

УДК: 519.876.5

Оптимизация стратегии геометрического анализа в автоматизированных системах проектирования

А. Н. Божко^a, В. Э. Ливанцов^b

Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана,
Россия, 105005, Москва, ул. 2-я Бауманская, д. 5, стр. 1

E-mail: ^a bozhkoan@bmstu.ru, ^b viktor.livantsov@yandex.ru

Получено 30.09.2023, после доработки — 01.06.2024.

Принято к публикации 07.06.2024.

Автоматизация проектирования процессов сборки сложных изделий — это важная и сложная научно-техническая проблема. Последовательность сборки и содержание сборочных операций в значительной степени зависят от механической структуры и геометрических свойств изделия. Приведен обзор методов геометрического моделирования, которые применяются в современных системах автоматизированного проектирования. Моделирование геометрических препятствий при сборке методами анализа столкновений, планирования перемещений и виртуальной реальности требует очень больших вычислительных ресурсов. Комбинаторные методы дают только слабые необходимые условия геометрической разрешимости. Рассматривается важная задача минимизации числа геометрических проверок при синтезе сборочных операций и процессов. Формализация этой задачи основана на гиперграфовой модели механической структуры изделия. Эта модель дает корректное математическое описание когерентных и секвенциальных сборочных операций, которые доминируют в современном дискретном производстве. Введено ключевое понятие геометрической ситуации. Это такая конфигурация деталей при сборке, которая требует проверки на свободу от препятствий, и эта проверка дает интерпретируемые результаты. Предложено математическое описание геометрической наследственности при сборке сложных изделий. Аксиомы наследственности позволяют распространить результаты проверки одной геометрической ситуации на множество других ситуаций. Задача минимизации числа геометрических тестов поставлена как неантагонистическая игра ЛПР и природы, в которой требуется окрасить вершины упорядоченного множества в два цвета. Вершины представляют собой геометрические ситуации, а цвет — это метафора результата проверки на свободу от коллизий. Ход ЛПР заключается в выборе неокрашенной вершины, ответ природы — это цвет вершины, который определяется по результатам моделирования данной геометрической ситуации. В игре требуется окрасить упорядоченное множество за минимальное число ходов. Обсуждается проектная ситуация, в которой ЛПР принимает решение в условиях риска. Предложен способ подсчета вероятностей окраски вершин упорядоченного множества. Описаны основные чистые стратегии рационального поведения в данной игре. Разработан оригинальный синтетический критерий принятия рациональных решений в условиях риска. Предложены две эвристики, которые можно использовать для окрашивания упорядоченных множеств большой мощности и сложной структуры.

Ключевые слова: сборка, последовательность сборки, СААР-система, САПР, анализ геометрических препятствий

UDC: 519.876.5

Optimization of geometric analysis strategy in CAD-systems

A. N. Bozhko^a, V. E. Livantsov^b

Bauman Moscow State University,
5/1 2-ya Baumanskaya st., Moscow, 105005, Russia

E-mail: ^a bozhkoan@bmstu.ru, ^b viktor.livantsov@yandex.ru

Received 30.09.2023, after completion — 01.06.2024.

Accepted for publication 07.06.2024.

Computer-aided assembly planning for complex products is an important engineering and scientific problem. The assembly sequence and content of assembly operations largely depend on the mechanical structure and geometric properties of a product. An overview of geometric modeling methods that are used in modern computer-aided design systems is provided. Modeling geometric obstacles in assembly using collision detection, motion planning, and virtual reality is very computationally intensive. Combinatorial methods provide only weak necessary conditions for geometric reasoning. The important problem of minimizing the number of geometric tests during the synthesis of assembly operations and processes is considered. A formalization of this problem is based on a hypergraph model of the mechanical structure of the product. This model provides a correct mathematical description of coherent and sequential assembly operations. The key concept of the geometric situation is introduced. This is a configuration of product parts that requires analysis for freedom from obstacles and this analysis gives interpretable results. A mathematical description of geometric heredity during the assembly of complex products is proposed. Two axioms of heredity allow us to extend the results of testing one geometric situation to many other situations. The problem of minimizing the number of geometric tests is posed as a non-antagonistic game between decision maker and nature, in which it is required to color the vertices of an ordered set in two colors. The vertices represent geometric situations, and the color is a metaphor for the result of a collision-free test. The decision maker's move is to select an uncolored vertex; nature's answer is its color. The game requires you to color an ordered set in a minimum number of moves by decision maker. The project situation in which the decision maker makes a decision under risk conditions is discussed. A method for calculating the probabilities of coloring the vertices of an ordered set is proposed. The basic pure strategies of rational behavior in this game are described. An original synthetic criterion for making rational decisions under risk conditions has been developed. Two heuristics are proposed that can be used to color ordered sets of high cardinality and complex structure.

Keywords: assembly, assembly sequence, CAAP-system, CAD, analysis of geometric obstacles

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2024, vol. 16, no. 4, pp. 825–840 (Russian).

Введение

Автоматизированное проектирование процессов сборки сложных изделий (computer aided assembly planning, СААР) — это важная и актуальная научно-техническая проблема. Она активно обсуждается в современных публикациях [Ghandi, Masehian, 2015].

Состав и содержание сборочных операций в значительной степени зависят от геометрии деталей и механической структуры изделия. Монтаж детали возможен, если существует свободное от столкновений перемещение детали в служебное положение в собираемой машине или приборе. При разработке процессов сборки в СААР-системах анализ препятствий необходимо выполнять многократно. В общем случае он требуется для каждой монтажной операции и всех вариантов ее исполнения. Это может приводить к факториальному росту сложности этой проектной процедуры в зависимости от числа деталей [Ghandi, Masehian, 2015]. Геометрические модели, которые используются для описания деталей в современных СААР-системах, не учитывают многочисленные конструктивно-технологические ограничения на сборку. В первую очередь это структурные ограничения, которые порождаются системой механических связей элементов изделия.

Для выбора рациональной последовательности сборки требуется множество альтернатив достаточно высокой мощности. Генерация такого множества при помощи самых развитых СААР-систем требует чрезмерно высоких вычислительных и временных затрат. Кроме того, геометрические решатели этих систем часто анализируют такие конфигурации деталей, которые заведомо не могут быть реализованы на практике.

Для повышения эффективности процедуры геометрического анализа в СААР-системах требуется разработать метод минимизации проверок на свободу от коллизий при сборке сложных технических систем. Он должен учитывать ограничения на последовательность и содержание сборочных операций, которые порождает структура механических связей изделия.

Модели и методы, которые применяются для моделирования геометрических препятствий в современных автоматизированных системах проектирования, можно разделить на четыре группы [Jiménez, Thomas, Torras, 2001; González et al., 2015; Yin, Ding, Xiong, 2004; Божко, Родионов, 2022] (рис. 1).

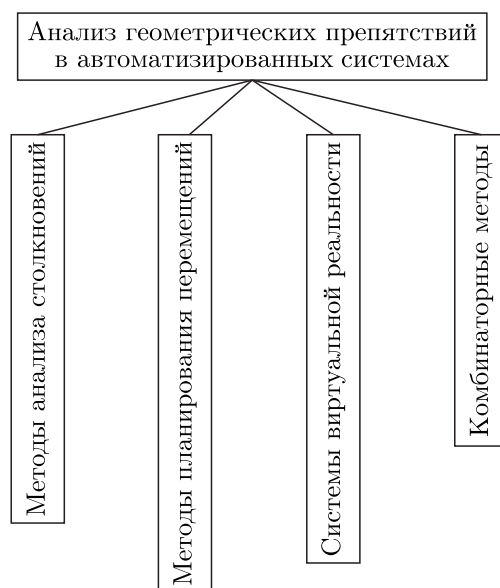


Рис. 1. Классификация методов анализа геометрических препятствий в автоматизированных системах

Методы анализа столкновений

Методы анализа столкновений (collision detection) основаны на моделировании движения детали в среде с препятствиями. Проверяется пересечение модели детали со статическими элементами технологической системы. Мобильный и все статические объекты представляются простыми геометрическими фигурами: сферами, параллелепипедами, полиэдрами, выпуклыми оболочками и др. [Jiménez, Thomas, Torras, 2001].

Детали современных изделий могут иметь сложную геометрическую форму, поэтому их аппроксимация простыми оболочками часто не обеспечивает необходимую точность моделирования. Применение этих методов в СААР-системах требует высоких вычислительных ресурсов и часто не позволяет получить необходимую точность результатов.

В [Eng et al., 1999] описаны эвристические правила, которые позволяют уменьшить трудоемкость геометрического анализа при сборке сложных изделий.

- Детали, которые не имеют общих поверхностей с выбранной деталью, очевидно, не могут образовывать локальных препятствий при разборке, поэтому они исключаются из геометрического анализа.
- Не проверяются детали, у которых нет степеней свободы в направлении разборки.

В [Miller, Hofman, 2000] описан метод прямого анализа геометрических препятствий. Детали аппроксимируются прямоугольными оболочками. Из вершин оболочки проводят лучи в направлении разборки изделия. Проверяют пересечение лучей с собранной частью изделия.

В [Hoffman, 1991] предложен геометрический решатель СААР-системы BRAEN (В-гер Assembly Engine). В этой системе все детали изделия представляются моделями В-гер, которые состоят из кусков бисплайновых поверхностей. Эксперт выбирает прямолинейное направление разборки. Куски геометрической модели мобильной детали по очереди перемещаются в заданном направлении. Проверяют пересечение подвижных и статических кусков.

В [Romney et al., 1995] предложен способ идентификации препятствий по проекциям деталей на выбранную проекционную плоскость. Если проекции двух деталей не пересекаются, то в направлении перпендикуляра к проекционной плоскости они не образуют препятствий друг для друга. В противном случае нужно выбрать другое направление разборки и повторить проверку.

В [Pan, Smith, Smith, 2005] предложен развитый метод геометрического анализа, основанный на прямом моделировании препятствий. Рассматриваются прямолинейные траектории сборки/разборки в шести направлениях: $\pm x$, $\pm y$, $\pm z$. Для каждого направления формируется матрица «непересечений» (interference-free matrix). Это квадратная матрица $\bar{A} = \|a_{ij}\|_{n \times n}$, где n — число деталей изделия. Элемент $a_{ij} = 1$ тогда и только тогда, когда деталь j не создает препятствий для детали i при перемещении последней вдоль одной из координатных осей. Предложен способ извлечения геометрических данных из STEP-файла, необходимых для формирования матриц непересечения.

Методы планирования перемещений

Методы планирования перемещений (motion planning) активно разрабатываются и применяются в современной робототехнике. В [Weiwei, Kensuke, Kazuyuki, 2018; Halperin, Latombe, Wilson, 2000] описано использование этой парадигмы для автоматизированного проектирования сборочных планов. Изделие рассматривается как геометрическая система, в которой действуют только геометрические ограничения на перемещения деталей, а каждая деталь считается абсолютно твердым телом. Поиск допустимой траектории перемещения выполняется в шестимерном конфигурационном пространстве, в котором мобильная деталь представляется точкой.

Для решения данной задачи в основном используются различные модификации метода PRM (probabilistic roadmap method). Применение методов данной группы в СААР-системах ограничивается их высокой трудоемкостью, которая вызвана большой размерностью конфигурационного пространства.

Методы виртуальной реальности

Методы этой группы основаны на прямом анализе геометрических препятствий в системе виртуальной реальности (virtual reality, VR), средствами которой выполняется прототипирование сборочных операций и процессов. Оператор системы VR выполняет сборку цифровой модели изделия. Технические и программные средства VR обеспечивают погружение в трехмерную компьютерную реальность при помощи развитых средств визуального, тактильного и аудиоуправления [Seth, Vance, Oliver, 2011; Schenk, Straßburger, Kießner, 2005]. Методы виртуальной реальности широко применяются в современной промышленной практике: автомобилестроении, станкостроении и пр. Методы этой группы часто не обеспечивают высокую точность моделирования и не дают оснований для принятия оптимальных проектных решений.

Комбинаторные методы

Комбинаторные методы анализа препятствий основаны не на моделировании движения детали, а на исследовании локальной геометрии изделия. Как правило, методы этой группы позволяют формализовать только необходимые условия сборки/разборки. Это дает возможность отбросить заведомо нереализуемые проектные альтернативы без прямой проверки на свободу от столкновений.

Метод направленных блокирующих графов (directional blocking graph, *db*-граф) предложен в [Wilson, Latombe, 1994]. *Db*-граф представляет собой ориентированный граф, который описывает локальные препятствия при движении детали вдоль заданного прямолинейного направления. В терминах данной модели описаны необходимые условия разбираемости изделия в выбранном направлении.

В [Wilson, 1992] предложено обобщение *db*-графов — так называемые *ndb*-графы (non-directional blocking graphs). *Ndb*-граф — это разбиение полного телесного угла на секторы, в пределах которых не меняется *db*-граф, описывающий структуру локальных препятствий изделия. Предложен метод, который позволяет использовать данный аппарат для нелинейных траекторий разборки.

В [Krishnan, Sanderson, 1991] обсуждается поиск прямолинейных перемещений деталей при сборке/разборке изделия. Показано, что множество возможных траекторий такого вида является выпуклым полиэдральным конусом (polyhedral convex cone, *PCC*) в трехмерном пространстве. В статье предложен метод расчета *PCC*. Деталь не может быть удалена из состава изделия, если ее $PCC = \emptyset$.

В [Su, 2009] описан способ анализа геометрических препятствий при помощи пучка лучей. Предложена формализация так называемых минимальных блокирующих множеств (minimal constraint assembly state, MCAS). MCAS — это минимальное по составу множество деталей, которое препятствует движению детали при разборке изделия. Деталь должна быть собрана прежде, чем смонтировано ее минимальное блокирующее множество. При помощи MCAS можно сформировать некоторое отношение частичного порядка на множестве деталей. Для генерации MCAS(x) необходимо найти минимальную ДНФ характеристической булевой функции, которая формализует геометрические препятствия детали x .

Комбинаторный метод анализа локальных геометрических препятствий предложен в [Woo, Dutta, 1991]. Моделируется разборка изделия, в которой разрешены только прямолинейные движения деталей. Принято предположение о том, что все поверхности контакта деталей являются

кусками полиэдров. Сопряжения более сложной формы (цилиндрические, сферические и пр.) аппроксимируются при помощи фрагментов плоскостей. Совокупность векторов, которые задают прямолинейные движения при демонтаже деталей, образуют телесный угол в пространстве. Показано, что если этот угол больше развернутого, то демонтаж детали невозможен.

В [Srinivasan, Gadh, 2002] рассмотрена задача частичной разборки изделия (selective disassembly). Предложена модель, которая описывает геометрические препятствия при демонтаже деталей. Это так называемый *ri*-граф (removal influence graph), который описывает глубину вложения деталей в собранное изделие. Показано, что топологическая сортировка вершин ориентированного *ri*-графа представляет собой математическое описание возможной последовательности разборки изделия.

Рассмотренные подходы к моделированию геометрических препятствий при сборке/разборке изделия имеют ряд общих недостатков.

1. Они не учитывают структуру механических связей (соединений и сопряжений) изделия. По этой причине геометрический анализ может выполняться для заведомо нереализуемых проектных альтернатив, которые не обладают связностью и устойчивостью.
2. Геометрические проверки, вне зависимости от способа реализации, отличаются высокой вычислительной сложностью. В рассмотренных работах не ставится задача минимизации числа необходимых геометрических тестов.

Гиперграфовая модель механической структуры изделия

В современных CAD- и CAAP-системах принимается гипотеза о том, что на ранних этапах проектирования детали изделия являются абсолютно твердыми и невесомыми телами. В [Божко, 2018] показано, что при этом предположении адекватной математической моделью механической структуры изделия является так называемый *s*-гиперграф.

Приведем необходимые формальные определения. Изделию поставим в соответствие гиперграф $H = (X, R)$, у которого множество вершин $X = \{x_i\}_{i=1}^n$ представляет детали изделия, а множество ребер $R = \{r_j\}_{j=1}^m$ описывает минимальные геометрически координированные группировки деталей, полученные базированием по внутренним конструкторским базам (полные конструкторские базы)

На рис. 2 изображены конструкция крепления вала (а) и гиперграф H_a данной конструкции (б).

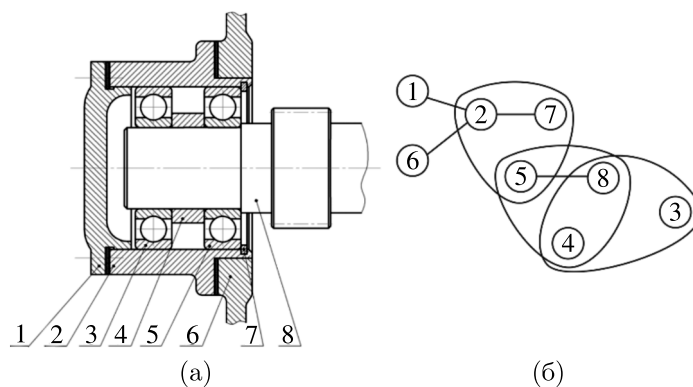


Рис. 2. Конструкция крепления вала (а), гиперграф H_a , который описывает механическую структуру данной конструкции (б). Вершины помечены числами, которые соответствуют номерам деталей

Подавляющее большинство современных технических систем (машин, механических приборов и др.) собираются посредством так называемых секвенциальных и когерентных сборочных операций [Божко, 2018; Божко, 2009; Божко, Родионов, 2022; Рыков, 2009]. Таковыми являются операции, которые реализуют одну или несколько механических связей (когерентность) и выполняются при помощи двух рабочих органов (секвенциальность).

Математическим описанием таких операций служит стягивание ребер второй степени гиперграфа $H = (X, R)$ (нормальное стягивание). Математической моделью сборочного плана служит последовательность нормальных стягиваний, которая преобразует $H = (X, R)$ в одновершинный гиперграф без петель [Божко, 2009].

На рис. 3 показана последовательность нормальных стягиваний гиперграфа H_a , которая описывает план сборки крепления вала.

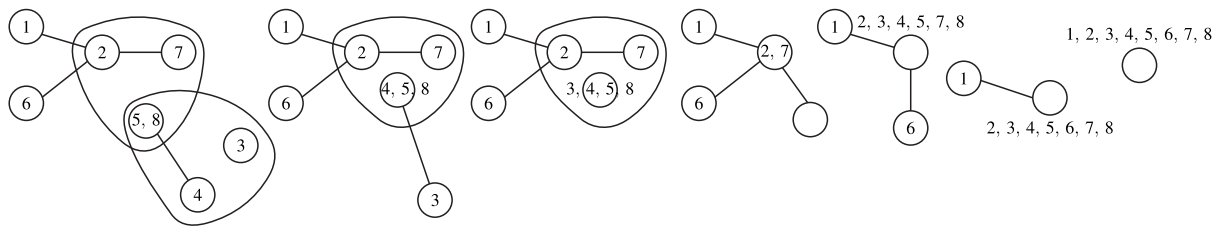


Рис. 3. Последовательность нормальных стягиваний гиперграфа H_a . Каждый следующий гиперграф получается из предыдущего стягиванием одного ребра второй степени. Данная последовательность гиперграфов представляет собой математическое описание плана сборки конструкции крепления вала, каждая операция которого обладает свойствами когерентности и секвенциальности

Определение 1. Гиперграф, который некоторой последовательностью нормальных стягиваний ребер преобразуется в одновершинный гиперграф без петель, называется s -гиперграфом.

Механическая структура изделия, которое может быть собрано при помощи когерентных секвенциальных операций, представляется в виде s -гиперграфа. Любой связный и координированный фрагмент технической системы (узел, сборочная единица и др.), который может быть собран независимо, описывается в виде s -подграфа s -гиперграфа.

Геометрические ситуации и геометрическая наследственность

Если задан s -гиперграф, то любой его s -подграф однозначно определяется множеством вершин.

Определение 2. Множество вершин s -подграфа будем называть s -множеством.

Пусть $A \subseteq X$ — s -множество, а $x \in X$ — деталь.

Определение 3. Пару (A, x) назовем геометрической ситуацией (ситуацией), если $A \cup \{x\}$ является s -множеством.

Геометрические ситуации формализуют такие конструктивные фрагменты, для которых проверка на геометрическую разрешимость имеет смысл и дает интерпретируемые результаты.

Определение 4. Ситуацию (A, x) назовем разрешенной, если установка x на собранный фрагмент A возможна, и запрещенной — в противном случае (рис. 4).

На рис. 4 показаны примеры двух ситуаций при установке подшипника на вал: разрешенная (а) и запрещенная (б).

Пусть (A, x) и (B, x) — две геометрические ситуации такие, что $A \subseteq B$.

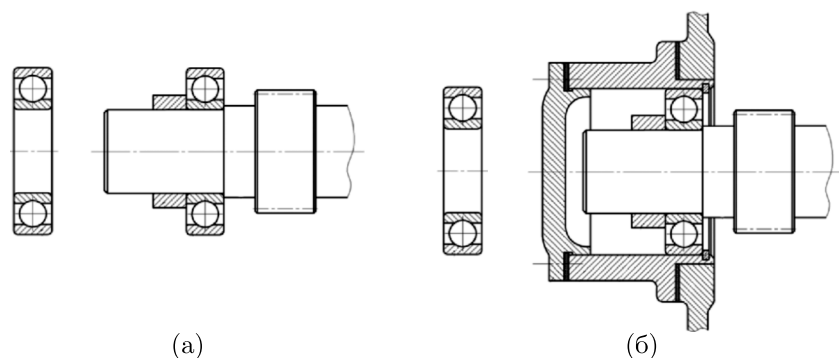


Рис. 4. Разрешенная геометрическая ситуация. Установка подшипника возможна (а). Запрещенная геометрическая ситуация. Установка подшипника невозможна (б)

Утверждение 1. Если ситуация (A, x) является запрещенной, то и (A, x) — запрещенная.

Утверждение 2. Если ситуация (B, x) — разрешенная, то и (A, x) является разрешенной.

Рассмотрим множество всех ситуаций $GS(x)$, связанных с установкой детали x . Введем на нем частичный порядок, индуцированный включением левых частей ситуаций, то есть $(A, x) \leq (B, x)$ тогда и только тогда, когда $A \subseteq B$.

На рис. 5 показаны конструкция приводного вала (а) и упорядоченное множество $GS(3)$ (б), описывающее все ситуации установки детали 3.

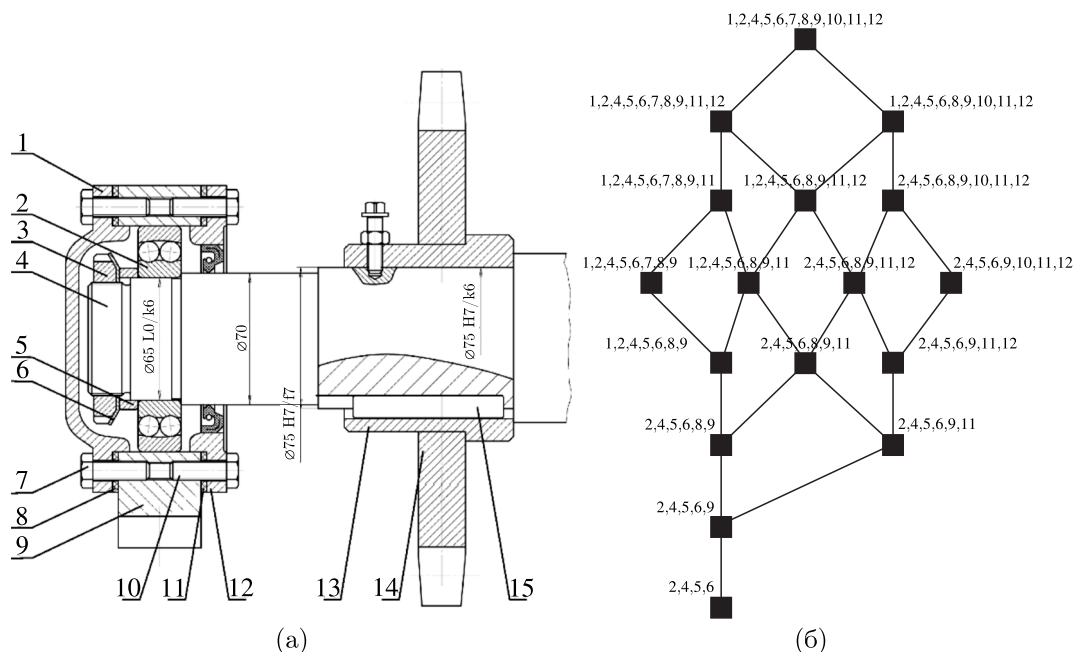


Рис. 5. Приводной вал (а). Упорядоченное множество всех геометрических ситуаций $GS(3)$, связанных с установкой гайки 3. Вершины упорядоченного множества представляют собой левые части геометрических ситуаций, на которые возможна установка детали 3 (б)

Игра $\Gamma(GS)$. Основные положения

Пусть выбрана для проверки геометрическая ситуация (A, x) , которой соответствует определенная вершина упорядоченного множества $GS(x)$. Если проверка на свободу от препятствий

дала положительный результат (то есть данная ситуация разрешимая), то все вершины, сравнимые с (A, x) и расположенные ниже нее, также будут разрешимыми. И наоборот, если проверка дала отрицательный результат, то все сравнимые вершины выше нее будут неразрешимыми.

Далее будем изображать вершины, описывающие неразрешимые ситуации, черным цветом, а разрешимые — белым. Задачу анализа геометрических препятствий можно сформулировать как игру лица, принимающего решение (ЛПР), и природы по окрашиванию вершин упорядоченного множества $GS(x)$ в два цвета.

Игра начинается с неокрашенного множества $GS(x)$. Ход ЛПР заключается в выборе неокрашенной вершины. Ответ природы — это цвет вершины: черный или белый. Если вершина черная, то все вершины верхнего конуса получают черный цвет. Если вершина белая, то все вершины нижнего конуса окрашиваются в белый цвет. После этого игра продолжается на оставшейся неокрашенной части упорядоченного множества $GS(x)$. Требуется выбрать такую последовательность вершин, которая окрашивает все множество за наименьшее число ходов.

Более формально: пусть P — произвольное упорядоченное множество и $y \in P$ — его элемент. Обозначим через $y^\Delta = \{a \in P \mid a \geq y\}$ и $y^\nabla = \{a \in P \mid a \leq y\}$ верхний и нижний конусы элемента y в P . Введем компактное обозначение:

$$y_i^{\text{con}} = \begin{cases} y_i^\Delta, & \text{если вершина } y_i \text{ черная,} \\ y_i^\nabla, & \text{если вершина } y_i \text{ белая.} \end{cases}$$

Стратегия первого игрока представляет собой последовательность вершин (y_1, y_2, \dots, y_k) , $y_i \in GS$, $i = \overline{1, k}$, такую, что $GS_1 = GS \setminus y_1^{\text{con}}$, $GS_2 = GS_1 \setminus y_2^{\text{con}}$, \dots , $GS_k = GS_{k-1} \setminus y_k^{\text{con}}$ и $GS_k = \emptyset$. Оптимальной стратегией ЛПР является последовательность вершин минимальной длины.

Обозначим эту игру как $\Gamma(GS)$. Отметим две ее особенности. Во-первых, это неантагонистическая игра, поскольку второму игроку (природе) не важен результат и он не способен на осмысленные стратегические действия. Во-вторых, комбинаторное разнообразие упорядоченных множеств чрезвычайно велико, поэтому поиск оптимального аналитического решения для общего случая заведомо обречен на неуспех. Это делает невозможным применение классического аппарата теории игр для решения данной задачи.

Выбор цвета вершины упорядоченного множества — это метафора геометрического теста, в результате которого проверяется возможность установки детали на некоторый собранный фрагмент изделия. Проверка на свободу от геометрических препятствий может быть выполнена любым методом, который удобен или доступен в данной проектной ситуации (см. рис. 1). Это массовая операция, которая должна быть осуществлена для каждой детали и каждого плана сборки изделия. Поэтому совокупные вычислительные затраты на геометрический анализ при автоматизированном проектировании процессов сборки сложных технических систем могут быть очень велики. Рациональная стратегия окрашивания упорядоченного множества $GS(x)$ позволяет сократить количество необходимых проверок на геометрическую разрешимость.

Представим игру $\Gamma(GS)$ как задачу принятия решений (ЗПР) с платежной матрицей, общий вид которой изображен на рис. 6.

	X	X^1	X^2	\dots	X^n
Y	$Y_1 = \text{черный}$	e_{11}	e_{12}	\dots	e_{1n}
	$Y_2 = \text{белый}$	e_{21}	e_{22}	\dots	e_{2n}

Рис. 6. Платежная матрица игры $\Gamma(GS)$ в условиях полной неопределенности. В этой матрице X и Y — первый (ЛПР) и второй (природа) игроки. X^j — ходы ЛПР, Y_i — ответы природы. e_{ij} — выигрыш ЛПР при выборе хода X^j и ответе природы Y_i

На этом рисунке X — лицо, принимающее решение; Y — природа; X^j , $j = \overline{1, n}$, — ходы ЛПР. Ход ЛПР заключается в выборе неокрашенной вершины упорядоченного множества GS . Ответы природы Y_1, Y_2 — это цвет выбранной вершины. Элемент матрицы e_{ij} , $i = \overline{1, 2}$, $j = \overline{1, n}$, — выигрыш, который получит ЛПР при выборе хода X^j и ответе природы Y_i . Этот выигрыш равен мощности конуса вершины в упорядоченном множестве GS : верхнего — если вершина черная, нижнего — если вершина белая.

В [Божко, 2009] рассмотрены способы решения этой ЗПР в условиях полной неопределенности. В этой информационной ситуации при любом ходе ЛПР ответы природы полагаются равновероятными. Для выбора оптимальных решений использованы классические критерии Вальда, Лапласа, Севиджа, Ходжа – Лемана и др. Выполнен обширный вычислительный эксперимент по окрашиванию упорядоченных множеств различной структуры. Он показал, что лучшие результаты дает критерий Гурвица с коэффициентом доверия $\frac{2}{3}$ и Байеса – Лапласа. Эти критерии позволяют окрасить упорядоченное множество за меньшее число ходов (проверок).

Рассмотрим другую информационную ситуацию ЛПР в игре $\Gamma(GS)$.

Игра $\Gamma(GS)$ в условиях риска

Пусть для каждого хода ЛПР известны вероятности ответов природы. Получить точные значения этих вероятностей не представляется возможным. Воспользуемся приближенной оценкой данных величин.

Увеличение числа деталей в собранном фрагменте в общем случае влечет за собой усложнение геометрии и рост числа потенциальных геометрических препятствий для монтажа других деталей. Это значит, что вероятность окраски в черный цвет растет с увеличением мощности левой части геометрической ситуации. Чем больше это число, тем выше находится соответствующая вершина в упорядоченном множестве GS .

Обозначим: $P_A(B)$ — вероятность события «вершина $A \in GS$ черная», $P_A(W)$ — «вершина A белая». Очевидно, что эти события образуют полную группу, то есть $P_A(B) + P_A(W) = 1$.

Пусть $a = \min_{(A, x) \in GS(x)} \{|A|\}$ — минимальная мощность левых частей всех геометрических ситуаций упорядоченного множества $GS(x)$. Тогда для оценки вероятности можно воспользоваться формулой $P_A(W) = \left(\frac{a}{|A|}\right)^k$. Здесь $k > 0$ — масштабирующий коэффициент, который позволяет настраивать скорость изменения вероятности. При помощи настройки данного коэффициента можно получить распределение вероятностей на вершинах упорядоченного множества GS , которое достоверно описывает реальную проектную ситуацию.

Полагаем, что у изделия существует хотя бы одна последовательность сборки, свободная от геометрических препятствий. Это значит, что для любой детали $x \in X$ существует разрешенная ситуация (B, x) , которая в игре $\Gamma(GS)$ окрашивается в белый цвет. Это значит, что для нее и всех ситуаций (A, x) таких, что $(A, x) \leq (B, x)$, вероятность $P_A(W) = 1$. Легко видеть, что предложенная формула расчета априорных вероятностей удовлетворяет данному условию, то есть $P_A(W) = \left(\frac{a}{|A_{\min}|}\right)^k = \left(\frac{a}{a}\right)^k = 1$.

На рис. 7 показана платежная матрица игры $\Gamma(GS)$ в условиях риска. Последняя строка матрицы содержит вероятности окраски вершин X^j , $j = \overline{1, n}$, в белый цвет $P_j(W)$. Очевидно, что $P_j(B) = 1 - P_j(W)$.

Чистые стратегии для игры $\Gamma(GS)$ в условиях риска

Все стратегии разыгрывания многошаговых неантагонистических игр можно разделить на чистые, смешанные и рандомизированные. В чистых стратегиях на каждом шаге игры ЛПР использует тот критерий, который был выбран априори. Стратегия называется смешанной, если

	X	X^1	X^2	\dots	X^n
Y	$Y_1 = \text{черный}$	e_{11}	e_{12}	\dots	e_{1n}
	$Y_2 = \text{белый}$	e_{21}	e_{22}	\dots	e_{2n}
P		$P_1(W)$	$P_2(W)$	\dots	$P_n(W)$

Рис. 7. Платежная матрица игры $\Gamma(GS)$ в условиях риска. В этой матрице X и Y — первый (ЛПР) и второй (природа) игроки. X^j — ходы ЛПР, Y_i — ответы природы. e_{ij} — выигрыш ЛПР при выборе хода X^j и ответе природы Y_i . $P_j(W)$ — вероятность того, что вершина упорядоченного множества, выбранная ЛПР, будет окрашена природой в белый цвет

в процессе игры ЛПР меняет критерий выбора лучшего хода. Игровая стратегия называется рандомизированной, если для выбора хода используется некоторый случайный механизм. То есть на каждом шаге выбирается ход в соответствии с некоторым заданным законом распределения вероятностей [Рыков, 2009].

На каждом шаге любой многошаговой игры смешанные и рандомизированные стратегии используют одну из чистых стратегий, которые применяются по выбору ЛПР или согласно заданному случайному закону. Поэтому чистые стратегии представляют собой элементный базис для синтеза различных комбинированных стратегий.

Рассмотрим основные чистые стратегии, которые можно применить для $\Gamma(GS)$ в общем случае, то есть когда на структуру упорядоченного множества GS не накладывается никаких ограничений, кроме требования связности. Введем короткое обозначение: $P(W) = P$.

Критерий Байеса (максимума ожидаемой полезности) заключается в максимизации математического ожидания выигрыша ЛПР [Рыков, 2009]. Для $\Gamma(GS)$ он представляется в виде $\max_j (e_{1j}P_j(B) + e_{2j}P_j(W))$. Поскольку $P(B) = 1 - P(W)$, получим

$$z_1 = \max_j (e_{1j} + (e_{2j} - e_{1j})P_j).$$

Критерий Гермейера максимизирует математическое ожидание худшего ответа природы на j -й ход ЛПР [Рыков, 2009]. Для $\Gamma(GS)$ этот критерий принимает вид

$$z_2 = \max_j E_j, \quad E_j = \min_j (e_{1j}(1 - P) + e_{2j}P).$$

Критерий наиболее вероятного состояния природы z_3 (модальный критерий) [Рыков, 2009]. Выбирается самый вероятный ответ природы. Полагается, что он обязательно произойдет, и далее ЗПР решается как полностью определенная. То есть выбирается вершина с максимальным выигрышем ЛПР. Для игры $\Gamma(GS)$ этот критерий имеет смысл для неокрашенных вершин, расположенных на удалении от центра упорядоченного множества GS .

Критерий Ходжа – Лемана. Это синтетический критерий, он основан на композиции критериев Байеса и Вальда [Рыков, 2009]. Для $\Gamma(GS)$ его можно записать в виде

$$z_4 = \max_j (\alpha \min(e_{1j}, e_{2j}) + (1 - \alpha)(e_{1j}P(B) + e_{2j}P(W))),$$

где $\alpha \in [0, 1]$ — так называемый коэффициент доверия. Когда он равен единице, то данный критерий совпадает с критерием Вальда, при $\alpha = 0$ получим критерий Байеса.

Критерий максимизации вероятности распределения [Рыков, 2009]. Обозначим: $\underline{\lambda} = \min_j \min(e_{1j}, e_{2j})$ и $\bar{\lambda} = \max_j \max(e_{1j}, e_{2j})$. Выберем некоторое пороговое значение: $\underline{\lambda} \leq \lambda \leq \bar{\lambda}$.

Согласно данному критерию лучшим считается ход ЛПР, у которого максимальная вероятность события «выигрыш ЛПР больше или равен λ ». Для $\Gamma(GS)$ критерий записывается в виде

$$z_5 = \max_j R_j, \quad R_j = \begin{cases} 0, & e_{1j}, e_{2j} < \lambda, \\ 1, & e_{1j}, e_{2j} \geq \lambda, \\ P_j, & e_{1j} < \lambda, e_{2j} \geq \lambda, \\ 1 - P_j, & e_{1j} \geq \lambda, e_{2j} < \lambda. \end{cases}$$

Критерий минимума среднего квадратичного отклонения [Рыков, 2009]. Для каждого хода ЛПР рассчитываются математическое ожидание выигрыша и значение среднего квадратичного отклонения. Лучшим считается такой ход, у которого величина отклонения минимальна. Для $\Gamma(GS)$ данный критерий записывается в виде

$$z_6 = \min_j \sqrt{(e_{1j} - M_j)^2 P(B) + (e_{2j} - M_j)^2 P(W)},$$

M_j — математическое ожидание выигрыша ЛПР при выборе хода X^j . Поскольку $P(B) = 1 - P$, то $M_j = e_{1j}(1 - P) + e_{2j}P$. После элементарных алгебраических преобразований критерий можно записать следующим образом:

$$z_6 = \min_j |e_{2j} - e_{1j}| \sqrt{P - P^2}.$$

Часто в различных задачах принятия решений распределение вероятностей ответов природы получено не на основе достоверной статистики, а задается эмпирически. В подобных информационных ситуациях нашли применение различные синтетические критерии, использование которых позволяет до некоторой степени компенсировать неточность исходных данных. Рассмотрим один из таких критериев применительно к игре $\Gamma(GS)$.

Синтетический критерий. Обозначим: $e_k = \max_j \min(e_{1j}, e_{2j})$. Введем некоторое пороговое значение: $\delta > 0$. Обозначим через J_1 множество номеров столбцов (рис. 6), для которых выполняется $J_1 = \{j \mid (e_k - \min(e_{1j}, e_{2j})) \leq \delta\}$. Обозначим через J_2 множество номеров столбцов, для которых выполняется $J_2 = \{j \mid (\max(e_{1j}, e_{2j}) - \max(e_{1k}, e_{2k})) \geq \delta\}$. Рассмотрим множество номеров $J = J_1 \cap J_2$. В столбцах с номерами из этого множества проигрыш ЛПР гарантированно меньше, чем значение выбранного порога, а выигрыш больше δ . Критерий

$$z_7 = \max_{j \in J} (e_{1j}(1 - P) + e_{2j}P)$$

из всех столбцов множества J выбирает столбец с максимальным математическим ожиданием выигрыша ЛПР.

В игре $\Gamma(GS)$ выбор хода зависит от многочисленных структурных и числовых характеристик упорядоченного множества GS . К числу таких характеристик относятся: высота упорядоченного множества, его ширина, связность, мера линейности, мощность максимальной антицепи, наличие максимального или минимального элементов в GS и многое другое. Все это делает задачу поиска рациональной смешанной или рандомизированной стратегий для $\Gamma(GS)$ очень трудной.

Эвристики для игры $\Gamma(GS)$

Линейная эвристика. Легко видеть, что в неупорядоченном множестве (антицепи) невозможно использовать утверждения о геометрической наследственности. Окрашивание такого множества требует n ходов, где n — число элементов множества. И наоборот, любую n -элементную цепь (упорядоченное множество без несравнимых элементов) можно окрасить за не более чем $(1 + n)(k + 2) - 2^{k+1}$, где $k = \lceil \log_2 n \rceil$ (целая часть от $\log_2 n$), ходов [Божко, 2018].

Обобщим это утверждение на произвольные упорядоченные множества. Можно полагать, что чем выше линейность упорядоченного множества, чем ближе его структура к цепи, тем меньше ходов потребуется ЛПР для его окраски.

Это предположение строго не доказано, но, как и любое хорошее эвристическое правило, согласуется с интуицией и подтверждается большим числом примеров. Точным показателем линейности упорядоченного множества GS служит число всех линейных продолжений $l(GS)$ этого множества. Для антицепи $l(GS) = n!$, для цепи $l(GS) = 1$.

Рассмотрим простой пример, показанный на рис. 8. Это упорядоченное множество состоит из n -элементной цепи C_n и одной вершины.

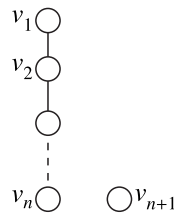


Рис. 8. Простое упорядоченное множество

На очередном шаге ЛПР может выбрать любую из $n + 1$ неокрашенных вершин. Чтобы избежать громоздких вычислений, рассмотрим два варианта и оценим их по наихудшему исходу. Если выбрать вершину v_{n+1} , то $l(C_n) = 1$ и в наихудшем случае для окрашивания цепи требуется n проверок. Если выбирается вершина $v_1(v_n)$, то $l(C_{n-1} \cup \{v_{n+1}\}) = n$ и для окрашивания этого упорядоченного множества потребуется $2(n - 1)$ проверок.

Линейную эвристику можно использовать как дополнительный критерий в случае, когда рассмотренные решающие правила выбирают для проверки несколько неокрашенных вершин. Рассмотрим пример, показанный на рис. 9. Пусть выбрана чистая стратегия ЛПР, основанная на использовании критерия Вальда.

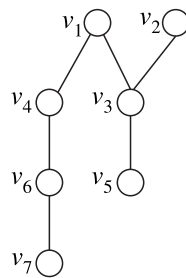


Рис. 9. Упорядоченное множество GS_1 с неокрашенными вершинами

Платежная матрица игры $\Gamma(GS_1)$ перед первым ходом ЛПР приведена в табл. 1.

Таблица 1. Платежная матрица игры $\Gamma(GS_1)$ перед первым ходом ЛПР. Заголовки столбцов — это вершины упорядоченного множества GS_1 . Цифры в ячейках матрицы означают мощности верхнего (черный цвет) и нижнего (белый цвет) конусов соответствующей вершины в упорядоченном множестве GS_1

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7
Черный	1	1	3	2	4	3	4
Белый	6	3	2	3	1	2	1

По критерию Вальда, оптимальным выбором ЛПП будут вершины v_3, v_4 или v_5 . На рис. 10 показаны все варианты упорядоченных множеств, которые получаются после исключения из GS_1 окрашенных вершин.

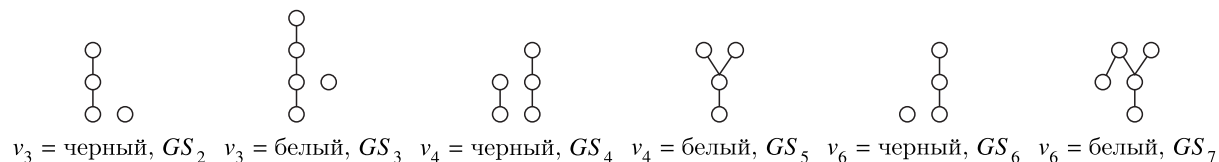


Рис. 10. Варианты игры $\Gamma(GS_1)$ после всех возможных ответов природы на первый ход ЛПП. После каждого хода ЛПП и ответа природы упорядоченное множество GS_1 распадается на два несвязных фрагмента, которые далее окрашиваются независимо друг от друга

Подсчитаем значения показателя $l()$ для всех упорядоченных множеств, показанных на рис. 10: $l(GS_2) = 4, l(GS_3) = 5, l(GS_4) = 10, l(GS_5) = 2, l(GS_6) = 4, l(GS_7) = 10$. Легко видеть, что выбор хода v_3 порождает упорядоченное множество с наименьшей мерой линейности, равной в сумме 9. Для вершины v_6 сумма линейных продолжений составляет 14.

Легко видеть, что $GS_3 = GS_7$. Подсчитаем число правильных окрасок для GS_3 и GS_7 . Обозначим это число $m()$: $m(GS_3) = 5$, а $m(GS_7) = 10$.

На рис. 11 показаны все правильные окраски упорядоченного множества GS_7 в два цвета.

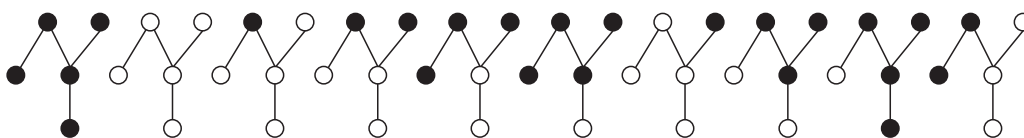


Рис. 11. Множество всех правильных окрасок упорядоченного множества GS_7 в два цвета

В общем случае вычисление числа линейных продолжений $l(GS)$ упорядоченного множества GS требует значительных вычислительных ресурсов. В качестве меры линейности можно использовать различные приближенные оценки этого числа, например: мощность максимальной антицепи, число упорядоченных пар и др.

Эвристика максимальной цепи. Часто в инженерной практике генерация всех допустимых альтернатив связана с очень большими затратами ресурсов или невозможна по техническим причинам. Это типичная проектная ситуация для автоматизированного проектирования последовательности сборки. Эвристика максимальной цепи позволяет получить большой объем геометрической информации при умеренных вычислительных затратах.

В упорядоченном множестве GS находится самая длинная цепь и окрашивается за не более чем $(1+n)(k+2) - 2^{k+1}$, где $k = \lceil \log_2 n \rceil$ (целая часть от $\log_2 n$), ходов. По правилам игры $\Gamma(GS)$ цвет вершин цепи распространяется на их верхние и нижние конусы, и процедура повторяется для неокрашенной части упорядоченного множества GS .

Заключение

Автоматизированное проектирование процессов сборки/разборки сложных изделий — это важная проблема современной информатики и теории проектирования. Последовательность и содержание сборочных операций в значительной степени зависят от геометрических свойств изделия. Приведен обзор методов моделирования геометрических препятствий, которые применяются в современных системах автоматизированного проектирования и управления. Анализ показал, что эти подходы не позволяют корректно поставить задачу минимизации числа необходимых

геометрических проверок при синтезе последовательности сборки/разборки сложного изделия. Введено важное понятие геометрической ситуации. Сформулированы два утверждения о геометрической наследственности. Задача минимизации числа геометрических проверок поставлена как неантагонистическая игра ЛПП с природой. В этой игре необходимо окрасить упорядоченное множество всех геометрических ситуаций в два цвета за наименьшее число ходов. Рациональная стратегия окрашивания позволяет минимизировать число проверок на свободу от геометрических препятствий при монтаже деталей и сборочных единиц. Рассмотрены чистые стратегии ЛПП в ситуации риска, когда известны вероятности ответов природы. Предложены два эвристических правила, которые могут быть использованы для рационального разыгрывания игры. Для выбора рациональной стратегии в игре $\Gamma(GS)$ необходимо выполнить вычислительный эксперимент по окраске упорядоченных множеств сходной структуры в два цвета. Авторы планируют посвятить этой теме отдельную статью.

Список литературы (References)

- Божко А. Н.* Анализ геометрической разрешимости при сборке сложных изделий как задача принятия решений // Математика и математическое моделирование. — 2018. — № 5. — С. 17–34.
Bozhko A. N. Analiz geometricheskoj razreshimosti pri sborke slozhnyh izdelij kak zadacha prinyatiya reshenij [Analysis of geometric reasoning in the assembly of complex products as a decision-making task] // Matematika i matematicheskoe modelirovanie. — 2018. — No. 5. — P. 17–34 (in Russian).
- Божко А. Н.* Игровое моделирование геометрического доступа // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э.Баумана. Электрон. журн. — 2009. — Эл № ФС 77-48211. — № 12. — <https://cyberleninka.ru/article/n/igrovoe-modelirovanie-geometricheskogo-dostupa/viewer>
Bozhko A. N. Igrovoe modelirovanie geometricheskogo dostupa [Game-theoretic modeling of geometric reasoning] // Nauka i obrazovanie. MG TU im. N. E. Bauman. Elektron. Journal. — 2009. — EL No. FS 77-48211. — No. 12. — <https://cyberleninka.ru/article/n/igrovoe-modelirovanie-geometricheskogo-dostupa/viewer> (in Russian).
- Божко А. Н., Родионов С. В.* Комбинаторные методы геометрической разрешимости в автоматизированных системах проектирования. Обзор // Информационные технологии. — 2022. — Т. 28, № 3. — С. 115–125.
Bozhko A., Rodionov S. Kombinatornye metody geometricheskoj razreshimosti v avtomatizirovannyh sistemah proektirovaniya. Obzor [Combinatorial methods of geometric reasoning in computer-aided design systems. Review] // Informacionnye tekhnologii. — 2022. — Vol. 28, No. 3. — P. 115–125 (in Russian).
- Рыков А. С.* Системный анализ: модели и методы принятия решений и поисковой оптимизации. — М.: Издательский дом МИСиС, 2009. — 608 с.
Rykov A. S. Sistemnyj analiz: modeli i metody prinyatiya reshenij i poiskovoj optimizacii [System analysis: models and methods of decision-making and search engine optimization]. — Moscow: Izdatel'skij dom MISiS, 2009. — 608 p. (in Russian).
- Bozhko A. N.* Hypergraph model for assembly sequence problem // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. IOP Publishing. — 2019. — Vol. 560, No. 1. — P. 012010.
- Bozhko A. N.* Mathematical modelling of mechanical structures and assembly processes of complex technical systems // International Russian Automation Conference. — 2021. — P. 80–91.
- Eng T.-H., Ling Z.-K., Olson W., Mclean Ch.* Feature-based assembly modeling and sequence generation // Computers & Industrial Engineering. — 1999. — Vol. 36, No. 1. — P. 17–33.
- Ghandi S., Masehian E.* Review and taxonomies of assembly and disassembly path planning problems and approaches // Computer-Aided Design. — 2015. — Vol. 67–68. — P. 58–86.
- González D. et al.* A review of motion planning techniques for automated vehicles // IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems. — 2015. — Vol. 17, No. 4. — P. 1135–1145.
- Halperin D., Latombe J.-C., Wilson R. H. A.* General framework for assembly planning: the motion space approach // Algorithmica. — 2000. — Vol. 26, No. 3–4. — P. 577–601.
- Hoffman R.* A common sense approach to assembly sequence planning // Computer-Aided Mechanical Assembly Planning. — 1991. — Vol. 148. — P. 289–313.
- Jiménez P., Thomas F., Torras C.* 3D collision detection: a survey // Computers & Graphics. — 2001. — Vol. 25, No. 2. — P. 269–285.

- Krishnan S., Sanderson A.* Reasoning about geometric constraints for assembly sequence planning // Robotics and Automation, 1991. Proceedings. — 1991. — Vol. 1. — P. 776–782.
- Miller J., Hofman R.* Automatic assembly planning with fasteners // Robotics and Automation. Proceedings. 1989 IEEE International Conference. — 1989. — Vol. 1. — P. 69–74.
- Pan Ch., Smith Sh., Smith G.* Determining interference between parts in CAD STEP files for automatic assembly planning // Journal of Computing and Information Science in Engineering. — 2005. — Vol. 5, No. 1. — P. 56–62.
- Roman S.* Lattices and ordered sets. — Springer, 2008. — 307 p.
- Romney B., Godard C., Goldwasser M., Ramkumar G.* An efficient system for geometric assembly sequence generation and evaluation // International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference. — 1995. — Vol. 17018. — P. 699–712.
- Schenk M., Straßburger S., Kießner H.* Combining virtual reality and assembly simulation for production planning and worker qualification // Proc. of International Conference on Changeable, Agile, Reconfigurable and Virtual Production. — 2005.
- Seth A., Vance J.M., Oliver J.H.* Virtual reality for assembly methods prototyping: a review // Virtual reality. — 2011. — Vol. 15, No. 1. — P. 5–20.
- Srinivasan H., Gadh R.* A non-interfering selective disassembly sequence for components with geometric constraints // IIE Transactions. — 2002. — Vol. 34, No. 4. — P. 349–361.
- Su Q.* A hierarchical approach on assembly sequence planning and optimal sequences analyzing // Robotics and Computer-Integrated Manufacturing. — 2009. — Vol. 25, No. 1. — P. 224–234.
- Weiwei W., Kensuke H., Kazuyuki N.* Assembly sequence planning for motion planning // Assembly Automation. — 2018. — Vol. 38, No. 2. — P. 195–206.
- Wilson R.* On geometric assembly planning. — PhD thesis. — Stanford: Stanford Univ., Dept. Comput. Sci., 1992. — 156 p.
- Wilson R., Latombe J.-C.* Geometric reasoning about mechanical assembly // Artificial Intelligence. — 1994. — Vol. 71, No. 2. — P. 371–396.
- Woo T., Dutta D.* Automatic disassembly and total ordering in three dimension // Journal of Engineering for Industry. — 1991. — Vol. 113, No. 2. — P. 207–213.
- Yin Z.P., Ding H., Xiong Y.L.* A virtual prototyping approach to generation and evaluation of mechanical assembly sequences // Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part B: Journal of Engineering Manufacture. — 2004. — Vol. 218, No. 1. — P. 87–102.