

УДК: 517.957, 537.611, 51-73

Локализованные нелинейные волны уравнения синус-Гордона в модели с тремя протяженными примесями

К. Ю. Самсонов^{1,a}, Д. К. Кабанов^{2,b}, В. Н. Назаров^{3,c}, Е. Г. Екомасов^{2,d}

¹Тюменский государственный университет,
Россия, 625003, г. Тюмень, ул. Володарского, д. 6

²Уфимский университет науки и технологий,
Россия, 450076, г. Уфа, ул. Заки Валиди, д. 32

³Институт физики молекул и кристаллов УФИЦ РАН,
Россия, 450075, г. Уфа, пр. Октября, д. 151

E-mail: ^a k.y.samsonov@gmail.com, ^b danya.kabanov.95@mail.ru, ^c nazarovvn@gmail.com,
^d ekomasoveg@gmail.com

Получено 14.03.2024, после доработки — 28.05.2024.

Принято к публикации 28.05.2024.

В работе с помощью аналитических и численных методов рассматривается задача о структуре и динамике связанных локализованных нелинейных волн в модели синус-Гордона с тремя одинаковыми притягивающими протяженными примесями, которые моделируются пространственной неоднородностью периодического потенциала. Найдены два возможных типа связанных нелинейных локализованных волн — бризерного и солитонного. Проведен анализ влияния параметров системы и начальных условий на структуру локализованных волн, их амплитуду и частоту. Связанные колебания локализованных волн бризерного типа, как и для случая точечных примесей, представляет собой сумму трех гармонических колебаний: синфазного, синфазно-антифазного и антифазного типа. Частотный анализ локализованных на примесях волн, которые были получены в ходе численного эксперимента, выполнялся с помощью дискретного преобразования Фурье. Для анализа локализованных волн бризерного типа применялся численный метод конечных разностей. Для проведения качественно анализа полученных численных результатов задача решалась аналитически для случая малых амплитуд локализованных на примесях колебаний. Показано, что при определенных параметрах примеси (глубина, ширина) можно получить локализованные волны солитонного типа. Найдены области значений параметров системы, в которых существуют локализованные волны определенного типа, а также область перехода от бризерных к солитонным типам колебаний. Были определены значения глубины и ширины примеси, при которых наблюдается переход от бризерного к солитонному типу локализованных колебаний. Были получены и рассмотрены различные сценарии колебаний солитонного типа с отрицательными и положительными значениями амплитуд на всех трех примесях, а также и смешанные случаи. Показано, что в случае расстояния между примесями много меньше единицы отсутствует переходная область, в которой зарождающийся бризер после потери энергии на излучение переходит в солитон. Показано, что рассмотренная модель может быть использована, например, для описания динамики волн намагниченности в мультислойных магнетиках.

Ключевые слова: уравнение синус-Гордона, кинк, бризер, солитон

UDC: 517.957, 537.611, 51-73

Localized nonlinear waves of the sine-Gordon equation in a model with three extended impurities

K. Yu. Samsonov^{1,a}, D. K. Kabanov^{2,b}, V. N. Nazarov^{3,c}, E. G. Ekomasov^{2,d}

¹University of Tyumen,

6 Volodarskogo st., Tyumen, 625003, Russia

²Ufa University of Science and Technology,

32 Zaki Validi st., Ufa, 450076, Russia

³Institute of Molecule and Crystal Physics UFRC RAS,

151 Oktyabrya ave., Ufa, 450075, Russia

E-mail: ^a k.y.samsonov@gmail.com, ^b danya.kabanov.95@mail.ru, ^c nazarovvn@gmail.com,
^d ekomasoveg@gmail.com

Received 14.03.2024, after completion — 28.05.2024.

Accepted for publication 28.05.2024.

In this work, we use analytical and numerical methods to consider the problem of the structure and dynamics of coupled localized nonlinear waves in the sine-Gordon model with three identical attractive extended “impurities”, which are modeled by spatial inhomogeneity of the periodic potential. Two possible types of coupled nonlinear localized waves are found: breather and soliton. The influence of system parameters and initial conditions on the structure, amplitude, and frequency of localized waves was analyzed. Associated oscillations of localized waves of the breather type as in the case of point impurities, are the sum of three harmonic oscillations: in-phase, in-phase-antiphase and antiphase type. Frequency analysis of impurity-localized waves that were obtained during a numerical experiment was performed using discrete Fourier transform. To analyze localized breather-type waves, the numerical finite difference method was used. To carry out a qualitative analysis of the obtained numerical results, the problem was solved analytically for the case of small amplitudes of oscillations localized on impurities. It is shown that, for certain impurity parameters (depth and width), it is possible to obtain localized soliton-type waves. The ranges of values of the system parameters in which localized waves of a certain type exist, as well as the region of transition from breather to soliton types of oscillations, have been found. The values of the depth and width of the impurity at which a transition from the breather to the soliton type of localized oscillations is observed were determined. Various scenarios of soliton-type oscillations with negative and positive amplitude values for all three impurities, as well as mixed cases, were obtained and considered. It is shown that in the case when the distance between impurities much less than one, there is no transition region where which the nascent breather, after losing energy through radiation, transforms into a soliton. It is shown that the considered model can be used, for example, to describe the dynamics of magnetization waves in multilayer magnets.

Keywords: sine-Gordon equation, kink, breather, soliton

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2024, vol. 16, no. 4, pp. 855–868 (Russian).

1. Введение

Для описания современных физических процессов в теории нелинейных колебаний и волн проводятся исследования нелинейных дифференциальных уравнений. Исследование нелинейных волновых процессов позволило сделать ряд фундаментальных открытий [Dauxois, Peyrard, 2010]. Были найдены решения, которые описывают уединенные волны, сохраняющие свою форму и скорость во времени, в том числе при взаимодействии друг с другом, — солитоны. Открытие новых солитонных решений, описание их свойств и поведение интересны как с фундаментальной, так и с прикладной точки зрения. Одним из самых ярких представителей подобных уравнений является уравнение синус-Гордона (УСГ) [Cuevas-Maraver, Kevrekidis, Williams, 2014]. Данное уравнение описывает волновые процессы в самых разнообразных областях естествознания: геологии [Быков, 2000], молекулярной биологии [Chevizovich et al., 2020], физике и космологии [Cuevas-Maraver, Kevrekidis, Williams, 2014]. Например, в физике конденсированного состояния оно применимо при описании динамики волн намагниченности в ферромагнитных материалах [Шамсутдинов и др., 2009], движения дислокаций в кристаллах [Браун, Кившарь, 2008], динамики ансамбля взаимодействующих дислокаций в линейном дефекте электроконвективной структуры жидкого кристалла [Делев и др., 2019]. УСГ, будучи нелинейным уравнением в частных производных, является полностью интегрируемым. Известны точные решения УСГ в виде кинка, бризера, солитона и более сложных мультисолитонных решений [Cuevas-Maraver, Kevrekidis, Williams, 2014; Kalbermann, 2004; Ferreira, Piette, Zakrzewski, 2008]. Исследование влияния различных возмущений и модификаций на решения УСГ является актуальной задачей современной теории нелинейных волн. Для использования в различных приложениях часто в уравнение синус-Гордона добавляют дополнительные слагаемые, учитывающие наличие внешних сил, диссипации в системе, неоднородности параметров среды [Cuevas-Maraver, Kevrekidis, Williams, 2014; Браун, Кившарь, 2008; Dorey et al., 2021; Fabian, Kohl, Biswas, 2009]. Получаемое в результате такой модификации уравнение синус-Гордона уже не имеет точных аналитических решений. Часто для приближенного решения таких задач применяется теория возмущений для солитонов или метод коллективных координат [Cuevas-Maraver, Kevrekidis, Williams, 2014; Saadatmand et al., 2014]. Например, исследована динамика кинков, солитонов и бризеров под действием различного вида внешней силы (являющейся функцией от времени и пространственных переменных) [Gonzalez et al., 2017]. Еще одним популярным направлением исследований является изучение влияния пространственной модуляции периодического потенциала (или примеси) на динамику кинков, бризеров и солитонов УСГ [Baron, Zakrzewski, 2016]. Одними из часто рассматриваемых видов примеси являются точечная примесь [Браун, Кившарь, 2008] и протяженная примесь прямоугольного вида [Екомасов и др., 2023]. Подобные задачи имеют и большой практический интерес. Например, модель синус-Гордона с примесями применима для описания динамики магнитных неоднородностей для случая многослойного ферромагнетика [Екомасов, Murtazin, Nazarov, 2015]. Показано, что кинк-примесное взаимодействие может приводить к генерации локализованных на притягивающих примесях волн (или примесной моды) [Екомасов, Gumerov, Murtazin, 2016; Gumerov et al., 2019]. Также притягивающая примесь может приводить и к возбуждению мультисолитонов УСГ. Случай двух примесей [Екомасов et al., 2018; Екомасов, Гумеров, 2013] дает большое разнообразие новых мультисолитонных решений и динамических эффектов по сравнению со случаем одной примеси. Можно ожидать еще большего разнообразия решений и эффектов при наличии трех и более примесей в системе. Работы [Екомасов и др., 2023; Екомасов и др., 2022], в которых исследованы динамика кинков и связанные нелинейные волны бризерного типа, локализованные на трех одинаковых точечных примесях, подтвердили эти ожидания. Показано, что связанные колебания локализованных на трех точечных примесях волн бризерного типа можно описать системой дифференциальных уравнений аналогичной системе, полученной для модели связанных трех гармонических осцилляторов. А колебания таких

волн представляют собой сумму трех типов гармонических колебаний. В данной работе исследуется интересный с практической точки зрения случай трех протяженных притягивающих примесей, являющихся генераторами для возбуждения связанных локализованных нелинейных волн.

2. Локализованные нелинейные волны бризерного типа

Рассмотрим вещественное скалярное поле $u(x, t)$, динамика которого описывается уравнением синус-Гордона в модели с примесями следующего вида:

$$u_{tt} - u_{xx} + K(x) \sin u = 0, \quad (1)$$

где $K(x)$ — функция, описывающая пространственную неоднородность периодического потенциала. Ранее был рассмотрен случай трех одинаковых точечных примесей [Екомасов и др., 2023; Екомасов и др., 2022]. Для описания связанных колебаний трех нелинейных волн бризерного типа, локализованных на трех одинаковых точечных примесях [Екомасов и др., 2022], была получена система дифференциальных уравнений для трех гармонических осцилляторов со связью упругого типа. Решения этой системы уравнений для частот примесных мод хорошо аппроксимируют результаты прямого численного моделирования нелинейной системы. Показано, что связанные колебания нелинейных волн бризерного типа, расположенных на одинаковом расстоянии друг от друга, представляют собой сумму трех гармонических колебаний: синфазного, синфазно-антифазного и антифазного типа. Синфазным типом называется случай, когда все три локализованные волны колеблются в одной фазе. Случай, когда первая и третья примесные моды колеблются в противофазе, а вторая не возбуждается между ними, называется антифазным типом. Смешанным типом колебаний (или синфазно-антифазным) называется случай, когда две примесные моды колеблются в одинаковой фазе, а третья — в противоположной им фазе. Отметим, что для случая трех точечных примесей не удалось получить локализованные волны солитонного типа. Для прикладных задач, использующих уравнение (1), реалистичней рассмотреть случай протяженных примесей [Екомасов и др., 2023; Lizunova et al., 2022]. В общем случае такую задачу можно решить только с помощью численных методов.

На сегодняшний день разработано достаточно большое количество методов численного решения подобных уравнений [Saadatmand et al., 2014; Ekomasov, Gumerov, Kudryavtsev, 2017; Dodd et al., 1982]. Воспользуемся надежным методом конечных разностей, часто используемым при решении модифицированного уравнения синус-Гордона [Ekomasov, Gumerov, Murtazin, 2016; Ekomasov, Gumerov, Kudryavtsev, 2017]. Выберем трехслойную явную схему решения с аппроксимацией производных на пятиточечном шаблоне типа «крест». Это численная схема второго порядка аппроксимации по Δx и τ , где Δx — шаг по координате, τ — шаг по времени. Она обладает условной устойчивостью $\frac{\tau}{\Delta x} \ll \frac{1}{2}$. В нашем случае схема является одношаговой, использует сравнительно небольшое количество обращений к памяти и обладает потенциалом для оптимизации вычислительного алгоритма. Частотный анализ колебаний локализованных волн, которые рассчитываются численно, выполняется с помощью дискретного преобразования Фурье. Для его расчета используется алгоритм быстрого преобразования Фурье (БПФ). Этот алгоритм обладает хорошей производительностью, однако наиболее оптимизированные реализации БПФ накладывают определенные ограничения на исходный ряд. Для подготовки данных исходная дискретная зависимость интерполируется кубическим сплайном с естественными граничными условиями, из которого строится новая дискретная зависимость на равномерной сетке с увеличенным количеством точек аппроксимации. Из новой дискретной зависимости рассчитывается частотный спектр с помощью БПФ. Для повышения точности определения частоты точки максимумов частотного спектра уточняются с помощью интерполяции сплайном Акимы.

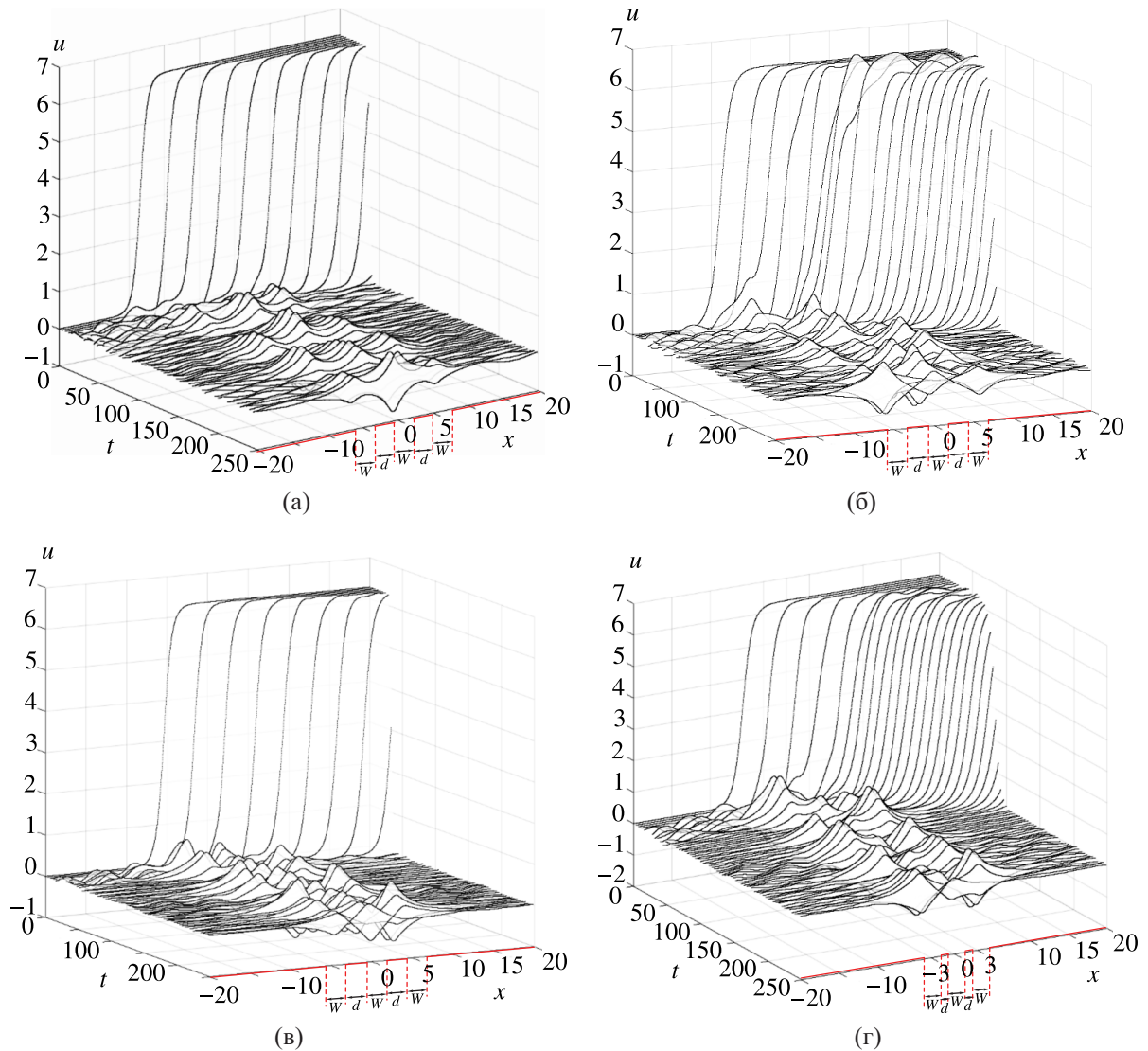


Рис. 1. Возбуждение и эволюция нелинейных волн бризерного типа в области протяженных примесей в виде зависимости u от координаты x и времени t для различных параметров d и v_0 при $\Delta K = 1,2$, $W = 1$: а) $d = 4$, $v_0 = 0,785$; б) $d = 4$, $v_0 = 0,585$; в) $d = 2$, $v_0 = 0,8$; г) $d = 2$, $v_0 = 0,653$. Красными пунктирными линиями обозначены три области местоположения примесей шириной W

Рассмотрим далее случай трех одинаковых протяженных примесей, используя функцию $K(x)$ прямоугольного вида:

$$K(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } \frac{W}{2} < |x| < \frac{W}{2} + d, \quad |x| > \frac{3W}{2} + d, \\ 1 - \Delta K, & \text{если } |x| < \frac{W}{2}, \quad \frac{W}{2} + d \leq |x| \leq \frac{3W}{2} + d, \end{cases} \quad (2)$$

где ΔK , W — постоянные величины, d — параметр, описывающий расстояние между примесями. Если параметр $\Delta K > 0$, примесь является эффективной потенциальной ямой для кинка, а при $\Delta K < 0$ — потенциальным барьером. Численный эксперимент проведен следующим образом. В начальный момент времени на некотором расстоянии от примесей имеется кинк — $u(x, t) = 4 \arctan \left(\exp \left[\frac{x - v_0 t}{\sqrt{1 - v_0^2}} \right] \right)$, движущийся с постоянной скоростью v_0 . Граничные условия в на-

чальный момент времени следующие: $u(x = 0) = 0$, $u(x = \infty) = 2\pi$. После прохождения кинком области трех примесей исследуются структура и динамика локализованных волн, возбуждаемых на примесях.

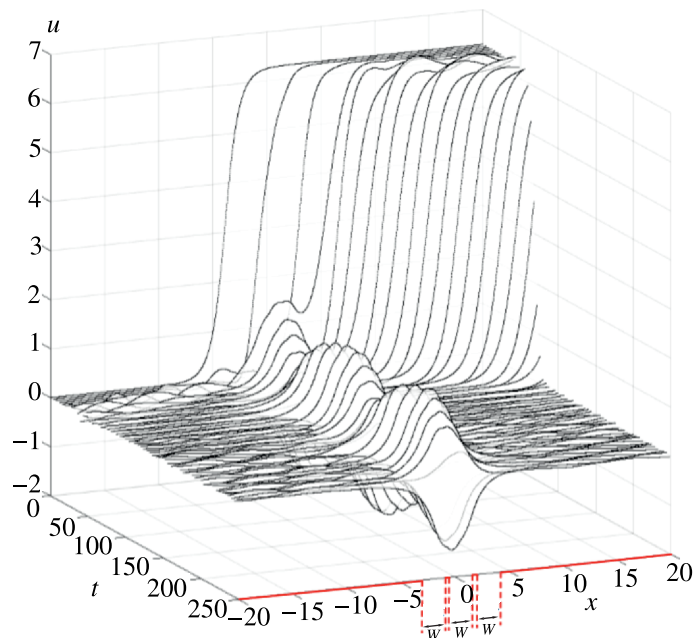


Рис. 2. Возбуждение и эволюция нелинейных волн бризерного типа в области протяженных примесей в виде зависимости u от координаты x и времени t при $\Delta K = 1,2$, $W = 1$ для $d = 0,25$, $v_0 = 0,58$. Красными пунктирными линиями обозначены три области местоположения примесей шириной W

Рассмотрим случай притягивающей примеси, так как именно в этом случае происходит генерация локализованных волн [Kivshar et al., 1998]. При значениях $\Delta K < 1$ в области примесей возбуждаются нелинейные волны бризерного типа (см. рис. 1 и 2). Амплитуда возбуждаемой на примеси волны зависит от начальной скорости кинка. Как и для случая точечных примесей, можно построить зависимость амплитуд $a_1(t)$, $a_2(t)$ и $a_3(t)$ трех локализованных на примесях волн от времени и провести их частотный фурье-анализ (рис. 3). На рис. 1 видно, что, так же как и для случая трех точечных примесей, можно получить случаи синфазных (рис. 1, *a*) и антифазных (рис. 1, *b*, *в*) типов колебаний. Так как локализованные на примесях волны возбуждаются не одновременно, а через промежуток времени Δt , начальная скорость кинка v_0 способна влиять и на начальную разность фаз их колебаний. При изменении v_0 численно не удается получить произвольную начальную разность фаз примесных волн. Из-за этого не всегда удается возбудить синфазные колебания волн. Из анализа рис. 1–3 можно утверждать, что в зависимости от d меняется тип связи между возбуждаемыми локализованными нелинейными волнами. При уменьшении расстояния между примесями разность фаз локализованных волн сокращается до нуля, и через определенный промежуток времени они начинают колебаться синфазно. Антифазные же колебания становятся неустойчивыми, и возбудить такой режим при достаточно малом d не удастся. При дальнейшем уменьшении расстояния между примесями ($d \ll 1$) можно наблюдать случай перехода трех локализованных на примесях волн в одну (рис. 2, рис. 3, *a*). Из-за взаимодействия самих волн в случае биений (рис. 1, *г*; рис. 3, *б*, *в*) наблюдается зависимость амплитуды от времени. Фурье-анализ показывает, что в спектре таких колебаний могут присутствовать как две, так и три основные частоты (см. рис. 3, *б*, *в*). Случаи биений являются наиболее часто встречающимся типом получаемых при численном счете колебаний, тогда как сценарий синфазных или антифазных колебаний встречается только в частных случаях. На рис. 4 (кривые 1, 2 и 3)

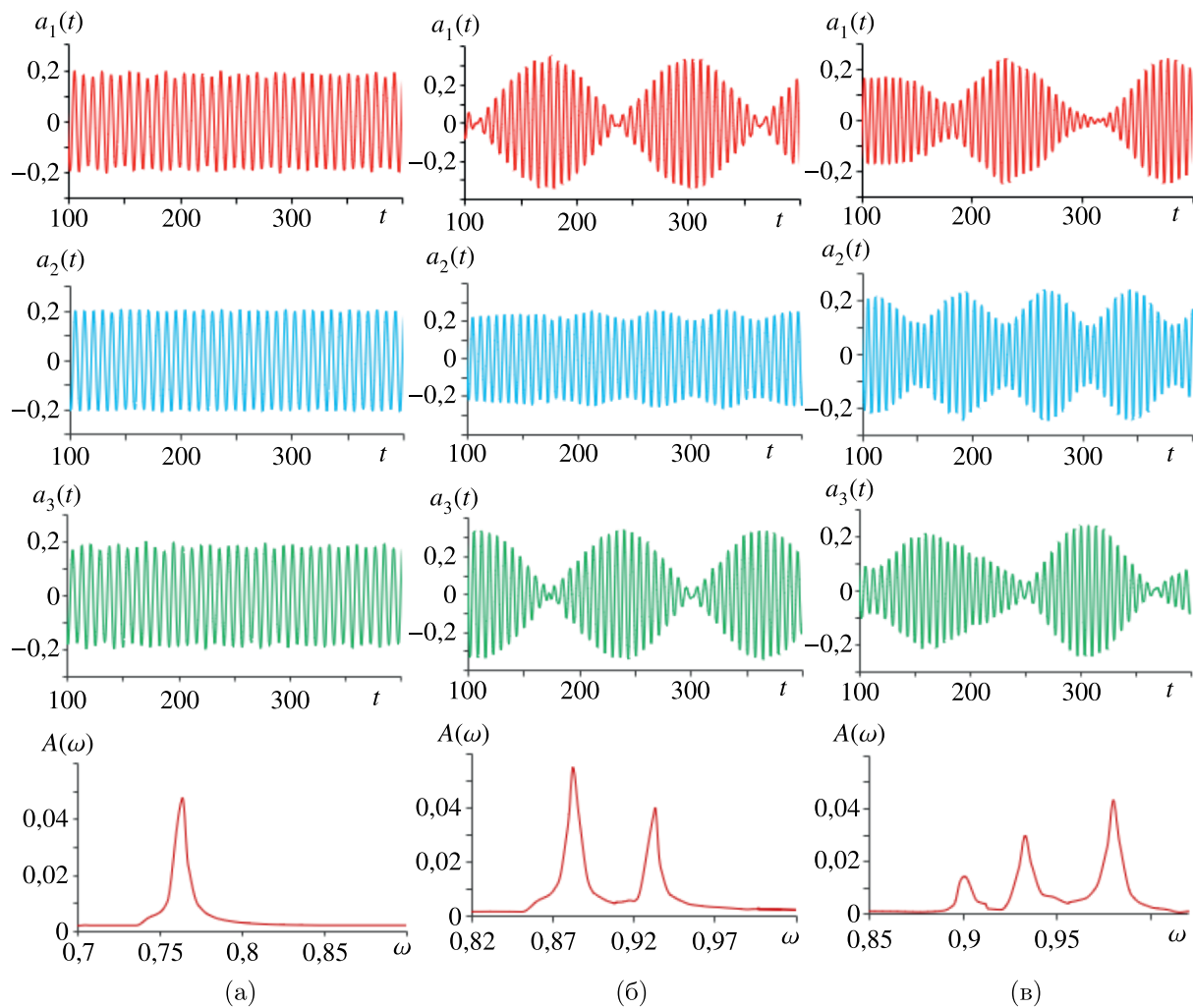


Рис. 3. Зависимость амплитуд локализованных колебаний на первой примеси $a_1(t)$, второй — $a_2(t)$ и третьей — $a_3(t)$ от времени t и соответствующее фурье-разложение $A(\omega)$ для $\Delta K = 0,8$, $W = 1$ при различных расстояниях между примесями: а) $d = 0,25$, $v_0 = 0,45$; б) $d = 3$, $v_0 = 0,62$; в) $d = 4$, $v_0 = 0,52$

представлена зависимость найденных численно основных трех частот колебаний от расстояния между примесями d . Кривые 2 и 3 не начинаются с нуля, так как при малых d устойчивостью обладают лишь синфазные колебания.

Ранее [Ekomasov, Gumerov, Murtazin, 2016] было показано, что для одиночной и двойной протяженной примеси аналитическое решение задачи можно получить для случая малых амплитуд колебаний. В рассмотренных случаях УСГ сводилось к уравнению Шрёдингера, решение которого качественно совпадало с результатами численного моделирования. Рассмотрим случай малых амплитуд, т. е. $u \ll 1$. Тогда можем заменить $\sin u \rightarrow u$ и из уравнения (1) получим

$$u_{tt} - u_{xx} + K(x)u = 0. \quad (3)$$

Будем искать решение (3) в виде

$$u = \psi e^{-i\omega t}, \quad (4)$$

где $\psi = \psi(x)$, ω — частота колебаний. Подставив (4) в (3), получим следующее уравнение:

$$\psi_{xx} + (\omega^2 - K(x))\psi = 0. \quad (5)$$

Это уравнение типа Шрёдингера. Для случая $K(x)$ вида (2) в однородной области пространства уравнение (5) имеет вид

$$\psi_{xx} + (\omega^2 - 1)\psi = 0. \quad (6)$$

Соответствующее ему характеристическое уравнение запишется в виде

$$l^2 + \omega^2 - 1 = 0, \quad l = \pm \sqrt{1 - \omega^2}. \quad (7)$$

В области примеси уравнение (5) имеет вид

$$\psi_{xx} + (\omega^2 - 1 + \Delta K)\psi = 0. \quad (8)$$

Характеристическое уравнение для него запишется в виде

$$n_0^2 + \omega^2 - 1 + \Delta K = 0, \quad n_0 = \pm i \sqrt{\omega^2 + \Delta K - 1}, \quad n = \sqrt{\omega^2 + \Delta K - 1}. \quad (9)$$

При этом полагаем, что $1 - \omega^2 > 0$ и $\omega^2 + \Delta K - 1 > 0$, то есть $\Delta K > 1 - \omega^2 > 0$. Разобьем исследуемое пространство на семь областей, где для области вне примеси (области определения x , где $K(x) = 1$ из формулы (2)) решение ищем в виде экспоненциальных функций, а для области примеси (области определения x , где $K(x) = 1 - \Delta K$ из формулы (2)) решение ищем в виде тригонометрических функций:

$$\begin{aligned} \psi_1(x) &= A_1 e^{-lx} + B_1 e^{lx}, \\ \psi_2(x) &= A_2 \sin nx + B_2 \cos nx, \\ \psi_3(x) &= A_3 e^{-lx} + B_3 e^{lx}, \\ \psi_4(x) &= A_4 \sin nx + B_4 \cos nx, \\ \psi_5(x) &= A_5 e^{-lx} + B_5 e^{lx}, \\ \psi_6(x) &= A_6 \sin nx + B_6 \cos nx, \\ \psi_7(x) &= A_7 e^{-lx} + B_7 e^{lx}. \end{aligned} \quad (10)$$

Решение (10) содержит в себе ряд интересных частных случаев. Так, например, если $A_2 = A_4 = A_6 = 0$, то локализованные нелинейные волны колеблются синфазно или, в случае $A_2 = B_4 = A_6 = 0$, колебания имеют противофазную природу. Также можно получить комбинацию смешанных колебаний $A_2 = A_4 = B_6 = 0$.

Уравнения для вычисления дисперсионного соотношения получим, используя равенства функций $\psi = \psi(x)$ и производных от них по координате на границах областей, на бесконечности функции стремятся к нулю:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} (A_1 e^{lx}) &= 0, \\ A_1 + B_1 &= B_2, \\ -lA_1 + lB_1 &= nA_2, \\ A_2 \sin nW + B_2 \cos nW &= A_3 e^{-lW} + B_3 e^{lW}, \\ nA_2 \cos nW - nB_2 \sin nW &= -lA_3 e^{-lW} + lB_3 e^{lW}, \\ A_3 e^{-l(W+d)} + B_3 e^{-l(W+d)} &= A_4 \sin n(W+d) + B_4 \cos n(W+d), \\ -lA_3 e^{-l(W+d)} + lB_3 e^{l(W+d)} &= nA_4 \cos n(W+d) - nB_4 \sin n(W+d), \\ A_4 \sin n(2W+d) + B_4 \cos n(2W+d) &= A_5 e^{-l(2W+d)} + B_5 e^{l(2W+d)}, \\ nA_4 \cos n(2W+d) - nB_4 \sin n(2W+d) &= -lA_5 e^{-l(2W+d)} + lB_5 e^{l(2W+d)}, \\ A_5 e^{-l(2W+2d)} + B_5 e^{l(2W+2d)} &= A_6 \sin n(2W+2d) + B_6 \cos n(2W+2d), \\ -lA_5 e^{-l(2W+2d)} + lB_5 e^{l(2W+2d)} &= nA_6 \cos n(2W+2d) - nB_6 \sin n(2W+2d), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_6 \sin n(3W + 2d) + B_6 \cos n(3W + 2d) &= A_7 e^{-l(3W+2d)} + B_7 e^{l(3W+2d)}, \\
 nA_6 \cos n(3W + 2d) - nB_6 \sin n(3W + 2d) &= -lA_7 e^{-l(3W+2d)} + lB_7 e^{l(3W+2d)}, \\
 \lim_{x \rightarrow \infty} (B_7 e^{lx}) &= 0.
 \end{aligned} \tag{11}$$

Проведя соответствующие вычисления, получим дисперсионное соотношение вида

$$\begin{aligned}
 (2 \ln \operatorname{ctg} nW + l^2 - n^2)^3 &= 2e^{-2ld} (2 \ln \operatorname{ctg} nW + l^2 - n^2) (l^2 + n^2)^2 + \\
 &+ (l^2 + n^2)^2 (2 \ln \operatorname{ctg} nW - l^2 + n^2) e^{-4ld}.
 \end{aligned} \tag{12}$$

При больших расстояниях между примесями $d \rightarrow \infty$ полученное соотношение (12) преобразуется к виду

$$2 \ln \operatorname{ctg} nW + l^2 - n^2 = 0. \tag{13}$$

Выражение (13) является дисперсионным соотношением, полученным ранее для случая одной примеси. В случае $d \rightarrow 0$ выражение (12) преобразуется к виду

$$2 \ln \operatorname{ctg}^3 nW - 6 \ln \operatorname{ctg} nW + 3(l^2 - n^2) \operatorname{ctg}^2 nW - (l^2 - n^2) = 0, \tag{14}$$

который совпадает с дисперсионным соотношением для одной примеси утроенной ширины:

$$2 \ln \operatorname{ctg} 3nW + l^2 - n^2 = 0. \tag{15}$$

Подставляя в дисперсионное соотношение (12) значения $l = \sqrt{1 - \omega^2}$ и $n = \sqrt{\omega^2 + \Delta K - 1}$, получим

$$\begin{aligned}
 &(2 \sqrt{1 - \omega^2} \sqrt{\omega^2 + \Delta K - 1} \operatorname{ctg} \sqrt{\omega^2 + \Delta K - 1} W + 2 - 2\omega^2 - \Delta K)^3 = \\
 &= \Delta K^2 \left[2 \left(2 \sqrt{1 - \omega^2} \sqrt{\omega^2 + \Delta K - 1} \operatorname{ctg} \sqrt{\omega^2 + \Delta K - 1} W + 2 - 2\omega^2 - \Delta K \right) + \right. \\
 &\left. + \left(2 \sqrt{1 - \omega^2} \sqrt{\omega^2 + \Delta K - 1} \operatorname{ctg} \sqrt{\omega^2 + \Delta K - 1} W - 2 + 2\omega^2 + \Delta K \right) e^{-2 \sqrt{1 - \omega^2} d} \right] e^{-2 \sqrt{1 - \omega^2} d}.
 \end{aligned} \tag{16}$$

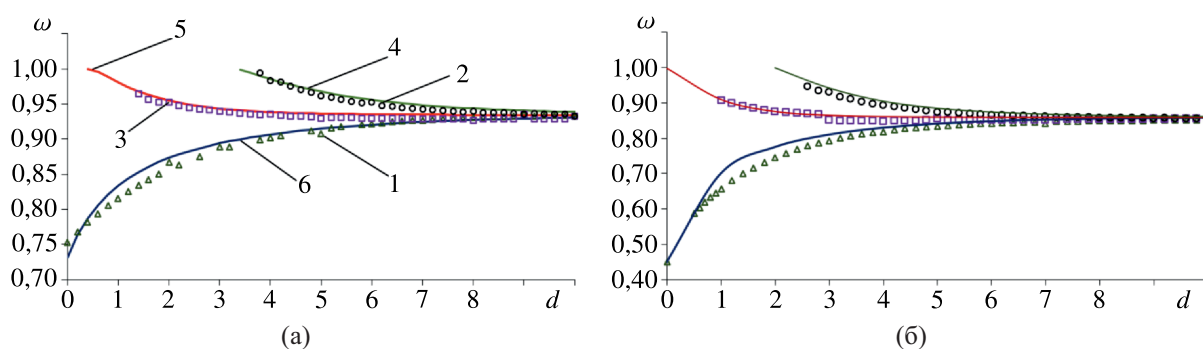


Рис. 4. Зависимость частот синфазных, антифазных и синфазно-антифазных колебаний от параметра d при $W = 1$: а) $\Delta K = 0,2$; б) $\Delta K = 1,2$. Кривые 1, 2 и 3 — численные результаты. Кривые 4, 5 и 6 — аналитические результаты

С помощью (16) построена зависимость $\omega(d)$, представленная на рис. 4 сплошными линиями. Из рисунка видно, что полученное дисперсионное выражение показывает хорошее количественное совпадение с численно рассчитанными значениями частот (представленными точечными кривыми).

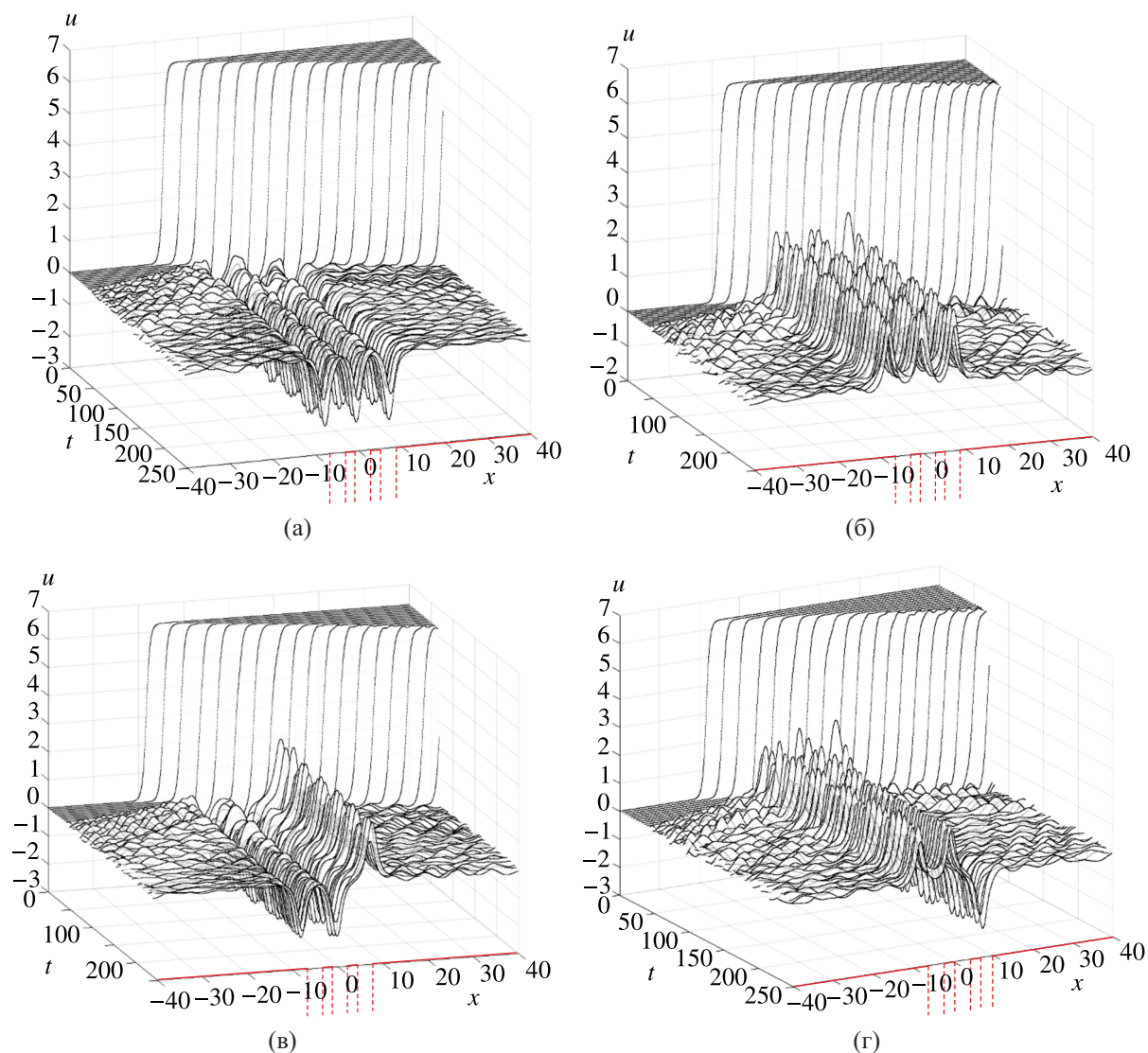


Рис. 5. Генерация локализованных волн солитонного типа на трех примесях в виде зависимости u от координаты x и времени t для $W = 1,7$, $K = -1,4$, $d = 6$: а) при $v_0 = 0,890$; б) при $v_0 = 0,84536$; в) при $v_0 = 0,860$; г) при $v_0 = 0,84236$. Красными пунктирными линиями обозначены три области местоположения примесей шириной W

3. Локализованные нелинейные волны солитонного типа

Для случаев одной и двух примесей было показано [Ekomasov, Gumerov, Murtazin, 2016], что при $\Delta K > 1$ и при достаточно большом W могут возникнуть решения солитонного типа, локализованные на примесях. Локализованные нелинейные волны солитонного типа найдены и для случая трех протяженных примесей. На рис. 5 продемонстрированы возможности управления структурой локализованных волн солитонного типа с помощью изменения начальной скорости кинка. Например, в результате численного эксперимента наблюдался случай, когда амплитуда связанных нелинейных волн солитонного типа отрицательная (рис. 5, а) или положительная (рис. 5, б). Наблюдались и случаи разнонаправленных амплитуд локализованных волн на примесях, например две примесные волны с положительной амплитудой и одна с отрицательной (рис. 5, в) или наоборот (рис. 5, г). Как и в случае с волнами бризерного типа, можно исследовать

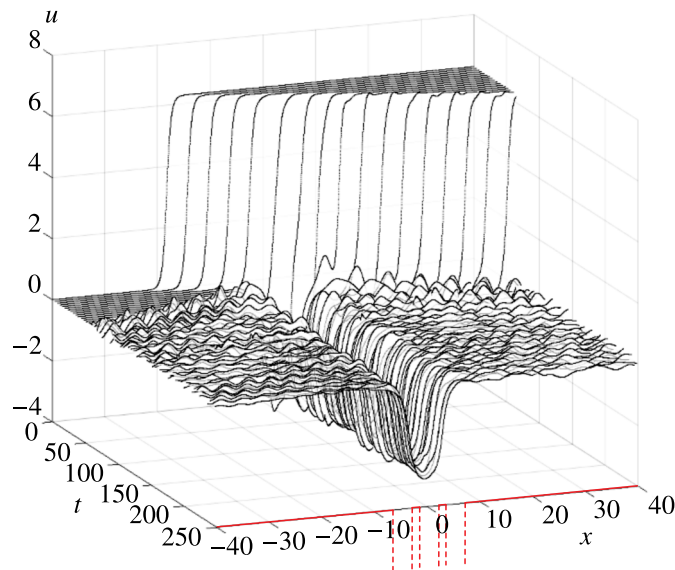


Рис. 6. Возбуждение и эволюция локализованных волн солитонного типа на трех примесях в виде зависимости u от координаты x и времени t при $K = -1,4$, $W = 1,7$, $d = 1$. Красными пунктирными линиями обозначены три области местоположения примесей шириной W

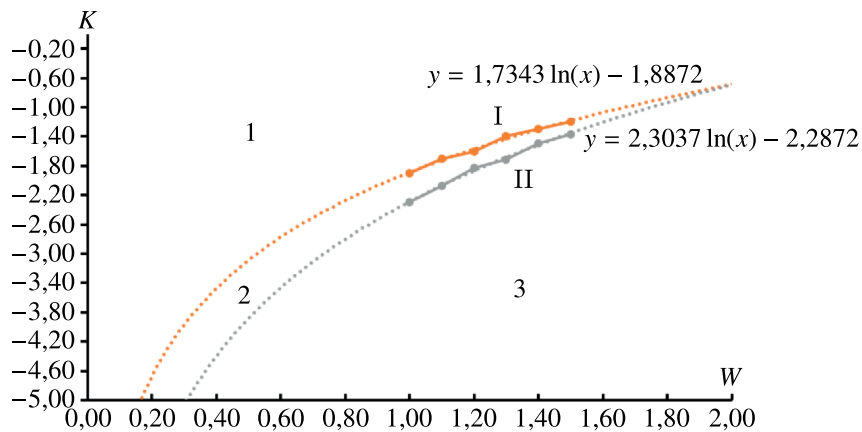


Рис. 7. Зависимость функции $K(W)$, определяющая области существования разных типов локализованных волн при $d = 6$, $v_0 = 0,9$: 1 — область возбуждения постоянных колебаний бризерного типа, 2 — область перехода колебаний из бризерного типа в солитонный, 3 — область возбуждения постоянных колебаний солитонного типа

довать генерацию локализованных волн при малых расстояниях между примесями (рис. 6). Из рис. 6 видно, что в этом случае можно также наблюдать переход трех локализованных волн в одну.

Для каждого значения расстояния между примесями возбуждение волн солитонного типа возможно лишь при достижении определенных значений параметров W и K . На графике с зависимостью $K(W)$ для случая определенного значения $d > 1$ (см. рис. 7) можно выделить области параметров, в которых наблюдаются локализованные волны бризерного и солитонного типа. На этом графике существует и особая переходная зона, в которой наблюдается вначале зарождение нелинейных волн бризерного типа, переходящих через некоторый промежуток времени в локализованные волны солитонного типа. Связано это с потерей энергии примесных мод, которая идет на излучение. Из рис. 7 также видно, что ширина такой переходной зоны стремится к нулю

с увеличением параметра W . Заметим, что аналогичную фазовую картину наблюдали ранее [Екомасов и др., 2022] для случая одной и двух протяженных примесей. Для случая, когда расстояние между примесями $d < 1$, на подобном графике отсутствует переходная зона (см. рис. 8).

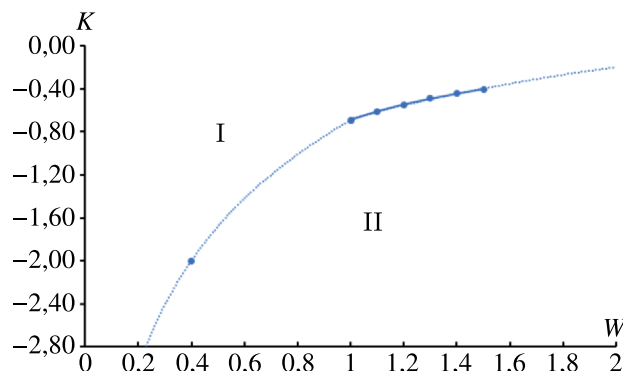


Рис. 8. Зависимость функции $K(W)$, определяющая области существования разных типов локализованных волн при $d = 0,5$, $v_0 = 0,9$. Жирные линии с точками являются результатами, полученными в ходе эксперимента, а пунктирные линии являются логарифмической аппроксимацией данных полученных в ходе численных решений

4. Заключение

С использованием численных методов для случая трех одинаковых протяженных притягивающих примесей найдены возможные структуры связанных колебаний локализованных волн бризерного типа при различных значениях начальной скорости кинка и параметров примесей. Построены графики зависимости амплитуд колебаний локализованных волн бризерного типа от времени и зависимость частот колебаний от расстояния между примесями. В случае возбуждения одной гармоники наблюдаемые колебания гармонические. При возбуждении двух гармоник возникают биения, колебания похожи на колебания в случае двух одинаковых примесей. При возбуждении трех гармоник форма колебаний сильно усложняется. Для случая локализованных волн бризерного типа малой амплитуды найдено дисперсионное уравнение и определены частоты синфазных, антифазных и синфазно-антифазных колебаний. Полученные зависимости качественно согласуются с результатами численных расчетов. Показано, что, увеличивая площадь потенциальной ямы, создаваемой протяженной притягивающей примесью, можно получить связанные локализованные волны солитонного типа. Найдены возможные структуры связанных колебаний локализованных волн солитонного типа. Продемонстрирована возможность управления структурой локализованных волн солитонного типа с помощью изменения начальной скорости кинка. Найдены области значений параметров системы K и W , при которых существуют локализованные волны определенного типа. Для случая, когда расстояния между примесями много меньше единицы, на подобном графике отсутствует переходная область, в которой зарождающийся бризер после потери энергии на излучение переходит в солитон.

Список литературы (References)

- Браун О. М., Кившарь Ю. С. Модель Френкеля – Конторовой: концепции, методы, приложения. — М.: Физматлит, 2008. — 519 с.
 Braun O. M., Kivshar Yu. S. The Frenkel–Kontorova model: concepts, methods, and applications. — Berlin: Springer, 2004. (Russ. Braun O. M., Kivshar Yu. S. Model Frenkelya – Kontorovoy: kontseptsii, metody, prilozheniya. — Moscow: Fizmatlit, 2008.)

- Быков В. Г. Нелинейные волновые процессы в геологических средах. — Владивосток: Дальнаука, 2000. — 190 с.
Bykov V. G. Nelinejnyye volnovye processy v geologicheskikh sredah [Nonlinear wave processes in geological media]. — Vladivostok: Dal'nauka, 2000. — 190 p. (in Russian).
- Делев В. А., Назаров В. Н., Скалдин О. А., Батыршин Э. С., Екомасов Е. Г. Сложная динамика каскада кинк-антикинк-взаимодействий в линейном дефекте электроконвективной структуры нематика // Письма в ЖЭТФ. — 2019. — Т. 110, № 9. — С. 607–613.
Delev V. A., Nazarov V. N., Skaldin O. A., Batyrshin E. S., Ekomasov E. G. Complex dynamics of the cascade of kink-antikink interactions in a linear defect of the electroconvective structure of a nematic liquid crystal // *Jetp Lett.* — 2019. — Vol. 110. — P. 607–612. (Original Russian paper: *Delev V. A., Nazarov V. N., Skaldin O. A., Batyrshin E. S., Ekomasov E. G. Slozhnaya dinamika kaskada kink-antikinkovykh vzaimodejstvij v linejnom defekte elektrokonvektivnoj struktury nematika* // *Pis'ma v ZhETF.* — 2019. — Vol. 110, No. 9. — P. 607–613.)
- Екомасов Е. Г., Гумеров А. М. Коллективное влияние примесей на динамику кинков уравнения синус-Гордона // Компьютерные исследования и моделирование. — 2013. — Т. 5, № 3. — С. 403–412.
Ekomasov E. G., Gumerov A. M. Kollektivnoye vliyaniye primesey na dinamiku kinkov uravneniya sinus-Gordona [Collective influence of impurities on the dynamics of kinks of the sine-Gordon equation] // *Computer Research and Modeling.* — 2013. — Vol. 5, No. 3. — P. 403–412 (in Russian).
- Екомасов Е. Г., Кудрявцев Р. В., Самсонов К. Ю., Назаров В. Н., Кабанов Д. К. Динамика кинка уравнения синус-Гордона в модели с тремя одинаковыми притягивающими или отталкивающими примесями // Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. — 2023. — Т. 31, № 6. — С. 693–709.
Ekomasov E. G., Kudryavtsev R. V., Samsonov K. Yu., Nazarov V. N., Kabanov D. K. Dinamika kinka uravneniya sinus-Gordona v modeli s trema odinakovymi prityagivayushchimi ili ottalkivayushchimi primesyami [Dynamics of the kink of the sine-Gordon equation in a model with three identical attractive or repulsive impurities] // *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Prikladnaya nelineynaya dinamika.* — 2023. — Vol. 31, No. 6. — P. 693–709 (in Russian).
- Екомасов Е. Г., Самсонов К. Ю., Гумеров А. М., Кудрявцев Р. В. Структура и динамика локализованных нелинейных волн уравнения синус-Гордона в модели с одинаковыми притягивающими примесями // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. — 2022. — Т. 30, № 6. — С. 749–765.
Ekomasov E. G., Gumerov A. M. Struktura i dinamika lokalizovannykh nelineynykh voln uravneniya sinus-Gordona v modeli s odinakovymi prityagivayushchimi primesyami [Structure and dynamics of localized nonlinear waves of the sine-Gordon equation in a model with identical attractive impurities] // *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Prikladnaya nelineynaya dinamika.* — 2022. — Vol. 30, No. 6. — P. 749–765 (in Russian).
- Шамсутдинов М. А., Ломакина И. Ю., Назаров В. Н., Харисов А. Т., Шамсутдинов Д. М. Ферро- и антиферромагнитодинамика. Нелинейные колебания, волны и солитоны. — М.: Наука, 2009. — 456 с.
Shamsutdinov M. A., Lomakina I. Yu., Nazarov V. N., Kharisov A. T., Shamsutdinov D. M. Ferro- i antiferromagnitodnamika. Nelineynyye kolebaniya. Volny i solitony [Ferro- and antiferromagnetodynamics. Nonlinear oscillations, waves and solitons]. — Moscow: Nauka, 2009 (in Russian).
- Baron H. E., Zakrzewski W. J. Collective coordinate approximation to the scattering of solitons in modified NLS and sine-Gordon models // *Journal of High Energy Physics.* — 2016. — Vol. 2016, No. 6. — P. 185.
- Chevizovich D., Michieletto D., Mvogo A., Zakiryanov F., Zdravkovic S. A review on nonlinear DNA physics // *R. Soc. Open Sci.* — 2020. — Vol. 7, No. 11. — P. 200774.
- Cuevas-Maraver J., Kevrekidis P. G., Williams F. (eds.) The sine Gordon model and its applications: from pendula and Josephson junctions to gravity and high-energy physics. — Springer, 2014. — 263 p.
- Dauxois T., Peyrard M. Physics of solitons. — New York: Cambridge University Press, 2010. — 436 p.
- Dodd R. K., Eilbeck J. C., Gibbon J. D., Morris H. C. Solitons and nonlinear wave equations. — London: Academic Press, 1982. — 630 p.
- Dorey P., Gorina A., Perapechka I., Romanczukiewicz T., Shnir Y. Resonance structures in kinkantikink collisions in a deformed sine-Gordon model // *Journal of High Energy Physics.* — 2021. — Vol. 2021, No. 9. — P. 145.

- Ekomasov E. G., Gumerov A. M., Kudryavtsev R. V.* Resonance dynamics of kinks in the sine-Gordon model with impurity, external force and damping // *Journal of Computational and Applied Mathematics*. — 2017. — Vol. 312. — P. 198–208.
- Ekomasov E. G., Gumerov A. M., Kudryavtsev R. V., Dmitriev S. V., Nazarov V. N.* Multisoliton dynamics in the sine-Gordon model with two point impurities // *Brazilian Journal of Physics*. — 2018. — Vol. 48, No. 6. — P. 576–584.
- Ekomasov E. G., Gumerov A. M., Murtazin R. R.* Interaction of sine-Gordon solitons in the model with attracting impurities // *Mathematical Methods in the Applied Sciences*. — 2016. — Vol. 40, No. 17. — P. 6178–6186.
- Ekomasov E. G., Murtazin R. R., Nazarov V. N.* Excitation of magnetic inhomogeneities in three layer ferromagnetic structure with different parameters of the magnetic anisotropy and exchange // *J. Magn. Magn. Mater.* — 2015. — Vol. 385. — P. 217–221.
- Fabian A. L., Kohl R., Biswas A.* Perturbation of topological solitons due to sine-Gordon equation and its type // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. — 2009. — Vol. 14, No. 4. — P. 1227–1244.
- Ferreira L. A., Piette B., Zakrzewski W. J.* Wobbles and other kink-breather solutions of the sine-Gordon model // *Phys. Rev. E*. — 2008. — Vol. 77, No. 3. — P. 036613.
- Gonzalez J. A., Bellorin A., Garcia-Nustes M. A., Guerrero L. E., Jimenez S., Vazquez L.* Arbitrarily large numbers of kink internal modes in inhomogeneous sine-Gordon equations // *Phys. Lett. A*. — 2017. — Vol. 381, No. 24. — P. 1995–1998.
- Gumerov A. M., Ekomasov E. G., Kudryavtsev R. V., Fakhretdinov M. I.* Excitation of large amplitude localized nonlinear waves by the interaction of kinks of the sine-Gordon equation with attracting impurity // *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*. — 2019. — Vol. 15, No. 1. — P. 21–34.
- Kalbermann G.* The sine-Gordon wobble // *J. Phys. A: Math. Gen.* — 2004. — Vol. 37, No. 48. — P. 11603–11612.
- Kivshar Yu. S., Pelinovsky D. E., Cretegny T., Peyrard M.* Internal modes of solitary waves // *Phys. Rev. Lett.* — 1998. — Vol. 80, No. 23. — P. 5032–5035.
- Lizunova M. A., Kager J., Lange S., Wezel J.* Kinks and realistic impurity models in φ^4 -theory // *International Journal of Modern Physics B*. — 2022. — Vol. 36, No. 5. — P. 2250042.
- Saadatmand D., Dmitriev S. V., Borisov D. I., Kevrekidis P. G.* Interaction of sine-Gordon kinks and breathers with a parity-time-symmetric defect // *Phys. Rev. E*. — 2014. — Vol. 90, No. 5. — P. 052902.