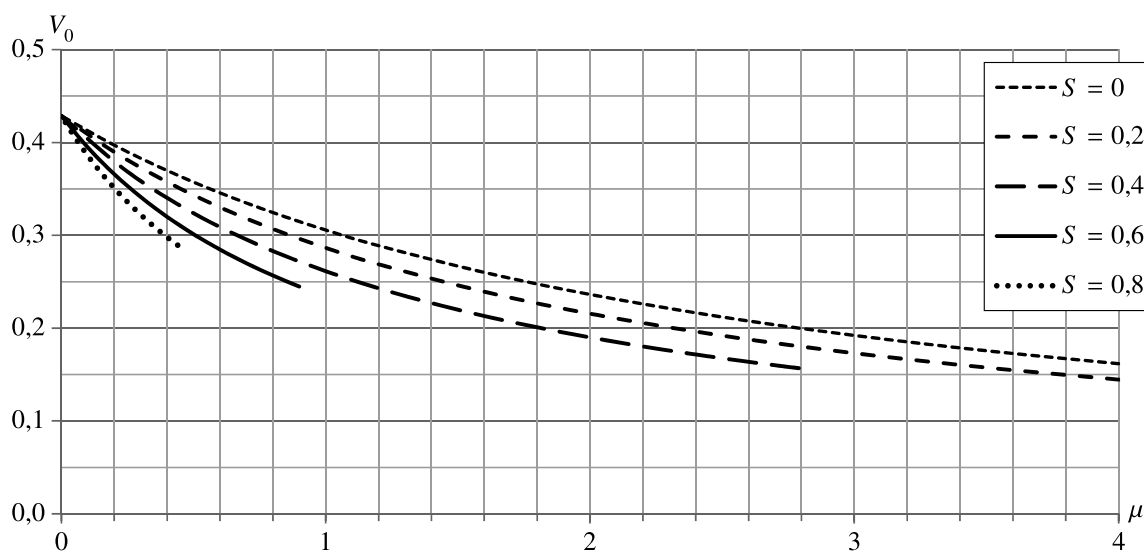


Рис. 2. Зависимости РС новой машины (V_0) с $v = 0,65$ от опасности досрочной продажи (μ) при разных значениях среднего срока экспозиции S

сильнее снижает РС машины опасность ее досрочных продаж. Поэтому рыночные стоимости машин будут снижаться как при ухудшении правовой защиты бизнеса, так и при ускорении технического прогресса, требующего обновления производственного аппарата.

На рис. 3 приведены рассчитанные по формуле (7) зависимости среднего количества досрочных продаж машины за весь срок ее службы $\Omega(1)$ от опасности ее досрочных продаж.

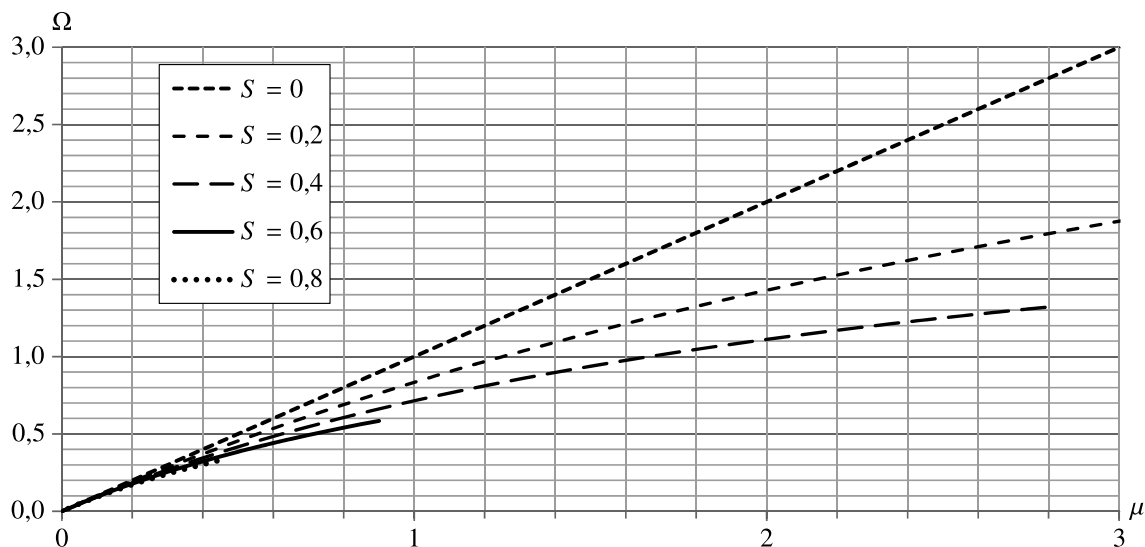


Рис. 3. Зависимости среднего количества досрочных продаж новой машины с $\nu = 0,65$ за весь срок ее службы от опасности досрочной продажи (μ) при разных значениях среднего срока экспозиции S

7. Зависимость средних коэффициентов годности от возраста

В § 4 мы построили зависимость (3), связывающую РС машины $V(z)$ с ее состоянием z . Между тем, как уже отмечалось, обычно подержанные машины оценивают в соответствии с их возрастом, т. е. принимают их РС как среднюю цену машин того же возраста. Мы поступим так же и найдем среднюю РС рабочих машин каждого возраста t . Но такие машины за время t до даты оценки были новыми, т. е. находились в состоянии ИВ = 1. Поэтому требуется найти среднюю РС $L(t)$ машин, «доживших» до даты оценки, которые за время t до даты оценки находились в (новом) состоянии ИВ = 1. Вместо этого будем решать более общую задачу.

Рассмотрим совокупность машин, «доживших» до даты оценки и находившихся в состоянии $z > 0$ за время t до этой даты. Рабочие машины этой совокупности объединим в группу $P_{z,t}$, остальные (продаваемые) — в группу $\Pi_{z,t}$. Средние стоимости машин этих групп обозначим соответственно через $L(z, t)$ и $N(z, t)$. Заметим при этом, что у машин, находящихся в состоянии z на дату оценки, РС = $V(z)$. Поэтому $L(z, 0) = N(z, 0) = V(z)$.

Поскольку в начале эксплуатации $z = 1$, то средняя стоимость машин возраста t лет в этих обозначениях составит $L(1, t)$, а при $t = 0$ — совпадет со стоимостью новой машины $L(1, 0) = V(1)$, определяемой формулой (4). Поэтому средний коэффициент годности $k(t)$ машин возраста t будет задаваться формулой

$$k(t) = \frac{L(1, t)}{L(1, 0)} = \frac{L(1, t)}{V(1)}. \quad (8)$$

Чтобы найти неизвестные функции $L(z, t)$ и $N(z, t)$, вначале рассмотрим машины группы $\Pi_{z,t+dt}$. За малое время dt каждая из них с вероятностью $\frac{dt}{S}$ машина может быть продана,

после чего окажется в группе $P_{z,t}$. С дополнительной вероятностью она останется на экспозиции и перейдет в группу $\Pi_{z,t}$. Поэтому

$$N(z, t + dt) = \frac{dt}{S} L(z, t) + \left(1 - \frac{dt}{S}\right) N(z, t)$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial N(z, t)}{\partial t} = \frac{L(z, t) - N(z, t)}{S}.$$

Решая это уравнение с краевым условием $N(z, 0) = V(z)$, получим

$$N(z, t) = V(z)e^{-t/S} + \int_0^t \frac{L(z, x)}{S} e^{-(t-x)/S} dx. \quad (9)$$

В малом периоде времени dt для машин группы $P_{z,t+dt}$ возможны три ситуации.

1. С вероятностью μdt возникнет необходимость в их досрочной продаже. Тогда в конце периода они окажутся в группе $\Pi_{z,t}$.

2. Произойдет скрытый отказ. Для «обычных» машин такой отказ может произойти с вероятностью λdt , а после отказа ИВ машины примет случайное значение y , распределенное на луче $(-\infty, z)$ с плотностью $\alpha e^{\alpha(y-z)}$. Правда, при $y < 0$ (вероятность этого равна $e^{-\alpha z}$) отказ оказывается фатальным, после чего машину утилизируют. Однако у машин группы $P_{z,t+dt}$ фатальных отказов не будет, поскольку они «дожили» до даты оценки. Поэтому здесь вероятность отказа составит $\lambda(1 - e^{-\alpha z}) dt$, а после отказа ИВ машины примет случайное значение y , распределенное на отрезке $(0, z)$ с плотностью $\frac{\alpha e^{\alpha(y-z)}}{1 - e^{-\alpha z}}$, и тогда машина перейдет в группу $P_{y,t}$.

3. С дополнительной вероятностью $1 - \mu dt - \lambda(1 - e^{-\alpha z}) dt$ не произойдет отказа машины и не возникнет необходимости в ее досрочной продаже. Тогда ИВ машины не изменится, и она перейдет в группу $P_{z,t}$.

В таком случае имеем

$$L(z, t + dt) = \mu dt N(z, t) + \lambda dt \int_0^z \alpha e^{\alpha(y-z)} L(y, t) dy + [1 - \mu dt - \lambda(1 - e^{-\alpha z}) dt] L(z, t),$$

откуда после простых преобразований находим

$$\frac{\partial L(z, t)}{\partial t} = \mu[N(z, t) - L(z, t)] - \lambda M(z, t), \quad (10)$$

где

$$M(z, t) = \int_0^z \alpha e^{\alpha(y-z)} [L(z, t) - L(y, t)] dy. \quad (11)$$

Решать систему уравнений (9)–(11) с граничными условиями $L(z, 0) = N(z, 0) = V(z)$ приходится численными методами.

8. Учет инфляции

Анализ цен первичного рынка позволяет оценщикам установить фактическую динамику цен новых машин определенной марки и прогнозировать темп их роста на ближайшую перспективу. Однако, поскольку все подержанные машины отличаются друг от друга, установить темп роста их цен невозможно. Поэтому оценщики принимают, что цены подержанных машин растут с тем же темпом, что и цены новых. Такая инфляция в [Смоляк, 2016; Смоляк, 2020] была названа *групповой*. В условиях групповой инфляции отношение РС актива к РС его нового аналога (коэффициент или процент годности) зависит только от технического состояния объекта, но не от той даты, на которую он оценивается. На этом основании РС подержанного актива оценщики часто находят, применяя к РС его нового аналога процент годности (или дополняющий его до 100 % процент обесценения/износа), рассчитываемый по данным вторичного рынка за более ранний период.

Эти соображения позволяют считать, что на рынке машин данной марки имеет место групповая инфляция, и оценщику известен ее темп i (темп роста РС новых машин) на небольшой период (сравнимый со средним сроком продажи), начинающийся с даты оценки. В таком случае, если машина некоторого возраста t на дату оценки имеет РС $V(t)$, через небольшое время s РС (другой) машины того же возраста будет в e^{is} раз больше, т. е. составит $e^{is}V(t)$.

Напомним, что за единицу измерения времени мы приняли средний срок службы машин T . Поэтому темп групповой инфляции i будет безразмерной величиной, рассчитываемой как произведение темпа роста цен новых машин j (в долях единицы в год) на средний срок службы машин (в годах) T .

Если теперь повторить вывод формул (1)–(3), учитывая групповую инфляцию, мы увидим, что в них доналоговая безрисковая *номинальная* ставка дисконтирования r заменится на $r - i$. Такая (скорректированная с учетом групповой инфляции) ставка по экономическому содержанию близка к аналогичной *реальной* ставке. Различие только в том, что при расчете реальной ставки номинальная ставка уменьшается на средний темп роста цен в стране, а не на темп роста цен машин конкретной марки.

Остается заметить, что групповая инфляция не влияет на срок службы машин, а рассуждения в § 5 не изменятся, если стоимости всех рассматриваемых в этом разделе машин измерять в одних и тех же ценах на дату оценки. Поэтому формулы (5) и (6) в условиях групповой инфляции не изменяются.

Таким образом, построенная модель останется справедливой в условиях групповой инфляции, если во всех полученных выше формулах уменьшить «обычную» ставку дисконтирования на темп роста цен новых машин. При этом безразмерная ставка дисконтирования r заменится на $r - i$.

9. Учет утилизационной стоимости

До сих пор для упрощения изложения утилизационная стоимость машин (УС) считалась нулевой. При ненулевой УС можно применить тот же прием, что и в [Смоляк, 2023, § 2.2]. Назовем чистой рыночной стоимостью (ЧРС) машины разность между ее РС и УС, а интенсивностью чистых выгод (ИЧВ) — разность между ИВ и произведением ставки дисконтирования (r) на УС. Можно показать, что при этом все проведенные ранее рассуждения останутся в силе, если в них заменить РС и ИВ соответствующими чистыми характеристиками (ЧРС и ЧИВ). Однако при этом придется изменить формулу (8) для определения среднего коэффициента годности — с учетом УС она примет вид

$$k(t) = (1 - u) \frac{L(1, t)}{V(1)} + u, \quad (12)$$

где u — относительная УС.

10. Пример 2

Рассмотрим машины со средним сроком службы 10 лет и нулевой УС. Тогда при ставке дисконтирования, скорректированной с учетом групповой инфляции, $0,08 \text{ год}^{-1}$ соответствующая безразмерная ставка составит $r = 0,8$. На рис. 4 представлены рассчитанные по формуле (8) зависимости среднего коэффициента годности (СКГ) от возраста машины (в нашей модели он совпадает с относительным возрастом, т.е. отношением возраста к среднему сроку службы) при $\nu = 0,35$, $S = 0,05$ (средний срок продажи — 0,5 года) и разных значениях опасности досрочных продаж μ .

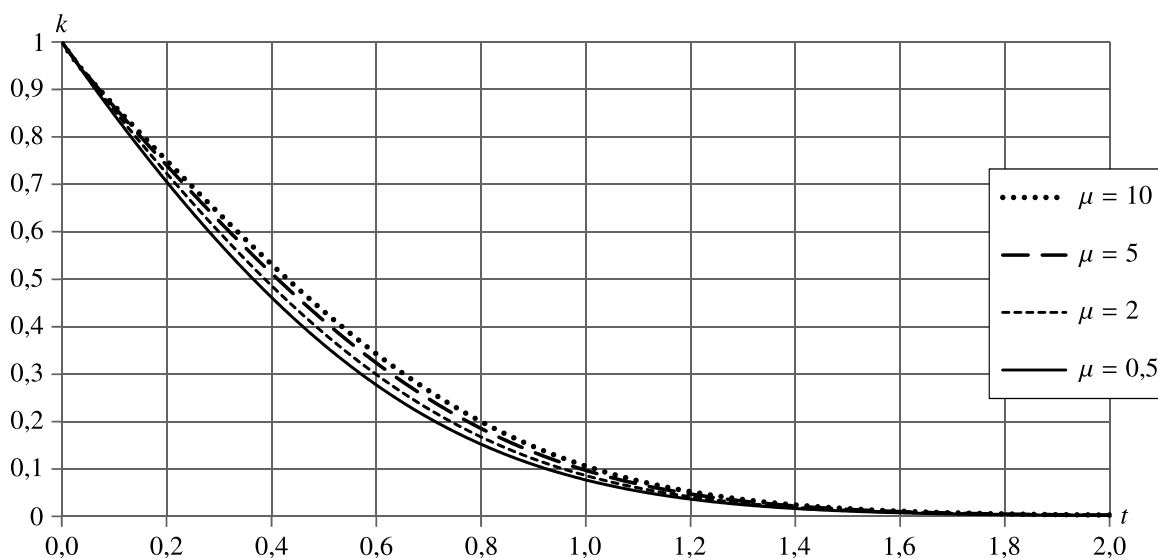


Рис. 4. Зависимости среднего коэффициента годности от относительного возраста машин при $\nu = 0,35$, $S = 0,05$ и разных значениях опасности досрочных продаж (μ)

Как видим, СКГ мало меняются при существенных изменениях опасности досрочных продаж. Более того, для $\nu = 0,65$ соответствующие зависимости на графике оказываются практически неразличимыми.

Влияние среднего срока продажи (S) на СКГ при $\nu = 0,65$ представлено на рис. 5. Здесь рост S приводит к небольшому уменьшению коэффициентов годности (при $\nu = 0,35$ на графике оно незаметно). Как видим, опасность досрочных продаж и средний срок продажи слабо влияют на зависимости $k(t)$, тогда как изменение коэффициента вариации срока службы на них влияет существенно.

Расчеты показывают также, что зависимости СКГ от относительного возраста машины мало меняются при изменении безразмерной ставки дисконтирования r , а следовательно, ими можно пользоваться и при других значениях «обычной» ставки дисконтирования и среднего срока службы машин.

11. Выводы

Мы предлагаем модель процесса использования машины, ориентированную на оценку ее рыночной стоимости и учитывающую вероятностный характер процесса ее деградации и возможность событий, требующих досрочной (до окончания срока службы) продажи машины. Модель позволяет учесть также влияние инфляции и утилизационной стоимости машин.

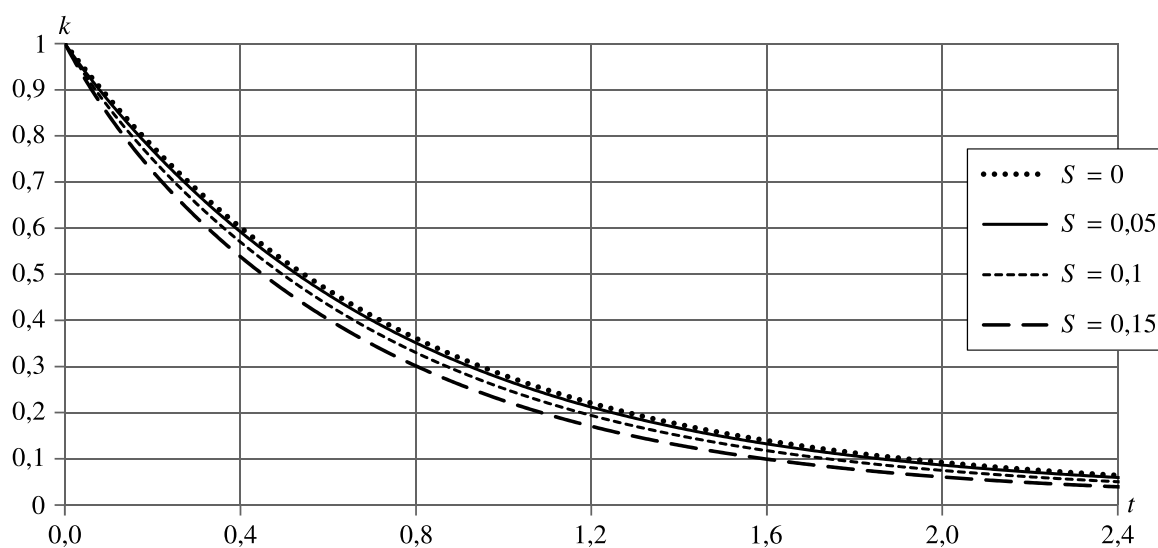


Рис. 5. Зависимости среднего коэффициента годности от относительного возраста машин при $\nu = 0,65$, $\mu = 2$ и разных значениях среднего срока продаж S

Анализ модели и экспериментальные расчеты по ней позволяют сделать ряд важных для практики выводов. В процессе использования машин может возникать необходимость в их досрочной продаже. О том, насколько часто возникает такая необходимость, можно судить по доле подержанных машин, представленных на вторичном рынке. К тому же опасность досрочных продаж повышается как при ухудшении правовой защиты бизнеса, так и в условиях ускорения технического прогресса, требующих обновления производственного аппарата. Мы показываем, что увеличение опасности досрочных продаж снижает рыночную стоимость машин, как подержанных, так и новых (что при их стоимостной оценке не учитывается), а также приводит к увеличению среднего значения и коэффициента вариации срока службы машин (что не учитывается в теории надежности). В то же время зависимости коэффициента годности машин от относительного возраста мало зависят от опасности досрочных продаж и среднего времени продажи. Это оправдывает применение таких зависимостей для машин, работающих в разных условиях, однако только тогда, когда изменение условий работы не сказывается на коэффициенте вариации срока службы. Важно, что зависимости средних коэффициентов годности машин от возраста существенно зависят от коэффициента вариации срока их службы. Между тем сейчас ни оценщики, ни специалисты по теории надежности не уделяют должного внимания оценке коэффициентов вариации срока службы машин. Представляется, что разработка соответствующих методов позволит более обоснованно решать задачи стоимостной оценки, в том числе и в системах национальных счетов.

Список литературы (References)

- Аркин В. И., Слостников А. Д., Смоляк С. А. Оценка имущества и бизнеса в условиях неопределенности (проблемы «хвоста» и «начала») // Аудит и финансовый анализ. Приложение. Сборник научных трудов. — 2006. — № 1. — С. 81–92.
- Arkin V. I., Slastnikov A. D., Smolyak S. A. Otsenka imushchestva i biznesa v usloviyakh neopredelonnosti (problemy “khvosta” i “nachala”) [Valuation of property and business under uncertainty (beginning and ending problems)] // Audit i finansovy analiz. Prilozheniye. Sbornik nauchnykh trudov. — 2006. — No. 1. — P. 81–92 (in Russian).
- Лейфер Л. А. Вероятностно-статистические модели ликвидности рынка недвижимости // Имущественные отношения в Российской Федерации. — 2022. — № 5 (248). — С. 35–51.

- Leifer L. A.* Veroyatnostno-statisticheskiye modeli likvidnosti rynka nedvizhimosti [Probabilistic and statistical models of real estate market liquidity] // *Imushchestvennyye otnosheniya v Rossiyskoy Federatsii*. — 2022. — No. 5 (248). — P. 35–51 (in Russian).
- Лейфер Л. А.* (ред.). Справочник оценщика машин и оборудования: корректирующие коэффициенты и характеристики рынка машин и оборудования. — Изд. 3-е. — Нижний Новгород: Приволжский центр методического и информационного обеспечения оценки, 2023.
- Leifer L. A.* (ed.). *Spravochnik otsenshchika mashin i oborudovaniya: correctiruyushchie coefficient i kharakteristiki rynka mashin i oborudovaniya*. — 3rd ed. — Nizhny Novgorod: Privolzhsky centr metodicheskogo i infomatsionnogo obespecheniya otsenki, 2023 (in Russian).
- Острейковский В. А.* Теория надежности: учебник для вузов. — М.: Высшая школа, 2003. — 463 с.
- Ostreykovsky V. A.* *Teoriya nadezhnosti: uchebnik dlya vuzov* [Reliability Theory: A Textbook for High Schools]. — Moscow: Higher School, 2003 (in Russian).
- Смоляк С. А.* Зависимость стоимости машин от возраста: проблемы и модели // *Аудит и финансовый анализ*. — 2014. — № 5. — С. 138–150.
- Smolyak S. A.* *Zavisimost' stoimosti mashin ot vozrasta: problemy i modeli* [Dependence of the market value of machinery and equipment on age: problems and models] // *Audit i finansovy analiz*. — 2014. — No. 5. — P. 138–150 (in Russian).
- Смоляк С. А.* О досрочной продаже активов // *Экономика и математические методы*. — 2023. — Т. 59, № 4. — С. 86–100.
- Smolyak S. A.* *O dosrochnoy prodazhe aktivov* [About premature sale of assets] // *Economica i matematicheskie metody*. — 2023. — Vol. 59, No. 4. — P. 86–100 (in Russian).
- Смоляк С. А.* Пуассоновская модель деградации машин: применение к стоимостной оценке // *Журнал Новой экономической ассоциации*. — 2020. — № 4 (48). — С. 63–84.
- Smolyak S. A.* *Puassonovskaya model degradacii mashin: primeneniye k stoimostnoy otsenke* [The Poisson process of machinery degradation: application to valuation] // *Journal of the New Economic Association*. — 2020. — Vol. 4 (48). — P. 63–84 (in Russian).
- Смоляк С. А.* Стоимостная оценка машин и оборудования (секреты метода ДДП). — М.: Опцион, 2016.
- Smolyak S. A.* *Stoimostnaya otsenka mashin i oborudovaniya (secrety metoda DCF)* [Machinery and equipment valuation (secrets of the DCF method)]. — Moscow: Option, 2016 (in Russian).
- Смоляк С. А.* Теория и методы стоимостной оценки машин и оборудования: учебное пособие. — М.: ИНФРА-М, 2022.
- Smolyak S. A.* *Teoriya i metody stoimostnoy otsenki mashin i oborudovaniya: uchebnoye posobiye* [Theory and methods of machinery and equipment valuation: textbook]. — Moscow: INFRA-M, 2022 (in Russian).
- СНС-2008. Система национальных счетов 2008. — Нью-Йорк: Европейская комиссия, Международный валютный фонд, Организация экономического сотрудничества и развития, Организация объединенных наций, Всемирный банк, 2012.
- System of National Accounts (SNA-2008)*. — New York: European Commission, International Monetary Fund, Organisation for Economic Co-operation and Development, United Nations and World Bank, 2009. (Russ. ed.: SNS-2008. Sistema natsional'nykh schetov 2008. — N'yu-Iork: Evropeiskaya komissiya, Mezhdunarodnyi valyutnyi fond, Organizatsiya ekonomicheskogo sotrudnichestva i razvitiya, Organizatsiya ob"edinennykh natsii, Vsemirnyi bank, 2012.)
- Федотова М. А., Ковалев А. П., Кушель А. А., Королев И. В., Игонин В. В.* Оценка машин и оборудования: учебник / под ред. М. А. Федотовой. — 2-е изд. — М.: ИНФРА-М, 2018. — 324 с.
- Fedotova M. A., Kovalyov A. P., Kushel A. A., Korolyov I. V., Igonin V. V.* *Otsenka mashin i oborudovaniya: uchebnik* [Machinery and equipment valuation: textbook] / pod red. M. Fedotova. — 2nd ed. — Moscow: INFRA-M, 2018 (in Russian).
- 2019 Cost Index & Depreciation Schedules. Raleigh: North Carolina Department of Revenue.
- 2020 Personal Property Manual. Arizona Department of Revenue. https://azdor.gov/sites/default/files/media/PROPERTY_pp-manual.pdf
- АН 581. Assessor's Handbook, Section 581. Equipment and Fixtures Index, Percent Good and Valuation Factors. California State Board of Equalization. January 2019.
- АН 582. Assessor's Handbook, Section 582. The Explanation of the derivation of equipment percent good factors. California state board of equalization. — February 1981. — Reprinted August 1997.
- IVS 2022. International Valuation Standards. Effective 31 January 2022. — International Valuation Standards Council.

-
- Li W., Pham H.* Reliability modeling of multi-state degraded systems with multi-competing failures and random shocks // IEEE Transactions on Reliability. — 2005. — Vol. 54, No. 2. — P. 297–303.
- Lin Y.H., Li Y.F., Zio E.* Integrating random shocks into multi-state physics models of degradation processes for component reliability assessment // IEEE Transactions on Reliability. — 2014. — Vol. 64, No. 1. — P. 154–166.
- Nakagawa T.* Shock and damage models in reliability theory. — Springer, 2007.
- Wang Z., Huang H.-Z., Li Y., Xiao N.-C.* An approach to reliability assessment under degradation and shock process // IEEE Transactions on Reliability. — 2011. — Vol. 60, No. 4. — P. 852–863.